Лекция 1

РЯДЫ ФУРЬЕ.

Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик

Метри́ческим простра́нством называется множество, в котором определено расстояние между любой парой элементов.

Полное пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого же пространства).

Фундаментальная последовательность, или **сходящаяся в себе последовательность**, или **последовательность Коши** — последовательность точек метрического пространства такая, что для любого заданного расстояния существует элемент последовательности, начиная с которого все элементы последовательности находятся друг от друга на расстоянии менее, чем заданное.

Евклидово пространство — это линейное пространство с заданным в нём скалярным произведением.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением (φ,ψ) называется *пространством* L_2 и обозначается $L_2[a;b]$.

Скалярное произведение и норма.

Скалярное произведение для функций *f(x), g(x)*, определенных на отрезке [—π, π] задается следующей формулой:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Скалярное произведение удовлетворяет следующему набору свойств

- $(f,g)=(g,f)$ для любых функций f, g
- $(f,cg)=(cf,g)=c(f,g)$ для любой константы c
- $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$
- $(f,f)\geq 0$ для действительнозначной f

Для любой функции *f(x)* с интегрируемым квадратом ее ***квадратичная норма*** определяется следующим образом

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Неравенство Коши-Буняковского

$$(f, g) \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение. Функции φ(x) и ψ(x), определенные на отрезке [a, b],называются **ортогональными** на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

Определение. Последовательность функций φ_1(x), φ_2(x), …, φ_n(x), непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Определение. Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной),** если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Определение. Рядом Фурье по ортогональной системе функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

Пусть ***f(x)*** – непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

Определение Разложением функции ***f(x)*** в ряд Фурье на отрезке [a, b] по ортогональной системе функций называется ряд.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

где

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx}$$

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты имеют вид:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

Основной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots\right).$$

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$.

Пусть $(\varphi_n(x))$ – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x).$$

называется *обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций* $(\varphi_n(x))$. Если $(\varphi_n(x))$ – основная тригонометрическая система функций, то ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Ортогональным многочленом Фурье называется частичная сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x).$$

Если в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система, то многочлен Фурье называется *тригонометрическим* и обозначается $T_n(x)$.

Метрикой ρ *(расстоянием)* в пространстве $L_2[a;b]$ называется величина

$$\rho(f,\varphi)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}\ .$$

Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ ***в среднем квадратичном***.

Используя определение нормы функции, имеем

$$\rho(f,\varphi)=\|f(x)-\varphi(x)\|.$$

Теорема *(об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье)* *Среди всех обобщенных многочленов вида* $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, коэффициенты которого находятся по формулам* $\alpha_k=c_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Теорема *(неравенство Бесселя)* *Если* $f(x)\in L_2[a;b]$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *ее обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций* $(\varphi_n(x))$*, то справедливо неравенство*

$$\int_a^b f^2(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2 .$$

Сходимость рядов Фурье

Ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Из равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S_n(x)| \to 0 .$$

Ряд Фурье называется *сходящимся в среднем квадратичном* к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0 .$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

Равенство Парсеваля

Теорема *Если обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[a;b]$ *равномерно к функции* $f(x) \in L_2[a;b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *и в среднем квадратичном.*

Теорема *Для того чтобы обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x) \in L_2[a;b]$ *сходился к* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется ***замкнутой*** в $L_2[a;b]$, а само равенство – ***уравнением замкнутости***.

Из теоремы следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Периодическая функция

Определение. **Периодическая функция -** функция, значение которой не изменяется при добавлении к аргументу определённого, неравного нулю числа, называемого периодом функции.

Например, sin x и cos x: являются П. ф. с периодом 2π;

$\{x\}$ — дробная часть числа x — П. ф. с периодом 1;

e^x (если x — комплексное переменное) — П. ф. с периодом $2\pi i$ и т.п.

Свойства периодических функций

1.Если П. ф. имеет действительный период, непрерывна и отлична от постоянной, то для неё существует наименьший положительный период T; всякий другой действительный период той же функции будет иметь вид kT, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

При этом сумма, произведение и частное П. ф. с одним и тем же периодом являются П. ф. с тем же периодом. Производная П. ф. также есть П. ф. с тем же периодом,

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$: действительно, $f\left(a \cdot \left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T) = f(ax)$.

3. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0; x_1] \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$ при любых a и $b \in [x_0; x_1]$.

Простейшим периодическим процессом является простое ***гармоническое колебание,*** описываемое функцией

$y = A\sin(\omega t+\varphi)$, $\quad t \geq 0$,

где A — ***амплитуда колебания***, ω— ***частота***, φ — ***начальная фаза.***

Функцию такого вида (и ее график) называют ***простой гармоникой***.

Основным периодом функции y является $T = 2\pi/\omega$, (ω показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени).

Проведем преобразование функции y:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую **сложное периодическое колебание** (периодический процесс).

Всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник?

Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих гармоник?

Тригонометрические ряды.

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0 = \frac{(1, f)}{\|1\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\quad a_n = \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\quad n \in \mathbb{N}.$$

называется ***тригонометрическим рядом Фурье*** для периодической функции $f(x) \in L_2[a;b]$.

Для тригонометрического ряда Фурье справедливо *уравнение Ляпунова*:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{l}\|f\|^2.$$

В частности, пусть $f(x) \in L_2[-\pi;\pi]$

Рассмотрим систему тригонометрических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

Теорема Любые две различные функции, взятые из системы функций

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots\ ,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots,$$

ортогональны в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Доказательство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,.. \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,..., \quad n = 1,2,...$$

Определение.

Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$$

$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots$$

или, короче,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Действительные числа $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если тригонометрический ряд равномерно сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ – периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$ и его сумма равна $f(x)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Т.к. функция *f(x)* непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \cos nx \sin kx)dx = \pi a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Определение.

Если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x)*.

Формулы для нахождения a_n, b_n называются **формулами Эйлера-Фурье**

ЭЙЛЕР, ЛЕОНАРД (Euler, Leonhard) (1707–1783)
входит в первую пятерку величайших математиков всех времен и народов.

Леонард Эйлер, портрет 1753 г.,

Определение.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье.

Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция **$f(x)$ разлагается в ряд Фурье.**

Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Пусть функция *f* задана в промежутке [-***l***,***l***], где ***l*** - некоторое положительное число. Сделав подстановку

$$x = \frac{ly}{\pi}, \qquad (-\pi \le y \le \pi)$$

получим функцию

$$g(y) = f(ly/\pi)$$

,определенную в промежутке

$$[-\pi, \pi]$$

Формальный ряд Фурье для этой функции имеет вид

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера - Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

полагая $y = \pi x/l$

получим для функции f тригонометрический ряд несколько измененного вида:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

Формулы Эйлера-Фурье при этом имеют вид

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Каждой периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)\in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Важными являются два вопроса о сходимости рядов Фурье:

– при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции?

– как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?

Теорема *Если* $f(x)\in L_2[-l;l]$ – *кусочно-непрерывная на отрезке* $[-l;l]$ *функция, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к функции* $f(x)$ *в среднем квадратичном:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)dx=0\,.$$

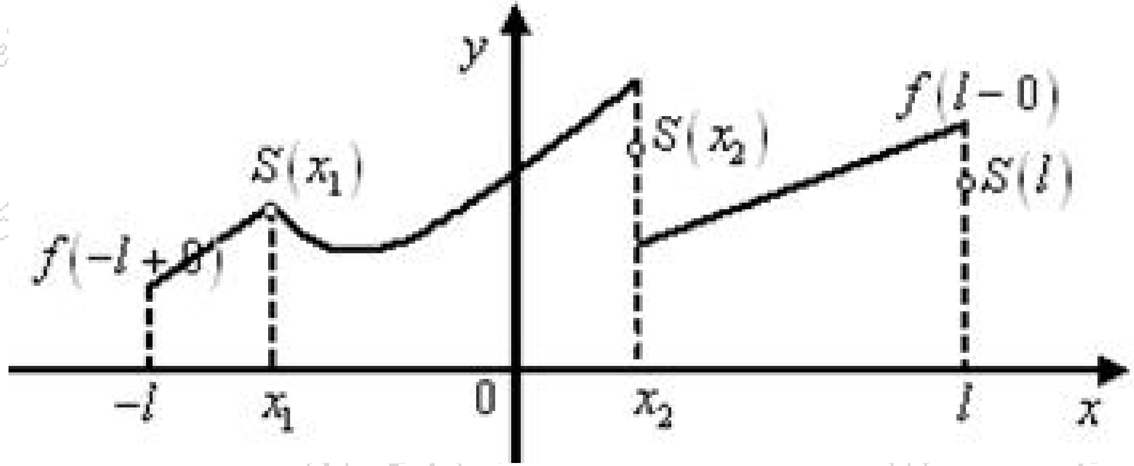
Теорема *Если* $f(x) \in L_2[-l;l]$ *– кусочно-гладкая на отрезке* $[-l;l]$ *функция, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы следующие соотношения:*

1) $S(x) = f(x)$, *если* x *– точка непрерывности функции* $f(x)$;

2) $S(x) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, *если* x_0 *– точка разрыва первого рода функции* $f(x)$;

3) $S(-l) = S(l) = \dfrac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

На рисунке дана геометрическая интерпретация условий 1), 2), 3)



Сходимость ряда Фурье в различных точках

Так, например, условие 2) означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Теорема *Если функция* $f(x) \in L_2[-l;l]$ *является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке* $[-l;l]$, *а на концах этого отрезка удовлетворяет условию* $f(-l) = f(l)$, *то ее тригонометрический ряд Фурье на* $[-l;l]$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Эти теоремы показывают, как свойства функции $f(x) \in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T = 2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем квадратичном;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$.