Лекция 23

# РЯДЫ (8)

## Некоторые приложения степенных рядов.

# Приближенное вычисление значений функций.

Пусть требуется вычислить значение функции *f(x)* при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.
Если функцию *f(x)* в интервале *(-R; R)* можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

то точное значение функции можно вычислить по рядуТейлора, при $x=x_1$

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n + \ldots,$$

а приближенное значение по частичной сумме.

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом *n*.
Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т. е.

$$r_n(x_1) = a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} + \ldots$$

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \ldots| < |u_{n+1}(x_1)|$$

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

## Способы оценки погрешности

*1) Для знакочередующихся рядов*

$$\boxed{|R_n(x)| < |a_{n+1}x^{n+1}|.}$$

2) *Для знакопостоянных рядов (формула Лагранжа)*

$$\boxed{|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}x^{n+1}|.}$$

**Пример.** Вычислить $e$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

В интервале $\left[0, M\right] \quad \forall n \quad f^{(n)}(x) \le e^M$.

По теореме об оценке остаточного члена ряда

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $M = 1 \quad R_n(x) < e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon.$

Если $\varepsilon = 10^{-5}$, то $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 8.$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$

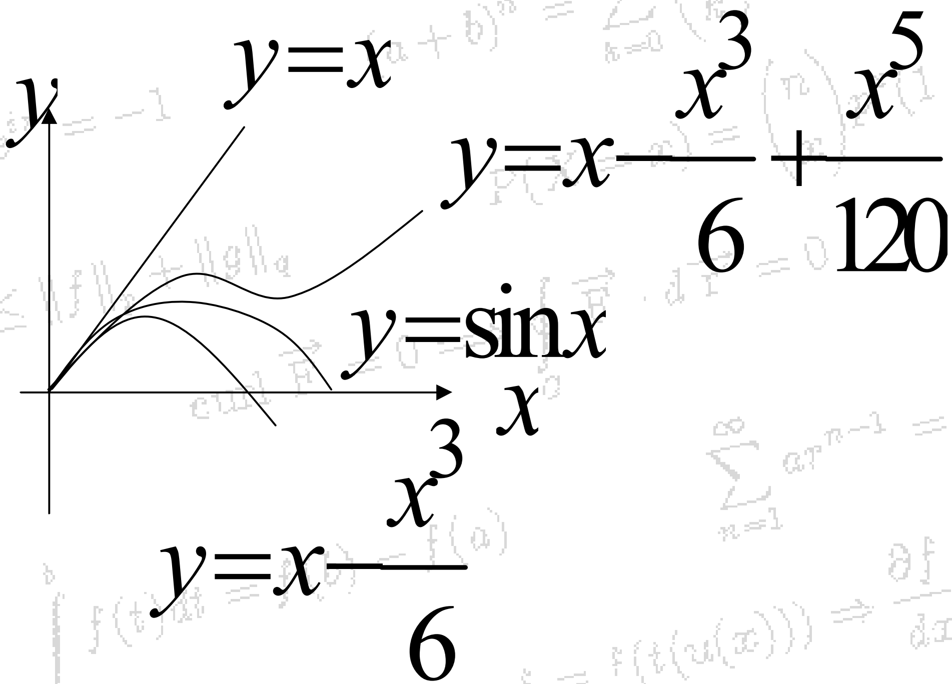
***Пример***

$$\sin x, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$n = 1, \quad \sin x \approx x, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^3}{6}, \quad x \in (0;0.08).$$

$$n = 2, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^5}{120}, \quad x \in (0.08;0.4).$$

$$n = 3, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \left|R_n(x)\right| < \frac{x^7}{5040}, \quad x \in (0.4;0.9).$$


$y=x$
$y$
$y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$
$y=\sin x$
$x$
$y=x-\frac{x^3}{6}$

**Пример.**

Вычислить $\ln 2, \quad \varepsilon = 0,000001.$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1,1).$$

Ряд сходится, но очень плохо.

Из теоремы Лейбница видно, что для точности $\varepsilon = 0,000001$ необходимо $n = 100000$ членов ряда.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right),\quad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1+x}{1-x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\dots+\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}+\dots\right).$$

$n=4.$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}++\frac{1}{7}\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\frac{1}{3^9}\right)\approx 0,693144.$$

## Пример.

Получим формулу для вычисления натурального логарифма любого целого числа. Рассмотрим

$$\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

$$\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln(1+n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln n.}$$

Для получения требуемой формулы первое слагаемое раскладываем в степенной ряд

$$\ln(1+n)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n3}-\ldots\right)+\ln n.$$

Формула является рекуррентной. При $n=1$ вычисляется значение $\ln 2$. Далее при $n=2$ вычисляется $\ln 3$ и т.д.

## Интегрирование функций.

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная **не выражается в конечном виде через элементарные функции либо нахождение первообразной сложно.**

Найдем $F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx.$

Пусть известно разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора и пределы интегрирования лежат в интервале сходимости ряда.

Тогда исходный ряд можно интегрировать почленно.
В итоге получим ряд для функции $F(x)$, имеющий тот же интервал сходимости, что и исходный.

Ошибку вычислений определяют так же, как и при приближенном вычислении значений функций.

Если интеграл выражается через элементарную функцию, то получим ее разложение в ряд Тейлора.

Если функция $F(x)$ в элементарных функциях не выражается, то найдем разложение неэлементарной функции в ряд Тейлора.

Зная оценку $R_n(x)$ для подынтегральной функции, можно получить оценку $R_n^*(x)$ для $F(x)$.

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$$

с точностью до $e = 0{,}001$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя $x$ на ($-x^2$) в стандартной формуле

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке [0; 1/4], лежащем внутри интервала сходимости (—∞;∞), получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как

$$\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots > 0{,}001, \qquad \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} < 0{,}001,$$

то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

***Замечание.*** Первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = exp(-x^2)$ легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав полученное выражение в пределах от 0 до $x$:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \dots\right) dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая — ***плотность нормального распределения вероятностей***, вторая — ***функция Лапласа*** или о ***интеграл вероятностей)***. Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 2! \cdot 5} - \frac{x^7}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \right),$$

который сходится на всей числовой оси.

***Пример.***

Интегральный синус $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,\infty).$$

$$\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\ldots,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

**Этот ряд не сходится ни к какой элементарной функции.**

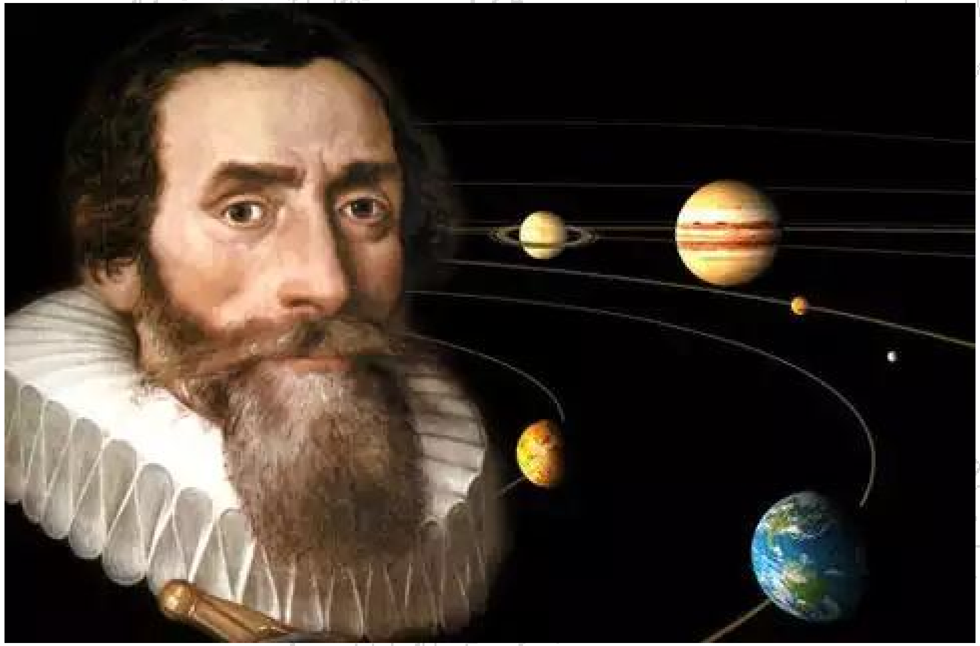
## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Многие уравнения и системы уравнений с двумя и более переменными, некоторые из которых надо найти через остальные, можно решать с помощью степенных рядов. Для этого заданные функции, через которые записано уравнение, надо разложить в степенные ряды и искать неизвестные в виде рядов. После этого для нахождения неизвестных коэффициентов рядов будут получены новые уравнения, решения которых во многих случаях находятся без особых затруднений. Полученные таким образом решения исходного уравнения вполне пригодны как для вычислений, так и для других операций.

Продемонстрируем описанный метод на примере уравнения Кеплера

$$y = a + x\sin y,$$

играющего важную роль в астрономии. Здесь $y$ – эксцентрическая аномалия планеты, $a$ – ее средняя аномалия, $x$ – эксцентриситет орбиты планеты.



Иóганн Кéплер (нем. Johannes Kepler; 27 декабря 1571 года, Вайль-дер-Штадт — 15 ноября 1630 года, Регенсбург) — немецкий математик, астроном, механик, оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

Считая $y$ неизвестной функцией от $x$, будем искать ее в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Разложив $\sin y$ по формуле Тейлора по степеням $y$ и подставив вместо $y$ ряд , после возведения этого ряда в степени и приведения подобных членов получим

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = a + x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) -$$

$$- \frac{x}{3!}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)^3 + \ldots$$

Из этого равенства, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$ слева и справа, найдем последовательно неизвестные

$$c_0 = a,$$

$$c_1 = c_0 - \frac{c_0^3}{3!} + \frac{c_0^5}{5!} - \ldots = \sin c_0 = \sin a,$$

$$c_2 = c_1 - \frac{3}{3!} c_0^2 c_1 + \frac{5}{5!} c_0^4 c_1 - \ldots =$$

$$= c_1\left(1 - \frac{c_0^2}{2!} + \frac{c_0^4}{4!} - \ldots\right) = \sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a, \ldots$$

и саму функцию

$$y = a + (\sin a)x + \frac{1}{2}(\sin 2a)x^2 + \frac{1}{2}(2\sin a - 3\sin^2 a)x^3 + \ldots$$

Доказано, что это разложение верно при $|x| <$ $< 0{,}6627\ldots$

Если уравнение Кеплера записать в виде $y = x + b\sin y$ и снова считать $y$ неизвестной функцией от $x$, то при $b \neq 1$, выполнив аналогичные действия, получим

$$y = \frac{1}{1-b}x - \frac{b}{3!(1-b)^4}x^3 + \frac{b+9b^2}{5!(1-b)^7}x^5 - \ldots$$

## Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

**Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды,** то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные $c_i$.

Первый метод решения - **метод неопределенных коэффициентов**.

**1.** Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование,  сложение, вычитание, умножение и пр.)

**2.** Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты $c_i$.

## Пример.

Найти решение уравнения

$y'' - xy = 0$

с начальными условиями

$y(0) = 1; y'(0) = 0.$

Решение уравнения будем искать в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \ldots = 0$$

Отсюда получаем:

$$2c_2 = 0$$
$$6c_3 - c_0 = 0$$
$$12c_4 - c_1 = 0$$
$$20c_5 - c_2 = 0$$
$$30c_6 - c_3 = 0$$

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

Окончательно получим:

$$c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{1}{6}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{1}{180}; \quad \ldots$$

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же **пример.**

Найти решение уравнения

$$y'' - xy = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1;\; y'(0) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия
$y(0) = 1; y'(0) = 0.$

подставить в исходное дифференциальное уравнение,
$$y'' - xy = 0$$
получим, что $y''(0) = 0.$

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде
$y'' = xy$
и будем последовательно дифференцировать его по $x$.

$$y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$

$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

..................................................................

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

## Замечания

Полученный ряд представляет искомое частное решение уравнения **для тех значений *x*, при которых он сходится**.

Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения.

Рассмотренный способ применим и для построения **общего решения** уравнения, если $y_0$ и $\acute{y}_0$ рассматривать как произвольные постоянные.

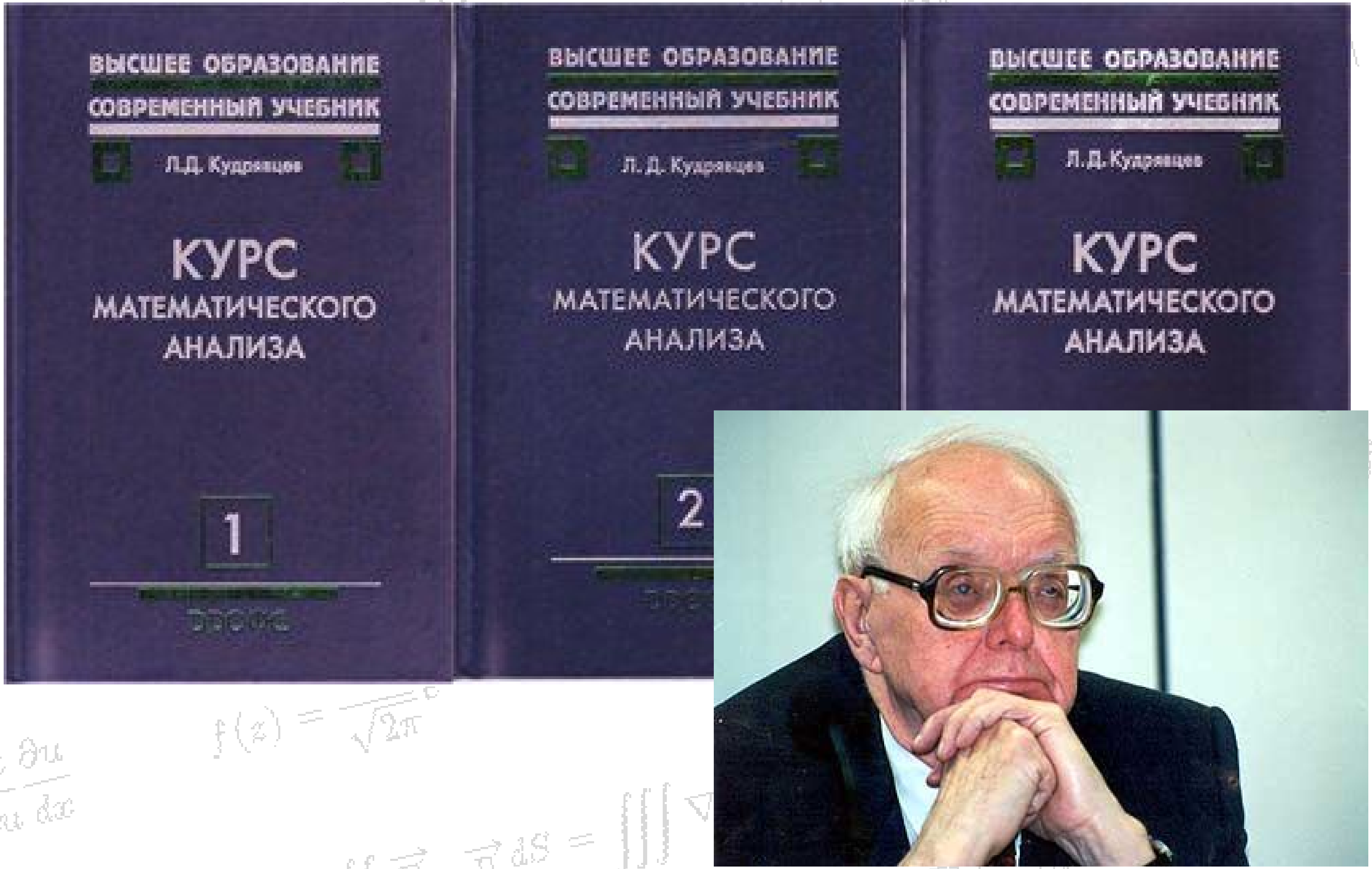
Способ последовательного дифференцирования применим для решения **дифференциальных уравнений любого порядка**.

Борис Бурда

**Ария Маклорена о ряде Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**

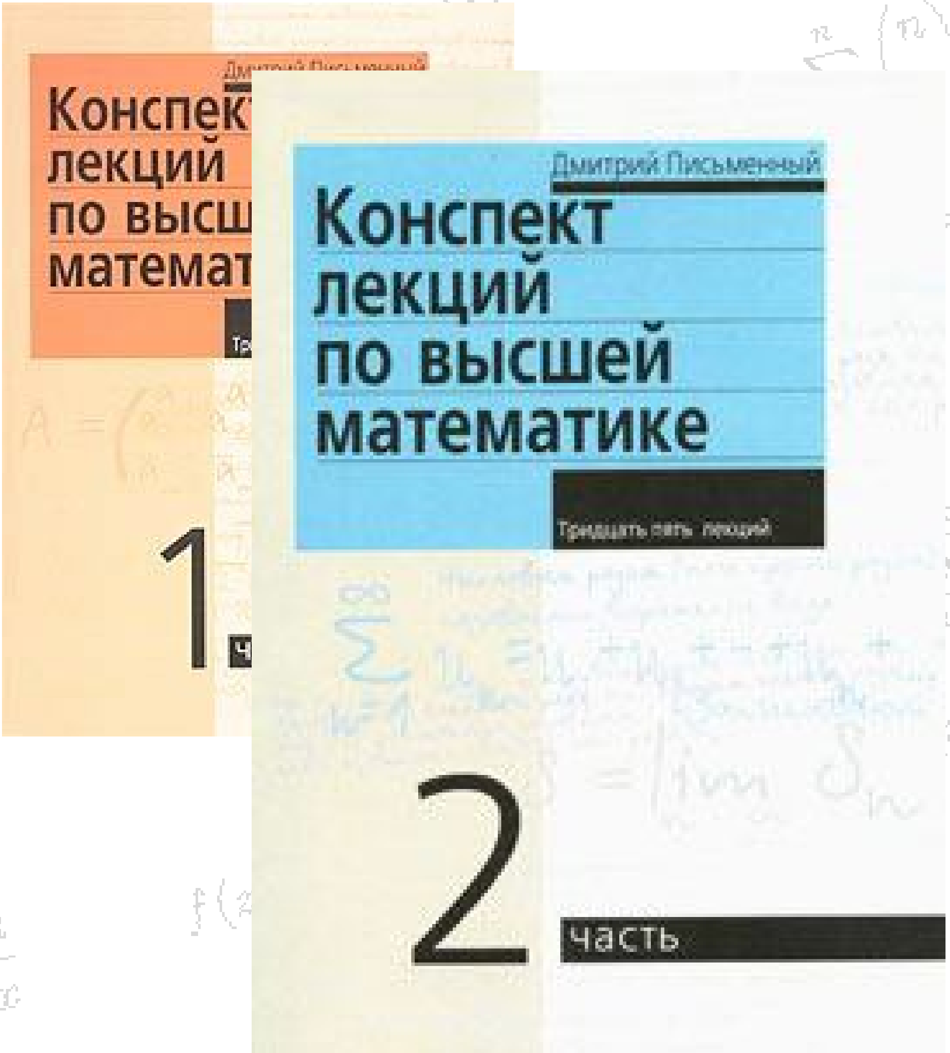
**«…Вечно именно тех ожидает отсев,**
**Кто ряды изучать не имеет охоты.**
**Покидает он нас - кто на год, кто совсем.**
**Хорошо - в академ, а бывает - в пехоту….»**

# Учебные пособия

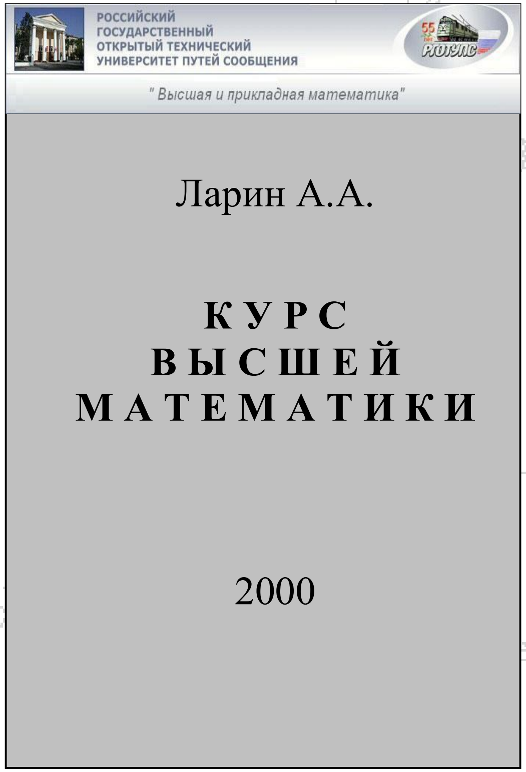



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК
Я.С. Бугров
С.М. Никольский
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
3
ДРОФА


В.А. ИЛЬИН
В.А. САДОВНИЧИЙ
Бл. Х. СЕНДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



Дмитрий Письменный
Конспект лекций по высшей математике
Тридцать пять лекций
2
часть




http://alexlarin.narod.ru/kvm.html