Лекция 22

РЯДЫ (7)

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Мы доказали **следующую теорему:**

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора функции *f(x)* сходился к *f(x)* в точке *x*, ***необходимо и достаточно***, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Замечание. Если ряд Тейлора сходится к порождающей функции *f(x),* то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, *т. е.* $R_n(x) = r_n(x)$. ($R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, *а* $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, *где* $S(x)$ — сумма ряда Тейлора*.)*

Таким образом, задача разложения функции *f(x)* в степенной ряд сведена по существу **к определению значений *x*, при которых** $\boldsymbol{R_n(x) \to 0}$ ***(при n*** $\boldsymbol{\to\infty}$***).***

Схема разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена.

Разложение функций проводится в два этапа:

1) Вычисляются производные $f(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0),\dots$.
Составляется ряд Тейлора.

2) Находится интервал, где ряд Тейлора сходится, т. е.
где $R_n(x) \to 0$ или, где абсолютные величины всех производных
функции ограничены одним и тем же числом
.

Таким образом, если бесконечно дифференцируемая функция разлагается в ряд Тейлора на некотором интервале, то ее можно с любой степенью точности приблизить многочленом Тейлора.

Но имеет место гораздо более общая теорема о приближении функции многочленами.

Теорема (Вейерштрасса ,1895). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящаяся к $f(x)$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется многочлен $P_n(x)$ с номером n, зависящим только от ε, такой, что

$$|P_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех x из сегмента $[a, b]$.

Иными словами, ***непрерывную на сегменте [a, b] функцию f(x) можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью ε.***

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

1. **Показательная функция** $f(x) = e^x$.

$f'(x) = f''(x) = , ..., = f^{(n)}(x) = e^x$, при $x_0 = 0$ все равны 1, тогда

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)\,, \quad r_n(x) = \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} x^{n+1} .$$

Рассмотрим интервал $[-N, N]$, где N любое фиксированное число, $e^x < e^N = M$ для всех x из этого интервала. Следовательно, все производные ограничены в этом интервале одним и тем же числом M и по доказанной теореме $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Т.к. N любое фиксированное число, то функция e^x разлагается в ряд Маклорена при всех значениях *x,* т.е. на всей оси O*x*. Итак,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},$$

где $0 < \theta < 1$, $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = o(x^n)$.

Интервал сходимости: $R = (-\infty, +\infty)$.

Разложение функции $f(x)=\sin x$ **.**

$$f'(x)=\cos x=\sin(x+\tfrac{\pi}{2}),$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin(x+2\cdot\tfrac{\pi}{2}),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\tfrac{\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=0,2,4,6,\ldots,\\ -1, & n=3,7,11,\ldots,\\ +1, & n=1,5,9,\ldots;\end{cases}$$

$\forall x\ \left|f^{(n)}(x)\right|\le 1.$ $\quad\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$

Разложение функции $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена.

Аналогично

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Нечетные функции раскладываются по нечетным степеням.
Четные функции раскладываются по четным степеням.

Биномиальный ряд.

$f(x)=(1+x)^m$, где m - любое число.

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

....

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

....

$$f(0)=1,\ f'(0)=m,\ldots,f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1),\ldots$$

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

Найдем интервал сходимости.
Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)n!x^{n+1}}{(n+1)!m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Ряд сходится при $|x|<1$.

Ряд расходится при $|x|>1$.

Оценим остаточный член $R_n(x)$ для $x \in (0,1)$.

$$\forall n > m-1 \quad (1+x)^{m-n+1} = \frac{1}{(1+x)^{n-(m-1)}} < 1.$$

Поэтому

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|m(m-1)\dots(m-n)(1+x)^{m-n-1}\right| < \left|m(m-1)\dots(m-n)\right|.$$

Здесь нельзя воспользоваться теоремой для оценки $R_n(x)$, т. к. ограничение для производной зависит от n.

Используя вид остаточного члена получим

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|.$$

Правая часть неравенства есть $(n+1)$ -й член ряда, сходящегося при $|x|<1$.

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \to 0.$

Для $x \in (-1,0)$ доказательство не приводим.

Итак

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad x \in (-1,1).$$

Если m **- целое и больше нуля**, то получим формулу **бинома Ньютона**.

Для $m = -1$ $\quad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \;\; x \in (-1,1).$

Для разных m могут входить в область сходимости одна или обе границы.

Разложения функции в ряд при помощи интегрирования.

Интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды.

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx;$$

Так, некоторые разложения можно получить интегрируя, например, формулу геометрической прогрессии.

Разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

Проинтегрируем

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad x\in(-1,1).$$

в пределах от 0 до *x*, $|x|<1$ *(что законно, так как ряд в правой части этого равенства равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x при* $|x|<1$*)*, получим

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln(1+x).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \ \ x \in (-1,1).$$

При $x = 1$ ряд сходится условно. Поэтому окончательно $x \in (-1,1]$.

В частности

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Ряд сходится, но очень плохо.
Из теоремы Лейбница видно, что для точности $\varepsilon = 0,000001$ необходимо $n = 100000$ членов ряда.

Разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена.

Воспользуемся формулой $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$

Примечание

Эта функция может быть **разложена в ряд методом алгебраического деления**:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;1 & 1+x^2 \\
\cline{2-2}
\underline{1+x^2} & 1-x^2+x^4-\ldots \\
-\;-x^2 & \\
\underline{-x^2-x^4} & \\
-\;x^4 & \\
\underline{x^4+x^6} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in [-1,1],$$

т. к. знакочередующийся ряд сходится условно при $x = \pm 1$.

Взяв в этом разложении, например, $x = 1$ и заметив, что *arctg 1* $= \pi/4$, получим формулу для вычисления π

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Этот ряд называется ***рядом Лейбница***.

Отметим, что арктангенс определен на всей действительной числовой оси, в частности и вне отрезка [-1, 1]. Однако **его разложение в степенной ряд справедливо только на этом отрезке.** Вне этого отрезка ряд расходится, в чем легко убедиться, найдя его радиус сходимости.

Разложение функции $f(x) = \arcsin x$ в ряд Маклорена.

Положив в формуле биноминального ряда $m = -1/2$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots, \quad x \in [-1; 1].$$

Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^x dt + \int\limits_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int\limits_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \ldots,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Разложение функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \qquad x \in (-1;1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \qquad x \in (-1;1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots, \qquad x \in [-1;1]$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in [-1;1]$$

Эти ряды в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов могут быть использованы при разложении других функций в ряд Маклорена (Тейлора).

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Пример .

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Пример .

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin^2 x$.

$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. Интервал сходимости

$\sin x$, $\cos x$ одинаков и $R=(-\infty,+\infty)$.

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right)+\ldots=$$

$$=\left(\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right)+\ldots$$

Суммирование рядов с помощью интегрирования и дифференцирования

Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно от 0 до x, $|x| < 1$,

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

и затем продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В результате получаем

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Найдем сумму ряда:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, так же как и в предыдущем случае ряда. Продифференцировав ряд почленно

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

и использовав разложение логарифма, получим

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

$$S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Принимая во внимание, что S(0) = 0, окончательно имеем

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях

При разложении рациональных функций в ряд Тейлора удобно использовать их разложение на элементарные дроби.
Например: найдем разложение функции

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, Разложив функцию $f(z)$ на элементарные дроби, получим

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z}.$$

Заметим, что дроби

$$\frac{1}{1-z} \text{ и } \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2}$$

представляют собой суммы бесконечных геометрических прогрессий

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

со знаменателями *z* и *z/2* при условии, что *z* < 1 и, соответственно, что z/2 <1. Оба этих условия выполняются, когда выполняется первое. Таким образом

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$