Лекция 2.20

РЯДЫ (5)

Свойства степенных рядов

Непрерывность суммы степенного ряда.

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

имеет радиус сходимости $R>0$.

Лемма. *Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r<R$, ряд равномерно сходится на сегменте $[-r, +r]$, т. е. при $|x|<r$.*

Доказательство.

В силу теоремы Абеля ряд абсолютно сходится при $x=r$, т. е. сходится числовой ряд

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Этот числовой ряд служит мажорантным для степенного ряда при всех *x из сегмента* [$-r$, $+r$]. *На основании признака Вейерштрасса ряд сходится равномерно на сегменте* [$-r$, $+r$].

Следствие. *В условиях леммы сумма степенного ряда является функцией, непрерывной на сегменте* [$-r$, $+r$].

Теорема.

Степенной ряд равномерно сходится внутри интервала сходимости.

Доказательство. Рассмотрим ряд с радиусом сходимости R

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Пусть $|x - x_0| < R_1 < R$. Выберем $R_2 : R_1 < R_2 < R$, например $R_2 = \frac{1}{2}(R_1 + R)$. На интервале $|x_1 - x_0| = R_2$ и в точке x_1 степенной ряд сходится абсолютно, так как этот интервал лежит внутри интервала сходимости.

Тогда (точно так же, как в доказательстве теоремы Абеля) оценим

$$\left|a_n (x-x_0)^n\right| = \left|a_n \frac{(x-x_0)^n}{(x_1-x_0)^n}(x_1-x_0)^n\right| \le \left|a_n (x_1-x_0)^n\right| \frac{\left|x-x_0\right|^n}{\left|x_1-x_0\right|^n} \le \varepsilon\, q^n$$

где

$$q = \frac{R_1}{R_2} < 1 \text{ в области } \left|x-x_0\right| < R_1 < R_2 = \left|x_1-x_0\right| \;\; \forall n > N($$

$\frac{R_1}{R_2}$ не зависит от x).

Тогда в области $\left|x-x_0\right| < R_1$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса (члены ряда мажорируются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

Теорема. *Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть *$S(x)$ — сумма степенного ряда, а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x внутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x|<R$. Всегда найдется число r такое, что $|x|<r<R$. В силу следствия из леммы функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r, +r]$. Следовательно, $S(x)$ непрерывна и в точке x.*

Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда

Теорема. Если $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда, а x удовлетворяет условию $|x|<R$, то ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.

Доказательство. Для любого x, удовлетворяющего условию $|x|<R_t$ найдется r такое, что $|x|<r<R$. Согласно лемме ряд сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$, а следовательно, и на сегменте $[0, x]$. Но тогда этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

В результате почтенного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots,$$

радиус сходимости которого является величиной, обратной пределу последовательности

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Так как этот предел последовательности тот же, что и у последовательности.

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$$

теорема доказана

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1}$$

Теорема .Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Доказательство. Достаточно доказать лишь второе утверждение теоремы.

В результате почленного дифференцирования получим ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)\,a_{n+1}x^n+\ldots,$$

радиус сходимости *R* которого обратен пределу последовательности

$$\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\}.$$

Так как этот предел последовательности тот же, что и у последовательности.

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$$

то теорема доказана

Следствие. Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Разложение функций в ряд

Определение . Будем говорить, что функция *f(x)* на интервале *(-R, +R*) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к *f(x)* на указанном интервале.

Утверждение . Для того чтобы функция *f(x)* могла быть разложена в степенной ряд на интервале *(-R, +R)*, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка .

Доказательство.

Действительно, степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит интервал (—*R*, +*R*), можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем все полученные при этом ряды сходятся внутри того же промежутка сходимости.

Но тогда суммы рядов, полученных сколь угодно кратным дифференцированием, представляют собой функции, непрерывные внутри указанного промежутка сходимости, а следовательно, непрерывные на интервале (—*R*, +*R*).

Это условие необходимое, но не достаточное

Утверждение. Если функция $f(x)$ может быть на интервале $(-R, +R)$ разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.

Доказательство.
В самом деле, пусть функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, +R)$ в степенной ряд.

Дифференцируя этот ряд почленно *n* раз (что заведомо можно делать внутри интервала *(-R, +R)*, получим

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + a_{n+1}(n+1)!x + \ldots$$

Отсюда при $x=0$ найдем

$$f^{(n)}(0) = a_n n!,$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Таким образом, коэффициенты степенного ряда, в который может быть разложена функция *f(x)*, ***однозначно определяются формулой***

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Предположим теперь, что функция *f(x)* имеет на интервале *(-R, +R)* непрерывные производные любого порядка.

Определение . Степенной ряд, коэффициенты которого определяются формулой

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

называется рядом Тейлора функции f(x).

Брук Тэйлор (англ. *Brook Taylor*, 1685—1731) — английский математик, Таким образом, **если функция ,*f(x)* может быть разложена на интервале *(-R, +R)* в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции *f(x)*.**

Другое определение ряда Тейлора

Как известно для любой функции *f(x)*, определенной в окрестности точки хо и имеющей в ней производные до (n + 1)-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \ c \in (x_0, x),$$

остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$.

Формулу для *f(x)* кратко можно записать в виде

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

многочлен Тейлора.

Если функция *f(x)* имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 ***и остаточный член Rn(x) стремится к нулю*** *при n →∞, то из формулы Тейлора* получается разложение функции *f(x) по степеням* $(x - x_0)$*, называемое* ***рядом Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора сходился к той функции, по которой он построен, *необходимо и достаточно*, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Необходимость. Обозначим S_n – частичную сумму ряда Тейлора .

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если ряд Тейлора сходится к $f(x)$, то $\lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$. Но по формуле Тейлора $f(x) - S_n = R_n$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Достаточность. Если $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$, а S_n - частичная сумма ряда Тейлора. Поэтому ряд Тейлора сходится именно к функции $f(x)$.

Замечание. Если ряд Тейлора сходится к порождающей функции *f(x),* то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, *т. е.* $R_n(x) = r_n(x)$. ($R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, *а* $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, *где* $S(x)$ — сумма ряда Тейлора.)

Таким образом, задача разложения функции *f(x)* в степенной ряд сведена по существу **к определению значений *x*, при которых $R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$).**

Если оценить остаточный член не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое **достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.**

Теорема. Пусть все производные функции $f(x)$ ограничены в совокупности одной константой. ($\left|f^{n}(x)\right| < L, \forall n$) Тогда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

Доказательство. Оценим остаточный член формулы Тейлора

$$\frac{\left|f^{n}(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} < L\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$ так как

показательная функция растет медленнее, чем n!. Поэтому (по предыдущей теореме) ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$. то получим разложение функции по степеням x в так называемый ***ряд Маклорена:***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Колин Маклорен (англ. *Maclaurin*)
(1698, Шотландия- 1746) — выдающийся английский математик

В возрасте 15 лет он уже открыл несколько теорем. В 1717 г. занял по конкурсу кафедру профессора математики в Абердине, на которой и оставался в течение 5 лет

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. ***Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции f(x); он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции f(x).***

Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

бесконечное число раз дифференцируема

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{2}{x^2}}}{\Delta x}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{z^2}}=0 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, $\forall n \quad f^{(n)}(0)=0.$

То есть в точке $x = 0$ производные всех порядков, равны нулю. Ряд Маклорена имеет вид

$$0 + \frac{0}{2!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Он сходится, но его сумма *S(x)* в любой точке *x* равна нулю, а не *f(x)*.

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

1. Показательная функция $f(x) = e^x$.

$f'(x) = f''(x) = , ..., = f^{(n)}(x) = e^x$, при $x_0 = 0$ все равны 1, тогда

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Рассмотрим интервал $[-N, N]$, где N любое фиксированное число, $e^x < e^N = M$ для всех x из этого интервала. Следовательно, все производные ограничены в этом интервале одним и тем же числом M и по лемме $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Т.к. N любое фиксированное число, то функция e^x разлагается в ряд Маклорена при всех значениях x, т.е. на всей оси Оx. Итак,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},$$

где $0 < \theta < 1$, $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = o(x^n)$.

Интервал сходимости: $R = (-\infty, +\infty)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,, \; |x| < 1.$$