Лабораторная работа №22 б

СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы – *экспериментально определить зависимость периода колебаний и логарифмического декремента от параметров контура. Полученные результаты сравнить с рассчитанными теоретически.*

Физическая модель колебательного контура и описание свободных электромагнитных колебаний в нем

Под колебательным контуром обычно подразумевается устройство, состоящее из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности и резистора (наличие резистора возможно, но не обязательно). Основной характеристикой конденсатора является его емкость C. В идеальном конденсаторе нет диссипативных потерь энергии. Его импеданс чисто реактивный. В реальных конденсаторах диэлектрик, заполняющий пространство между обкладками, может иметь небольшую электропроводность и поэтому возможны некоторые потери энергии на выделение джоулева тепла. Кроме того, при электрических колебаниях периодически происходит переполяризация диэлектрика, на которую также затрачивается некоторое количество энергии. В некоторых случаях приходится учитывать также тот факт, что кроме емкости C конденсатор, как и любой проводник, может иметь небольшое значение индуктивности L, величина которой зависит от конструкции конденсатора.

Основной характеристикой катушки индуктивности является ее индуктивность L. Идеальная катушка, в которой нет потерь энергии, имеет чисто реактивный импеданс. Однако, если в катушке применяется сердечник, то при колебаниях в контуре часть энергии теряется на перемагничивание сердечника. Часть энергии теряется также на нагревание проводника обмотки, имеющей конечное значение сопротивления. Большое влияние на реальный импеданс катушки оказывают так называемые межвитковые емкости. Эти емкости имеют наименьшее значение в однослойных катушках с принудительным шагом (шаг спирали больше диаметра провода) и наибольшее в многослойных катушках с намоткой внавал.

Резисторы, кроме активного сопротивления R, могут иметь некоторое значение индуктивности.

В идеальном случае можно считать, что колебательный контур состоит из последовательно соединенных идеальных элементов L, R и C. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из этих элементов. При наличии электромагнитных колебаний в контуре энергия магнитного поля сосредоточена в катушке и равна $L\dot{q}^2/2$. Энергия электрического поля сосредоточена в конденсаторе и равна $q^2/\ 2C$. Полная энергия электромагнитного поля в контуре равна

$$W_{эм} = \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \qquad (1)$$

.

Если бы потерь энергии не было (при $R = 0$), то энергия $W_{эм}$ была бы постоянной, а производная от этой энергии по времени равнялась нулю. Если сопротивление R отлично от нуля, то в резисторе выделяется джоулево тепло, на что расходуется энергия электромагнитного поля. При этом, в соответствии с законом сохранения энергии , изменение энергии $W_{эм}$ в единицу времени равно выделяемой тепловой мощности, взятой со знаком минус, т.е.

$$\frac{dW_{эм}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = -\dot{q}^2 R \qquad (2)$$

Выражение (2) после взятия производной можно привести к виду

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (3)$$

Если ввести обозначения $\frac{R}{L} = 2b$; $\frac{1}{LC} = w_0^2$, то получим уравнение

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + w_0^2 q = 0 \qquad (4)$$

Выражение (4) является стандартной формой записи дифференциального уравнения любого линейного осциллятора, совершающего свободные затухающие колебания. Решением уравнения (4) является функция

$$q(t) = q_0 e^{-bt}\cos(wt + j\,), \qquad (5)$$

где частота колебаний $w = \sqrt{w_0^2 - b^2}$. Для колебательного контура

$$w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (6)$$

В выражении (5) произведение $q_0 e^{-bt}$ имеет смысл амплитуды, величина которой убывает со временем. Коэффициент b называется коэффициентом затухания. Чем больше коэффициент b , тем быстрее со временем убывает амплитуда колебаний. Коэффициент b входит также в выражение для частоты колебаний w. В идеальном случае, когда потери отсутствуют и коэффициент b равен нулю, $w = w_0$. Частоту w_0 называют собственной частотой**.**

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

При отсутствии потерь энергии (или когда амплитуды двух соседних, отличающихся на один период , колебаний почти одинаковы и потерями энергии за один период по сравнению с $W_{эм}$ можно пренебречь)

$$\boxed{T = \frac{2p}{w_0} = 2p\sqrt{LC}} \qquad (8)$$

Из выражения (7) следует, что с увеличением сопротивления R период T также увеличивается и при приближении R к значению $2\sqrt{L/C}$ стремится к бесконечности. При значениях R, больших, чем $2\sqrt{L/C}$ колебания становятся невозможными (период становится мнимой величиной). Сопротивление

$$\boxed{R_к = 2\sqrt{L/C}} \qquad (9)$$

называется критическим.

Решение дифференциального уравнения (4), представленное выражением (5) трудно проверить экспериментально, так как мы не располагаем прибором, позволяющим непосредственно измерять заряд конденсатора для каждого момента времени. Однако мы можем сравнительно легко измерить напряжение на конденсаторе. Напряжение на конденсаторе , имеющем емкость C

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{C0}e^{-bt}\cos(wt + j\,) = U_{CA}(t)\cos(wt + j\,) \qquad (10)$$

Для характеристики степени затухания колебаний колебательной системы кроме коэффициента затухания b используется логарифмический декремент l. Логарифмическим декрементом называется логарифм отношения амплитуд , соответствующих моментам времени , различающимся на период, т.е.

$$l = \ln\frac{U_{CA}(t)}{U_{CA}(t+T)} \qquad (11)$$

Можно показать, что логарифмический декремент колебательного контура связан с параметрами контура соотношением

$$l = bT = \frac{R}{2L}T.$$

Если затухание мало, то в соответствии с (8) $T = 2p\sqrt{LC}$ и

$$\boxed{l = pR\sqrt{\frac{C}{L}}} \qquad (12)$$

Описание лабораторной установки и методики измерений

Схема лабораторной установки показана на рисунке 1

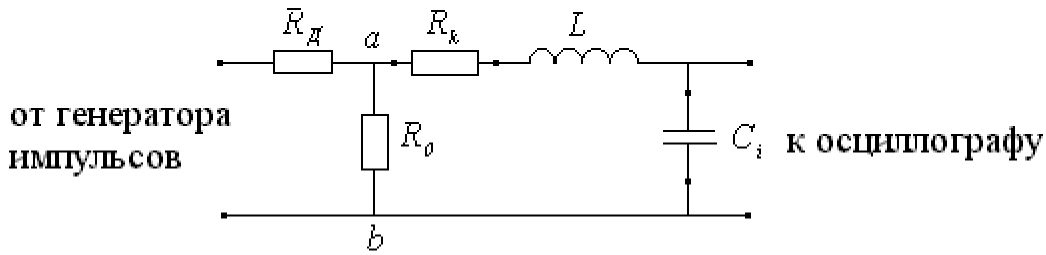

Рис 1

Колебательный контур состоит из однослойной катушки L, конденсатора, C_i (одного из трех возможных, входящих в комплект установки), резистора R_k (одного из пяти возможных, входящих в комплект установки) и резистора с малым сопротивлением R_0. Колебательный контур подключен к генератору импульсов с внутренним сопротивлением $R_Г$ через дополнительное сопротивление $R_Д$.

С генератора на контур подаются короткие электрические импульсы. Длительность импульса во много раз меньше периода колебаний. В промежуток времени между импульсами в контуре совершаются свободные колебания. Для тока в контуре сопротивление R_0 шунтировано цепочкой последовательно соединенных сопротивлений $R_Г$ и $R_Д$. Сопротивления R_0 и $R_Д$ подобраны так, чтобы выполнялось условие

$$(R_Г + R_Д) >> R_0 .$$

В этом случае сопротивление контура на участке ab можно считать равным R_0 , а полное сопротивление в цепи контура R равным $R_0 + R_k + R_L$, где R_L - сопротивление провода обмотки катушки.

На контур подаются короткие электрические импульсы. Их длительность значительно меньше периода колебаний в контуре. Под действием этого импульса конденсатор заряжается ,и после прекращения импульса в контуре совершаются свободные колебания.

Напряжение с конденсатора подается на вход осциллографа. Вход осциллографа должен быть высокоомным, чтобы его влиянием на колебательный процесс можно было пренебречь. Осциллограмма на экране осциллографа имеет вид графика зависимости напряжения на конденсаторе от времени. По виду этой осциллограммы можно определить период колебаний и логарифмический декремент.

Для того, чтобы измерить период собственных колебаний , потери энергии в контуре должны быть минимальными . Для этого резистор R_k следует установить с минимальным значением сопротивления. На экране осциллографа должна наблюдаться картина, примерный вид которой показан на рисунке 2.

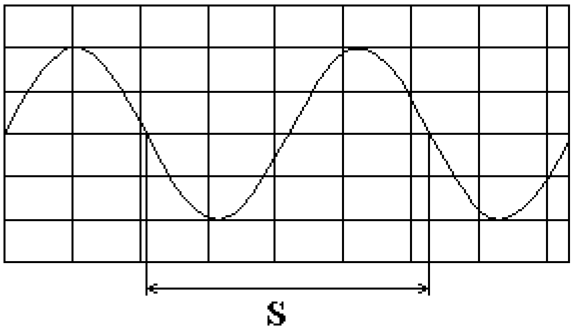

Рис 2.

Время, за которое световое пятно проходит на экране осциллографа одно деление (цена деления k) , указывается на панели прибора. Если измерить период в делениях шкалы на экране (расстояние S, показанное на рисунке) и умножить на цену деления k, то получим значение периода T в секундах т.е.

$$\boxed{T = S \cdot k} \tag{13}$$

Для определения логарифмического декремента на экране осциллографа надо получить картину, аналогичную изображенной на рисунке 3.

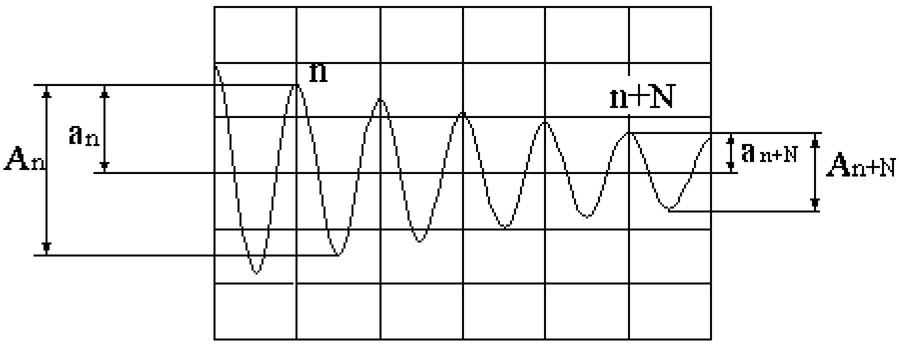

Рис 3

Для того, чтобы измерить амплитуду напряжения на конденсаторе для колебания под номером *n*, надо амплитуду этого колебания a_n, измеренную в делениях шкалы , умножит на цену деления *m*, указанную на панели прибора. Таким же образом можно определить и амплитуду напряжения следующего колебания, с номером $n+1$. Тогда

$$l = \ln \frac{a_n m}{a_{n+1} m} = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что для измерения логарифмического декремента амплитуды напряжения достаточно измерять только в делениях шкалы прибора. Нетрудно доказать, что логарифмический декремент можно найти по отношению любых двух амплитуд a_n и a_{n+N} по формуле

$$l = \frac{1}{N} \ln \frac{a_n}{a_{n+N}} \tag{15}$$

Точность измерения логарифмического декремента зависит от точности измерения амплитуд по шкале прибора. При измерении амплитуд a_n и a_{n+N} отсчет ведется от нулевого уровня. Поэтому важно, чтобы картина на экране осциллографа была очень точно расположена относительно этого уровня и такое расположение было достаточно стабильным. Это требование обеспечить не очень просто. Указанную трудность можно избежать, если измерять не амплитуды a_n и a_{n+n}, а расстояния A_n и A_{n+N}, как показано на рисунке 3. Можно доказать, что при этом

$$\boxed{l = \frac{1}{N}\ln\frac{A_n}{A_{n+N}}} \tag{16}$$

Формула (16) имеет такой же вид, как и формула (15).

Ошибка в измерении логарифмического декремента зависит не только от ошибки отсчета по шкале прибора s_a, но и от выбора числа N. Исследование относительной ошибки в измерении логарифмического декремента $\frac{s_l}{l}$ на минимум показывает, что относительная ошибка минимальна, если

$$\frac{A_n}{A_{n+N}} = 3 \tag{17}$$

Следовательно, при измерениях l мы должны выбрать N таким, чтобы A_n / A_{n+N} было как можно ближе к 3.

При этом

$$\boxed{s_l \approx 3l\,\frac{s_a}{A_n}} \tag{18}$$

Задание к работе

1. Рассчитать период собственных колебаний в контуре с заданным значением индуктивности для трех значений емкости C_i и сделать оценку стандартного отклонения s_T по известным s_C и s_L.
2. Получить на экране осциллографа картину свободных колебаний с минимальным значением затухания (при минимальном значении сопротивления R_k) и определить экспериментально периоды колебаний для тех же случаев, что и в п.1.
3. Рассчитать стандартные отклонения s_T для экспериментально определенных значений периода.

4. Построить график зависимости рассчитанных теоретически и определенных экспериментально периодов колебаний от емкости на одних и тех же осях. В каких осях строить график решить самостоятельно.
5. При одном из значений емкости C_i (по указанию преподавателя) измерить логарифмический декремент l для пяти различных сопротивлений R_k. Оценить стандартное отклонение s_l. Построить график зависимости l от R (полного сопротивления контура).
6. Вычислить логарифмический декремент для контура по формуле (12) при тех же значениях сопротивления R, что и в п.5.
7. Полученные в п.6 значения нанести на график, простроенный в соответствии с п.5.
8. Вычислить критическое сопротивление для контура при одном из значений емкости конденсатора. Убедиться экспериментально, что при таком значении сопротивления колебания прекращаются.
9. Сделать вывод о степени соответствия модели колебательного контура с идеальными элементами R, L и C нашему реальному контуру.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными? Получите дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания в колебательном контуре.
2. Как выглядит решение дифференциального уравнения для случая затухающих колебаний? Чему равны период колебаний T и коэффициент затухания b ? Как эти величины выражаются через параметры контура L, C и R ?
3. Что такое логарифмический декремент? Как он выражается через параметры контура? Соотношение между l и b .
4. Что такое критическое сопротивление? Его выражение через параметры контура.
5. Как с помощью осциллографа измерить период колебаний T ? В каком случае период колебаний можно считать равным $2p\sqrt{LC}$?
6. Как с помощью осциллографа измерить логарифмический декремент?
7. Каким требованиям должны удовлетворять катушка индуктивности и конденсатор, чтобы соответствующий контур наиболее точно описывался дифференциальным уравнением (3) ?

Литература

1. *Савельев И. В*. Курс общей физики.- Кн2.- М.: Наука. Физматлит, 1998.- § 13.3
2. *Трофимова Т. И*. Курс физики.- М.: Высшая школа , 1997.-§ 143, 146.
3. *Б.М Детлаф А.А.,Яворский*. Курс физики.- М.: Высшая школа, 1999.-§ 28.1