Лекция 2.20

РЯДЫ (5)

Степенные ряды.

Определение.

Степенным рядом называют функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (*)$$

Если $x_0 = 0$, то имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (**)$$

В дальнейшем будем рассматривать ряды вида (**), т. к. они сводятся к рядам вида (*) подстановкой $x - x_0 = x'$.

Для простоты, степенным рядом будем называеть функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

где a_n, ...— постоянные вещественные числа, называемые **коэффициентами ряда.**

Постараемся выяснить, как устроена область сходимости любого степенного ряда. Заметим, что всякий степенной ряд сходится в точке $x=0$, причем **существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

Сходимость степенных рядов.

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда следующую числовую последовательность:

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Могут представиться два случая:

1) последовательность является неограниченной;
2) последовательность является ограниченной.

В случае 2) у последовательности существует конечный верхний предел, который мы обозначим через L. Этот верхний предел L заведомо неотрицателен (так как все элементы последовательности неотрицательны, а следовательно, и любая предельная точка этой последовательности неотрицательна).

Другими словами могут представиться следующие три случая:

I) последовательность является неограниченной;

II) последовательность является ограниченной и имеет конечный предел L>0;

III) последовательность является ограниченной и имеет предел *L=0.*

Теорема (Коши — Адамара).

I. Если последовательность

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

не ограничена, то степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

сходится лишь при $x=0$.

II. Если последовательность ограничена и имеет верхний предел *L*>*0,* то ряд абсолютно сходится для значений *x,* удовлетворяющих неравенству $|x| < 1/L$ и расходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1/L$.

III. Если последовательность ограничена и ее верхний предел *L*=*0,* то ряд абсолютно сходится для всех значений *x.*

АДАМАР Жак Hadamard Jacques Salomon :
французский математик,
(08.12.1865 - 17.10.1963).
иностранный почетный член (1929) АН СССР,
член Парижской АН (1912).

"Исследование психологии процесса изобретения в области математики"

Теорема

Для каждого степенного ряда, если он не является рядом, сходящимся лишь в точке x=0, существует положительное число R (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$

Это число *R называется* ***радиусом сходимости*** *рассматриваемого степенного ряда, а интервал (-R, R) называется промежутком сходимости этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

в случае, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad R = \infty.$$

Замечание . На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$, *степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема (Абеля). Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, тогда $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

Следовательно $\exists M: \ \forall n \ \left|a_n x_0^n\right| < M$.

Запишем равенство: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

Ряд из абсолютных величин сходится т. к.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Значит ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно

Следствие. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_0$, то он расходится $\forall x : |x| > |x_0|$.

Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_1, для которой $|x_1|$, > $|x_0|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x для которых $|x| < |x_1|$, , и, в частности, в точке x_0, что противоречит условию

Область сходимости.

Возможны три случая:

1) Область сходимости состоит только из одной точки $x = 0$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Действительно $\forall x \ \exists N: \ \forall n > N \ \left|n^n x^n\right| > 1$.

Радиус сходимости R =0

2) Область сходимости $D=(-\infty,\infty)$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

Действительно $\forall x\ \ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{x}{n}\right|<1$ и для $n>N$ члены ряда меньше сходящейся геометрической прогрессии.

Радиус сходимости $R=\infty$

3) Область D ограничена.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$

$D = (-1,1).$

Радиус сходимости R =1

Для определения радиуса сходимости нужно исследовать ряд из модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|.$$

Применим признак Даламбера. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$$

По признаку Даламбера для сходимости необходимо выполнение условия

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Ряд абсолютно сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

Ряд расходится при тех значениях x, для которых

$$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Таким образом, для ряда радиус абсолютной сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Замечание.

Если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

то можно убедиться, что ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$$

то $R = 0$.

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Замечание.

Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то **интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости,** а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Например ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^{N(n)}$,

где $N(n)$ произвольная функция аргумента n.

Для определения области сходимости применяют признак Даламбера.

В частности рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^{np}, \quad p = 2,3,4,\ldots .$$

Применяя признак Даламбера, получим $R = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^{n^2} = 1 + 3x + 3^4x^4 + 3^9x^9 + \dots \; .$$

Найти радиус сходимости по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ не представляется возможным, т.к. коэффициенты ряда $a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}, \dots$ равны нулю. Поэтому применим признак Даламбера: $k = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(3x)^{(n+1)^2}}{(3x)^{n^2}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|3x|^{2n+1}$. Этот предел будет равен ∞, если $|3x| > 1$, ряд расходится; этот предел будет равен нулю, если $|3x| < 1$, и ряд будет сходиться при $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ или на интервале $(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3})$.

Рассмотрим поведение ряда на концах интервала. При $x = -\frac{1}{3}$ ряд

примет вид $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2} = 1-1+1-1+1-\dots$, ряд расходится, при $x = \frac{1}{3}$

ряд примет вид $\sum_{n=0}^{\infty}(1)^{n^2} = 1+1+1+\dots$, ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда - интервал $(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - ряд расходится,

$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - ряд сходится условно.

Окончательно $x\in[-1,1)$.

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n-1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=1,$$

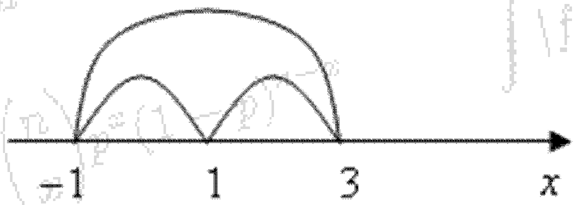
$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$ - ряд сходится,

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)^2}$$ - ряд сходится,

$$x\in[-1,1].$$

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2.$$



$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$ - ряд сходится условно,

$$x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ - ряд расходится,

$$x\in[-1,3).$$

Пример.

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dots$$

Ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$|u_n|=\frac{|x^{2n-1}|}{2n-1},\quad |u_{n+1}|=\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|}=|x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При x = -1 имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots,$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1; 1].