Лекция 2.19

РЯДЫ (4)

Функциональные ряды.

Для представления различных функций в математическом анализе широко используются ряды и последовательности, членами которых являются **не числа, а функции**, определенные на некотором фиксированном множестве

Такие ряды и последовательности называются **функциональными**.

Основные определения

Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, \ldots \ldots n, \ldots$ ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, **то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$, мы и будем называть функциональной последовательностью.**

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть **членами или элементами рассматриваемой последовательности**, а множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$ будем называть **областью определения** этой последовательности.

Для обозначения функциональной последовательности мы, как правило, будем использовать фигурные скобки: *$\{f_i(x)\}$*.
Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_k(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество *$\{x\}$*.
Формально написанную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности будем называть **функциональным рядом**.

При этом отдельные функции *$u_n(x)$* мы будем называть **членами рассматриваемого ряда**, а множество *$\{x\}$,* на котором определены эти функции, будем называть **областью определения этого ряда**.

Как и в случае числового ряда, сумму первых *n* членов функционального ряда будем называть *n*-й частичной суммой этого ряда.

Частичная сумма *n* первых членов ряда обозначается $S_n(x)$; остаток ряда - $r_n(x)$.

Отметим, что изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей, ибо **каждому функциональному ряду однозначно соответствует функциональная последовательность**
$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$
его частичных сумм и, наоборот, **каждой функциональной последовательности однозначно соответствует функциональный ряд** с членами $u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ при $n>2$.

Сходимость функциональной последовательности (функционального ряда) в точке и на множестве.

Предположим, что областью определения функциональной последовательности (функционального ряда) является множество *{x}*. Фиксируем произвольную точку x_0 *множества {x}* и рассмотрим все члены функциональной последовательности (функционального ряда) в этой точке x_0. При этом получим числовую последовательность (числовой ряд).

Если указанная числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится в точке x_0.

Итак, зафиксировав некоторую точку x, мы имеем дело с обычным числовым рядом.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке x,* если последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$ или

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon, x)$, что $\forall n > N \; |S_n(x) - S(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots| < \varepsilon$.

Это - обычная или ***поточечная*** сходимость ряда, так как номер N зависит не только от ε, как в числовых рядах, но и от точки x. То есть в каждой точке x ряд сходится со своей скоростью.

Критерий Коши поточечной сходимости ряда. Это – критерий Коши для последовательности частичных сумм ряда.

Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился в точке x, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x), \forall n > N, \forall p \geq 0\ \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x) + \ldots u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Ox.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется **областью сходимости** этой последовательности (ряда).

Мы будем рассматривать в качестве области сходимости – интервал оси Ox

В конкретных ситуациях область сходимости может совпадать с областью определения, являться подмножеством области определения или вообще быть пустым множеством.

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек x множества $\{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют **предельной функцией** функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$

Аналогично, если функциональный ряд имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множестве определена функция ***S(x)*, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его суммой**

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Ряд сходится в области $x \in (-1,1)$.

При $|x| \geq 1$ ряд расходится.

Сумма ряда $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ есть функция независимой переменной x.

В примере $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Эта функция есть сумма только при $x \in (-1,1)$.

Примеры.

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$ сходится только в точке $x=0$, во всех остальных точках ряд расходится. $V:\{0\}$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится во всех точках оси, $V=R$.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ сходится в области $V=(-1,1]$.

4) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\cos x}$ расходится во всех точках оси $V=\varnothing$.

При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных.

Для ряда этого может и не иметь место.

Равномерная сходимость функциональных рядов.

Определение.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* $\{x\}$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что для всех номеров* n, *удовлетворяющих условию* $n \geq N(\varepsilon)$, *и для всех точек* x *множества* $\{x\}$ *справедливо неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x> т. е. утверждается, что для любого ε >0 найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство справедливо сразу ***для всех точек x множества*** $\{x\}$

Замечание 2. Из определения непосредственно вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $S(x)$ и на любом подмножестве множества $\{x\}$.

Определение. Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве *{x}* к сумме *S(x)*, если последовательность *{S_n(x)}* его частичных сумм сходится равномерно на множестве *{x}* к предельной функции *S{x)*.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **называется равномерно сходящимся в области** D, **если** $\forall \varepsilon \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon)$ **выполняется неравенство**

$\left|r_n(x)\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in D.$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для того чтобы функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

равномерно на множестве *{x}* сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного ε>0 нашелся номер *N(ε),* гарантирующий справедливость неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию *n>N(ε),* всех натуральных *p (p=1, 2, ...)* и всех точек x множества *{x}*.

Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении удобных для приложений достаточных признаков равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Карл Те́одор Ви́льгельм Ве́йерштрасс
(*Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*;
31 октября 1815 — 19 февраля 1897)
— немецкий математик.

Нельзя быть настоящим математиком,
не будучи немного поэтом.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что $\forall x \in D \; |u_n(x)| < c_n$.

В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называют **мажорантой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или **мажорирующим рядом**.

Доказательство.

Фиксируем произвольное ε>0. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда найдется N(ε) такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и всех натуральных p.

Из этого неравенства, условий теоремы и из того, что модуль суммы *p* слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

для всех номеров *n*, удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и всех натуральных *p*.

В силу критерия Коши равномерной сходимости ряд сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса кратко может быть сформулирован так: ***функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом***.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда, то есть, ***ряд может равномерно сходится и не иметь мажорирующего числового ряда***

Пример $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Ряд сходится равномерно на интервале $0<x<1$ к сумме $\ln(1+x)$, поскольку разность между $\ln(1+x)$ и n-й частичной суммой этого ряда, равная остаточному члену $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$, для всех x из интервала $0<x<1$ *удовлетворяет неравенству*

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant 1/(n+1).$$

Однако для данного функционального ряда не существует на интервале $0<x<1$ мажорирующего его сходящегося числового ряда, так как для каждого номера k

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

$$\forall x \quad \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Т. к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \text{сходится}\ \forall x.$$ Сумма ряда равна $S(x)=e^x$.

Эта сходимость равномерная для любой конечной области D, т. к.

$\left|S(x)-S_n(x)\right|<\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}<\varepsilon.$ x^{n+1} растет медленнее $(n+1)!$.

Для всей числовой оси сходимость неравномерная, т. к. $\forall n$

можно найти такое x, что $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}>\varepsilon.$

Теорема (признак Дини). *Если все члены функционального ряда непрерывны и неотрицательны (или неположительны) на замкнутом ограниченном множестве {x} и если в каждой точке множества {x} этот ряд сходится и сумма его является непрерывной на множестве {x} функцией, то его сходимость является равномерной на множестве {x}.*

Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

Определение . *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной нет множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число $M>0$, что для всех номеров n и всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

Теорема (признак Дирихле —Абеля). *Если функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

обладает равномерно ограниченной на множестве {x} последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ не возрастает в каждой точке множества {x} и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) v_n(x)]$$

сходится равномерно на множестве {x}.

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}.$$

Так как последовательность $v_n(x) = \frac{1}{n+(1+|x|)^n}$

не возрастает в каждой точке бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и равномерно на этой прямой сходится к нулю, то в силу признака Дирихле—Абеля исходный ряд сходится равномерно на любом множестве, на котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$$

обладает равномерно ограниченной последовательностью частичных сумм.

Для вычисления n-й частичной суммы $S_n(x)$ этого ряда просуммируем тождество

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

о всем номерам k от 1 до n. При этом получим соотношение

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

из которого вытекает равенство

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следовательно, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

которое означает, что последовательность частичных сумм равномерно ограничена на любом фиксированном отрезке, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, где $m=0, \pm 1, \ldots$

Свойства равномерно сходящихся рядов.

Почленный переход к пределу

Рассмотрим произвольную точку x_0 вещественной оси R и произвольный произвольное множество (интервал) D для которого эта точка является предельной. При этом точка x может сама не принадлежать интервалу.

Теорема.

Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится равномерно на множестве D к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке x_0 предел

$$\lim_{x \to x_0} u_k(x) = b_k$$

то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке x_0 предел, причем

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\lim_{x \to x_0} u_k(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad (*)$$

Таким образом символ предела и символ суммирования можно переставлять местами (т.е. **к пределу можно переходить почленно**).

Следствие. Если в условиях теоремы дополнительно потребовать, чтобы точка x принадлежала множеству D и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда были непрерывны в точке x_0, то и сумма $S(x)$ этого ряда будет непрерывна в точке x_0.

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(x_0)$ *и равенство (*)принимает вид*

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0)$$

а это и означает непрерывность суммы $S(x)$ *в точке* x_0.

Теорема. Если ряд из непрерывных функций равномерно сходится в D, то его сумма есть функция, непрерывная в этой области

Для **доказательства** достаточно применить предыдущее след-ствие к каждой точке x множества D

Теорема о непрерывности суммы ряда.

Пусть члены $u_n(x)$ функционального ряда $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывные функции в точке x_0 - внутренней точке области V. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в области V. Тогда сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке $x_0 \in V$.

Доказательство. Так как ряд сходится равномерно в V, то

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in V\ \left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \textit{в частности}\ \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $u_n(x)$ - непрерывные функции в точке x_0, то и $S_n(x)$ непрерывна в x_0 как сумма конечного числа непрерывных функций.

Зафиксируем n>N. По непрерывности $S_n(x)$

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| = \left|S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)\right| \le$$

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| + \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| + \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|S(x) - S(x_0)\right| < \varepsilon$, то есть сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке $x_0 \in V$.

Пример.

Мы показали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно $\forall x$.

Следовательно его сумма непрерывна. Другое дело, что сумму найти трудно.

Возьмем n членов ряда. Их сумма равна $S_n(x)$.

Оценим предельную абсолютную ошибку

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\sin kx|}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = r_n.$$

Оценка остатка ряда r_n зависит от n и не зависит от x.

Почленное интегрирование функциональных рядов

При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных.

Для ряда этого может и не иметь место.

Теорема. Если ряд из непрерывных функций равномерно сходится к своей сумме *S(x)* на сегменте *[a, b]* и если каждый член этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую на сегменте *[a, b]*, то и сумма *S(x)* интегрируема на сегменте *[a, b]*, причем указанный ряд можно интегрировать на сегменте *[a, b]* почленно, т. е. можно утверждать, что

числовой ряд $\int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$.

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x)\,dx$

Таким образом, $$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \ .$$

Доказательство. Так как ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в V, то его сумма S(x) непрерывна (теорема о непрерывности суммы ряда) и $\exists\, \breve{S} = \int_a^b S(x)dx$

Так как $u_n(x)$ непрерывны, то $\exists \int_a^b u_n(x)dx = \breve{u}_n$. Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$, покажем, что он сходится к $\int_a^b S(x)dx$.

Обозначим частичную сумму

$$\breve{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b S_n(x)dz.$$

Так как ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$$

равномерно сходится в V, то

$$\forall n > N \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in V$$

.

Оценим

.

$$\left|\breve{S} - \breve{S}_n\right| = \left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left(S(x) - S_n(x)\right)dx\right| \le \int_a^b \left|S(x) - S_n(x)\right|dx < \int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b-a)$$

Теорема справедлива и для переменного внешнего предела

$$\int_a^x S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)\,dx \quad a \le x \le b.$$

Почленное дифференцирование функциональных рядов

В дальнейшем под словами «функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$» мы будем подразумевать, что функция $f(x)$ имеет обычную (двустороннюю) производную в любой внутренней точке сегмента $[a, b]$, правую производную $f'(a+0)$ в точке a и левую производную $f'(b - 0)$ в точке b.

Теорема Если каждая функция $u_k(x)$ имеет производную на сегменте [a, b] и если ряд из производных

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

сходится равномерно на сегменте [a, b], а сам ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента [a, b], то этот последний ряд сходится равномерно на сегменте [a, b] к некоторой сумме S(x), причем этот ряд можно дифференцировать на сегменте [a,b] почленно, т. е. его сумма S(x) имеет производную, являющуюся суммой ряда из производных

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'$$

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ сходится равномерно, то его сумма $\breve{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ - непрерывная функция (теорема о непрерывности суммы ряда). Ее можно интегрировать, применяя теорему о почленном интегрировании.

$$\int_a^x \breve{S}(x)dx = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n{}' dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a)\right) = S(x) - S(a)$$

Дифференцируя, получим $\breve{S}(x) = S'$, то есть

$$\breve{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x) = S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'.$$

Замечание 1. В теореме предполагается **только существование на сегменте [*a*, *b*] производной** у каждого члена ряда. Ни ограниченность, ни тем более непрерывность указанной производной не предполагается.

Замечание 2. Если все же дополнительно предположить непрерывность производной у каждого члена последовательности на сегменте [a, b], то и предельная функция $S(x)$ будет иметь производную, непрерывную на сегменте $[a, b]$.

Из теоремы о почленнном дифференцировании легко вытекает следующее утверждение.

Теорема . *Если каждая функция $u_n(x)$ имеет первообразную $U_n(x)$ на сегменте [a,b] и если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится равномерно на сегменте [a, b] к функции S(x), то и функция S(x) имеет первообразную U(x) на сегменте [a, b]. При этом

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$$

Утверждение. **Равномерная сходимость не выводит из класса функций, имеющих предел в данной точке, из класса непрерывных функций, из класса интегрируемых функций, из класса функций, имеющих первообразную и (в случае равномерной сходимости производных) из класса дифференцируемых функций.**