Лекция 2.17

РЯДЫ (3)

Дополнения к свойствам знакоположительных рядов

Признаки Даламбера и Коши были основаны на сравнения рассматриваемого ряда с рядом, представляющим собой сумму членов геометрической прогрессия.

Рассмотрим признак, основанный на сравнении рассматриваемого ряда с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ \ldots$$

Признак Раабе.

РААБЕ Жозеф Людвиг (1801—1859), швейцарский математик и физик, профессор

Теорема (признак Раабе). Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при L>1 и расходится при L<1.

При L=1 вопрос о сходимости остается открытым.

Пример применения признака Раабе
Рассмотрим ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)}$$

,

где обозначение (k)!! означает произведение всех четных (нечетных) чисел от 2 до k (от 1 до k), если k четно (нечетно). Используя признак Даламбера, получим

.

$$D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n-1)!!(2n-2)!!(2n-1)}{(2n)!!(2n+1)(2n-3)!!}=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

Таким образом, признак Даламбера не позволяет сделать определенного утверждения о сходимости ряда. Применим признак Раабе:

$$R_n = n\left(\frac{1}{D}-1\right) = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right) = \frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2} = \frac{n^2\left(6-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2} > 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Существует ли такой универсальный ряд, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед взятого ряда с неотрицательными членами?

Утверждение. Для каждого сходящегося ряда существует ряд, сходящийся медленнее этого ряда.

Формула Стирлинга — **асимптотическая** формула для вычисления факториала:

Стирлинг (Stirling) Джеймс (1692—1770), шотландский математик,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(n^{-4}\right)\right),$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}$$

Знакопеременные ряды.

Определение

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным

Пример знакопеременного ряда $1+2-3-4-5+6+7-\dots$.

Теорема

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится, если сходится ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Доказательство.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\cdot$ является рядом с неотрицательными членами. Если этот ряд сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+...+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+...+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}|<\varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\cdot$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Определение

Если сходится ряд из абсолютных величин, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают

Определение

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют **условно сходящимся**,

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$$

сходится абсолютно, т.к. $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|$ сходится как ряд геометрической прогрессии

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признаки Абеля и Дирихле для знакопеременных рядов.

Предположим, что ряд представим в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot c_n)$$

где $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ две числовые последовательности. Ряды такого типа можно исследовать на сходимость, если последовательности удовлетворяют некоторым условиям.

(Abel Niels Henrik)

АБЕЛЬ Нильс Хенрих
(1802-1829гг.)
: норвежский математик.

Признак Абеля. Если 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а 2) $\{c_n\}$ - монотонная и ограниченная последовательность, т.е. существует число K, такое, что $|c_n| \le K$ для любого n, то ряд (7) сходится.

Имя Абеля увековечено в самых различных областях этой науки: существует целый ряд теорем, носящих имя Абеля, есть абелевы интегралы, абелевы уравнения, абелевы группы, формулы Абеля, преобразования Абеля...

Молодой математик, совершивший переворот в науке, вернулся на родину тем же бедным, никому неизвестным "студиозиусом" Абелем, каким уехал. Ему не удалось найти никакого места. Большой туберкулезом, "бедный, как церковная мышь", по его собственным словам, двадцатишестилетний Абель в состоянии самой черной меланхолии скончался.

Научный подвиг Абеля

Иога́нн Пе́тер Гу́став Лежён-Дирихле́
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet,
13 февраля 1805, — 5 мая 1859,
немецкий математик,

Признак Дирихле. Если 1) частичные суммы $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ в совокупности ограничены, т.е. найдётся такое число M, что $|B_n| \le M$ для любого n, а 2) $\{c_n\}$ есть монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то ряд (7) сходится.

Признак Дирихле для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k \cdot v_k\right)$$

Если 1) частичные суммы $B_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ в совокупности ограничены, т.е. найдётся такое число M, что $|B_n| \le M$ для любого n, а 2) $\{v_k\}$ есть монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то ряд сходится.

3°. Выясним вопрос о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$, где x — некоторое фиксированное вещественное число. Пользуясь обозначениями теоремы , положим $u_k = \cos kx$, $v_k = \frac{1}{k}$. Оценим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Поскольку для любого номера k

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то, суммируя это соотношение по k от 1 до n, получим

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = 2S_n \sin\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для любого x, не кратного 2π, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена:

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

По признаку Дирихле рассматриваемый ряд сходится для любого значения x, не кратного 2π. Если же x кратно 2π, то рассматриваемый ряд превращается в гармонический и расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1. **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух **расходящихся** рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2. В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, **не изменяющая их порядка,** сохраняет сходимость и величину ряда.

3. Если ряд **сходится абсолютно**, то ряд, полученный из него **любой перестановкой членов**, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Замечание

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4. Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать

Теорема

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Например $(a_1 + a_2 + ... + a_n + ...)(b_1 + b_2 + ... + b_n + ...) =$

$= a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + ... + (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + ... + a_1 b_n) + ...$

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

5 Теорема о перестановке членов в абсолютно сходящихся рядах.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, тогда его члены можно переставлять, получая абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.

Доказательство. Обозначим s - сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, S – сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$. Он знакоположительный, так как $a_n > -|a_n|$. Он сходится по первому признаку сравнения рядов по сравнению со знакоположительным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_n|)$, так как $a_n \le |a_n|$. Его сумма равна s + S.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен перестановкой членов из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Тогда знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ получен перестановкой членов из $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. По теореме Дирихле он сходится и имеет ту же сумму S.

Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$ получен перестановкой членов из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$. Следовательно, по теореме Дирихле, он сходится и имеет ту же сумму S + s.

Вычитая из сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, мы получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. По свойствам сходящихся рядов он сходится и имеет сумму, равную (S + s) – S = s.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный при перестановке членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дополнения к свойствам знакопеременных рядов

Переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных.

Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Георг Фридрих Бернгард Риман
(*Georg-Friedrich-Bernhard Riemann*,
17 сентября 1826,— 20 июля 1866,)
— немецкий математик.

Теорема (Римана). Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед взятое число S, можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу S.

Доказательство. Так как ряд A условно сходится, то ряды P, Q, составленые из его положительныъх и отрицательных членов расходятся (теоремы о структуре знакопеременного ряда). Пусть для определенности S>0. Переставляем в начало ряда столько положительных членов, чтобы их сумма стала больше S, Теперь переставляем столько отрицательных членов, чтобы частичная сумма ряда стала бы меньше S. Повторяем этот процесс. Процесс осуществим для любого S, так как ряды P, Q расходятся (т.е. повторением членов можно набрать любую их сумму). С другой стороны, частичная сумма сконструированного ряда сходится именно к S. В сконструированном ряде $|S_n - S| < b_n, где\ b_n$ - тот член ряда, добавление которого меняет знак $S_n - S$. $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ так как знакопеременный ряд условно сходится.

Сам ход доказательства напоминает добавление положительных членов – гирь на одну чашку весов, пока весы не покажут вес, больший S. Последний член – гиря b_n. Затем добавление на другую чашку весов столько отрицательных – членов (вернее гирь, весом, равным модулям этих членов), чтобы весы показали вес, меньший S. Процесс повторяется. Вес гирь, вызывающих переход указателя весов через S, убывает до нуля, так как для условно сходящегося ряда выполняется необходимый признак сходимости. Поэтому $\{S_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

Произведение рядов

Произведение рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ для многих целей удобно записывать в специальном виде:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_k + u_2v_{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + u_kv_1) + \ldots .$$

Теорема (Мертенса). Ряд, полученный перемножением двух рядов указанным специальным способом, сходится к произведению сумм перемножаемых рядов в случае, когда один из перемножаемых рядов сходится абсолютно, а другой — сходится хотя бы условно.

Франц Карл Иосиф МЕРТЕНС (1840-1927)

немецкий математик. Был профессором Берлинского, а затем Краковского университетов. Труды относятся к аналитической теории чисел. Он первым обратился к результатам П. Л. Чебышева по теории распределения простых чисел.

Знакочередующиеся ряды.

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Признаки сходимости знакочередующихся рядов

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1.07.1646– 14.11.1716), немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Теорема (признак Лейбница).

Если в знакочередующемся ряде

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ **и** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ **то ряд сходится. Причем**

$$S < u_1, \ |r_n| < u_{n+1}.$$

Доказательство.

Возьмем для определенности $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

Рассмотрим последовательность сумм

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Она возрастающая.

$$S_{2m}=u_1-\left[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\ldots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}\right].$$

Выражение в квадратных скобках положительная величина.

Следовательно последовательность S_{2m} ограничена величиной u_1.

То есть, последовательность с четными индексами возрастает и ограничена сверху.

Значит существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, а т. к.

$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$; $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то и

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

При этом $S<u_1$

Если бы перед рядом стоял минус, то картина зеркально отразится относительно точки $x = 0$.

Остаток ряда $r_n = \pm\left(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots\right)$ удовлетворяет условиям признака Лейбница.

Поэтому его сумма $\left|r_n\right| < u_{n+1}$.

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Ряд сходится по признаку Лейбница,

т. к. $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Ряд сходится условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. расходится

Но ряд сходится плохо, т. к. $|r_n| < \frac{1}{n}.$

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p>0)$ является знакочередующимся.

При $p > 0$ он удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ и, следовательно, сходится.

Если заменить все члены их абсолютными величинами, получим обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Таким образом, исходный знакочередующийся ряд при $p > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < p \leq 1$ сходится условно.

Минимальные требования

Необходимый признак сходимости		
Ряды с положительными членами		**Знакопеременные ряды**
Признаки сравнения **Признак Даламбера** **Признак Коши** **Интегральный признак**		**Теорема Лейбница (знакочередующиеся ряды)** **Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)**