Лекция 2.17

РЯДЫ (2)

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Признак Даламбера (д’Аламбера).

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

D`Alembert Jean Le Rond

Признак Даламбера

Конечная форма признака Даламбера.

Пусть $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$.

Тогда $a_{n+1} \le qa_n \le q^2 a_{n-1} \le q^3 a_{n-2} \le \ldots \le q^n a_1$.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \le \frac{a_1}{1-q},$$ и

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Можно было, не оценивая частичную сумму ряда, заключить, что ряд сходится по первому признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пусть $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1$, Тогда $a_2 \ge qa_1 > a_1,\ a_3 \ge qa_2 \ge q^2 a_1 > a_1 \ldots a_n \ge q^{n-1} a_1 > a_1$. Поэтому a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Предельная форма признака Даламбера (признак Даламбера)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n > 0)$.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то

при $\rho < 1$ - ряд сходится,

при $\rho > 1$ - ряд расходится,

при $\rho = 1$ - ряд может сходится или расходиться.

Доказательство.

Пусть $\rho < 1$

$$\Rightarrow \exists N: \ \forall n > N \ \ \rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0.$$

Можно подобрать такое ε, что $\rho + \varepsilon = \rho_1 < 1$.

Тогда

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \rho_1, \ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \rho_1, \ \ldots \Rightarrow u_{N+1} < \rho_1 u_N, \ u_{N+2} < \rho_1^2 u_N, \ \ldots, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < u_N \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n.$$

Т.к. последний ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то исходный ряд сходится.

Пусть $\rho > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, т.е. ряд расходится.

Предпосылки для применения признака Даламбера

1) В общий член ряда («начинку» ряда) входит какое-нибудь число в степени, например

$$2^*, 5^*, 9^* .$$

и так далее. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.

2) В общий член ряда входит факториал

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится.

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

О сходимости ряда ничего сказать нельзя. Необходимо применить другой достаточный признак сходимости.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^4-(n+1)^2+3}{4^{n+1}\cdot(n+1+1)}}{\dfrac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^4-(n+1)^2+3)\cdot(n+1)}{4^{n+1}\cdot(n^4-n^2+3)\cdot(n+2)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^4-(n+1)^2+3)\cdot(n+1)}{4\cdot4^n\cdot(n^4-n^2+3)\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

1 1

Одного порядка роста

Пример

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n\cdot(n+5)\cdot(n+2)!}{7\cdot 7^n\cdot(n+6)\cdot(n+1)!} \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n\cdot(n+5)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{7\cdot 7^n\cdot(n+6)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)} \overset{(4)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+5)\cdot(n+2)}{7\cdot(n+6)} \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+7n+10}{n+6} = \frac{\infty}{\infty} \overset{(6)}{=} \frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+7n+10}{n^2}}{\frac{n+6}{n^2}} = \frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{7}{n}^{\to 0}+\frac{10}{n^2}^{\to 0}}{\frac{1}{n}^{\to 0}+\frac{6}{n^2}^{\to 0}} =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0} = \frac{1}{7}\cdot\infty = \infty > 1$$

Пример

. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$. Рассмотрим $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}\ e^n n!}=\frac{e(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$, так как последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастая, стремится к e при $n\to\infty$, то $\forall n>N\ \frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

. Следовательно, $\forall n>N\quad a_{n+1}>a_n$. Поэтому a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$, необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Заметим, что $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$. Поэтому признак Даламбера в предельной форме не дает ответ о сходимости или расходимости ряда, хотя признак в конечной форме позволяет установить расходимость ряда.

Признаки Коши

Коши, Огюстен **Луи** (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857)

Конечная форма радикального признака Коши.

Пусть $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$. Тогда $a_n \le q^n, q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по первому признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пусть $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$. Тогда $a^n \ge q^n > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

Предельная форма радикального признака Коши. (радикальный признак Коши).

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ (u_n > 0)$.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

при $l < 1$ - ряд сходится,

при $l > 1$ - ряд расходится,

при $l = 1$ - ряд может сходится или расходиться.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q < 1$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N \left|\sqrt[n]{u_n} - q\right| < \varepsilon$.

$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$ при малом ε. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по конечной форме радикального признака Коши.

Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N \left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$.

$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$ при малом ε. Тогда $a^n \geq q^n > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда **ПОЛНОСТЬЮ** находится в степени,зависящей от «n».

Либо когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда

Пример. Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}.$$

Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

.

Решение. Аналогично предыдущему примеру вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

В соответствии с радикальным признаком Коши, ряд расходится.

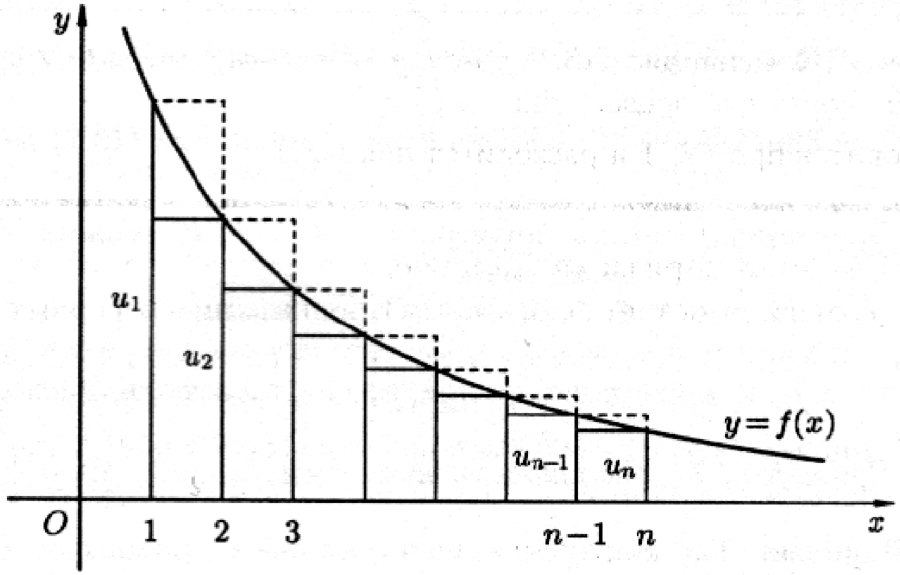
Теорема (интегральный признак Коши (Коши-Маклорена)).

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$, **члены которого являются значениями непрерывной функции** $f(x)$ **при целых значениях аргумента** x**:** $u_1 = f(1), \ldots, u_n = f(n), \ldots$ **и пусть** $f(x)$ **монотонно убывает в интервале** $[1, \infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ **и расходится, если интеграл расходится.**

Доказательство.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линией $y = f(x)$ с основанием от 1 до n.



Площадь ее равна $I_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx.$

Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки [1;2], [2;3], ...

Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\cdots+f(n)\cdot 1<\int_1^n f(x)\,dx<f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\cdots+f(n-1)\cdot 1,$$

$$u_2+u_3+\cdots+u_n<\int_1^n f(x)\,dx<u_1+u_2+\cdots+u_{n-1},$$

$$S_n-u_1<\int_1^n f(x)\,dx<S_n-u_n.$$

Рассмотрим два варианта.

1) Интеграл сходится, т.е. $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Тогда $I_n < I \Rightarrow S_n < u_1 + I$.

Последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом $u_1 + I$).
Следовательно, ряд сходится.

2) Интеграл расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$. Тогда из $S_n > u_n + I_n$.

Ряд расходится.

Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши является тот факт, что в общем члене ряда есть некоторая функция и её производная.

Пример

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Теперь нужно вычислить несобственный интеграл

Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$(*)=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\ln x\right|\right)\Big|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b^{\to+\infty}-\ln\ln 2\right)=+\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Замечание. У каждого признака сходимости есть своя «зона нечувствительности». Ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не позволяют установить расходимость гармонического ряда. Проверьте это. Гармонический ряд расходится, но расходится так слабо, что попадает в «зону нечувствительности» указанных признаков. Интегральный признак Коши имеет меньшую «зону нечувствительности» и позволяет установить расходимость гармонического ряда.

Пример. Применим интегральный признак к *гармоническому ряду*.

$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln b - \ln 1 = +\infty$ - интеграл расходится, поэтому и гармонический ряд расходится

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Применим интегральный признак Коши.

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(x^{-p+1}-1\right).$$

$$1)\ \ p>1\quad I=\frac{1}{p-1};$$

$$2)\ \ p<1\quad I=\infty;$$

$$3)\ p=1,\quad I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty.$$

Отсюда следует вывод

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{сходится при } p>1\\ \text{расходится при } p\le 1\end{cases}.$$

Интересно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ *сходится при* $q>1$ *и расходится при* $q\le 1$,

а ряды $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}, \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ расходятся (проверьте по интегральному признаку).

Теорема Дирихле о возможности перестановки местами членов ряда в сходящихся знакоположительных рядах.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящийся знакоположительный ряд. Тогда его члены можно переставлять, менять местами, полученный ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции.

Пусть меняются местами два члена ряда a_k и $a_m, m > k$. Тогда в исходном и полученном перестановкой членов ряде частичные суммы, начиная с S_m будут совпадать. Следовательно, ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, , будет сходиться и иметь ту же сумму.

Пусть при перестановке местами r членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму.

Пусть переставляются $r+1$членов ряда. Эта перестановка сводится к перестановке r членов ряда, а затем к перестановке еще какого-либо члена с каким-либо другим (перестановке двух членов ряда).

По индуктивному предположению при перестановке местами r членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму. Ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, будет сходиться и иметь ту же сумму. Следовательно, и при перестановке $r+1$ членов ряда ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.

Оценка ошибки при приближенных вычислениях суммы ряда.

$$S - S_n = r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \quad \forall n.$$

$$r_n < \int_n^{\infty} f(x)\, dx.$$

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1.$

$$r_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_n^{\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Для заданного ε можно оценить n из условия $r_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \le \varepsilon.$

Для $p = 2, \ \varepsilon = 0,001, \ \frac{1}{n} \le 0,001, \ n = 1000.$

Данный ряд **медленно (плохо)** сходится.

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},\quad p=3,\quad \varepsilon=0,001.$$

$$r_n<\frac{1}{2n^2}\le 0,001,\ \ n=24.$$

Пример 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\quad p=4,\quad \varepsilon=0,001.$$

$$r_n<\frac{1}{3n^3}\le 0,001,\ \ n=7.$$

Чем быстрее члены ряда стремятся к нулю, тем быстрее ряд сходится.

Знакопеременные ряды.

Определение

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным

Пример знакопеременного ряда $1+2-3-4-5+6+7-\ldots$.

Теорема

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится, если сходится ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Доказательство.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\cdot$ является рядом с неотрицательными членами. Если этот ряд сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\cdot$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Определение

Если сходится ряд из абсолютных величин, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают

Определение

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют **условно сходящимся**,

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признаки Абеля и Дирихле для знакопеременных рядов.

Предположим, что ряд представим в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot c_n)$$

где $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ две числовые последовательности. Ряды такого типа можно исследовать на сходимость, если последовательности удовлетворяют некоторым условиям.

(Abel Niels Henrik)

АБЕЛЬ Нильс Хенрих
(1802-1829гг.)
: норвежский математик.

Признак Абеля. Если 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а 2) $\{c_n\}$ - монотонная и ограниченная последовательность, т.е. существует число K, такое, что $|c_n| \le K$ для любого n, то ряд (7) сходится.

Имя Абеля увековечено в самых различных областях этой науки: существует целый ряд теорем, носящих имя Абеля, есть абелевы интегралы, абелевы уравнения, абелевы группы, формулы Абеля, преобразования Абеля...

Молодой математик, совершивший переворот в науке, вернулся на родину тем же бедным, никому неизвестным "студиозиусом" Абелем, каким уехал. Ему не удалось найти никакого места. Большой туберкулезом, "бедный, как церковная мышь", по его собственным словам, двадцатишестилетний Абель в состоянии самой черной меланхолии скончался.

Научный подвиг Абеля

Иога́нн Пе́тер Гу́став Лежён-Дирихле́
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet,
13 февраля 1805, — 5 мая 1859,
немецкий математик,

Признак Дирихле. Если 1) частичные суммы $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ в совокупности ограничены, т.е. найдётся такое число M, что $|B_n| \le M$ для любого n, а 2) $\{c_n\}$ есть монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то ряд (7) сходится.

Признак Дирихле для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k \cdot v_k\right)$$

Если 1) частичные суммы $B_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ в совокупности ограничены, т.е. найдётся такое число M, что $|B_n| \le M$ для любого n, а 2) $\{v_k\}$ есть монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то ряд сходится.

3°. Выясним вопрос о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$, где x — некоторое фиксированное вещественное число. Пользуясь обозначениями теоремы , положим $u_k = \cos kx$, $v_k = \frac{1}{k}$. Оценим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Поскольку для любого номера k

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то, суммируя это соотношение по k от 1 до n, получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = 2S_n\sin\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для любого x, не кратного 2π, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена:

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

По признаку Дирихле рассматриваемый ряд сходится для любого значения x, не кратного 2π. Если же x кратно 2π, то рассматриваемый ряд превращается в гармонический и расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1. **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух **расходящихся** рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2. В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, **не изменяющая их порядка,** сохраняет сходимость и величину ряда.

3. Если ряд **сходится абсолютно**, то ряд, полученный из него **любой перестановкой членов**, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Замечание

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4. Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать

Теорема

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k=1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Например $\left(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\right)=$

$$=a_1 b_1+\left(a_2 b_1+a_1 b_2\right)+\ldots+\left(a_n b_1+a_{n-1} b_2+\ldots+a_1 b_n\right)+\ldots.$$

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$$

сходится абсолютно, т.к. $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|$ сходится как ряд геометрической прогрессии

Знакочередующиеся ряды.

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\quad u_n \ge 0.$$

Признаки сходимости знакочередующихся рядов

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1.07.1646– 14.11.1716), немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Теорема (признак Лейбница).

Если в знакочередующемся ряде

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ **и** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ **то ряд сходится. Причем**

$S < u_1, \; |r_n| < u_{n+1}.$

Доказательство.

Возьмем для определенности $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

Рассмотрим последовательность сумм

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Она возрастающая.

$$S_{2m}=u_1-\left[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\ldots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}\right].$$

Выражение в квадратных скобках положительная величина.

Следовательно последовательность S_{2m} ограничена величиной u_1.

То есть, последовательность с четными индексами возрастает и ограничена сверху.

Значит существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, а т. к.

$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$; $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то и

$\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S.$

При этом $S<u_1$

Если бы перед рядом стоял минус, то картина зеркально отразится относительно точки $x = 0$.

Остаток ряда $r_n = \pm\left(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots\right)$ удовлетворяет условиям признака Лейбница.

Поэтому его сумма $\left|r_n\right| < u_{n+1}$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$

Ряд сходится по признаку Лейбница,

т. к. $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Ряд сходится условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$ расходится

Но ряд сходится плохо, т. к. $|r_n| < \frac{1}{n}.$

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p>0)$ является знакочередующимся.

При $p > 0$ он удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ и, следовательно, сходится.

Если заменить все члены их абсолютными величинами, получим обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Таким образом, исходный знакочередующийся ряд при $p > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < p \leq 1$ сходится условно.

Минимальные требования

Необходимый признак сходимости				
Ряды с положительными членами			Знакопеременные ряды	
Признаки сравнения Признак Даламбера Признак Коши Интегральный признак			Теорема Лейбница (знакочередующиеся ряды) Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)	