Лекция 2.16

РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

Определение ряда и его суммы.

Пусть дана бесконечная последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$.

Определение. **Выражение** $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ **называется рядом, а числа** $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ **- членами ряда.**

Краткая запись $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. u_n - общий член ряда.

Ряд считается заданным, если задана функция $u_n = f(n)$.

Пример 1.

$$u_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Пример 2.

$$u_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Иногда ряд задают рекуррентной формулой.

Пример.

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}.$$

Тогда $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{12}$, и т.д.

Пример.

Ряд 7+9+167+21+8+… не является заданным

Ряд 2+5+8+ 11+… задан, так как его общий член можно записать в виде 3n-1

Примеры

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$ - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Ее сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$,
2. 1+1+1+…..Сумма этого ряда бесконечна.
3. 1-1+1-1… Сумма этого ряда не существует (ни конечная, ни бесконечная).

Пусть дан ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Образуем последовательность частичных сумм

$S_1 = u_1,$
$S_2 = u_1 + u_2,$
....
$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$

Определение. **Если существует предел последовательности $\{S_n\}$**

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ **то ряд сходящийся и S - его сумма.**

Если последовательность $\{S_n\}$ не стремится к пределу, то ряд расходящийся.

Последнее имеет место в двух случаях:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty;$

2) не существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n.$

Пример (ряд геометрической прогрессии) .

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad \left(a \neq 0,\ |q| < 1\right);$$

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

Если **|q |<1,** то $q^n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1-q} = S.$

ряд сходится.

Если **|q |>1**, то $q^n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

ряд расходится

Если **q =1**, то $q^n = 1$, $S_n = na$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

ряд расходится

Если **q =1**, то $q^n = 1$, $S_n = na$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

ряд расходится

Если **q =-1**,то $S_1 = -a,\ S_2 = 0,\ S_3 = -a, \ldots;$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

ряд расходится

Ряд геометрической прогрессии
при |q |<1, сходится, при |q |≥1, расходится

Исследование сходимости рядов, как правило, сводится к вычислению некоторых пределов, при этом часто используются известные условия эквивалентности бесконечно малых, которые применительно к рядам принимают вид при $n \to \infty$

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p} = 0 \ \ (p>0), \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = 1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

Пример. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$

Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

который является сходящейся геометрической прогрессией с

$$q = \frac{2}{3} < 1 \quad ,$$

$$\frac{2^n}{n \cdot 3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Так как члены данного ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ то данный ряд сходится

Свойства сходящихся рядов.

1) Если ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то сходится ряд $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$.

Доказательство. $\sigma_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n = \lambda S_n$;

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S.$$

2) Если ряды $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ сходятся, то сходится ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = S' \pm S''$.

Доказательство. $\sigma_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = S'_n \pm S''_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S'_n \pm S''_n) = S' \pm S''.$$

Следствия

1.Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

2.Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

3.О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

3) Если ряд сходится, то сходится и ряд, в котором выброшено конечное число членов.

Пусть S сумма отброшенных членов, n — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда, будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда утем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$.

Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Замечание. Ряд, полученный из исходного ряда отбрасыванием первых k членов, называется **остатком ряда** и обозначается

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

Следствие. Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток.

4.Для того чтобы ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы сходился остаток ряда.

Поэтому сходимость ряда можно исследовать, «начиная с некоторого n».

5.Сходящиеся ряды можно складывать (или вычитать), получая сходящийся ряд с суммой, равной сумме (или разности) сумм исходных рядов.

Рассмотрим два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_n \pm b_n$. $S_{c\,n} = S_{a\,n} \pm S_{b\,n}$. Переходя к пределу в равенстве, получим $S_c = S_a \pm S_b$.

Необходимый признак сходимости ряда.

Необходимый признак. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Доказательство. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n,$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится.

Достаточный признак расходимости. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Доказательство (от противного). Пусть ряд сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Противоречие с $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n-1}$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \neq 0$

Пример Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расходится, так как $a_n \to e \neq 0$.

Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}; \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n};$$

$\triangle$ Для а), б) и в) получаем соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0,001} = \lim_{n\to\infty} (0,001)^{1/n} = 1 \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} = \Big[\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n\Big]^3 = e^3 \neq 0.$$

Пример.

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\ldots+\frac{n}{100n+1}+\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{100}\neq 0.$$ Ряд расходится.

Вообще стремление $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ не означает сходимости ряда,

то есть этот признак не является достаточным

Гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Гармонический ряд расходится

Доказательство

Запишем ряд в виде

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Очевидно, что этот ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad u_n \to 0$$

Ряд расходится

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

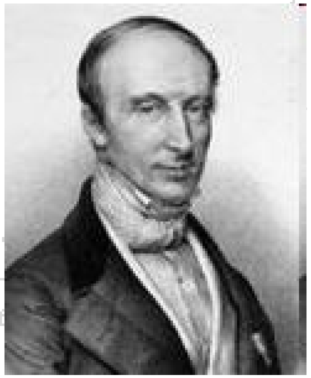
$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty.$$

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Критерий Коши (необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство*

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon .$$



Доказательство. (необходимость)

Пусть $s_n \to s$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство

$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при n>N. При n>N и любом целом p>0 выполняется также неравенство $|S - S_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|S_{n+p} - S_n| = |(S_{n+p} - S) + (S - S_n)| \le |S_{n+p} - S| + |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана.

Доказательство достаточности рассматривать не будем.

На практике как правило используются более простые признаки сходимости.

Критерий Коши расходимости ряда. (отрицание критерия Коши)

Для того чтобы ряд **расходился** *необходимо и достаточно,* чтобы $\exists \varepsilon > 0\ \forall N, \exists n > N, \exists p \geq 0 \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| > \varepsilon.$

Пример. Рассмотрим **гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} + \ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+p}\right| >$$

$\left|\frac{1}{n+p} + \ldots \frac{1}{n+p}\right| = \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}$, если выбрать $p = n$. Удалось для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall N, n$ выбрать $p = n$, чтобы $\left|S_{n+p} - S_n\right| > \varepsilon$. Следовательно, **гармонический ряд расходится.**

Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.
Однако, ограниченность частных сумм также не является достаточным признаком.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … +(-1)$^{n+1}$+… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad \textit{четных} \quad n \\ 1, & \textit{при} \quad \textit{нечетных} \quad n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к.

$|S_n| < 2$ при любом n.

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет.

Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых ***достаточных признаков.***

Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. **рядов с неотрицательными членами** (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (—1), что, как из-вестно, не влияет на сходимость ряда).

Ряды с положительными членами.

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ такой, что $\forall n \;\; u_n > 0$.

Теорема. Если частичные суммы ряда с положительными членами ограничены сверху $S_n < M$, то ряд сходится.

Доказательство. $S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots,$ т.к. $u_n > 0$.

Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то по признаку сходимости Вейерштрасса она имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S < M$.

Если ряд сходится, то $S_n < S$.

Если ряд с положительными членами расходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$.

Основная и довольно приятная особенность знакоположительных рядов в том, что частичные суммы ряда представляют собой неубывающую последовательность.

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1},\ т.к.\ a_n \geq 0.$$

Поэтому достаточно проверить, что последовательность частичных сумм ограничена сверху, чтобы по теореме Вейерштрасса утверждать, что последовательность частичных сумм имеет конечный предел, т.е. ряд сходится.

На этом основаны, практически, все признаки сходимости рядов.

Достаточные признаки сходимости ряда.

Признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (1), \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ (2) \ \left(u_n > 0, \ v_n > 0\right) \text{ и } \forall n \ u_n \le v_n. \quad (*)$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится ряд(1);

2) если расходится ряд (1), то расходится ряд(2).

$$1) \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \ \sigma_n < \sigma \Rightarrow S_n \le \sigma_n < \sigma.$$

Частичныеи суммы ограничены и в силу доказанного ряд (1) сходится.

$$2) \ S_n \to \infty, \ \sigma_n \ge S_n \Rightarrow \sigma_n \to \infty.$$

Признак сравнения справедлив, если условие (*) выполняется с какого-либо номера N в силу 3-го свойства сходящихся рядов.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\forall n \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

Т.к. $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$

а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$

.

Предельный признак сравнения.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A>0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно т.е. если один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится. Это понятие часто употребляют при сравнении рядов..

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon \text{ или } A-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<A+\varepsilon.$$

Пусть ряд (2) сходится.

Тогда по свойству 1 сходящихся рядов сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ и

т.к. $u_n<(A+\varepsilon)v_n\ \ \forall n>N$ следовательно ряд (1) сходится.

Если ряд (2) расходится, то в силу $u_n>(A-\varepsilon)v_n\ \ \forall n>N$ ряд (1) расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2-1}.$$

Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n^2-1} \cdot n = \frac{2}{3}.$$

Исходный ряд расходится.

Пока в библиотеке рядов, которые мы можем использовать для сравнения, всего два ряда: сходящийся ряд - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, известная еще из школы, и расходящийся гармонический ряд.

Заметим, что критерий Коши (как критерий сходимости), вообще, самый сильный инструмент при исследовании сходимости ряда, но его область применимости узка.

Третий признак сравнения.

Пусть имеются два строго положительных ряда $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\left(\forall n \in N:\ a_n>0,\ b_n>0\right)$.

Пусть, начиная с некоторого места, т.е. для $n \geq m$ $(m \in N)$ оказывается

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.