Лекция 2.15

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(9).

Система линейных однородных дифференциальных уравнений.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = 0, \\
&\frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Коэффициенты a_{ik} непрерывны в интервале $a < x < b$.

Пусть известны *n частных решений:*

$$\left.\begin{array}{llll} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & y_n^{(1)}, \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \ldots, & y_n^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & y_n^{(n)}. \end{array}\right\}$$

Назовём системой решений фундаментальной, если определитель

$$D = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

не равен тождественно нулю в интервале *(a, b)*.

Определитель

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

будем называть **определителем Вронского** системы векторных функций

Теорема.

Если $D(x_0)\neq 0$ в одной точке x_0, то $D(x)$ не обращается в 0 ни в какой точке интервала (a, b)

Теорема.

Фундаментальные системы существуют

Доказательство

Надо доказать 1) существуют n линейно независимых решений однородной системы.

В любой точке $(x_{0},\ y_{10,}\cdots y_{n0})$ для однородной системы выполнены условия теоремы Коши, следовательно, через любую такую точку пройдет единственная интегральная кривая – график решения однородной системы. Зададим такие точки – начальные условия, которые по теореме Коши определят решения

$$\vec{y}_1(x),\quad \vec{y}_1(x_0)=\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix},\quad \vec{y}_2(x),\quad \vec{y}_2(x_0)=\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix}\ldots\vec{y}_n(x),\quad \vec{y}_n(x_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}.$$

Эти решения линейно независимы, так как $W(x_0)=\begin{vmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Теорема. Если

$$y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \ldots,\ y_n^{(k)}\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

образуют фундаментальную систему частных решений системы, то общее решение имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{array}\right\}$$

Доказательство

Из доказанных свойств частных решений следует, что формулы представляют решение системы. Чтобы доказать, что это решение общее, нужно показать, что ***постоянные C_1 C_2, ..., C_n можно определить так, что функции y_1 ,y_2, ..., y_n будут при $x = x_0$ удовлетворять начальным условиям:***

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

для любых

$$y_1^{(0)}, \ y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n^{(0)}$$

Подставляя эти условия в выражения

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{array}\right\}$$

получим для определения C_1, C_2, ..., C_n ***системy n линейных алгебраических уравнений:***

$$C_1 y_i^{(1)}(x_0) + C_2 y_i^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_i^{(n)}(x_0) = y_i^{(0)} \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так как $D(x_0) \neq 0$, то система имеет личные от нуля решений C_1, C_2, . .., C_n. Подставляя найденные значения произвольных постоянных, в общее решение получим искомое частное решение.

Это и общая схема получения частного решение задачи Коши

Мы определили фундаментальную систему по формальному признаку — необращению в нуль определителя Вронского. Теперь рассмотрим обычное определение.

Определение.

Система векторных функций называется линейно независимой, если не существует такого набора постоянных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (которые не все равны нулю), что имели бы место в интервале (a,b) n тождеств:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_2 y_1^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_1^{(n)} = 0, \\ \alpha_1 y_2^{(1)} + \alpha_2 y_2^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_2^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_n^{(1)} + \alpha_2 y_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

В противном случае система функции называется *линейно зависимой.*

Теорема.

Для *n* функций, дающих решение системы линейных дифференциальных уравнений, понятия фундаментальной системы а линейно независимой системы совпадают.

Доказательство

Достаточно заметить, что определитель системы (*) и есть определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

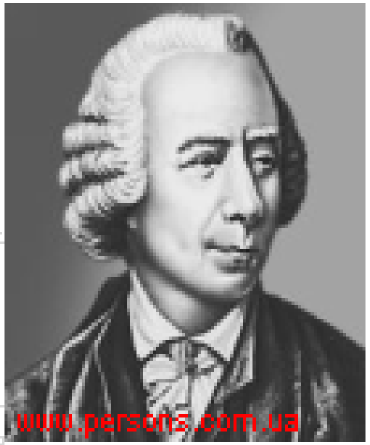
Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad a_{ij} = const.$$

1. Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n- го порядка.

2. Метод Эйлера

Будем искать частные решения в виде $x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt}$, где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные. Подставляя эти решения в систему, получим



$$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}(a_{11}-r)k_1+\ldots+a_{1n}k_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}k_1+\ldots+(a_{nn}-r)k_n=0.\end{cases}$$

Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-r) & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn}-r)\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим **характеристическое уравнение**.

Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений.

Корни действительные и простые.

Для каждого корня r_i $(i = 1,2,3)$ напишем систему

$$\begin{cases} (a_{11} - r_i)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r_i)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r_i)k_3 = 0. \end{cases}$$

и определим коэффициенты $k_j^{(i)}$

Замечание

Определитель системы равен нулю и возможных решений бесконечно много.

Уравнения линейно зависимы и один из коэффициентов можно считать равным единице

Таким образом, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$k_1^{(1)}e^{r_1 t},\ k_2^{(1)}e^{r_1 t},\ k_3^{(1)}e^{r_1 t};$$
$$k_1^{(2)}e^{r_2 t},\ k_2^{(2)}e^{r_2 t},\ k_3^{(2)}e^{r_2 t};$$
$$k_1^{(3)}e^{r_3 t},\ k_2^{(3)}e^{r_3 t},\ k_3^{(3)}e^{r_3 t}.$$

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$x_1 = C_1 k_1^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)} e^{r_3 t},$$
$$x_2 = C_1 k_2^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)} e^{r_3 t},$$
$$x_3 = C_1 k_3^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)} e^{r_3 t}.$$

Пример.

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = -4x - y - 4z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -rk_1 + k_3 = 0, \\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 = 0, \\ -k_2 - rk_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -4 & -(1+r) & -4 \\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = \left(4 - r^2\right)(r+1) = 0.$$

$$r_1 = -1, \ r_2 = -2, \ r_3 = 2.$$

Возьмем 1-е и 3-е уравнения.

$$r_1=-1,\ \begin{cases}k_1^{(1)}+k_3^{(1)}=0,\\ -k_2^{(1)}+k_3^{(1)}=0,\end{cases}\ k_1^{(1)}=1,\ k_2^{(1)}=-1,\ k_3^{(1)}=-1.$$

$$x_1=e^{-t},\ y_1=-e^{-t},\ z_1=-e^{-t}.$$

$$r_2=-2,\ \begin{cases}2k_1^{(2)}+k_3^{(2)}=0,\\ -k_2^{(2)}+2k_3^{(2)}=0,\end{cases}\ k_1^{(2)}=1,\ k_2^{(2)}=-4,\ k_3^{(2)}=-2.$$

$$x_2=e^{-2t},\ y_2=-4e^{-2t},\ z_2=-2e^{-2t}.$$

$$r_3=2,\ \begin{cases}-2k_1^{(3)}+k_3^{(3)}=0,\\ -k_2^{(3)}-2k_3^{(3)}=0,\end{cases}\ k_1^{(3)}=1,\ k_2^{(3)}=-4,\ k_3^{(3)}=2.$$

$$x_3=e^{2t},\ y_3=-4e^{2t},\ z_3=2e^{2t}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-2t} - 4C_3 e^{2t}, \\ z = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Среди простых корней характеристического уравнения есть комплексно сопряженные

Решение ищется в том же виде, что и в случае вещественных корней

$$k_1 e^{ax+ib}, k_2 e^{ax-ib}$$

Чтобы перейти к действительной форме используют следующее:

Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации , применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$.

Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения. При этом понятно, что комплексно-сопряженный корень *не даст новых линейно независимых действительных решений.*

Пример.

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37 = 0.$$

$$r_{1,2} = -6 \pm i.$$

$$r_1 = -6 + i,$$

$$(-1-i)k_1 + k_2 = 0,$$

$$k_1 = 1, \;\; k_2 = 1 + i.$$

$$\begin{cases} x = e^{(-6+i)t} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t, \\ y = (1+i)e^{(-6+i)t} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$$

$$x_1 = e^{-6t}\cos t,\ \ y_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$$
$$x_2 = e^{-6t}\sin t,\ \ y_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

$r_2 = -6 - i$ приведет к тем же решениям.

Общее решение имеет вид

$$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t),$$
$$y = e^{-6t}\left(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)\right).$$

Подбор частного решения для системы неоднородных уравнений можно производить сведя систему к одному уравнению высшего порядка и используя методы, изложенные ранее.

Кратные корни характеристического уравнения.

Для кратных корней решение усложняется.
Если для одного уравнения можно сразу написать структуру общего решения, то здесь иначе.

Этот случай мы не можем рассмотреть подробно, так как пока в курсе математики для инженеров не рассматривается жорданова форма матрицы, а именно к матрице с жордановыми клетками в общем случае приводится матрица системы.

Рассмотрим отдельные примеры.

Пример 1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 3x + 3y - 2z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 3 & 3 & -2-r \end{vmatrix} = -r\left(r^2 - 2r + 1\right) = 0. \qquad r_1 = 0,\ r_{2,3} = 1.$$

$$r_1 = 0,\ \begin{cases} 2k_1^{(1)} + k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \\ k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \end{cases} k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 1,\ k_3^{(1)} = 3.$$

$$x_1 = C_1,\ y_1 = C_1,\ z_1 = 3C_1.$$

Для кратного корня $r_{2,3} = 1$ система уравнений сводится к одному уравнению $k_1^{(2)} + k_2^{(2)} - k_3^{(2)} = 0.$

Произвольно можно задать две величины $k_1 = C_2,\ k_2 = C_3,\ k_3 = C_2 + C_3.$

Тогда $x = C_2 e^t,\ y = C_3 e^t,\ z_1 = (C_2 + C_3) e^t$, т.е.

$$x_2 = e^t,\ y_2 = 0,\ z_2 = e^t;$$
$$x_3 = 0,\ y_3 = e^t,\ z_3 = e^t.$$

Получили фундаментальную систему решений,

$$\text{т.к. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ e^t & 0 & e^t \\ o & e^t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0.$$

$$\text{Общее решение } \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t, \\ y = C_1 + C_3 e^t, \\ z = 3C_1 + \left(C_2 + C_3\right) e^t. \end{cases}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - y + 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 & 0 \\ 4 & -1-r & 2 \\ 0 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = -\left(1-r^2\right)\left(1+r\right) = 0.$$

$$r_1 = -1, \; r_{2,3} = 1.$$

$$r_1 = -1, \; \begin{cases} 2k_1^{(1)} - k_2^{(1)} = 0, \\ 4k_1^{(1)} + 2k_3^{(1)} = 0, \end{cases} \; k_1^{(1)} = 1, \; k_2^{(1)} = 2, \; k_3^{(1)} = -2.$$

$$x_1 = e^{-t},\;\; y_1 = 2e^{-t},\;\; z_1 = -2e^{-t}.$$

$$r_{2,3} = 1,\;\; \begin{cases} -k_2^{(2)} = 0, \\ 4k_1^{(2)} - 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(2)} = 1,\;\; k_2^{(2)} = 0,\;\; k_3^{(2)} = -2.$$

$$x_2 = e^{t},\;\; y_2 = 0,\;\; z_2 = -2e^{t}.$$

Третье решение таким способом получить не удастся.

В этом случае два недостающих решения ищутся в виде

$x=(\alpha_1+\beta_1 t)e^t,\ \ y=(\alpha_2+\beta_2 t)e^t,\ \ z=(\alpha_3+\beta_3 t)e^t,$

где α_i, β_i определяются методом неопределенных коэффициентов.

Продифференцируем x, y, z и подставим в систему дифференциальных уравнений.

После сокращения на e^t, получим

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 t+\beta_1=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2+\beta_2 t, \\ \alpha_2+\beta_2 t+\beta_2=4(\alpha_1+\beta_1 t)-\alpha_2-\beta_2 t+2(\alpha_3+\beta_3 t), \\ \alpha_3+\beta_3 t+\beta_3=2(\alpha_2+\beta_2 t)+\alpha_3+\beta_3 t. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t, получим

$$\beta_1+\alpha_2=0,\ -4\alpha_1+2\alpha_2+\beta_2-2\alpha_3=0,\ \beta_3-2\alpha_2=0,$$
$$\beta_2=0,\ -4\beta_1+2\beta_2-2\beta_3=0,\ -2\beta_2=0.$$

Полагая $\alpha_1=C_2,\ \alpha_2=C_3$, имеем

$$\beta_1=-C_3,\ \beta_2=0,\ \beta_3=2C_3,\ \alpha_3=-2C_2+C_3.$$

Итак

$$\begin{cases} x=\left(C_2-C_3t\right)e^t, \\ y=C_3e^t, \\ z=\left(-2C_2+C_3+2C_3t\right)e^t. \end{cases}$$

Решение с индексом 2 получается, если $C_2 = 1,\ C_3 = 0.$

Если положить $C_2 = 0,\ C_3 = 1,$ получим третье решение $x_3 = -te^t,\ y_3 = e^t,\ z_3 = (1 + 2t)e^t.$

$$x_1 = e^{-t},\ y_1 = 2e^{-t},\ z_1 = -2e^{-t}.$$

Три решения образуют фундаментальную систему решений.

Правило. **Если характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений имеет корень r кратности m, то ему отвечает решение, зависящее от m произвольных постоянных. Решение ищется в виде:**

$$x_1 = P_1(t)e^{rt},$$
$$\ldots,$$
$$x_n = P_n(t)e^{rt},$$

где $P_i(t)$ - многочлены степени не выше $m-1$.

Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

$$X' = AX.$$

Частные решения $X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$.

Общее решение $X = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n$.

Определение.

Система векторных функций называется линейно независимой, если $\lambda_1 X_1(t)+\ldots+\lambda_n X_n(t)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\ldots=\lambda_n=0.$

Это выполняется, если определитель Вронского

$$W=\begin{vmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}(t) & \cdots & X_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t.$$

Частное решение отыскиваем в виде $X(t)=\begin{pmatrix} k_1 e^{rt} \\ \dots \\ \dots \\ k_n e^{rt} \end{pmatrix} = e^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}.$

Тогда $X'(t)=re^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}.$

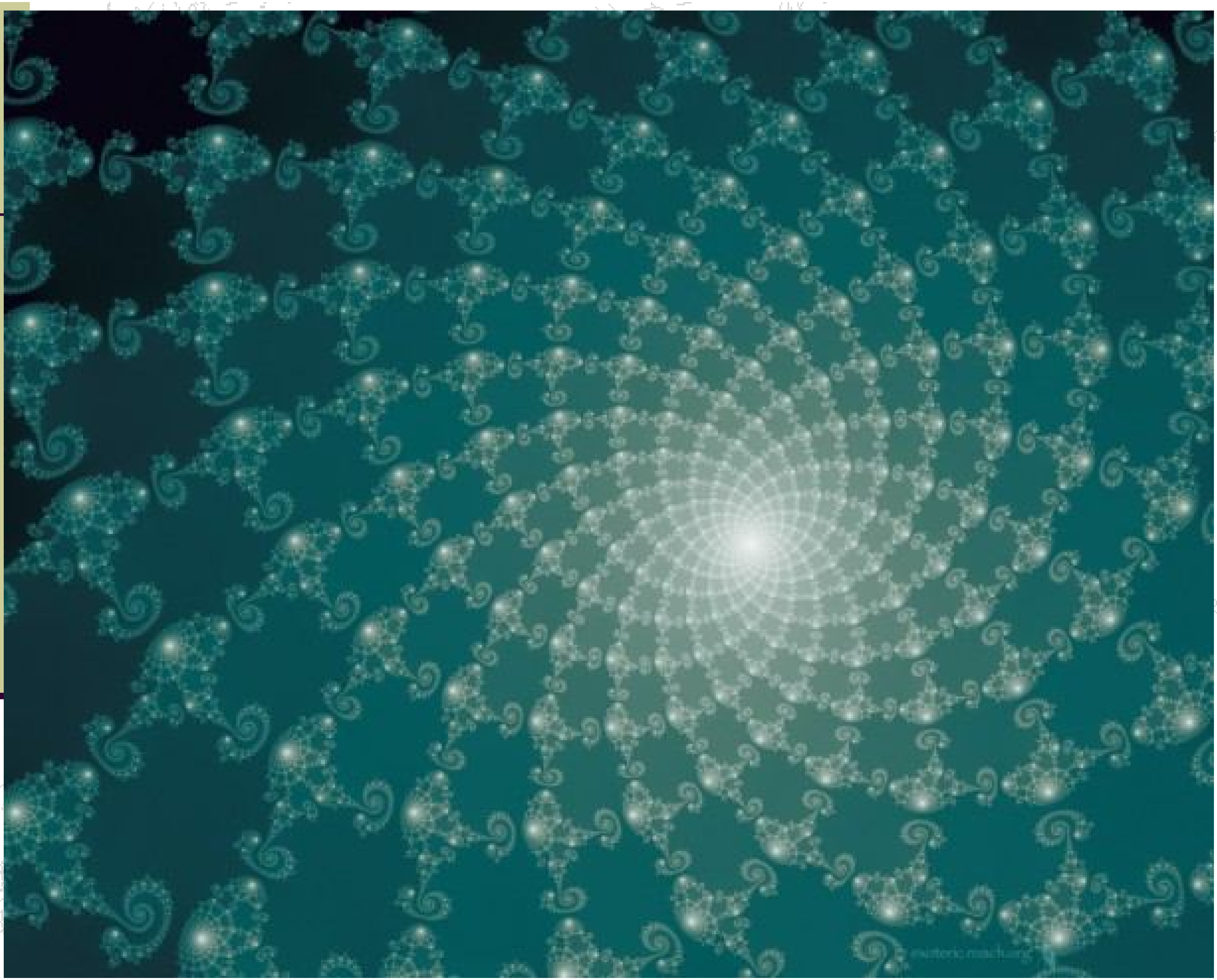
$$Ae^{rt}K = re^{rt}K, \text{ где } K=\begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

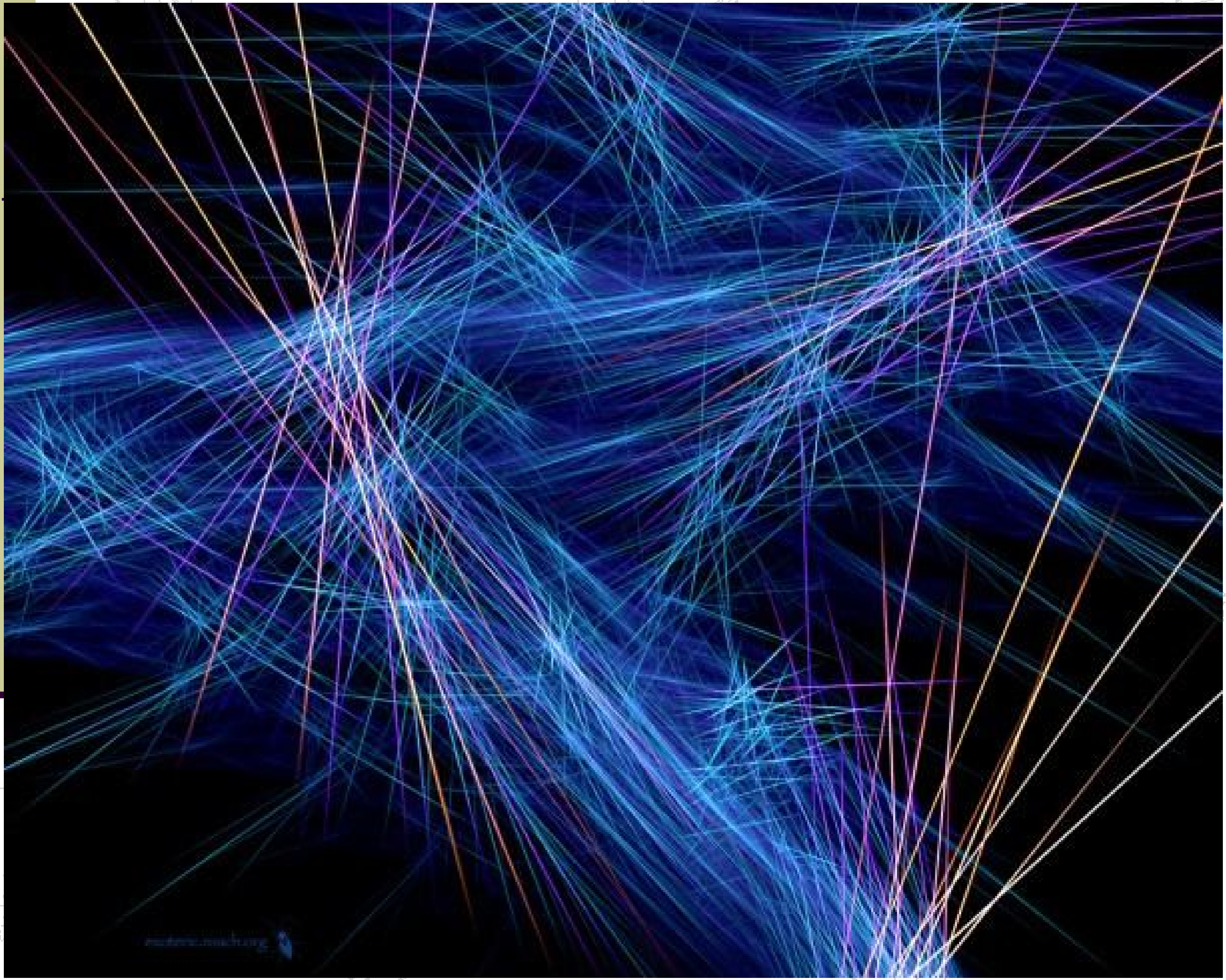
$$AK = rK \Rightarrow \left(A - rE\right)K = 0,$$

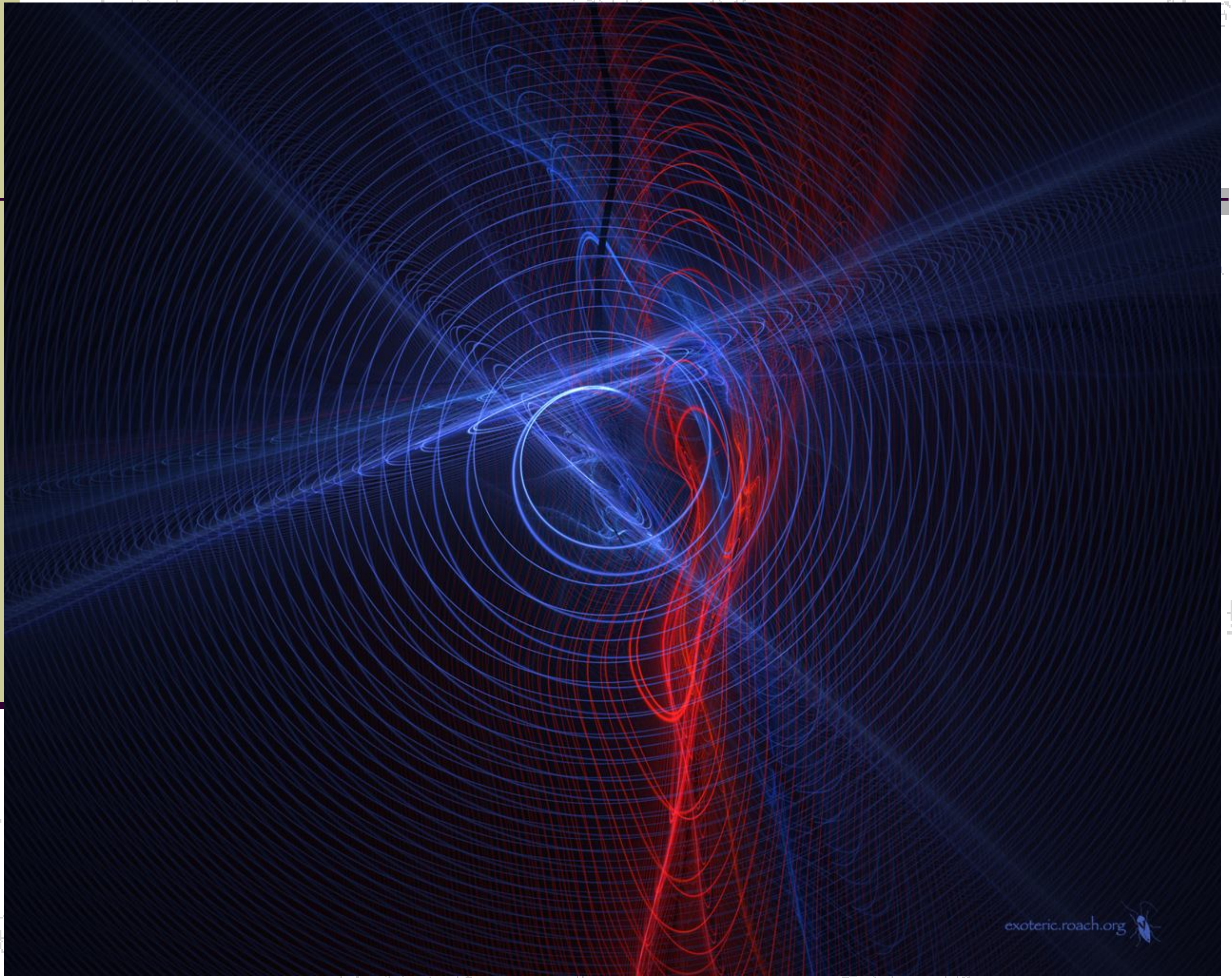
где r - собственное число матрицы A,
K - собственный вектор матрицы A.

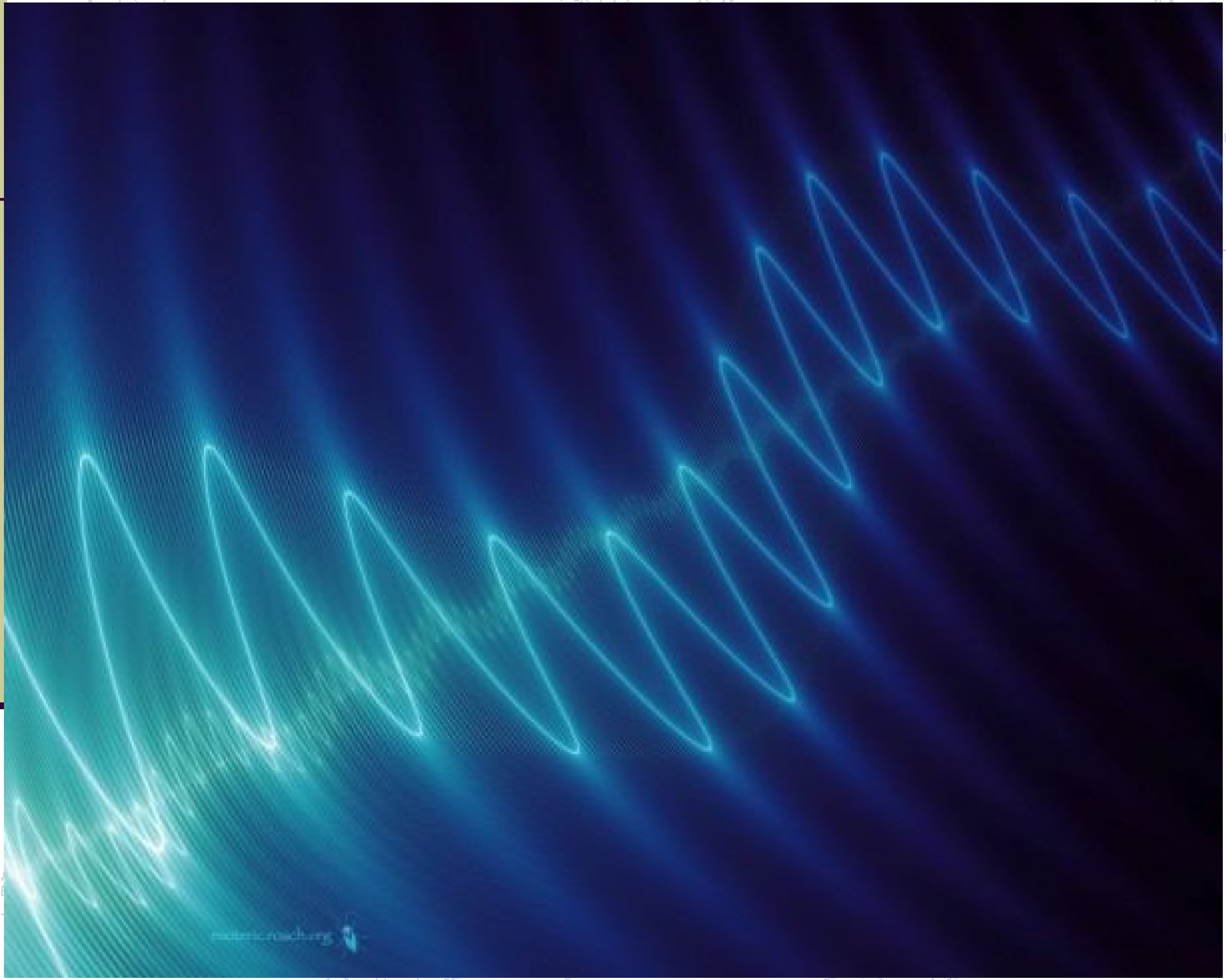
Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - r & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$

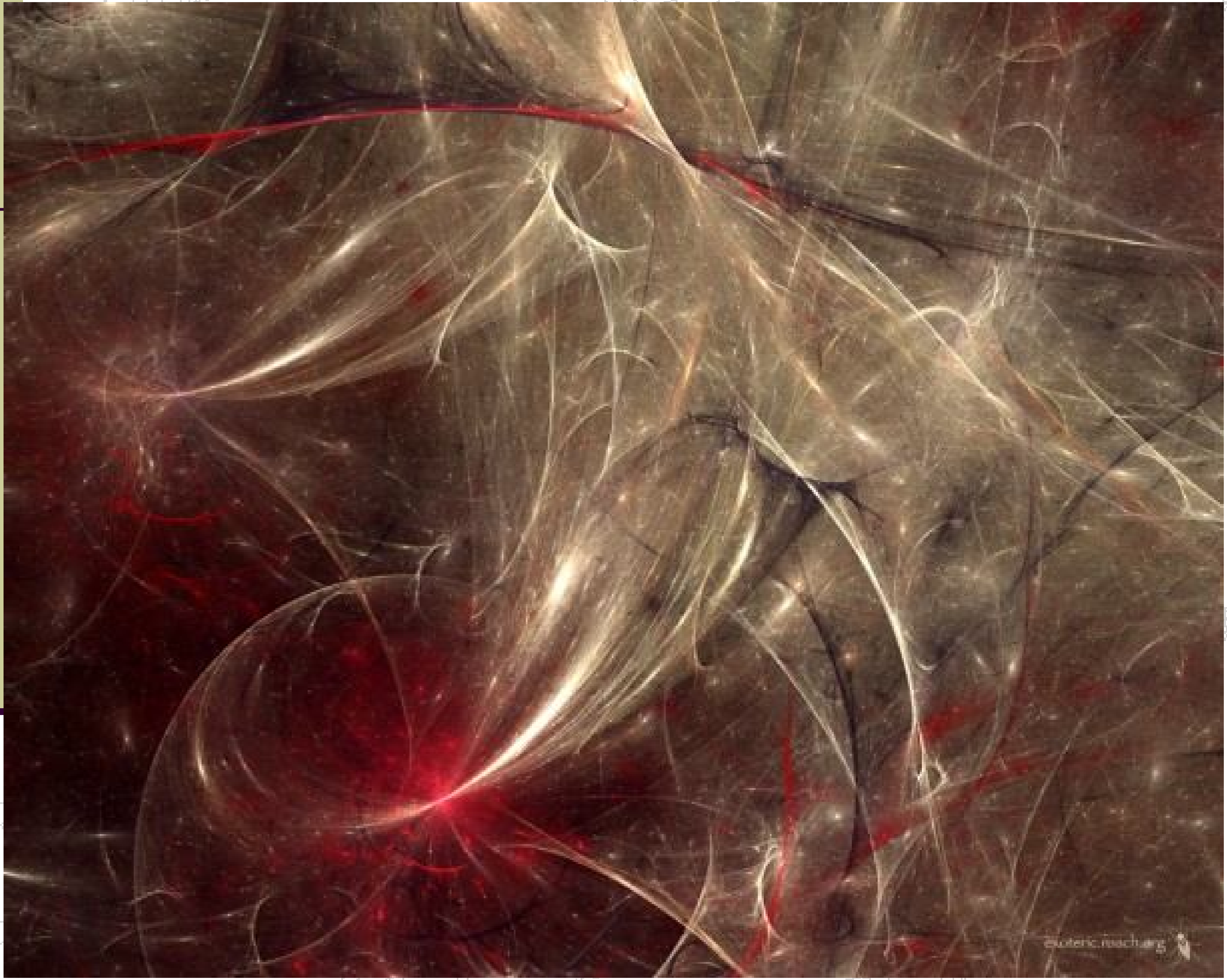
ПРИМЕРЫ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

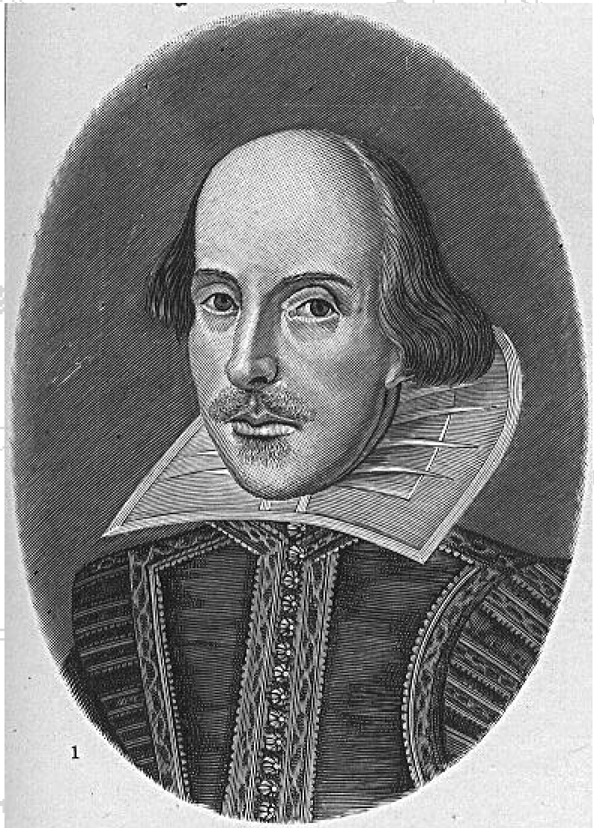





exoteric.roach.org







Ромео любит Джульетту, и его чувство усиливается, когда он видит, что Джульетта его тоже любит, и уменьшается, когда Джульетта к нему охладевает. А именно, сила его любви описывается дифференциальным уравнением $R'=aJ$,
где R - любовь Ромео, J - любовь Джульетты, a - какая-то положительная константа

Сердце же красавицы склонно к перемене, поэтому любовь Джульетты нелогична, а именно, она растёт, когда Джульетта видит, что Ромео перестаёт её любить, и остывает, когда Ромео пылает страстью.
Это выражается дифференциальным уравнением $J'=-bR$, где b - тоже какая-то положительная константа.

Найдите дифференциальное уравнение второго порядка для любви Ромео и решите его в предположении, что в нулевой момент времени его любовь максимальна и равна L - это соответствует тому, что он влюбился с первого взгляда.

Зная $R(t)$, вычислите $J(t)$ и нарисуйте графики обеих функций на одной картинке.

Покажите, что любовь Ромео и Джульетты взаимна ровно четверть всего времени.

Найдите максимальную силу любви Джульетты к Ромео.

Вычислите время, за которое отношения влюблённых проходят полный цикл.