Лекция 2.14

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(8).

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Общие определения.
Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса.
Далее t - независимая переменная; $x_1(t),...,x_n(t)$ (или $x(t),\ y(t),\ z(t)$ если функций не больше трех) - неизвестные функции.

***Определение*. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.**

Пример 1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y + t + 1, \\ y' = 3x - 4y + 6t. \end{cases}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} tx_1'' + 3x_2' - 2x_1x_3 = 0, \\ 2x_2'' + x_3'' - 2tx_1 = 0, \\ x_3' + 2x_1 + tx_2 = 0. \end{cases}$$

Определение. Решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, которая при подстановке в уравнения превращает их в тождества.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Другими словами н**ормальная система - это система уравнений вида**

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

Пример

$$\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}\left(3x - 2y + 2t\right), \\ y' = \dfrac{1}{5}\left(x + y - t\right). \end{cases}$$

Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе.

Пример.

$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

Пример. $\begin{cases} x_1'' + t x_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$

Введем дополнительные функции $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -t x_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$

В частности, одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пример.

$$x''' = f\left(t, x, x', x''\right). \quad y = x', \quad z = y' = x''. \quad \begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f\left(t, x, y, z\right). \end{cases}$$

Метод исключения (метод редукции)

Нормальная система дифференциальных уравнений, **как правило**, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

Для решения системы

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$$

продифференцируем первое уравнение по x. Тогда

$$x'' = f_t' + f_x' \cdot x' + f_y' \cdot y' = f_t' + f_x' \cdot x' + f_y' \cdot g(t, x, y);$$

Если выполняются условия теоремы о неявной функции, то можно найти *y* = *φ(x,x‘,y)* и, подставив в первое уравнение системы, получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно *x*. Очевидно, тот же способ можно применять и для случая большего числа уравнений, что, однако, приведёт к уравнению высокого порядка по *x*.

Теорема о неявной функции

Если функция $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

•дифференцируема в некоторой окрестности $I = I_x \times I_y$ точки (x_0,y_0)

•$F(x_0,y_0) = 0$ и $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$

то существует такая непрерывная функция $f: I_x \to I_y$,

что для любой точки $(x,y)\in I$

$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x)$$

Более того, в этом случае, производная функции f может быть вычислена по формуле

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}.$$

Пример

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases} \quad x'' = y' = z, \;\; x''' = z' = x - y + z, \;\Rightarrow\; x''' = x - x' + x''.$$

Отсюда сразу вытекает один из способов решения систем

$$x''' = x - x' + x''.$$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = \left(r^2 + 1\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i, \ \alpha = 0, \ \beta = 1, \ s = 1.$$

$$r_3 = 1, \ \alpha = 1, \ \beta = 0, \ s = 1.$$

$$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

$$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t, \ z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Однако имеют место случаи, когда система дифференциальных уравнений **не может быть сведена** к одному дифференциальному уравнению.

Пример $\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$

Первое уравнение не зависит от остальных. $x' = x,\ \ y'' = z' = y.$

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t},\ \ z = y' = C_1e^t - C_2e^{-t},\ \ x = C_3e^t.$$

Теорема.

Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ .... \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$ **имеет вид** $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, ..., C_n), \\ .... \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, ..., C_n), \end{cases}$

где $C_1, ..., C_n$ **- произвольные постоянные.**

Задание начальных условий $x_1\big|_{t=t_0} = x_{10}, ..., \; x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$ дает частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, C_1, ..., C_n) = x_{10}, \\ ...., \\ \varphi_n(t_0, C_1, ..., C_n) = x_{n0}. \end{cases}$$

Теорема.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений $t_0,\ x_{10},\ x_{20},\ldots,\ x_{n0}$, **то в достаточно малом интервале** $[t_0 - h, t_0 + h]$ **существует единственная система функций** $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, **являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.**

Определение. Пространство (x_1,...x_n) называется *фазовым пространством системы дифференциальных уравнений. Кривые, заданные на фазовом пространстве решениями* $\mathbf{x}(t)$, *называются фазовыми траекториями системы.*

Состоянию $\mathbf{x}(t)$ в некоторый момент t в фазовом пространстве соответствует точка с координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – *изображающая точка* (она изображает мгновенное состояние). В процессе эволюции изображающая точка с течением времени, смещается вдоль некоторой линии – *фазовой траектории*. Совокупность характерных фазовых траекторий называют *фазовым портретом* системы. При определенном навыке по фазовому портрету можно многое сказать о возможных движениях системы.

Теорема

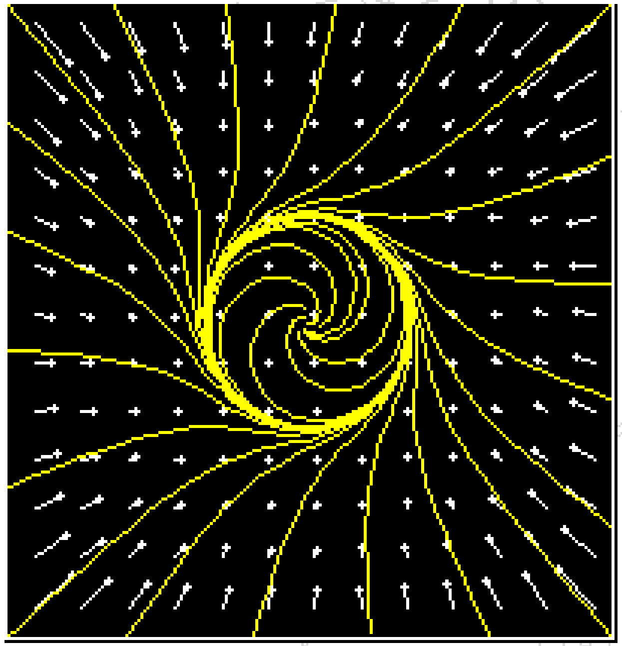
В условиях теоремы единственности фазовые траектории системы дифференциальных уравнений первого порядка не пересекаются.

Доказательство

Пусть x_0 — точка пересечения фазовых траекторий, соответствующих решениям $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$.Тогда $\mathbf{x}_1(x_0)= \mathbf{x}_2\ (x_0)$то есть двум различным решениям соответствует одно начальное условие, что невозможно согласно теореме единственности. Таким образом, фазовые траектории не пересекаются. ■

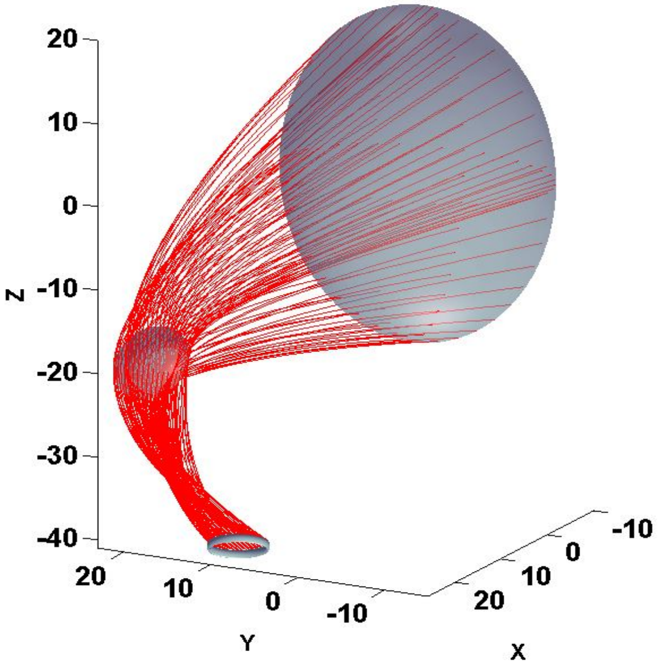
В типичной фазовой траектории можно выделить начальный участок (*переходный процесс*) и более поздний этап движений, которые отличаются большей степенью повторяемости – *установившиеся движения*.

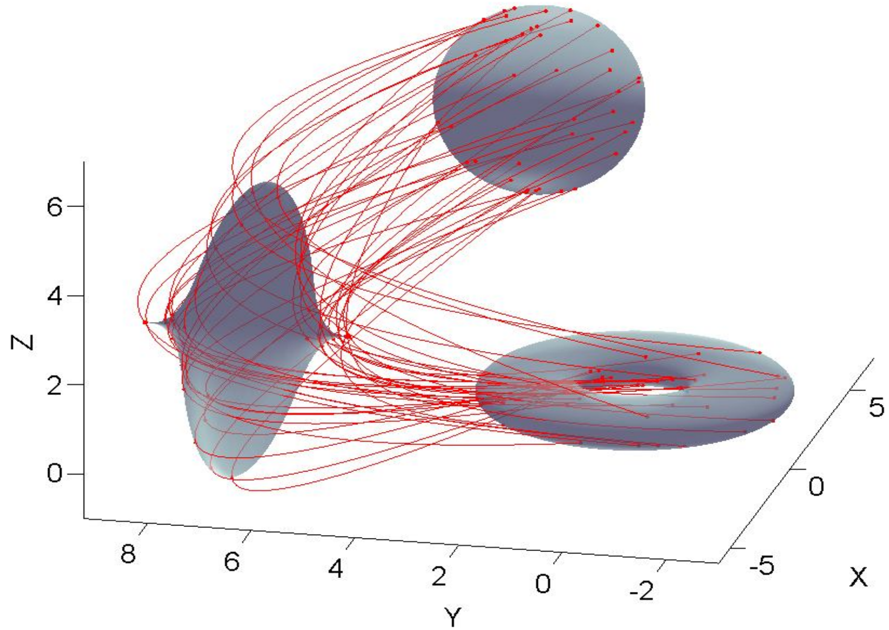
Установившимся движениям, которые менее разнообразны, чем переходные процессы, в фазовом пространстве соответствуют объекты, названные *аттракторами* – от английского «attract» – притягивать, привлекать.



Примеры простейших аттракторов

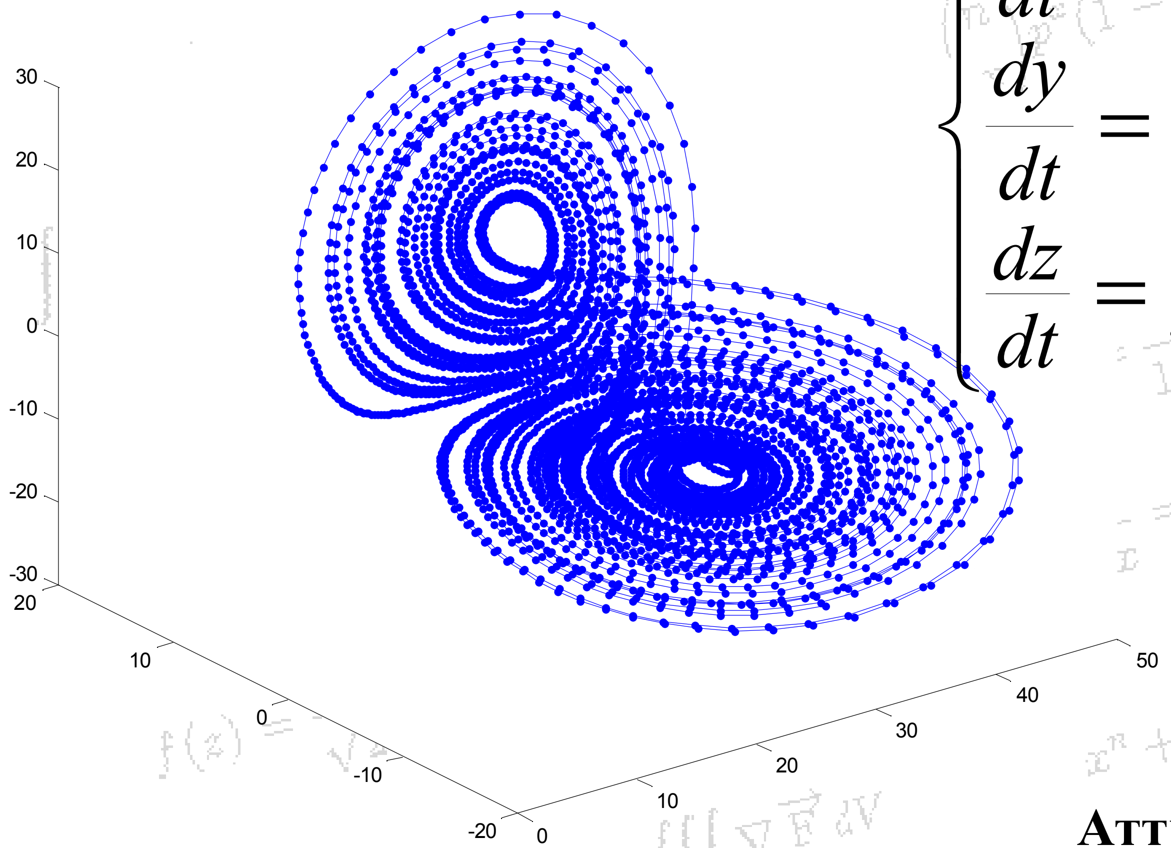
Аттракторы могут существовать в пространстве состояний только *диссипативных динамических систем.* Так называют системы, обладающие свойством сжатия фазового объема,





Во фрактальной среде динамический хаос, то есть непериодическое движение в детерминированных системах, приводит к специальному виду аттрактора, который называется *странным аттрактором*.

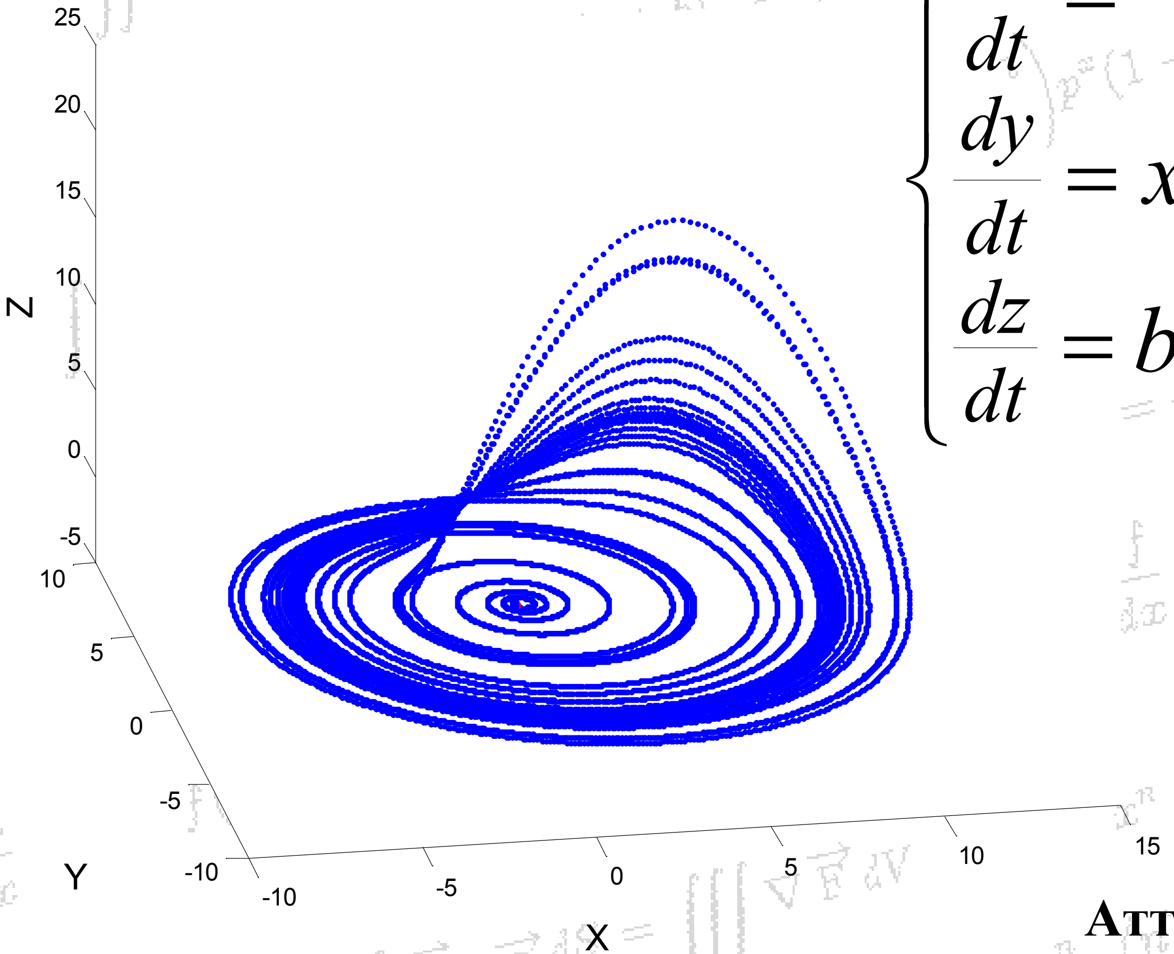
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = yx - bz, \end{cases}$$



Аттрактор Лоренца

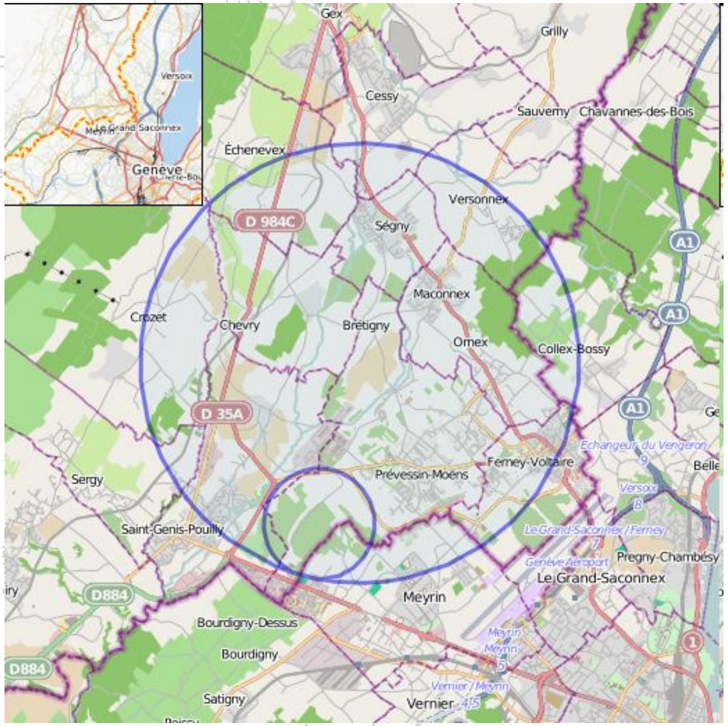
Э́двард Но́ртон Ло́ренц (англ. *Edward Norton Lorenz*; 1917 —2008) — американский математик и метеоролог, один из основоположников Теории Хаоса, автор Эффекта бабочки, Аттрактора Лоренца.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay, \\ \dfrac{dz}{dt} = b + (x - r)z, \end{cases}$$



Аттрактор Рёсслера

Немецкий профессор Отто **Ресслер** (р.1940)— специалист в области теории хаоса



Большой адро́нный колла́йдер


MAFI
232538/9

Стандартная модель физики элементарных частиц, или просто Стандартная модель, — теоретические рамки в физике, которые наиболее точно и удачно описывают текущее положение элементарных частиц, их значения и поведение.

На Большом адронном коллайдере пока не смогли опровергнуть Стандартную модель, но сумели разогнать свой ускоритель до новых скоростей.

Стандартная модель имеет несколько очевидных недостатков. Она, например, не объясняет темной материи и темной энергии, она несовместима с Общей теорией относительности, в то время как одна из предложенных ей взамен альтернатив — теория суперсимметрии (сокращенно — SUSY) — прекрасным образом все существующие несоответствия в состоянии убрать, вдобавок объяснив существование и темной материи, и темной энергии.

Отто Рёсслер (нем. Otto Rössler, 6 февраля 1907, Айзенштадт, Австро-Венгрия — 9 июля 1991, Марбург) — австрийский семитолог, африканист, сотрудник Аненербе, унтерштурмфюрер СС.

Выступл на страницах «Политического журнала» («Zeitschrift für Politik») с антисемитскими статьями

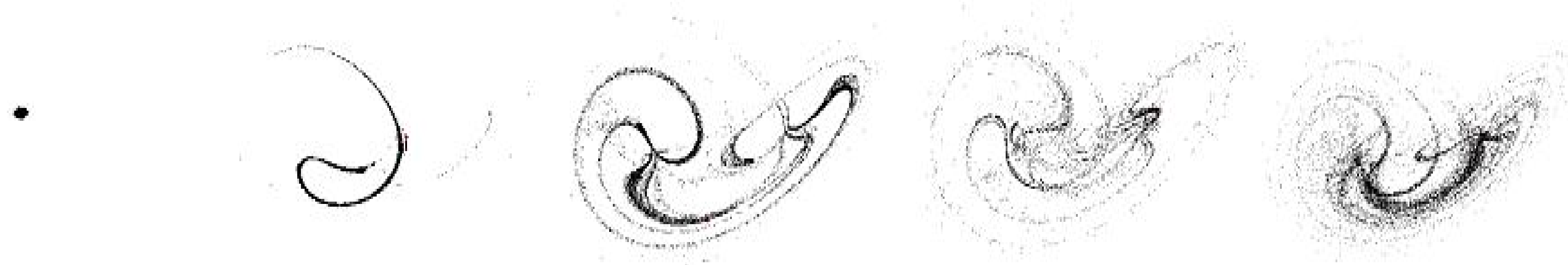
После освобождения из плена и процесса денацификации Рёсслер в 1954 г. стал экстраординарным профессором Тюбингенского университета. В 1964—1975 гг. возглавлял семинар по семитологии в университете Марбурга.

ОттоРесслер, профессор химии из Университета Тюбингена (Германия) утверждает, что образовавшиеся черные дыры быстро вырастут, захватывая частицы. Например, электроны

Но в ЦЕРН (*CERN*) — Европейская организация по ядерным исследованиям тогда отбивались: если что - эксперимент будет немедленно прекращен - ускоритель остановят. И вот в 2012 г БАК остановили

А если бы не успели, - комментирует профессор Ресслер, - то образовавшаяся черная дыра могла быть притянута гравитацией к самому центру Земли за ничтожные доли секунды. И разрастаясь, уничтожит планету


dreamstime.com



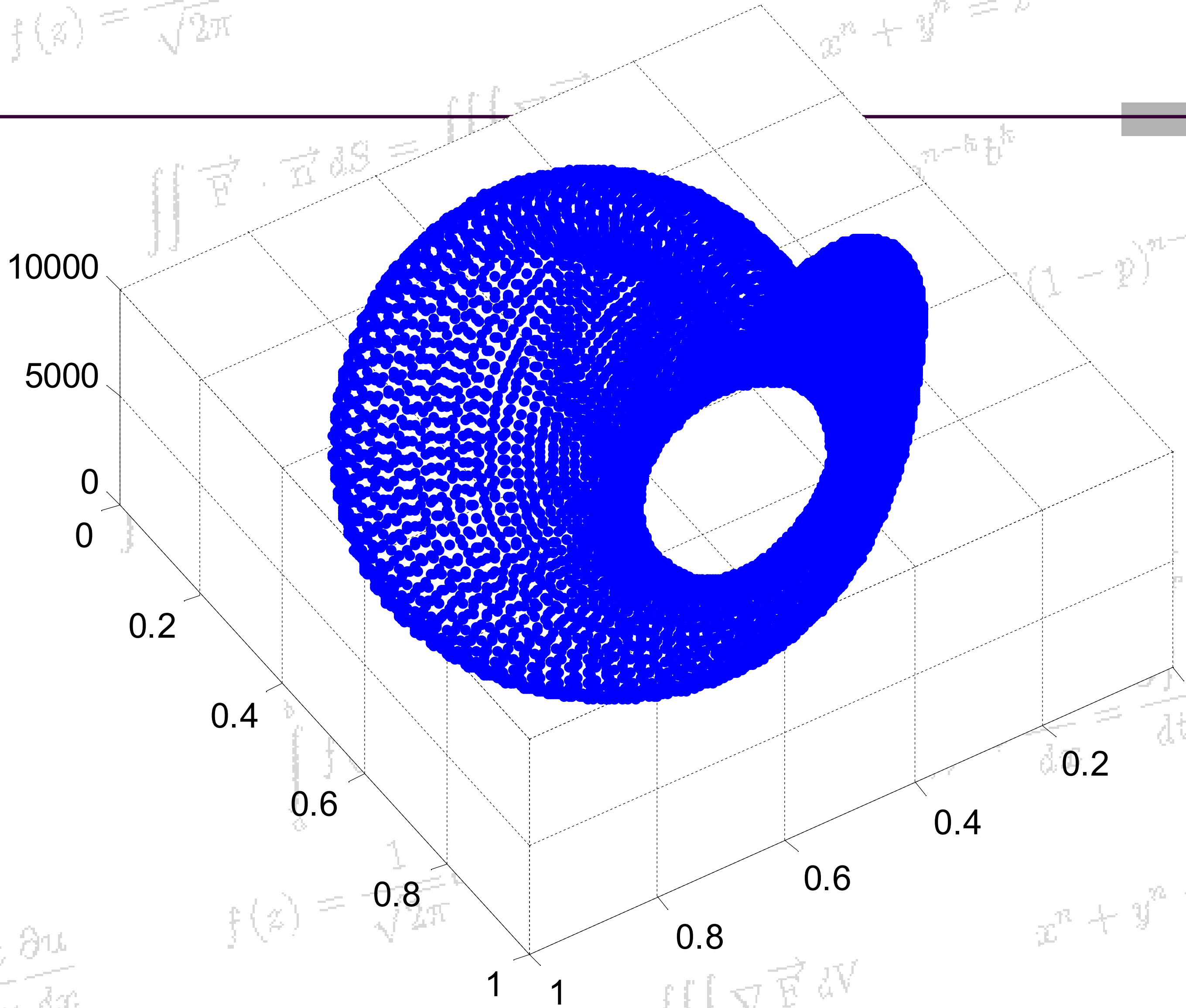
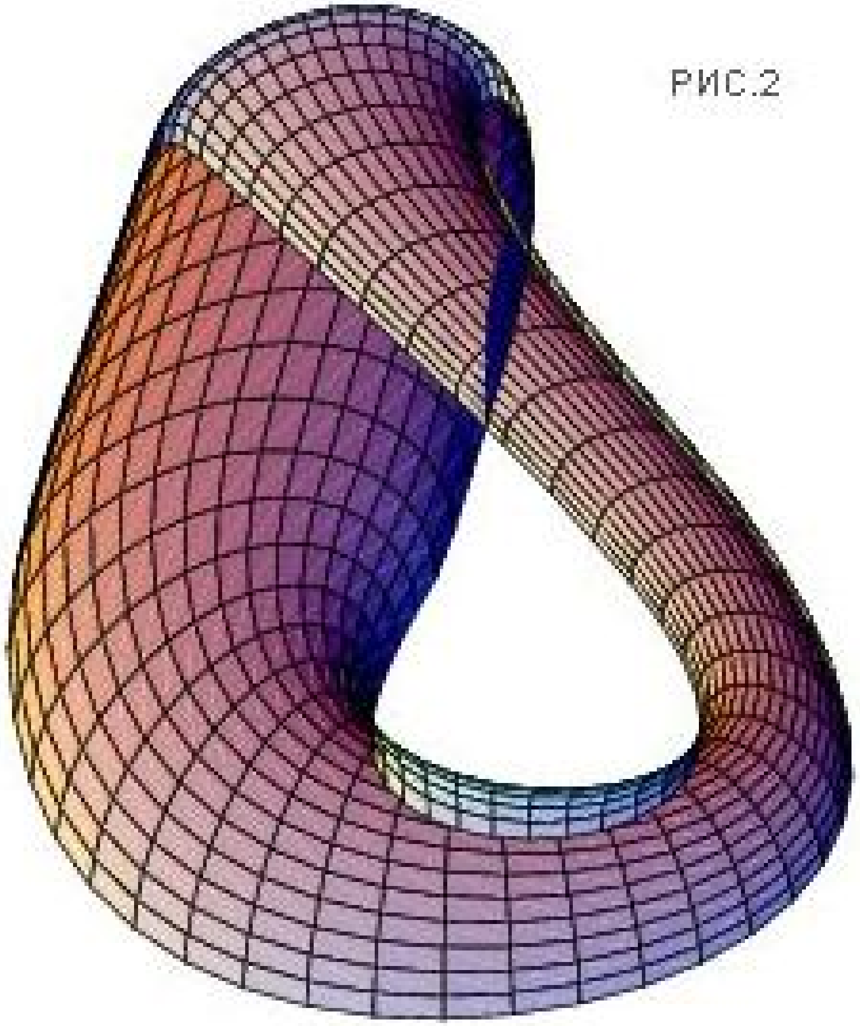
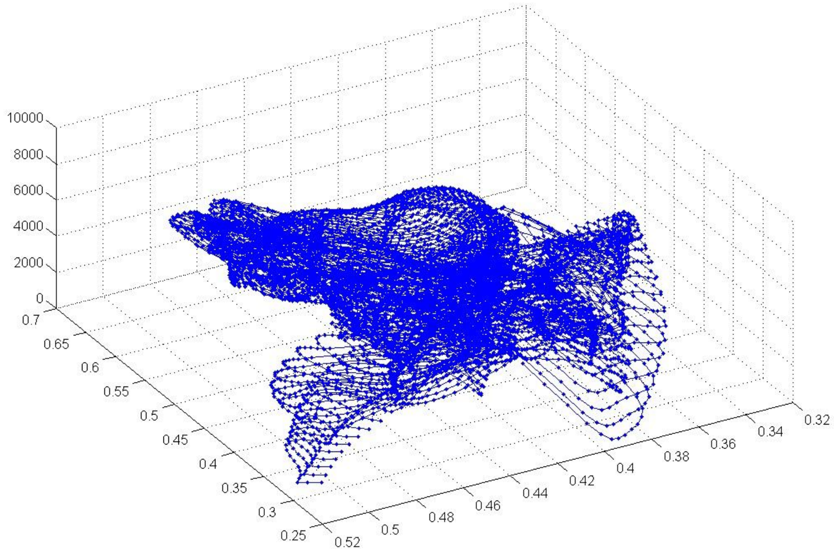
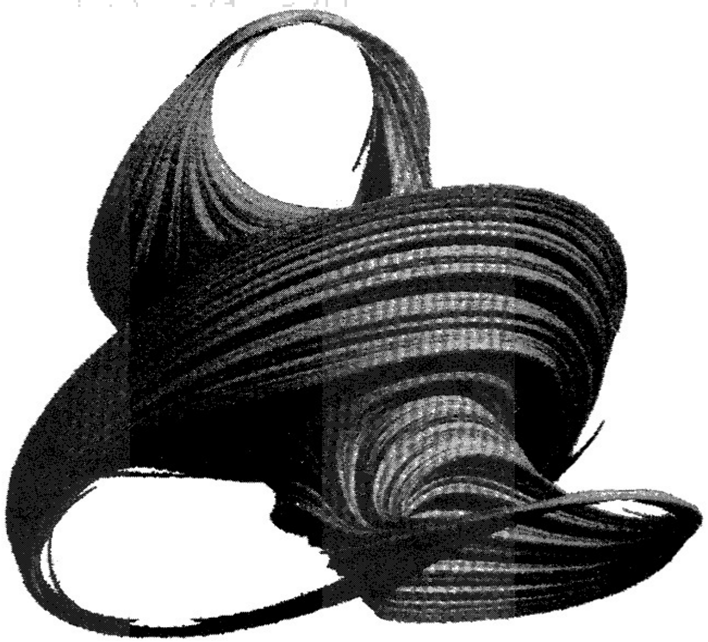

10000
5000
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0

РИС.2

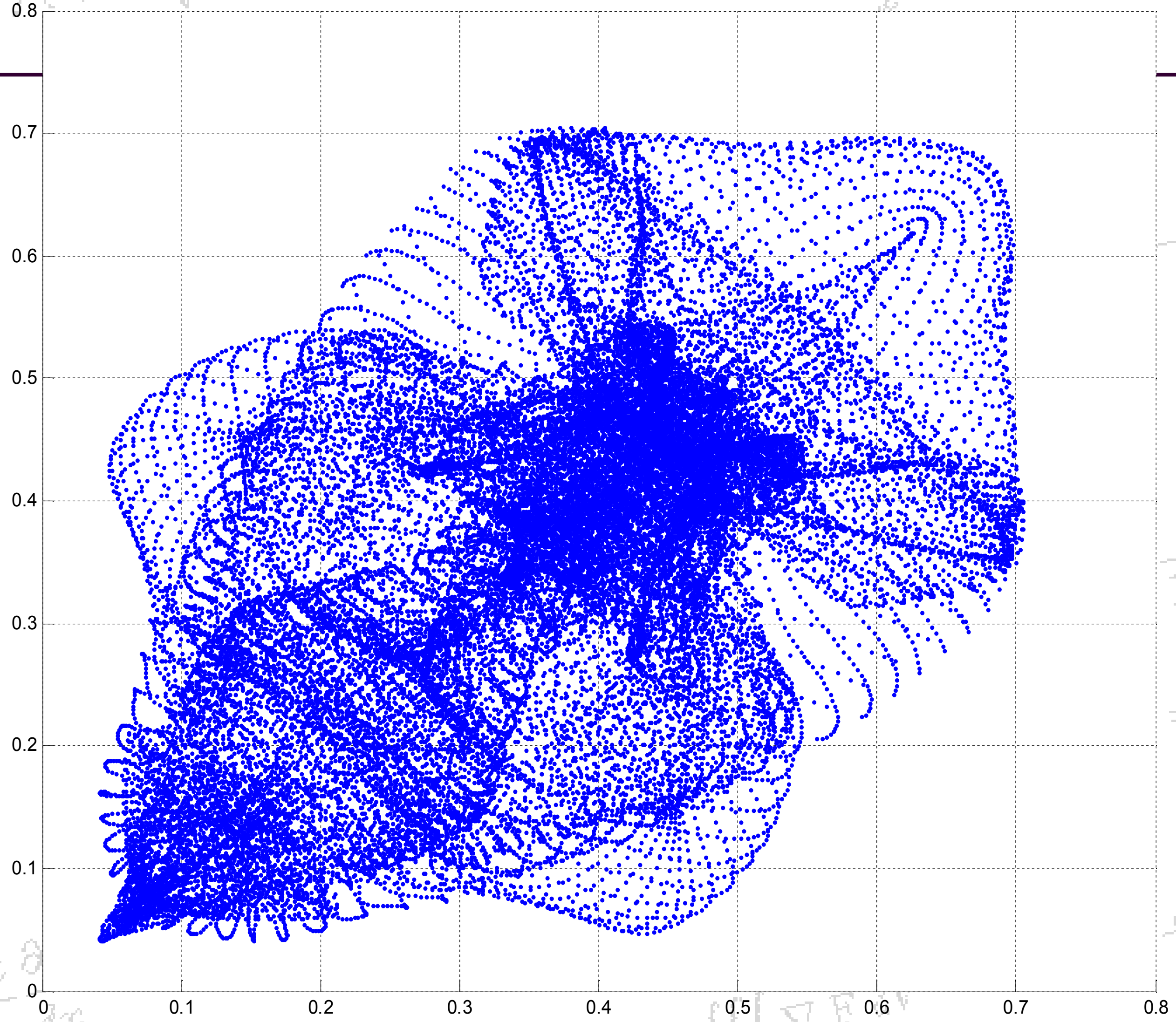




Пример странного аттрактора, построенного по реальным данным,



Пространственный фрактал , полученный в результате трехмерного сечения четырехмерного пространства кватернионов.(Б. Мандельброт)



0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

Системы линейных дифференциальных уравнений.

Однородной системой линейных дифференциальных уравнений называется система

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij}(t)$ - непрерывные функции.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

$$X' = AX.$$

1) Если известно частное решение системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),\ldots,x_{n1}(t)$, то $C_1x_{11}(t),\ldots,C_1x_{n1}(t)$ тоже является решением системы, где C_1 - произвольная постоянная.

Доказательство

$$X' - AX = 0 \Rightarrow (CX)' - A(CX) = C(X' - AX) = 0.$$

2) Если известны два частных решения системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),\dots,x_{n1}(t)$ и $x_{12}(t),\dots,x_{n2}(t)$, то $x_{11}(t)+x_{12}(t),\dots,x_{n1}(t)+x_{n2}(t)$ тоже является решением системы.

Доказательство

$$X_1' - AX_1 = 0 \quad \text{и} \quad X_2' - AX_2 = 0 \Rightarrow (X_1 + X_2)' - A(X_1 + X_2) = (X_1' - AX_1) + (X_2' - AX_2) = 0.$$

3) Если известны n частных решений системы $x_{11}(t),...,x_{n1}(t);\ \ldots;$ $x_{1n}(t),...,x_{nn}(t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + \ldots + C_n x_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1 x_{1n} + \ldots + C_n x_{nn} \end{cases} \quad \textbf{(*)}$$

тоже является решением системы линейных дифференциальных уравнений.