Лекция 2.12

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(6).

Некоторые применения дифференциальных уравнений второго порядка

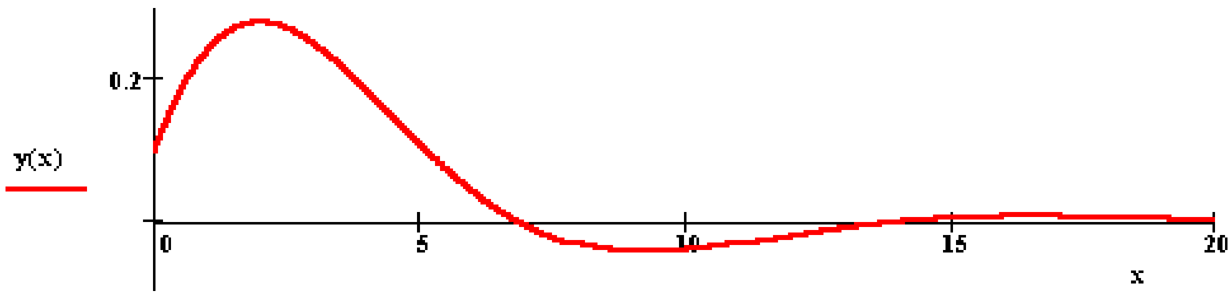
Изменение объема производства в некоторой замкнутой экономической системе описывает дифференциальное уравнение второго порядка

$y'' + 2|k|y' + \omega^2 y = 0.$

В замкнутой экономической системе нет экспорта, импорта и притока капитала извне. Уравнение описывает поведение разности

$y(x)=Y(x)-G/s$

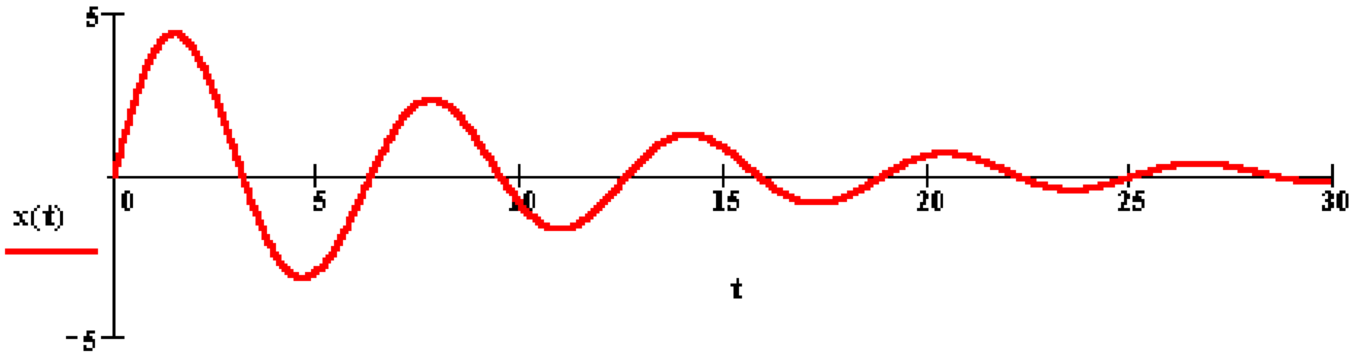
между объемом производства $Y(x)$ и фиксированной величиной G/s отношения правительственных расходов к предельной склонности населения к сбережению.



Уравнение второго порядка

$x'' + 2ax' + bx = 0$

при $a^2<b$ описывает затухающие (ангармонические) колебания.



Определение. **Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка** называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где p_0, p_1, ..., p_n – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обычно обозначают $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**

Замечание

Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, **общий интеграл составляется из частных**. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков.
Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения.
Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение "близким" к нему линейным.

Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами.

Решение с помощью формулы Остроградского — Лиувилля.

Если исходное уравнение было написано в виде:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0,$$

то существует равенство, определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, которое носит название ***формулы Остроградского — Лиувилля.***

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1\, dx}$$

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил Васильевич (1801-1861/62), российский математик и механик, академик Петербургской АН (1830). Сформулировал общий вариационный принцип для неконсервативных систем. Труды по математическому анализу, математической физике, аналитической и небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике.

Жозеф Лиувилль (*Joseph Liouville*; 1809 —1882) — французский математик. Систематически исследовал разрешимость ряда задач, дал строгое определение понятию элементарной функции и квадратуры.

Применим формулу Остроградского — Лиувилля к нахождению общего решения уравнения второго порядка,

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

у которого нам известно одно частное решение y_1

Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1

Составляем $W[y_1, y]$ *и пишем его значение по формуле* Остроградского — Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1\,dx}.$$

Получаем для y линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем:

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int p_1\,dx};$$

деля обе части на y_1^2 находим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p_1\,dx},$$

откуда y *определяется квадратурой:*

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{Ce^{-\int p_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C' \right\}.$$

Полученное решение содержит два произвольных постоянных и, следовательно, является общим. Итак, ***если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.***

Пример. Решить уравнение $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0.$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x.$

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x; \qquad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right];$$

Метод вариации произвольных постоянных.

Дано линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (*)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция.

$$y = y_{oo} + u_{чн}$$

Рассмотрим однородное уравнение $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$

Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$

Заменим в общем решении постоянные C_1 *и* C_2, *неизвестными функциями* $C_1(x)$ *и* $C_2(x)$, *и подберем их так, чтобы функция*

$$u_{чн} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

была решением уравнения

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x),$$

Примем обозначение

$C_1(x)=C_1,\ C_2(x)=C_2.$

Найдем производную

$$u'_{чн}=C'_1y_1+C'_2y_2+C_1y'_1+C_2y'_2.$$

Подберем функции $C_1,\ C_2$ **так, чтобы выполнялось условие**

$$C'_1y_1+C'_2y_2=0.$$

Тогда $u'_{чн}=C_1y'_1+C_2y'_2,$

$$u''_{чн}=C'_1y'_1+C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2.$$

Подставим $u_{чн}, u'_{чн}, u''_{чн}$ в уравнение (*)

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + a_1C_1y_1' + a_1C_2y_2' + a_2C_1y_1 + a_2C_2y_2 =$$

$$= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1\left(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2\right) = f(x),$$

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Получили систему дифференциальных уравнений для определения $C_1(x)$, $C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определитель системы отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений *y_1 (x) и y_2(x) уравнения* (*). *Поэтому система имеет единственное решение:*

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x)$$

где *φ_1(x) и φ_2(x) — некоторые функции от x. Интегрируя эти функции, находим C_1x) и C_2(x), а затем по формуле составляем частное решение уравнения* (*).

Пример.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x. \quad y = y_{oo} + y_{чн}. \quad y'' + y = 0, \quad r^2 + 1 = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

$$u_{чн} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \ \ C_2' = \sin x.$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

$$C_2 = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \cos x - \cos x \sin x,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos x.$$

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка.

Рассмотрим дифференциальные уравнения порядка $n > 2$.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (**)$$

где $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x),\ a_n(x),\ f(x)$ - непрерывные функции.

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (***)$$

Линейно независимые системы функций.

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$.

Линейной комбинацией их будет

$C_1\varphi_1(x)+...+C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,...,C_n$ - постоянные.

Определение.

Система функций $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ называется линейно независимой, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных

Т.е. не может быть равенства $\varphi_1(x)=C_2\varphi_2(x)+...+C_n\varphi_n(x)$.

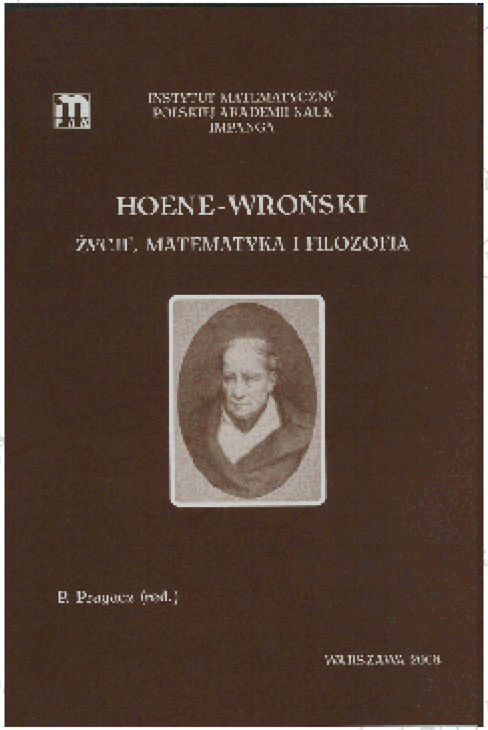
Линейно независимые решения дифференциального уравнения n - го порядка образуют **фундаментальную систему решений.**

В частности $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ линейно независимы, если $\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \neq const.$

Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

Условие линейной независимости частных решений дифференциального уравнения – отличие от нуля **определителя Вронского**

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x.$$



Вроньский (Wroński) Юзеф (настоящая фамилия — Хёне, Hoene; известен также как Гёне-Вронский) (24.8.1776— 9.8.1853), польский математик и философ-мистик.

Теорема . Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен нулю

Доказательство

Система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно зависима,

поэтому $\exists\ \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0,\ \alpha_1 y_1 +$

$\ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \Rightarrow\ \forall\, k = \overline{1, n-1}\ \alpha_1 y_1^{(k)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(k)} \equiv 0.$

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель равен нулю (то есть $W(y_1, \ldots y_n) \equiv 0$).

Если $y_1 .,.., y_n$ *суть частные решения однородного уравнения то справедлива обратная, притом более сильная теорема.*

Теорема . Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы в интервале, то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Доказательство

Пусть $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$ в точке $x = x_0$ ($W[x_0] = 0$).
Зададим в этой точке начальные условия.

Тогда система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение $(\alpha_1^0, \ldots \alpha_n^0)$.

Функция

$$y(x) = \alpha_1^0 y_1(x) + \ldots \alpha_n^0 y_n(x) \not\equiv 0,$$

является решением дифференциального уравнения.

При этом

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Таким образом нулевым начальным условиям в точке x_0 удовлетворяют и полученная нами функция *y(x)* и функция $y \equiv 0$, что противоречит теореме существования и единственности решения.

Эти теоремы можно объединить в следующей формулировке: ***определитель Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка, или тождественно равен нулю, или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны.***

Теорема . Если y_1, y_2, …,y_n образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения , то общее решение даётся формулой:

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

Доказательство

По определению, решение, содержащее *n* произвольных постоянных, называется общим, если из него при определённых числовых значениях постоянных получается любое частное решение.

В силу теоремы существования и единственности, любое частное решение однозначно определяется начальными условиями: при $x=x_0$

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

Мы докажем, что решение есть общее, если покажем, что можно в формуле

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

определить постоянные C_v, C_2, ..., C_n таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия.
Для определении постоянных C, мы получаем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + \ldots + C_n y'_{n0} = y'_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{array}\right\}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского, в котором вместо x подставлено x_0 *т*. е. $W(x_0)$ в силу теоремы , $W(x_0) \neq 0$; следовательно, система уравнений всегда допускает, и притом единственную, систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Выражение ,

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

в котором С имеют полученные таким образом значения, очевидно, удовлетворяет начальным условиям .

Нулевым начальным условиям соответствует $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$

Следствие: линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет ровно n линейно независимых решений.

Доказательство Непосредственно из теоремы следует, что уравнение не может иметь более n линейно независимых решений; между тем. изменением начальных условий всегда можно подобрать набор n линейно независимых решений, из которых можно составить невырожденную матрицу. Пусть заданы условия

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = a_{11} & & y_n(x_0) = a_{1n} \\ & \dots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1} & & y_n^{(n-1)}(x_0) = a_{nn} \end{matrix} \Rightarrow W(y_1(x_0), \dots y_n(x_0)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Следовательно W не равняется тождественно нулю поэтому, из доказанной теоремы $y_1, y_2, \dots, y_n$ - линейно независимая система решений.

Матрицу a_{ik} с определителем , отличным от нуля, часто бывает полезно выбрать по следующему закону: $a_{ik}=0$, *когда* $i \neq k$, $a_{ik}=1$ *при* $i = k$. Очевидно, определитель равен в этом случае единице. Соответствующую фундаментальную систему y_1 y_2.,., y_n мы будем называть нормальной фундаментальной системой; составляющие эту систему функции удовлетворяют следующим начальным условиям:
при $x = x_0$

$$
\begin{array}{l}
y_1 = 1,\ y_1' = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)} = 0, \\
y_2 = 0,\ y_2' = 1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)} = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_n = 0,\ y_n' = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)} = 1.
\end{array}
$$

Пример.

$$\varphi_1(x) = x,\ \ \varphi_2(x) = x^2,\ \ \varphi_3(x) = x^3,\ \ \varphi_4(x) = 2x - x^2.$$

$$\varphi_4(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Пример.

Функции

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

линейно независимы в интервале $(-\infty,\infty)$, а также любом конечном интервале. Допустив противное, мы получили бы равенство

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

для всех рассматриваемых значений x *(не все* α *равны нулю)*

Решение неоднородных дифференциальные уравнения

Метод вариации произвольных постоянных

Теорема

Если $y_1,\ldots,y_n$ **- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения**

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,$ **то решением дифференциального уравнения**

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ **является функция**

$C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n,$ **где** $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ **удовлетворяют системе**

$$\begin{cases} C_1'y_1+\ldots+C_n'y_n=0,\\ C_1'y_1'+\ldots+C_n'y_n'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

Доказательство

Будем искать решение в виде

$$y_s = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k;$$

$$y_s' = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k' + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k;$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k = 0 \Rightarrow y_s'' = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y'' + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'.$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k' = 0.$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_n'(x)y_k^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

$$W(y_1 \ldots y_n) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$C_1'(x), \ldots C_n'(x) \quad \Rightarrow \quad C_1(x), \ldots C_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_s = \sum_{i=1}^{n} C_k(x) y_k(x)$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $y = y_{oo} + u_{нч}.$,

где y_{oo} – общее решение однородного уравнения

$u_{нч}$ –частное решение неоднородного уравненния

Решение однородного дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const.$

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx}F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n корней. **Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения**

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь

***n* различных действительных корней,**

вещественные корни среди которых могут быть кратные,

комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) **каждому действительному корню соответствует решение** e^{kx};

б) **каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений**:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) **каждой паре комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

г) **каждой паре** ***m*** **– кратных комплексно – сопряженных корней** $\alpha \pm i\beta$ **характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение. $y''' - y = 0$

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0;$

$$(k-1)(k^2+k+1)=0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2+k+1=0;$$

$$D = 1-4=-3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

Пример.

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1, \;\; r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1, \; \alpha = -1, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1.$$

$$r_{2,3,4,5} = \pm i, \;\; \alpha = 0, \;\; \beta = 1, \;\; s = 2.$$

$$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида..

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно. Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Замечание

Если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = \pm i;$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0, \quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $\quad y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

1. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

Пример. Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1.$

Характеристическое уравнение:

$k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3} x^3 - x.$$