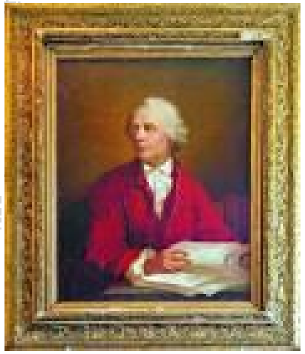
Лекция 2.11

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(5).

Справедливо следующее утверждение.



Теорема Эйлера

Для того чтобы функция $y(x) = \exp(\lambda_0 x)$ была решением уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы число λ_0 было корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Из теоремы Эйлера следует следующее утверждение.

Если числа $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ — различные действительные корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами,

то функции $\exp(\lambda_1 x)$, $\exp(\lambda_2 x)$, ..., $\exp(\lambda_n x)$

образуют **фундаментальную систему решений** этого уравнения и общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) + \dots + C_n \exp(\lambda_n x).$$

Сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню k соответствует решение $e^{k}x$;

б) каждому действительному k корню кратности m ставится в соответствие m решений

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$

характеристического уравнение ставится в соответствие два решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

г) каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$

характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = e^{rx}$, где r - действительное или комплексное число.

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение

$$e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0, \quad e^{rx} \neq 0.$$

Получили **характеристическое уравнение** $r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$

Рассмотрим 3 варианта решения этого уравнения.

1) $r_1 \neq r_2$ действительные числа.

Получим два решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x}. \; \frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x} \neq const.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2$ - произвольные постоянные.

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x_0} (r_2 - r_1) \neq 0.$$

Пример.

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

$$r^2 - r - 2 = 0, \qquad r_1 = 2,\ r_2 = -1.$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$y\big|_{x_0=0} = 2,\ y'\big|_{x_0=0} = -5. \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5. \end{cases} \qquad C_1 = -1,\ C_2 = 3.$$

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) $r_1 = r_2$ **действительное число.** $y_1 = e^{r_1 x}$.

Покажем, что

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x},$$

$$y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

Подставим в уравнение

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + a_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}\right) + a_2 x e^{r_1 x} =$$

$$e^{r_1 x}\left[x\left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2\right) + (2r_1 + a_1)\right] = e^{r_1 x}(2r_1 + a_1).$$

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

По теореме Виета $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a_1$, т.е. $(2r_1 + a_1) = 0.$

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & e^{r_1 x_0} + r_1 e^{r_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x_0} \neq 0.$$

Следовательно $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}.$

Франсуа́ Вие́т (*François Viète,* 1540 —1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

Пример.

$$y'' - 6y' + 9y = 0;$$
$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$
$$r_1 = r_2 = 3.$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{3x}.$$

3) Корни комплексные

$$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\ \ \beta\neq 0.\ \ y=C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y=u(x)+iv(x)$, то каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением уравнения.

$$(u''+iv'')+a_1(u'+iv')+a_2(u+iv)=0,$$

$$(u''+a_1u'+a_2u)+i(v''+a_1v'+a_2v)=0.$$

Найдем два действительных частных решения уравнения

По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Составим две линейные комбинации решений

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \tilde{y}_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \tilde{y}_2.$$

Тогда $y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$

Пример.

$$y'' - 4y' + 13y = 0;$$
$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = y_{oo} + u_{чн}$, где y_{oo} - общее решение однородного уравнения, $u_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения или

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_{чн}.$

Найдем $u_{чн}$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Правая часть имеет вид $f(x) = P(x)e^{px}$,

где $P(x)$ - многочлен n-й степени.

Решение $u_{чн} = x^k Q(x)e^{px}$,

где: $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$,

k - кратность p среди корней характеристического уравнения (если такого корня нет, то $k = 0$).

Коэффициенты многочлена $Q(x)$ находим методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределённых коэффициентов — метод, используемый в для нахождения искомой функции в виде точной или приближённой комбинации конечного или бесконечного набора базовых функций. Указанная линейная комбинация берётся с неизвестными коэффициентами, которые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраических уравнений

Пример

$$y'' - 2y' + y = x + 1,\ \ y\big|_{x=0} = 2,\ \ y'\big|_{x=0} = -3.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' - 2y' + y = 0,\ \ r^2 - 2r + 1 = 0.$$

$$r_{1,2} = 1,\ \ p = 1\ (\alpha = 1,\ \beta = 0),\ \ \textit{кратность}\ s = 2.$$

$$y_{oo} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x. \qquad u_{чн} = x^k Q\left(x\right)e^{px}, \qquad p = \alpha + i\beta$$

Характеристики правой части:
$p = 0\ (\alpha = 0,\ \beta = 0),\ \ n = 1,\ \ k = 0,$ т.к. среди корней характеристического уравнения нет корня с такими же характеристиками.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $u_{чн} = A + Bx,\ u'_{чн} = B,\ u''_{чн} = 0.$

Подставим в дифференциальное уравнение
$-2B + A + Bx = x + 1.$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} -2B + A = 1, \\ B = 1. \end{array}\right. \end{array} \qquad A = 3. \qquad u_{чн} = 3 + x.$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 3 + x, \;\; y' = C_2 e^x + \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 1.$$

Из начальных условий

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_2 + C_1 + 1. \end{cases}$$

$$C_1 = -1, \;\; C_2 = -3.$$

$$y = -\left(1 + 3x\right)e^x + 3 + x.$$

Пример

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \;\; r^2 - 4r + 3 = 0.$$

$$r_1 = 1, \;\; s = 1.$$

$$r_2 = 3, \;\; s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

Характеристики правой части: $\alpha = 2,\ \beta = 0,\ n = 0,\ k = 0.$

$$u_{чн} = x^k Q(x) e^{px}, \qquad p = \alpha + i\beta$$

$$u_{чн} = Ae^{2x},\ u'_{чн} = 2Ae^{2x},\ u''_{чн} = 4Ae^{2x}.$$

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x}, \quad A = -3.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 3e^{2x}.$$

Пример

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{x}.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad r^{2} - 4r + 3 = 0.$$

$$r_{1} = 1, \quad s = 1.$$

$$r_{2} = 3, \quad s = 1.$$

$$y_{oo} = C_{1}e^{x} + C_{2}e^{3x}.$$

Характеристики правой части: $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ n = 1,\ k = 1.$

$$u_{чн} = x^k Q(x) e^{px},$$

$$u_{чн} = x(Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$

$$u'_{чн} = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$

$$u''_{чн} = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x.$$

$$2Ae^{x}+2\left(2Ax+B\right)e^{x}+\left(Ax^{2}+Bx\right)e^{x}-$$

$$4\left(\left(2Ax+B\right)e^{x}+\left(Ax^{2}+Bx\right)e^{x}\right)+3\left(Ax^{2}+Bx\right)e^{x}=$$

$$=e^{x}\left(-4Ax+2A-2B\right)=xe^{x}.$$

$$\begin{array}{c|l} x^{0} & \left\{\begin{array}{l} 2A-2B=0, \\ -4A=1. \end{array}\right. \\ x^{1} & \end{array} \qquad A=-\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4}.$$

$$y=C_{1}e^{x}+C_{2}e^{3x}-\frac{1}{4}\left(x^{2}+x\right)e^{x}.$$

2. Правая часть имеет вид $f(x) = a\cos qx + b\sin qx.$

а) Если $\pm iq$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$u_{чн} = A\cos qx + B\sin qx.$ (*)

б) Если $\pm iq$ корни характеристического уравнения, то

$u_{чн} = x\left(A\cos qx + B\sin qx\right).$ (**)

В частном случае, когда $a = 0$ **или** $b = 0,$ **частное решение все равно имеет вид (*) или (**).**

Пример

$$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \;\; r^2 + 4r + 13 = 0.$$

$$r_{1,2} = -2 \pm 3i, \;\; \alpha = -2, \;\; \beta = 3, \;\; s = 1.$$

$$y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ n = 0,\ k = 0.$

$$u_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

$$u'_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$u''_{чн} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right)$$

$$+13\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = 5\sin 2x.$$

$$\begin{array}{l|} \sin 2x \\ \cos 2x \end{array} \begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0. \end{cases} \qquad A = -\frac{8}{29},\ B = \frac{9}{29}.$$

$$u_{чн} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Пример

$$y'' + \omega^2 y = a \sin qx.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' + \omega^2 y = 0, \;\; r^2 + \omega^2 = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm \omega i, \;\; \alpha = 0, \;\; \beta = \omega, \;\; s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

а) $q \neq \omega$. Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = q,\ n = 0,\ k = 0.$

$$u_{чн} = A\cos qx + B\sin qx,$$
$$u'_{чн} = -qA\sin qx + qB\cos qx,$$
$$u''_{чн} = -q^2 A\cos 2x - q^2 B\sin 2x.$$

$$-q^2 A\cos 2x - q^2 B\sin 2x + \omega^2\left(A\cos qx + B\sin qx\right) = a\sin qx.$$

$$\begin{array}{l|} \sin qx \\ \\ \cos qx \end{array}\left\{\begin{array}{l} \left(\omega^2 - q^2\right)A = 0, \\ \\ \left(\omega^2 - q^2\right)B = a. \end{array}\right. \qquad A = 0,\ B = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)}.$$

$$u_{чн} = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)} \sin qx.$$

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)} \sin qx.$$

б) $q = \omega$. Характеристики правой части: $\alpha = 0$, $\beta = \omega$, $n = 0$, $k = 1$.

$$u_{чн} = x\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right),$$

$$u''_{чн} = 2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right).$$

$$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) +$$

$$x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) = a\sin\omega x,$$

$$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) = a\sin\omega x.$$

$$\begin{array}{l|} \sin\omega x \\ \cos\omega x \end{array} \begin{cases} -2\omega A = a, & A = -\dfrac{a}{2\omega}, \\ 2\omega B = 0. & B = 0. \end{cases}$$

$$u_{чн} = -\frac{a}{2\omega}\cos\omega x.$$

$$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x - \frac{a}{2\omega} x \cos\omega x.$$

3. Правая часть имеет вид $f(x)=e^{px}\left(P_1(x)\cos qx+P_2(x)\sin qx\right)$,

где $P_1(x), P_2(x)$ **- многочлены степени** n, m **соответственно**.

$l=\max(n,m)$.

Возможны два случая.

а) $p\pm qi$ - не являются корнями характеристического уравнения.

Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид $u_{чн}=e^{px}\left(R_1(x)\cos qx+R_2(x)\sin qx\right)$, где $R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени l.

б) $p \pm qi$ - корни характеристического уравнения.
Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид $u_{чн} = xe^{px}\left(R_1(x)\cos qx + R_2(x)\sin qx\right)$, где
$R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени l.

Случай а) получается, если $q = 0$, случай б) получается, если $p = 0$.
Степени многочленов $R_1(x), R_2(x)$ могут быть меньше l.

Пример

$$y'' + y = 4x\sin x.$$

$$y = y_{oo} + u_{чн}.$$

$$y'' + y = 0,\ \ r^2 + 1 = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i,\ \ \alpha = 0,\ \ \beta = 1,\ \ s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \ \beta = 1,\ \ l = 1,\ \ k = 1.$

$$u_{чн} = x\left(\left(Ax+B\right)\cos\omega x + \left(Cx+D\right)\sin\omega x\right),$$

$$u''_{чн} = \left(-Ax^2 + \left(4C-B\right)x + \left(2A+2D\right)\right)\cos x + \left(-Cx^2 - \left(4A+D\right)x + \left(2C-2B\right)\right)\sin x.$$

$$\left(-Ax^2 + \left(4C-B\right)x + \left(2A+2D\right)\right)\cos x + \left(-Cx^2 - \left(4A+D\right)x + \left(2C-2B\right)\right)\sin x +$$

$$+x\left(\left(Ax+B\right)\cos\omega x + \left(Cx+D\right)\sin\omega x\right) = 4x\sin x,$$

$$\left(2Cx + \left(A+D\right)\right)\cos x + \left(-2Ax + \left(C-B\right)\right)\sin x = 2x\sin x.$$

$$2C = 0,\ \ A + D = 0,\ \ -2A = 2,\ \ C = B = 0.$$

$$A = -1,\ \ B = 0,\ \ C = 0,\ \ D = 1.$$

$$u_{чн} = x\left(\sin x - x\cos x\right).$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\left(\sin x - x\cos x\right).$$

Теорема.

Пусть правая часть дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

равна сумме двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Пусть $u_{чн1}$ - частное решение при $f_1(x)$,

$u_{чн2}$ - частное решение при $f_2(x)$.

Тогда $u_{чн} = u_{чн1} + u_{чн2}$.

Доказательство.

$$(u_1'' + u_2'') + a_1(u_1' + u_2') + a_2(u_1 + u_2) =$$

$$= (u_1'' + a_1u_1' + a_2u_1) + (u_2'' + a_1u_2' + a_2u_2) = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$