Лекция 2.10

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЕ УРАВНЕНИЯ(4).

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной $y^{(n)}$ имеет вид $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \ ...,\ \ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}.$$

Общим интегралом дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $\Phi(x, y, C_1, \ldots C_n)$, сохраняющая свои значения на решениях дифференциального уравнения.

Интегральной кривой называется график частного решения.

Общее решение представляет собой совокупность интегральных кривых.

Обычно рассматривается одна из трех задач:

1) *Найти общее решение* дифференциального уравнения n – ого порядка,
2) *Задача Коши* – найти частное решение дифференциального уравнения n – ого порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям,
3) *Краевая задача* – найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, одна часть которых задана в точке x_0, а другая часть в точке x_1.

Теорема о существовании и единственности решения.

Если функция $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в окрестности значений $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ в достаточно малом интервале $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$ имеет единственное решение $y = y\left(x\right)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y_0', \; ..., \; y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Без доказательства

Или, для любой внутренней точки $\left(x_0, y_0,, y_0', .. y_0^{(n-1)}\right)$ (n+1)-мерного пространства G существует единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим начальным условиям, т.е. $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

(через любую внутреннюю точку $\left(x_0, y_0,, y_0', .. y_0^{(n-1)}\right) \in G$ проходит единственная интегральная кривая).

Пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x,y,y')$. Область существования и единственности решения $G \in R^3(x,y,y')$ заполнена непересекающимися интегральными кривыми. Через любую точку $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая. Однако через «точку» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ проходит бесконечно много интегральных кривых, все они различаются значениями y'_0. Заметим, что в $R^3(x,y,y')$ «точка» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ представляет собой прямую $x = x_0,\ y = y_0$.

Линейные дифференциальные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка называется дифференциальное уравнение 1-й степени относительно неизвестной функции y и ее производных

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x). \quad (*)$$

Функция $f(x)$ называется правой частью дифференциального уравнения.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным (ЛОДУ).

В противном случае - уравнение называется неоднородным(ЛНДУ)).

Теорема Коши

Если $\forall x \in (a,b)$ $f(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ непрерывны, то $\forall\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0$ $x_0 \in (a,b)$ существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Дифференциальное уравнение $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$ можно привести к виду $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, разделив на p_0.

Там, где $p_0 = 0$ - особые точки.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка без правой части (ЛОДУ) .

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0. \qquad (**)$$

Считаем, что $a_1(x)$, $a_2(x)$ непрерывны на (a,b).

Тривиальное решение $y \equiv 0$.

Теорема. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения (**), то их линейная комбинация $y = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ также является решением уравнения (**) для любых C_1, C_2.

Доказательство: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\;\; y' = C_1 y_1' + C_2 y_2',$
$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$

Подставим в уравнение

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1 \left(C_1 y_1' + C_2 y_2' \right) + a_2 \left(C_1 y_1 + C_2 y_2 \right) =$$

$$= C_1 \left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 \right) + C_2 \left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 \right) = 0.$$

Теорема. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения (**) и $\dfrac{y_2}{y_1} \neq const$, то $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ общее решение дифференциального уравнения.

Доказательство: Покажем, что $\forall\ \ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ можно подобрать $C_1,\ C_2$ так, чтобы решение y удовлетворяло начальным условиям.

Подставим начальные условия в выражения для y и y_0

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0'. \end{cases} \qquad y_1\big|_{x=0} = y_{10} \quad y_2\big|_{x=0} = y_{20}$$

Покажем, что определитель $W_0 = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$

Если это так, то система имеет решение $\forall y_0, y'_0.$

Предположим обратное. Определитель равен нулю. Тогда система $\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = 0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = 0 \end{cases}$ при нулевых начальных условиях помимо нулевого, имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Пусть C_{10}, C_{20} одно из них.

Тогда $C_{10} y_1 + C_{20} y_2 \equiv 0$.

Следовательно $\dfrac{y_2}{y_1} = -\dfrac{C_{10}}{C_{20}} = const$, что противоречит условию.

Линейная независимость и определитель Вронского

Функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

содержит две произвольные постоянные и является решением уравнения . Может ли она являться общим решением уравнения ?

Определение

Функции $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *называются* ***линейно независимыми*** на интервале $(a;\ b)$, если равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля и выполняется равенство,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$$

то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ***называются линейно зависимыми на (a;b).***

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый ***определитель Вронского или вронскиан*** *(Ю. Вронский — польский математик)*.

Для двух дифференцируемых функций ***вронскиан имеет вид***

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.}$$

Ю́зеф Вро́ньский
(фр. *Wroński*, настоящая фамилия — Хёне, польск. *Hoene*; известен также как Гёне — Вронский) (1776 —1853), польский математик и философ-мистик.

Был артиллерийским офицером в армии Костюшко, впоследствии служил в штабе А. В. Суворова, с 1797 — в отставке. Его работы по математике, публиковавшиеся с 1811, характеризуются чрезвычайной широтой и общностью постановки задач. Однако сложность обозначений, которыми он пользовался, склоняющийся к мистицизму стиль затрудняли изучение его произведений. Имя Вронского сохранилось во всех курсах анализа за введённый им впервые (1812) функциональный определитель, имеющий основное значение в теории линейных дифференциальных уравнений.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема. Если дифференцируемые функции ***$y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на (a;b), то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.***

Теорема. Если функции ***$y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения на (a;b), то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль***.

Из теорем следует, что ***вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала (a; b) тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.***

Совокупность любых двух линейно независимых на интервале (а; *b)* частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второю порядка определяет **фундаментальную систему решений** этого уравнения: ***любое произвольное решение может быть получено как комбинация***

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты зависят от x, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема.

Если задано уравнение вида

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

и известно одно ненулевое решение $y = y_1$, *то общее решение может быть найдено по формуле*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно

Формула

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$$

Называется формулой Остроградского-Лиувилля

Рассмотрим уравнение второго порядка более общего вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

Формула Остроградского – Лиувилля дает значение определителя Вронского для решений этого уравнения:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

где y_1, y_2 - любые два решения

Михаи́л Васи́льевич Острогра́дский (*Миха́йло Васи́льович Острогра́дський)*; 12 сентября [24 сентября] 1801 — 20 декабря 1861 [1 января 1862]) — российский математик и механик украинского происхождения, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века

Лиувилль Жозеф (Liouville Joseph), род. 24.3.1809, Сент-Омер (Па-де-Кале) – ум. 8.9.1882, Париж.
Французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (с 18.12.1840), член Парижской АН (1839), профессор Политехнической школы (1833) и Коллеж де Франс (1839) в Париже. Основные труды по математическому анализу. Построил теорию эллиптических функций, рассматриваемых краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка (так называемая задача Штурма–Лиувилля)

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с правой частью.

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x). \qquad (***)$$

Теорема. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (***) есть сумма общего решения однородного уравнения (**) и частного решения неоднородного уравнения (***).

Доказательство: Пусть $\varPhi(x)$ - общее решение однородного уравнения, $\varphi(x)$ - частное решение неоднородного уравнения.

Тогда $y' = \varPhi'(x) + \varphi'(x)$, $y'' = \varPhi''(x) + \varphi''(x)$.

Подставим y, y', y'' в(***).

$$\varPhi''(x) + \varphi''(x) + a_1\left(\varPhi'(x) + \varphi'(x)\right) + a_2\left(\varPhi(x) + \varphi(x)\right) =$$

$$= \left(\varPhi''(x) + a_1\varPhi'(x) + a_2\varPhi(x)\right) + \left(\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)\right) = f(x).$$

Следовательно $y = \Phi(x) + \varphi(x)$.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \varphi$$

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x).$$

$$\forall \quad y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 + \varphi(x_0)$$
$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 + \varphi'(x_0)$$

$$W_0 = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Комплексные числа

В поле действительных чисел неразрешимо простейшее уравнение $x^2+1=0$, или $x^2=-1$.

Введем новое число i , которое является решением этого уравнения.

Тогда формально можно написать

$$i = \sqrt{-1}$$

Уравнение $x^2=-1$ будет иметь два корня: i и $-i$, ибо

$$i^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1,$$

$$(-i)^2 = \left(-\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

Более того, с появлением "мнимой единицы" (так было названо i) ***любое квадратное уравнение получает два корня!***

В самом деле, если $D=b2-4ac<0$, то $-D>0$, и значит,

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{(-1)(-D)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-1}\sqrt{-D}}{2a}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Например, для уравнения $x^2-2x+2=0$ имеем $D=-4$, откуда $-D=4$, и значит,

$$x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

Символ вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$

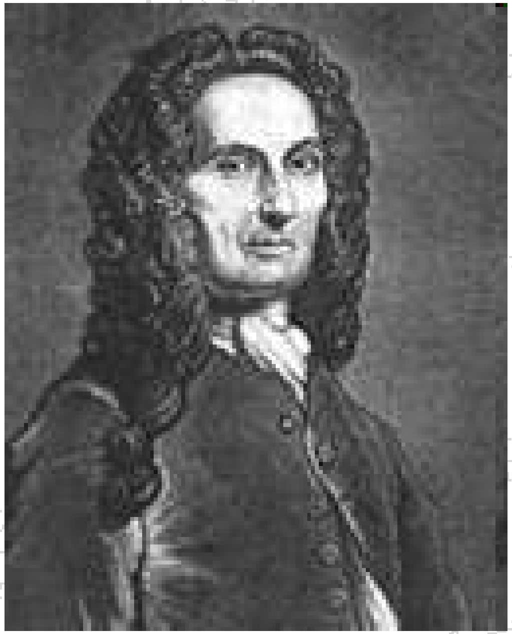
-мнимая единица, называется ***комплексным*** числом с действительной частью a и мнимой частью b.

Действительное число ***a*** можно трактовать как комплексное число $a+0i$ (т.е. с отсутствующей мнимой частью), так что поле действительных чисел является подмножеством множества C

Комплексные числа вида $0+bi=bi$ называются чисто мнимыми.

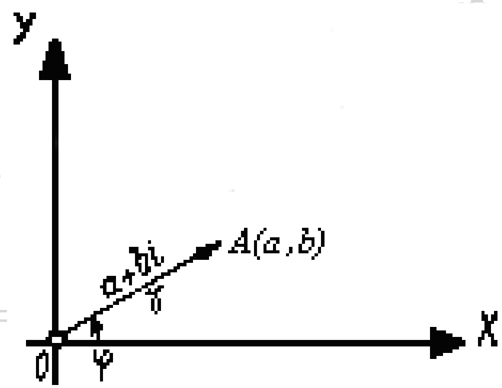
В XVIII веке мнимые числа (так их назвал Декарт) широко использовались в математической практике, но не имели никакого содержательного истолкования. Им не было места на числовой прямой, а выйти за пределы этого одномерного пространства не догадались ни Лейбниц, ни Бернулли, ни Даламбер, ни Эйлер (именно он обозначил мнимую единицу буквой i). Первым это сделал датский землемер Каспар Вессель в 1799 году.
Он предложил отождествить комплексные числа с точками плоскости.

Рене Декарт — (1596-1650) — французский философ, математик, физик и физиолог, основатель новоевропейского рационализма и один из влиятельнейших метафизиков Нового времени.



Каспар Вессель (норв. Caspar Wessel; род. 8 июня 1745, Вестбю, умер 25 марта 1818, Копенгаген) — датско-норвежский математик, по профессии землемер.

Идея геометрического представления комплексных чисел заключается в том, что комплексному числу *a+bi* сопоставляется точка плоскости с координатами *(a,b)* . Таким образом, между точками числовой плоскости и комплексными числами устанавливается попарное соответствие .
Так мнимые числа получили вполне осязаемую интерпретацию.



Можно было ожидать, что при анализе уравнений более высоких степеней возникнет необходимость в дальнейшем обобщении понятия числа.
 Но в 1799 году Гаусс доказал так называемую Основную теорему алгебры.-

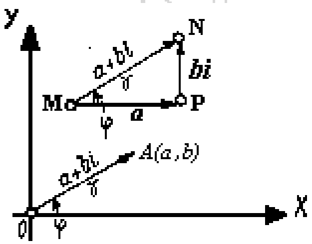
Теорема . **Всякое алгебраическое уравнение степени *n* с действительными или комплексными коэффициентами**

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

разрешимо в поле комплексных чисел и имеет *n* корней (с учетом их кратностей).

Иоганн Карл Фри́дрих Га́усс (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; 1777—1855) — немецкий математик, астроном и физик , считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков

Тригонометрическая форма комплексных чисел



Вместо того, чтобы определить вектор его проекциями a и b на координатные оси, мы можем определить его двумя другими величинами, а именно: его длиною r и углом φ, который направление образует с положительным направлением оси OX. Если же мы считаем, что комплексное число $a + bi$ соответствует точке с координатами (a, b), то r и φ будут, очевидно, полярными координатами этой точки.

Как известно, имеют место соотношения

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Положительное число r называется *модулем*, φ - *аргументом* комплексного числа $z = a + bi$. Аргумент $Arg\ z$ определяется лишь с точностью до слагаемого 2π. В случае $r = 0$, комплексное число равно нулю, и его аргумент совершенно не определен. *Условие равенства* двух комплексных чисел состоит, очевидно, в том, что *модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемыми, кратными* 2π.

Комплексное число через его модуль и аргумент записывается в виде: $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

В таком случае говорят, что комплексное число задано в **тригонометрической форме**

Формулы Эйлера

Обобщим понятие о показательной функции на случай любого комплексного показателя. При вещественном показателе функция e^x может быть представлена в виде ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Определим аналогично

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \dots$$

Отделяя вещественные и мнимые члены, имеем отсюда

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)$$

и, учитывая разложения $\cos y$ и $\sin y$ в ряд, определяем

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y \qquad e^{-yi} = \cos y - i \sin y$$

Эти формулы определяют показательную функцию при чисто мнимом показателе

Отсюда и получаются ***формулы Эйлера***, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

Формулы Эйлера дают новую *показательную форму комплексного числа*, имеющего модуль r и аргумент φ:

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{\varphi i}$$

Показательную функцию при любом комплексном показателе $x + yi$ определяем формулой

$$e^{x+yi} = e^{x}e^{yi} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

Т.е. модуль числа e^{x+yi} будем считать равным e^{x}, а аргумент равным y