Лекция 2.9

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(4).

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в общем виде записывается так:

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0 .$$

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в виде, разрешенном относительно старшей производной, выглядит так:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right).$$

Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Определение. Уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид $y'' = f(x, y, y')$.

Пример. $y'' = x.$

Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма. Дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$ обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные.

Это множество решений называется **общим решением.**

Частные решения дифференциального уравнения имеют конкретные значения постоянных и определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \;\; y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Решение дифференциального уравнения 2 – ого порядка записанное в виде $\Phi\left(x, y, C_1, .C_2\right) = 0, \Phi\left(x, y, C_1^0, .C_1^0\right) = 0$ называется соответственно ***общим и частныминтегралами***

Интегральной кривой называется график частного решения.

Общее решение представляет собой совокупность интегральных кривых.

Пример. $y'' = x.\ \ y\big|_{x=2} = 2,\ \ y'\big|_{x=2} = 3.$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \qquad y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \quad C_1 = 1,\ \ C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

Обычно рассматривается одна из трех задач:

1) ***Найти общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка;

2) ***Задача Коши*** – найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям;

3) ***Краевая задача*** – найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, одна часть которых задана в точке x_0, а другая часть в точке x_1.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Если функция $f(x, y, y')$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений (x_0, y_0, y_0'),

то дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'.$$

Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2, \; y'\big|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение.

Если задать начальные условия при $x_0 = 0,$ то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x,y,y')$. Область существования и единственности решения $G \in R^3(x,y,y')$ заполнена непересекающимися интегральными кривыми. Через любую точку $(x_0, y_0, ,y_0') \in G$ проходит единственная интегральная кривая. Однако через «точку» $(x_0,y_0) \in R^2(x,y)$ проходит бесконечно много интегральных кривых, все они различаются значениями y_0'. Заметим, что в $R^3(x,y,y')$ «точка» $(x_0,y_0) \in R^2(x,y)$ представляет собой прямую $x = x_0$, $y = y_0$.

Геометрический смысл начальных условий:

Помимо точки (x_0, y_0), задаем угловой коэффициент касательной.

Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают **граничные условия** (краевые условия) $y|_{x=x_1} = y_1,\ y|_{x=x_2} = y_2$ (сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.).

В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений.

Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x.\ y\big|_{x=1} = 0,\ y\big|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0,\ \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6},\ C_2 = 1.$$

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Мы умеем аналитически решать всего пять типов дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах. Причем однородные, линейные и Бернулли тоже сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Даже решить уравнение второго порядка, не говоря уж об уравнении n-го порядка – проблема. Поэтому стараются понизить порядок дифференциального уравнения, если это возможно, чтобы свести его к известным типам уравнений первого порядка.

Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка. $y'' = f(x, y, y')$.

1) Уравнение не содержит y и y'. $y'' = f(x)$.

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2.$$

2) Уравнение не содержит y. $y'' = f(x, y')$.

Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$.

$$z' = f(x, z).$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$z = \varphi(x, C_1)$, $y' = z$, $y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$.

Пример. $$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

$$y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x,$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Уравнение не содержит x. $y'' = f(y, y')$.

Замена $y' = z(y) \Rightarrow y'' = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = z'z.$

$$zz' = f(y, z).$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$z = \varphi(y, C_1)$, $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$, $\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = x + C_2.$

Пример. $2yy'' + y'^2 = 0.$

$$y' = z(y),\ \ y'' = z'z.$$

$$2yz'z = -z^2, \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}, \qquad \ln|z| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}},\ \ (y > 0).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},\ \ \sqrt{y^3} = C_1 x + C_2.$$

При сокращении на z было потеряно решение $z = y' = 0$, т.е. $y = const$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1x + C_2 = f_2(x) + C_1x + C_2,$$

……………………………………

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

$$f_n(x) = \int\int \ldots \int f(x) dx^n.$$

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Пример. $y'' = xe^{-x}.$

$$y' = \int xe^{-x}dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int \left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \right) dx + C_2 = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Пример $y^{IV} = \sin 2x.$

$$y''' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int c_1\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

2) Уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$

Подстановка $y^{(k)} = z$ понижает порядок уравнения на k :

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Пример.

Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2; \quad y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

3) Уравнения вида $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$

Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1:

$$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dz}{dy}y'\frac{dz}{dy} + z\frac{d^2z}{dy^2}y' = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right] \text{ и т. д.}$$

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$$

Замена переменной $\quad p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

1) $\quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$

$$y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $\quad u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

, :

$$\int du = 4\int \frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $\quad p = \dfrac{dy}{dx}$

получаем

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int \frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\quad \ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C;$

2) $p = 0;$ $y' = 0;$

$y = C;$

Таким образом, получили два общих решения.

4) Уравнения вида $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ **однородные относительно** $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Уравнение называется однородным относительно y, y', y'', если при замене $y \to ky,\ y' \to ky', \ldots, y^{(n)} \to ky''$ уравнение не изменится.

Подстановка $\dfrac{y'}{y} = z(x)$ понижает порядок уравнения на 1:

$$\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = z'(x) \Rightarrow \frac{y''}{y^2} = z' + z^2 \text{ и т.д.}$$

Частный случай- уравнение однородное относительно y, y', y''.

Уравнение называется однородным относительно y, y', y'', если при замене $y \to ky,\ y' \to ky', .y'' \to ky''$ уравнение не изменится.

Подстановка $y' = yz(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $xyy'' - x(y')^2 = yy'$

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + z'y = yz^2 + z'y, \quad xy\left(yz^2 + yz'\right) - xy^2z^2 = y^2z,$$

$$xy^2z' = y^2z, \quad y \equiv 0$$ - *решение*

$$xz' = z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad z = C_1x, \quad y' = yC_1x,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1x, \quad y = C_2e^{C_1\frac{1}{2}x^2}$$ - общее решение.

Пример. $3y'^2 = 4yy'' + y^2.$

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 4\frac{y''}{y} + 1. \quad \frac{y'}{y} = z(x), \quad \frac{y''}{y^2} = z' + z^2.$$

$$3z^2 = 4z' + 4z^2 + 1, \quad -4z' = z^2 + 1, \quad \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{4}, \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4}\int dx + C_1,$$

$$\operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{x}{4} \Rightarrow z = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right), \ \ln|y| = 4\ln\left|\cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)\right| + \ln|C_2|.$$

$$y = C_2\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

5.Уравнения, обе части которых являются полными производными каких-либо функций.

Пример. $yy'' = (y')^2$.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y}$, $(\ln y')' = (\ln y)'$, $\ln y' = \ln y + C$,

$y' = C_1 y$, $\dfrac{dy}{y} = C_1 dx$, $\ln y = C_1 x + C_2$, $y = C_3 e^{C_1 x}$.