Лекция 2.8.1

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(3).

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение

Если левая часть уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Это выполняется, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Теорема(лекция 6) Если $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области D, то существует $u(x,y)$ такая, что $P=\frac{\partial u}{\partial x}, Q=\frac{\partial u}{\partial y}$.

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y).$$

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

$$Q(x;y) = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y.$$

$$\varphi(y) = \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)\,dx\right)\right)dy + c,$$

Пример

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y dy}{1+x^2}=0$$

Решение:

Проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \qquad Q=\frac{e^y}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-e^y)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(0-e^y)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{e^y}{1+x^2}\right)'_x=e^y\cdot((1+x^2)^{-1})'_x=-e^y\cdot(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'_x=-\frac{e^y}{(1+x^2)^2}\cdot(0+2x)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Рассмотрим первый способ отыскания функции F

Запишем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$$ – работаем с этой производной

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$$ – про эту производную пока забываем

Если

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$$

то:

$$F=\int\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}=(1-e^y)\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{(1-e^y)}{1+x^2}+\varphi(y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+\varphi(y)$$

Здесь $(1-e^y)$ является константой, которая вынесена за знак интеграла, а сам интеграл найден методом подведения функции под знак дифференциала.

Находим частную производную по у и приравниваем к ней «забытую» производную:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(\frac{e^y-1}{1+x^2}+\varphi(y)\right)'_y=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'_y(y)=\frac{e^y}{1+x^2}$$

Из последнего равенства $\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'_y(y)=\frac{e^y}{1+x^2}$

после сокращения следует, что $\varphi'_y(y)=0$, это простейший случай:

$$\varphi(y)=\int 0dy=C=const$$

Находим общий интеграл $F=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$

Пример.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

$$P=\frac{\sin 2x}{y}+x \qquad Q=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)'_y=-\frac{\sin 2x}{y^2}+0=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)'_x=0-\frac{2\sin x}{y^2}\cdot(\sin x)'_x=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

Таким образом

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx-\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

Второй (зеркальный) метод решения

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$$ – эту производную пока забываем.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$ –будем работать с этой производной.

$$F=\int\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=\int y\,dy-\sin^2 x\int\frac{dy}{y^2}=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)\right)'_x=0+\frac{2\sin x\cos x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)$$

Приравниваем

$$\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+x$$

$$\varphi'_x(x)=x$$

$$\varphi(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$$

Подставляем в недостроенный общий интеграл $F=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$

Получаем **ответ:** общий интеграл:

$$\frac{y^2+x^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+C=0,\ \text{где } C-const$$

Подставляем найденную функцию

$$\varphi(y) = C$$

в «незаконченный» результат

$$F = \frac{e^{y} - 1}{1 + x^{2}} - \varphi(y)$$

и получаем **ответ:**

общий интеграл: $\dfrac{e^{y} - 1}{1 - x^{3}} + C = 0$, где $C = const$

Пример.

$$\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\left(x,y\right),$$

$$u=\int\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+C\left(y\right)=e^{x}+xy+x\sin y+C\left(y\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y) = Q(x, y) = x + x\cos y + e^y,$$

$$C'(y) = e^y, \; C(y) = e^y,$$

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = C_1.$$

Третий способ отыскания решения основан на формулах, полученных при изучении криволинейных интегралов второго рода

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=C.$$

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C.$$

В качестве точки $(x_0;y_0)$ выбирают точку удобную для вычислений. Обычно подходит точка (0;0). Но не всегда.

Пример.

$$\left(x+y-1\right)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

$$\int_{x_0}^{x} P\left(x,y\right)dx+\int_{y_0}^{y} Q\left(x_0,y\right)dy=C.$$

Положим $x_0 = y_0 = 0.$

$$\int_0^x (x + y - 1)\,dx + \int_0^y e^y\,dy = C,$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + yx - x\right)\Bigg|_o^x + e^y\Big|_0^x = C, \qquad \frac{x^2}{2} + yx - x + e^y - 1 = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + yx - x + e^y = C.$$

Пример.

Найти общий интеграл уравнения:

$(x+y)dx+(x+2y)dy=0$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=1=\frac{\partial(x+2y)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то это – уравнение в полных дифференциалах.

Решим уравнение комбинацией способов 1 и 2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = x + y \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + xy + z_1(y) + C_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = x + 2y \Rightarrow u = xy + y^2 + z_2(x) + C_2.$$

Сравнивая оба равенства, видим, что

$$z_1(y) = y^2, \quad z_2(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad C_1 = C_2 = C,$$

поэтому $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C$.

Общий интеграл $\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C = 0$.

Решим уравнение вторым способом.

$$u(x, y) = \int_0^x x\,dx + \int_0^y (x + 2y)\,dy = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C.$$

Здесь принято $x_0 = y_0 = 0$.

Интегрирующий множитель.

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то можно ввести интегрирующий множитель

$\mu = \mu(x, y)$ такой, что $\dfrac{\partial \mu P}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu Q}{\partial x}$.

В общем случае уравнение

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}.$$

не решается

Частные случаи

Введем функцию

$$\nu(x,y)=\frac{(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)}{Q}$$

1) Если $\nu=\nu(x)$, то $\mu=e^{\int\frac{(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)}{Q}dx}$.

Аналогично

$$\nu(x,y)=\frac{(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)}{P}$$

2) Если $\nu=\nu(y)$, то $\mu=e^{-\int\frac{(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)}{P}dy}$.

Пример.

$$\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + \left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

$$\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^{x}.$$

$$e^{x}(x\cos y - y\sin y)dy + e^{x}(x\sin y + y\cos y)dx = 0.$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = e^{x}(x\cos y + \cos y - y\sin y),\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + e^{x}\cos y,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \left(x\cos y - y\sin y \right),$$

$$u = \int e^x \left(x\cos y - y\sin y \right) dy + C(x) = xe^x \sin y + ye^x \cos y - e^x \sin y + C(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + xe^x \sin y + e^x y\cos y - e^x \sin y + C'(x) = e^x \left(x\sin y + y\cos y \right),$$

$$C'(x) = 0, \; C = const.$$

$$u = xe^x \sin y + ye^x \cos y - e^x \sin y = C.$$

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Рассмотрим два типа уравнений 1) $y = f(x, y')$, 2) $x = f(y, y')$.

Метод введения параметра.

Обозначим $p = y', \quad dy = pdx.$

В случае 1), $y = f(x, p)$ $\quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$

Найдем решение $p = \varphi(x, C)$, подставим в $y = f(x, p)$,
получим $y = f(x, \varphi(x, C))$ - общее решение.

В случае 2)

$$x = f(y,p), \qquad \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Найдем решение $p = \phi(y, C)$, подставим в $x = f(y, p)$,получим

$x = f(y, \phi(y, C))$ - общее решение.

Уравнение Лагранжа. $y = x\varphi(p) + \phi(p)$

Дифференцируем:

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right)\frac{dp}{dx} \quad , \; dp\left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right) = pdx - \varphi(p)dx,$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - \varphi(p)}\left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right)$$ - линейное уравнение.

Отыскиваем $x = x(p, C)$ и, подставляя в уравнение Лагранжа, находим $y = x(p, C)\varphi(p) + \phi(p)$.

Исключая p из системы $\begin{cases} y = x\varphi(p) + \phi(p) \\ x = x(p, C)) \end{cases}$ получаем решение уравнения Лагранжа

Уравнение Клеро. $y = xp + \phi(p)$.

Уравнение Лагранжа превращается в уравнение Клеро, если в уравнении Лагранжа положить $\varphi(p) \equiv p$.

Дифференцируем обе части:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{d\phi(p)}{dp}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{d\phi(p)}{dp}\right) = 0.$$

1) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C,\ y = Cx + \phi(C)$ - общее решение.

2) $x = -\dfrac{d\phi(p)}{dp} = -\phi'(p)$. Подставляя в уравнение, получим особое решение

$$\begin{cases} y = -p\phi'(p) + \phi(p) \\ x = -\phi'(p) \end{cases}$$

Пример. $y = xy' - (y')^2$

$$p = p + xp' - 2pp', \quad p'(x - 2p) = 0.$$

1) $p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = xC - C^2$ - общее решение

2)

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$ - особое решение