Лекция 2.8

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ(2).

Однородные дифференциальные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример. $\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$

Пример преобразования функции. $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2} = \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

Определение

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией порядка m, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Пример 1. $f(x,y)=x+3y$ - 1-й порядок однородности.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+3\lambda y=\lambda(x+3y)=\lambda f(x,y).$$

Пример 2. $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2$ - 2-й порядок однородности.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y).$$

Пример 3. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+7xy}$ - нулевой порядок однородности (просто однородная функция).

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y).$$

Теорема

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ **,**

где $f(x, y)$ **- однородная функция нулевого порядка является однородным.**

Доказательство

Если *f(x,y)* — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, *f(x;y)* = *f* (λ *x*, λ *y*). Положив λ = 1/*x*, получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\right) = f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными.

Введем вспомогательную функцию $\frac{y}{x} = t$ или $y = tx$.

$y' = t'x + t.$

Тогда $t'x + t = \varphi(t)$. $t'x = \varphi(t) - t$, $\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$

Вычислив интеграл, и перейдя к $y = tx$, получим $F(x, y) = \ln|x| + C.$

Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0$. Если $\varphi(t) - t \equiv 0$, то $y' = \frac{y}{x}$

Пример.

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}. \quad y = tx, \quad t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{t^2}{1 - 2t}.$$

Тогда $\frac{1-2t}{t^2} dt = \frac{dx}{x}.$

Проинтегрировав, получим $\frac{1}{t} + 2\ln|t| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ или $\ln\left(e^{\frac{1}{t}} t^2\right) = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$

Окончательно $t^2 e^{\frac{1}{t}} = \frac{C}{x}$ или $\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C.$

Дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right).$

Рассмотрим два случая.

1) Если $aB - bA \neq 0,$ производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x - x_0, \\ \overline{y} = y - y_0, \end{cases}$$

где x_0, y_0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ Ax + By + C = 0, \end{cases} \quad x_0 = -\frac{cB - bC}{aB - bA}, \quad y_0 = -\frac{aC - cA}{aB - bA}.$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению.

2) Если $aB - bA = 0$, производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = ax + by. \end{cases}$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример

$$y' = \frac{-7x+3y-2}{-3x+4y-5}.\ \ aB-bA=-19\neq 0.$$ Первый случай

$$x_0 = \frac{-8+15}{19} = \frac{7}{19},\ \ y_0 = \frac{35-6}{19} = \frac{29}{19}.\ \ \begin{cases} \overline{x} = x - \dfrac{7}{19}, \\ \overline{y} = y - \dfrac{29}{19}, \end{cases} \ \ \begin{cases} x = \overline{x} + \dfrac{7}{19}, \\ y = \overline{y} + \dfrac{29}{19}. \end{cases}$$

$$\overline{y}' = \frac{-7\overline{x}+3\overline{y}-\dfrac{7\cdot 7}{19}+\dfrac{3\cdot 29}{19}-2}{-3\overline{x}+4\overline{y}-\dfrac{3\cdot 7}{19}+\dfrac{4\cdot 29}{19}-5} = \frac{-7\overline{x}+3\overline{y}}{-3\overline{x}+4\overline{y}}.$$

Дифференциальное уравнение свелось к однородному дифференциальному уравнению.

Пример

$$y' = \frac{-x + y - 2}{x - y}. \qquad aB - bA = -1(-1) - 1\cdot 1 = 0.$$

Второй случай $\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = -x + y, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \overline{x}, \\ y = \overline{y} + x, \end{cases}$ $y' = \overline{y}' + 1.$

Дифференциальное уравнение примет вид $\overline{y}' + 1 = \dfrac{\overline{y} - 2}{-\overline{y}} = \dfrac{2}{\overline{y}} - 1$ или $\overline{y}' = \dfrac{2}{\overline{y}} - 2.$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\overline{y}' = 2\frac{1-\overline{y}}{\overline{y}}, \quad \int \frac{-\overline{y}d\overline{y}}{1-\overline{y}} = -2\int dx + C, \quad \int \frac{(1-\overline{y}-1)\,d\overline{y}}{1-\overline{y}} = -2x + C, \quad \overline{y} + \ln|1-\overline{y}| = -2x + C,$$

$$-x + y + \ln|1 + x - y| = -2x + C.$$

Окончательно $y + \ln|1 + x - y| = -x + C.$

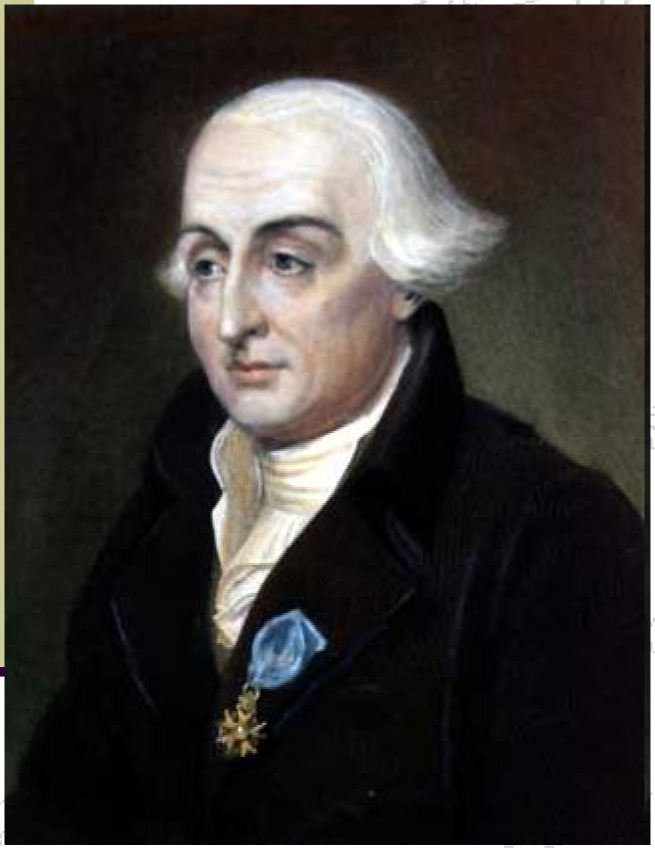
Линейные дифференциальные уравнения

Определение.
Дифференциальное уравнение вида
$$y' + p(x)y = q(x),$$
т.е. линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y', называется линейным.

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода:

метод Лагранжа и ***метод Бернулли.***

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).



Жозе́ф Луи́ Лагра́нж (фр. *Joseph Louis Lagrange*, итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 1736 —1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером — лучший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала.

$$y' + p(x)\, y = q(x).$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение $y' + p(x)\, y = 0.$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\, dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)\, dx + \ln C.$$

Решение уравнения $y = Ce^{-\int p(x)dx}.$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией $C = C(x)$, т.е. $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$

Найдем производную $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$ и подставим в исходное уравнение y и y'.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)$.

Замечание. Решая уравнение методом вариации, *обязательно приводите его к виду* $y' + a(x)y = b(x)$ *(если при* y' *стоит коэффициент, то делить на него обязательно*), иначе метод вариации даст ошибку.

Метод Бернулли (метод замены переменной).

Я́коб Берну́лли (нем. *Jakob Bernoulli*, 1654 —1705) — швейцарский математик, профессор математики Базельского университета (с 1687 года). Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли. Иностранный член Парижской Академии наук (1699) и Берлинской академии наук (1701).

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Мы видели выше, что решение действительно является произведением двух функций от x. Этот факт здесь и используется.

Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$.

Подставим в исходное уравнение y и y'.

Получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Потребуем, чтобы функция v была такой, что выражение $\left(v' + p(x)v\right)$ тождественно равнялось нулю.

Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными $\left(v' + p(x)v\right) = 0$ и $u'v = q(x)$.

Решим их последовательно

1) $v' + p(x)v = 0,\ \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\,dx,\ \ln v = -\int p(x)\,dx,\ v = e^{-\int p(x)dx}.$

2) $u'v = q(x),\ u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),\ du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$

$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$

$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$

Пример. Решить уравнение

$$x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}.$$

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}.$$

Применим полученную выше формулу:

$$p = \frac{1}{x^2}; \quad q = ae^{\frac{1}{x}};$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Уравнение Бернулли. $y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \neq 0,\ n \neq 1.$

Решать уравнение Бернулли можно тремя способами

1) сведение к линейному уравнению заменой

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному. Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что

$$z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$$

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

2) *Решение методом Лагранжа*.

Решение проводится аналогично линейному уравнению.

Решим сначала однородное уравнение, полагая правую часть уравнения нулевой.

$$y' + a(x)y = 0, \quad y = Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Затем *ищем решение уравнения в виде* $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$, варьируя произвольную постоянную $C = C(x)$,

вычисляем y' и подставляем в исходное уравнение .

$$C'e^{-\int a(x)dx} - Ca(x)e^{-\int a(x)dx} + Ca(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)C^n e^{-n\int a(x)dx}.$$

Вновь, как и в линейном уравнении, два слагаемых сокращаются, получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dC}{C^n} = b(x)e^{(1-n)\int a(x)dx}$$

Определяя отсюда функцию, $C(x)$ подставляем ее в $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$.

3)*Решение методом Бернулли*.

Полагаем $y = u(x)v(x)$, подставляем $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $u'v + uv' + a(x)uv = b(x)u^n v^n$.

Точно так же, как при решении линейного уравнения, решаем, например, уравнение $u'v + a(x)uv = 0, \quad u = e^{-\int a(x)dx}$. Подставляем полученную функцию, решаем «оставшееся» уравнение с разделяющимися переменными $uv' = b(x)u^n v^n, \quad \dfrac{dv}{v^n} = b(x)e^{(1-n)\int a(x)dx}$.

Затем записываем решение $y = u(x)v(x)$.

Заметим, что оно получилось точно таким же, как в методе Лагранжа. Поэтому вторая функция в методе подстановки и есть та самая варьируемая постоянная.

Отметим, что метод вариации и метод подстановки, фактически, один и тот же метод. Просто в методе подстановки с самого начала используется то, что решение представляется в виде произведения двух функций независимой переменной.

Пример

Метод Лагранжа: $3\left(xy' + y\right) = xy^2, \ \ y(1) = 3.$

$$xy' + y = 0, \ \ x\frac{dy}{dx} = -y, \ \ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C, \ \ \ln|y| = -\ln|x| + \ln C, \ \ y = \frac{C}{x}.$$

$$y = \frac{C(x)}{x}, \ \ y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

$$3\left(x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\right) = x\frac{C^2(x)}{x^2}, \ \ 3C'(x) = \frac{C^2(x)}{x},$$

$$3\left(x\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}\right)=x\frac{C^2(x)}{x^2},\ 3C'(x)=\frac{C^2(x)}{x},$$

$$C(x)=-\frac{3}{\ln|C_1x|}$$

$$y=-\frac{3}{x\ln|C_1x|},\ 3=-\frac{3}{\ln|C_1|},\ \ln|C_1|=-1,$$

$$C_1=e^{-1},\ y=-\frac{3}{x(\ln|x|-1)}.$$

Пример

Метод Бернули: $3\left(xy'+y\right)=xy^2,\ \ y\left(1\right)=3.$

$$y=uv,\ \ y'=u'v+uv'.$$

$$3xu'v+3xuv'+3uv=xu^2v^2,\ \ 3xu'v+3u\left(xv'+v\right)=xu^2v^2.$$

$$xv'+v=0,$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ \ln|v|=-\ln|x|,\ \ v=\frac{1}{x}.$$

$$3xu'v = xu^2v^2,\ \ 3xu'\frac{1}{x} = xu^2\frac{1}{x^2},$$

$$3u' = \frac{u^2}{x},\ \ 3\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{dx}{x} + \ln C,\ \ -3\frac{1}{u} = \ln|Cx|,\ \ u = -\frac{3}{\ln|Cx|}.$$

$$y = -\frac{3}{x\ln|Cx|},\ \ 3 = -\frac{3}{\ln|C|},\ \ \ln|C| = -1,$$

$$C = e^{-1},\ \ y = -\frac{3}{x\left(\ln|x| - 1\right)}.$$

Пример

$$\sqrt{1-x^2}\cdot z' - z = -\arcsin x$$

Проведем замену: $z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$

$$\sqrt{1-x^2}\cdot (u'v + uv') - uv = -\arcsin x$$

$$\sqrt{1-x^2}\cdot u'v + \sqrt{1-x^2}\;\; uv' - uv = -\arcsin x$$

$$\sqrt{1-x^2}\cdot u'v + u(\sqrt{1-x^2}\;\; v' - v) = -\arcsin x$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}\;\; v' - v = 0 \\ \sqrt{1-x^2}\;\; u'v = -\arcsin x \end{cases}$$

Найдем v

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\ln|v|=\arcsin x$$

$$v=e^{\arcsin x}$$

Из второго уравнение находим u

$$\sqrt{1-x^2}\cdot u'\cdot e^{\arcsin x}=-\arcsin x$$

$$u'=-\frac{\arcsin x}{e^{\arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{e^{-\arcsin x}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u=-\int\frac{e^{-\arcsin x}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx - (*)$$

$$\int a\,db = ab - \int b\,da$$

$$a = \arcsin x \Rightarrow da = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$db = -\frac{e^{-\arcsin x}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow b = -\int \frac{e^{-\arcsin x}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^{-\arcsin x} d(-\arcsin x) = e^{-\arcsin x}$$

$$(*) = e^{-\arcsin x}\cdot \arcsin x - \int \frac{e^{-\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}} = e^{-\arcsin x}\cdot \arcsin x + \int e^{-\arcsin x} d(-\arcsin x) =$$

$$= e^{-\arcsin x}\cdot \arcsin x + e^{-\arcsin x} + C$$

Таким образом:

$$z = uv = (e^{-\arcsin x}\cdot \arcsin x + e^{-\arcsin x} + C)\cdot e^{\arcsin x} = Ce^{\arcsin x} + \arcsin x + 1$$

Пример.

Найти общее решение уравнения:

$$y' + xy = (x-1)e^x y^2$$

Уравнение является уравнением Бернулли

Будем искать решение уравнения в виде

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

Тогда $u'v + uv' + xuv = (x-1)e^x (uv)^2$

,

В левой части последнего уравнения сгруппируем второе и третье слагаемые, которые содержат функцию $u(x)$, и потребуем, чтобы

$v' + xv = 0$. Откуда $v = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Тогда для функции $u(x)$ будем иметь следующее уравнение:

$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = (x-1)e^x \cdot e^{-x^2} \cdot u^2$ или $u' = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}+x} \cdot u^2$

которое является уравнением с разделяющимися переменными для функции $u(x)$.

Решим его

$$u^{-2}du = -(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}+x} \cdot dx$$

$$-\frac{1}{u} = -e^{-\frac{x^2}{2}+x} - c$$

$$u = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}+x} + c}$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}+x} + c} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

, $y(x)=0$.