Лекция 2.7

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Общие понятия. Теорема существования.

Определение.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Простейшие дифференциальные уравнения: $y' = f(x)$ или $dy = f(x)dx$.

Решение $y = \int f(x)dx + C$.

Более сложные дифференциальные уравнения: $y' + x^2 y = 0$, $xy' - y = 0$, $xy' = y + x$ и т.д.

или $dy + x^2 ydx = 0$, $xdy - ydx = 0$, $xdy - (y + x)dx = 0$ и т.д.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением,** если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**

Будем рассматривать уравнения функции одной переменной.

Представление дифференциальных уравнений 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$ (общий вид)

$y' = f(x, y)$ (нормальная форма .

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (дифференциальная форма)

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение, превращает его в тождество.

Пример 1. $y' = y$. Решение $y = Ce^{x}$,
где C - произвольная постоянная.

Пример 2. $y' = -y$. Решение $y = Ce^{-x}$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную.

Определения

Такое множество решений, зависящее от произвольной постоянной называют **общим решением дифференциального уравнения.**

Придавая C определенные (допустимые) значения, **получим частное решение дифференциального уравнения.**
При решении конкретных задач нас будет интересовать *частное решение, определяемое начальными условиями.* Обычно начальные условия задаются в виде
$y(x_0)=y_0$ или $y\big|_{x_0} = y_0$.

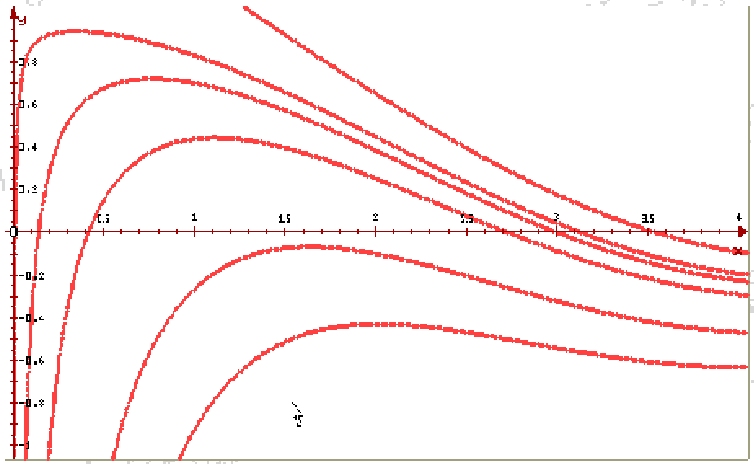
Задача отыскания частного решения по начальному условию называется ***задачей Коши.***

Огюсте́н Луи́ Коши́ (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 1789—1857,) — великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

График частного решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой.**

Общее решение – семейство интегральных кривых.



Чтобы отыскать частное решение, нужно в общее решение $y = \varphi(x, C)$ подставить x_0, y_0 и разрешить уравнение относительно C.

Рассмотрим интегральные кривые дифференциального уравнения 1 порядка $y' = f(x, y)$. В любой точке плоскости OXY правая часть дифференциального уравнения известна, ее можно вычислить. Поэтому в любой точке плоскости известна и левая часть. Левая часть, исходя из геометрического смысла производной, задает тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой.

Следовательно, в любой точке плоскости можно определить угол наклона (к оси OX) касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, т.е. определить *направление вектора касательной к интегральной кривой.*

Поэтому геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка состоит в том, что оно задает в области определения *G (x, y)* функции *f(x, y)* векторное поле *направлений векторов касательных к интегральным кривым*. Если интерпретировать дифференциальное уравнение механически, как скорость *f(x, y)* движения точки по траектории – интегральной кривой, то дифференциальное уравнение задает *поле скоростей*.

Изоклинами называются кривые в плоскости OXY, в каждой точке которой угол φ наклона к оси OX касательной к интегральной кривой один и тот же $(tg\varphi = k)$. Уравнение изоклины: $f(x,y) = k$.

Строя изоклины как можно чаще, можно достаточно точно построить интегральные кривые, нанося на каждой изоклине соответствующее ей направление вектора касательной к интегральной кривой..

Пример. $y' = -\dfrac{x}{y}$

Уравнение изоклины $-\dfrac{x}{y} = k$

k	φ	Уравнение изоклины
0	0	x=0 (ось OY)
1	$\frac{\pi}{4}$	y = - x
-1	$-\frac{\pi}{4}$	y = x
∞	$\frac{\pi}{2}$	y = 0 (ось OX)

Можно предположить, что уравнение интегральной кривой $x^2 + y^2 = R^2$ (это легко проверить:) $2xdx + 2ydy = 0, \quad y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Таким образом, интегральные кривые – окружности с центром в начале координат.

Теорема Коши о существовании и единственности решения

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y\big|_{x_o} = y_0$.

Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в открытой области, содержащей точку $P(x_0, y_0)$, то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ это уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $(y(x_0) = y_0)$.

Без доказательства.

Существуют более общие формулировки теоремы существования и единственности

Теорема существования решения задачи Коши.

Пусть функция $f(x,y)$ *непрерывна в области* $(x,y)\in G$, *тогда существует хотя бы одно решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям* $(x_0,y_0)\in G$ или *существует хотя бы одна интегральная кривая, проходящая через точку* $(x_0,y_0)\in G$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Пусть функция $f(x,y)$ *непрерывна в области* $(x,y)\in G$ *и удовлетворяет в этой области одному из трех условий:*

A: функция $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *:*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

B: существует и ограничена частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$*,*

D: существует и непрерывна частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Заметим, что из условия D следует условие B., а из условия B следует условие A. Поэтому класс функций, удовлетворяющих условию A, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию B, а класс функций, удовлетворяющих условию B, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию C. Условие A проверить трудно, а условие B или условие D проверить гораздо легче.

Если в какой-либо точке $(x,y)\in G$ решение дифференциального уравнения не существует (через точку не проходит интегральная кривая), то в ней разрывна функция $f(x,y)$.

Если через какую-либо точку проходят две или более интегральных кривых, то функция $f(x,y)$ непрерывна в этой точке, но ни одно из условий А, В, D не выполнено в ней.

Пример.

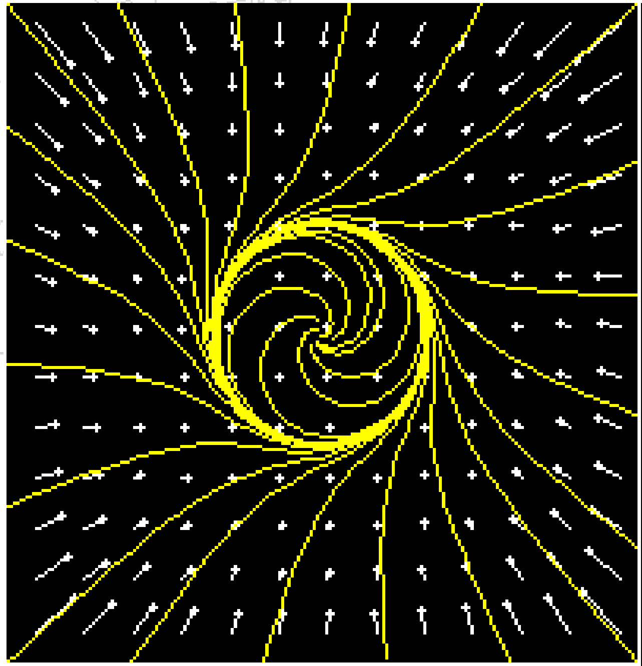
Найти общее и частное решение уравнения $y' = y$.

Очевидно, что общее решение будет $y = Ce^x$. Так как правая часть непрерывна и удовлетворяет условию D, то через любую точку конечной плоскости OXY проходит единственная интегральная кривая.

Для заданных начальных условий $(x_0, y_0) \in G$ существует константа $C_0 = y_0 e^{-x_0}$, такая что $y_0 = C_0 e^{x_0} = (y_0 e^{-x_0}) e^{x_0}$.

Отыскание решений дифференциального уравнения первого порядка

Метод изоклин



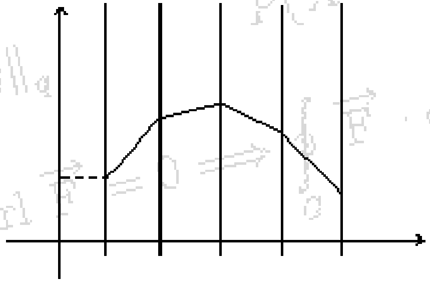
Метод изоклин (изоклины —линии, на которых $f(x,y)$ = const):
$y'(x_0) = f(x_0,y_0)$,то есть функция f позволяет определить значения производной во всех точках плоскости. Таким образом, можно задать на плоскости поле направлений касательных и решать задачу Коши графически.

Метод ломаных Эйлера

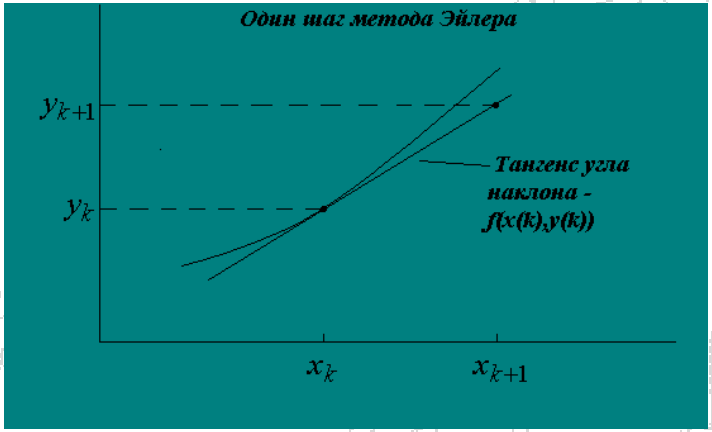
Леона́рд Э́йлер (1707,—1783,) — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.
Эйлер — автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.
Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки

$$y' = f(x, y)$$

Если взять последовательность точек и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию



$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$



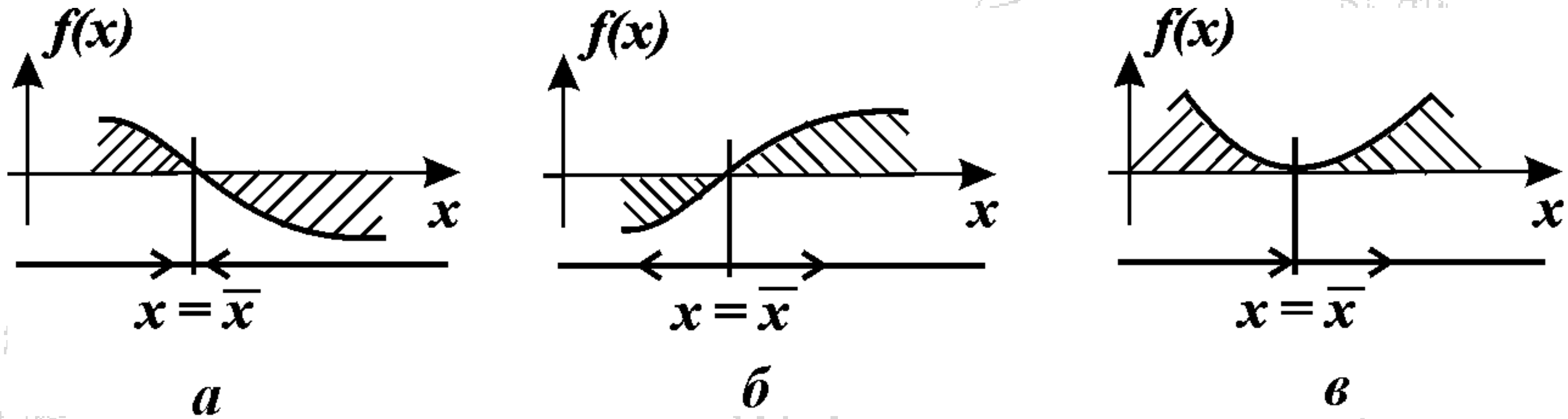
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Ломаная Эйлера.

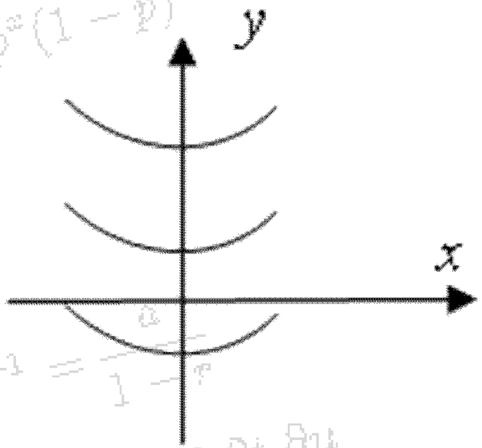
Устойчивость стационарного состояния

В случае одного уравнения вопрос об устойчивости состояния равновесия нетрудно решить, рассматривая график функции *f(x)*. По определению в стационарной точке правая часть уравнения - функция *f(x)* обращается в нуль.
Здесь возможны три случая .



Пример 1. Дифференциальное уравнение $y' = 2x$.

Общее решение $y = x^2 + C$.



Начальное условие $y\big|_{x=1} = 2$.

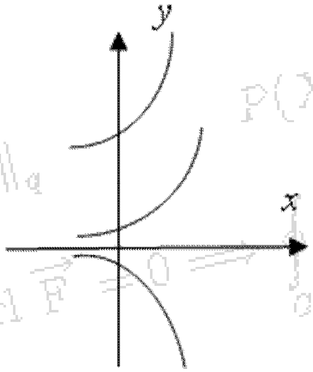
Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения.

Получим алгебраическое уравнение для определения произвольной постоянной C: $2 = 1 + C$.

Следовательно $C = 1$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет $y = x^2 + 1$.

Пример 2. Дифференциальное уравнение $y' = y$. Общее решение $y = Ce^x$.



Начальное условие $y\big|_{x=0} = 2$.

Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $2 = C$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет $y = 2e^x$.

Пример 3. Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y+x}{x}, \ x > 0.$

Общее решение $y = x\ln x + Cx.$

Начальное условие $y\big|_{x=1} = 0.$

Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $C = 0.$

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет $y = x\ln x.$

Общее решение дифференциального уравнения не обязательно должно быть получено в явном виде. Неявное выражение

$$F(x, y, C) = 0$$

также определяет решение дифференциального уравнения.

Если решение дифференциального уравнения задано в неявном виде

$$F(x, y, C) = 0$$

то его называют **общим интегралом** дифференциального уравнения. Придавая константе С конкретные значения будем получать **частные интегралы**

Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Точка (x, y) называется *не особой точкой* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, если существует ее окрестность, что через каждую точку этой окрестности проходит единственная интегральная кривая.

Все прочие точки называются *особыми точками* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, все точки (x, y) которого – особые, то есть во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения

Пример. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Решая это уравнение, получим общее решение $y = (x - C)^3$ и решение, не принадлежащее этому семейству – тривиальное решение $y \equiv 0$.

Каждая точка оси ОХ – особая, так как через нее проходят как тривиальное решение, так и частное решение из семейства $y = (x - C)^3$.

$y \equiv 0$ - особое решение.

Пример. $y' = \sqrt{y}$

Заметим, что $y' = \sqrt{y} \geq 0$. Общее решение $y = \frac{1}{4}(x - C)^2,\ x \geq C$ (иначе $y' < 0$). Кроме того, $y \equiv 0$ - тоже решение. $y \equiv 0$ - особое решение.

Заметим, что на особом решении не выполняются условия теоремы Коши, гарантирующие единственность. В самом деле, в том и другом примерах $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ терпят разрыв при $y \equiv 0$.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется **интегрируемым в квадратурах**. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $f(y)dy = g(x)dx.$

Проинтегрировав, получим

$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$ Если $y\big|_{x=x_0} = y_0,$ то $\int\limits_{y_0}^{y} f(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx.$

Пример: $3y^2dy = 2xdx.\ \ y^3 = x^2 + C,\ \ y = \sqrt[3]{x^2 + C}.$

Определение. Дифференциальные уравнения, **в которых переменные можно разделить** посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)},\ \int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C.$$

$$P(x)Q(y)\,dy+M(x)N(y)\,dx=0,\ \int\frac{Q(y)}{N(y)}\,dy+\int\frac{M(x)}{P(x)}\,dx=C.$$

Внимание! Может произойти потеря решения.

$g(y)=0$; $N(y)=0$; $P(x)=0$

Пример. $y' = y, \ \frac{dy}{y} = dx$. Заметим, что $y \equiv 0$ - решение, это так называемое тривиальное решение. Только, проанализировав, является ли $y \equiv 0$ решением или нет, мы имеем право, разделив обе части на y, двигаться дальше. Иначе тривиальное решение будет потеряно.

$\ln|y| = x + C_1$.

Здесь нельзя потерять модуль, иначе потеряем решения при $y < 0$.

$|y| = e^{C_1} e^x$.

Обозначим $C_2 = e^{C_1} > 0$ и раскроем модуль:

$y = \pm C_2 e^x$.

Заменим $C = \pm C_2$ и разрешим C быть равной нулю, т.к. тривиальное решение есть. Окончательно,

$y = Ce^x$, где C – произвольная действительная постоянная.

Обычно все эти «подводные камни» опускают (достаточно сказать о них один раз) и сразу выписывают решение уравнения $\frac{dy}{dx} = Ce^x, \forall C$.

Пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(y+1)\,dx-\left(x^2+1\right)y\,dy=0.$$

Разделим переменные $\dfrac{x}{x^2+1}dx-\dfrac{y}{y+1}dy=0\to$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C\to$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln|y+1|=\ln C\to\ \frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Потеряли особое решение $y=-1$.

Пример.

Решить уравнение $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

Решение

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$

$$y' + 2\sin y\cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos xdx; \qquad \int\frac{dy}{\sin y} = -2\int\cos xdx;$$

Пример. Найти кривую, проходящую через точку $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в три раза больше углового коэффициента радиус-вектора в точке касания.

$y' = 3\dfrac{y}{x}, \quad \dfrac{dy}{y} = 3\dfrac{dx}{x}, y \equiv 0$ - решение, $y = Cx^3$. Подставляя начальные условия, получим $\dfrac{1}{3} = C, \quad y = \dfrac{1}{3}x^3$.

Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Нет общего метода составления дифференциальных уравнений. Каждая задача требует своего подхода и знания законов физики.

1) Радиоактивный распад. Экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества.

В момент t_0 $M = M_0$. $\dfrac{dM}{dt} = -kM,\ (k > 0)$.

$$\frac{dM}{M} = -kdt,\ \ln M = -kt + \ln C,\ M = Ce^{-kt},\ M\big|_{t=0} = M_0,\quad C = M_0,\ M = M_0 e^{-kt}.$$

Период полураспада T. $\dfrac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \rightarrow\ e^{kT} = 2 \rightarrow\ T = \dfrac{\ln 2}{k}$. k - определяется экспериментально.

Пример. *Формула Циолковского*.

Ракета вместе с топливом, массой $m(t)$, движется прямолинейно, без учета гравитации. Скорость истечения топлива v_0, в начальный момент времени t_0 ракета неподвижна и имеет вместе с топливом массу М. Вывести формулы для скорости ракеты $v(t)$.

Выделим элемент массы *dm*. По закону сохранения количества движения

$$d(mv) = (v - V_0)dm, \quad mdv + vdm = vdm - V_0 dm, \quad dv = -V_0 \frac{dm}{m}, \quad v = -V_0 \ln m + C$$

Подставляя $v(t_0) = 0$, получим $C = V_0 \ln M$. Отсюда

$v = V_0 \ln \dfrac{M}{m}$ - формула Циолковского.

2) Охлаждение тела. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды T_c. $T\big|_{t_o} = T_0$.

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_c\right), \ \left(k > 0\right).$$

$$\frac{dT}{T - T_0} = -kdt, \ \ln\left(T - T_c\right) = -kt + \ln C, \ \left(T > T_c\right).$$

$$T = T_c + Ce^{-kt}, \ T\big|_{t=0} = T_0, \ T_0 = T_c + C, \ C = T_0 - T_c.$$

Окончательно $T = T_c + \left(T_0 - T_c\right)e^{-kt}$.

Однако в сложных многопараметрических системах уравнение релаксации в общем случае не работает. В таких системах процессы релаксации становятся неэкспоненциальными. А уравнение релаксации принимает вид уравнения в дробных производных

$$\frac{d^{\nu}\rho(t)}{dt^{\nu}} + \lambda\rho(t) = 0 \quad (\nu < 1)$$

(уравнение сверхмедленной релаксации).

$$\frac{d^{\nu}u(t)}{dt^{\nu}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right]$$

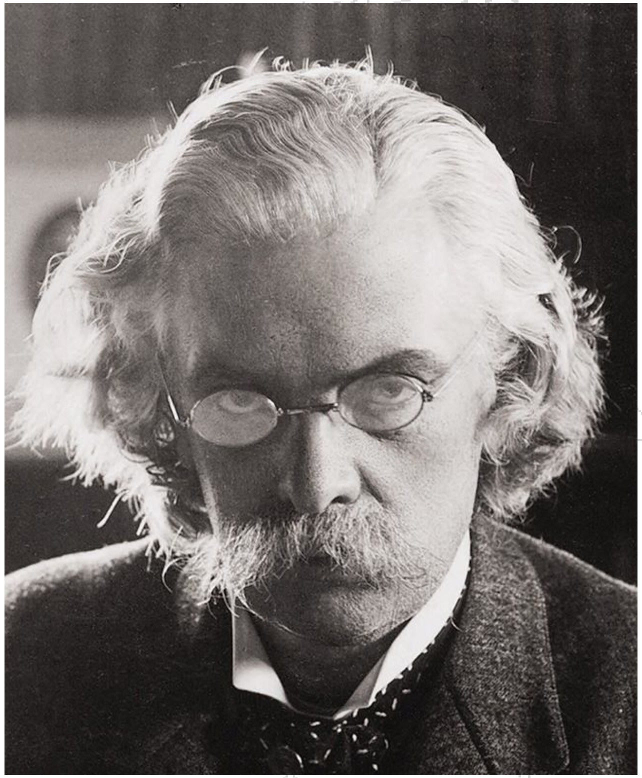
Уравнение сверхмедленной релаксации имеет точное решение, выражающееся функциями Миттаг-Лефлера

$$e_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda t^\nu)^n}{\Gamma(\nu n + 1)}, \quad t > 0, 0 < \nu \le 1.$$

Одно из ассимптотических выражений для этой функции имеет вид

$$e_\nu(t) \sim \exp\left[-\frac{\lambda t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\right]$$

(экспоненциальный закон Уильямса-Уотса), позволяющий оценить порядок убывания решения

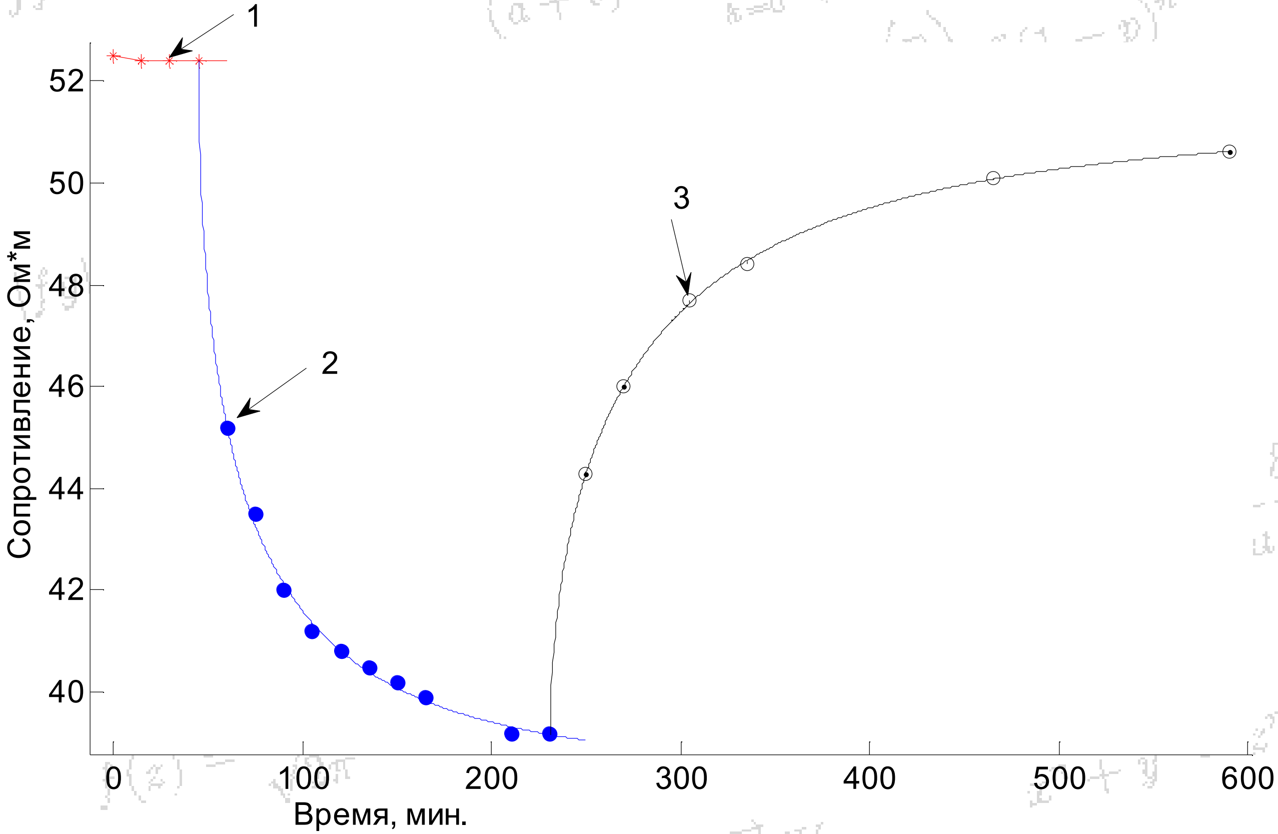


Магнус Густав Миттаг-Леффлер — шведский математик. Профессор университетов в Гельсингфорсе и Стокгольме. Работы относятся к теории аналитических функций. В 1882 году основал один из крупнейших математических журналов — Acta mathematica.

Родился: 16 марта 1846 г., Стокгольм, Швеция

Умер: 7 июля 1927 г.

Действительно, реально наблюдаемые в эксперименте изменения сопротивления описываются функциями Миттаг-Лефлера



1-соротивление до начала упругого воздействия, 2- в процессе упругого воздействия, 3 – после воздействия