Лекция 2.7

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задача о массе поверхности.

Задача о массе поверхности приводит нас к *поверхностному интегралу 1 рода*, точно так же, как задача о массе кривой привела нас к криволинейному интегралу первого рода.

Пусть в каждой точке кусочно-гладкой поверхности σ задана поверхностная плотность f(x, y, z).

- Введем разбиение σ на элементарные области $\Delta\sigma_i$ – элементы разбиения так, чтобы они не имели общих внутренних точек (*условие А)*.
- Отметим точки M_i на элементах разбиения $\Delta\sigma_i$. Вычисляем $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и считаем плотность постоянной и равной $f(M_i)$ на всем элементе разбиения $\Delta\sigma_i$..Приближенно вычислим массу ячейки разбиения как $f(M_i)\ \Delta\sigma_i$. Приближенно вычислим массу поверхности σ, просуммировав массы ячеек (составим интегральную сумму) $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$. В интегральной сумме $\Delta\sigma_i$ - это площадь поверхности элементарной ячейки. Здесь, как и ранее, традиционно употребляется одно и то же обозначение для самой элементарной ячейки и для ее площади.

Измельчаем разбиение и переходим к пределу в интегральной сумме при условии $\max_i diam\Delta\sigma_i \to 0$ (*условие В)*. Получаем **поверхностный интеграл первого рода**, который равен массе поверхности (если только $f(M_i)>0$ на поверхности).

$$m_\sigma = \iint_\sigma f(M)\,d\sigma = \lim_{\max_i diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i \,.$$

Теорема существования.

Пусть функция $f(M)=f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной поверхности σ. Тогда поверхностный интеграл первого рода существует как предел интегральных сумм.

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)\,d\sigma = \lim_{\max_i diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i .$$

Замечание. Интеграл (как предел интегральных сумм) не зависит:

1) от выбора разбиения поверхности (лишь бы выполнялось условие А),
2) от выбора отмеченных точек на элементах разбиения,
3) от способа измельчения разбиения (лишь бы выполнялось условие В).

Свойства поверхностного интеграла первого рода.

(они аналогичны по формулировке и доказательству свойствам рассмотренных ранее интегралов первого рода).

1) Линейность. $\iint\limits_{\sigma}(\lambda f+\mu g)d\sigma=\lambda\iint\limits_{\sigma} fd\sigma+\mu\iint\limits_{\sigma} gd\sigma$

2) Аддитивность $\iint\limits_{\sigma_1\cup\sigma_2} fd\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} fd\sigma\iint\limits_{\sigma_2} fd\sigma$

3) $\iint\limits_{\sigma} d\sigma=S_{\sigma}$ - площадь поверхности.

4) Если $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$, то $\iint\limits_{\sigma} fd\sigma\geq\iint\limits_{\sigma} gd\sigma$ (если $f\geq 0$, то $\iint\limits_{\sigma} fd\sigma\geq 0$),

5) Теорема об оценке. Если $m \le f(x,y,z) \le M$, то $mS_\sigma \le \iint\limits_\sigma f d\sigma \le MS_\sigma$,

6) Теорема о среднем. Пусть функция $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной поверхности σ. Тогда на поверхности найдется точка C, такая что $f(C) = \frac{1}{S_\sigma}\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma$

Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Ранее в лекции 2-2 мы вычисляли площадь поверхности с помощью двойного интеграла, то есть сводили интеграл $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ к двойному интегралу. Теперь нам сделать тоже самое для интеграл $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma$. Повторяя вновь те же выкладки с той лишь разницей, что под интегралом стоит функция $f(x,y,z)$, получим аналогичную формулу для поверхности, заданной соотношением $z=\varphi(x,y)$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}+\varphi_y'^{\,2}}\,dxdy.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, точно так же получим формулу

$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y,z)\sqrt{1+\frac{F_x'^2}{F_z'^2}+\frac{F_y'^2}{F_z'^2}}dxdy$. Здесь надо учитывать, что точка (x, y, z) лежит на поверхности σ.

Пример. Найти массу поверхности однородной полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, z>0 с постоянной поверхностной плотностью W.

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$. $F_x'=2x,\ F_y'=2y,\ F_z'=-2z$.

Обозначим D - круг – проекцию полусферы на плоскость OXY.

$$m_\sigma=\iint_D 2W\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}dxdy=2WR\iint_D\frac{1}{2z}dxdy=WR\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=$$

$$=\frac{2\pi RW}{2}\left(-2\sqrt{R^2-\rho^2}\right)\Big|_0^R=2\pi R^2W.$$

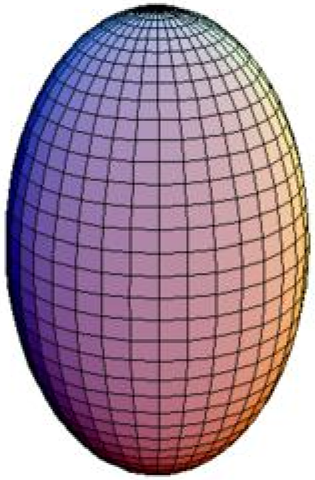
Поверхностный интеграл второго рода.

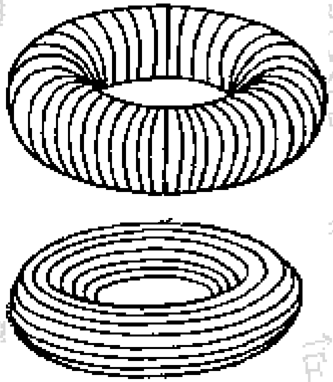
Поверхность σ называется **ориентируемой**, если в каждой ее точке существует вектор нормали к σ, описываемый непрерывной вектор – функцией на σ.

Поверхность σ называется **односторонней**, если при обходе поверхности σ по контуру γ вектор нормали меняет свое направление на противоположное.

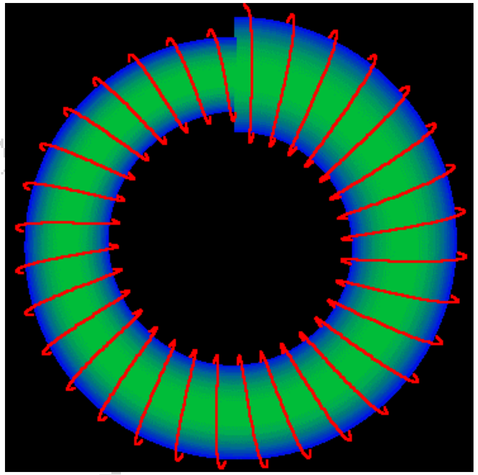
Поверхность σ называется **двусторонней,** если при обходе поверхности σ по контуру γ вектор нормали не меняет свое направление.

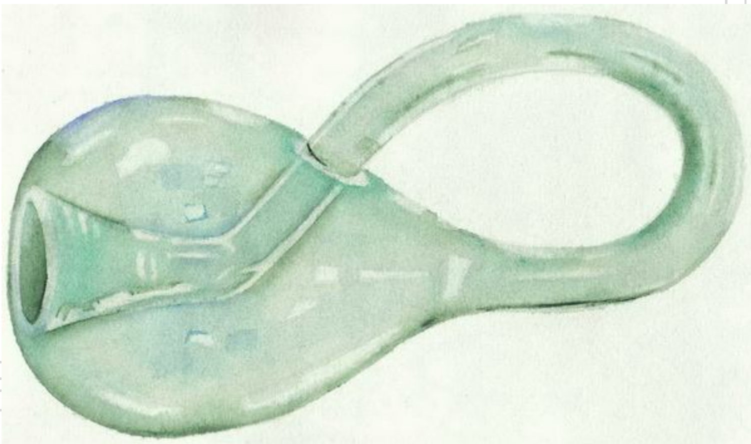
Примером односторонней поверхности является лист Мебиуса, примерами двусторонних поверхностей – плоскость, сфера, гиперболоиды и т.д.

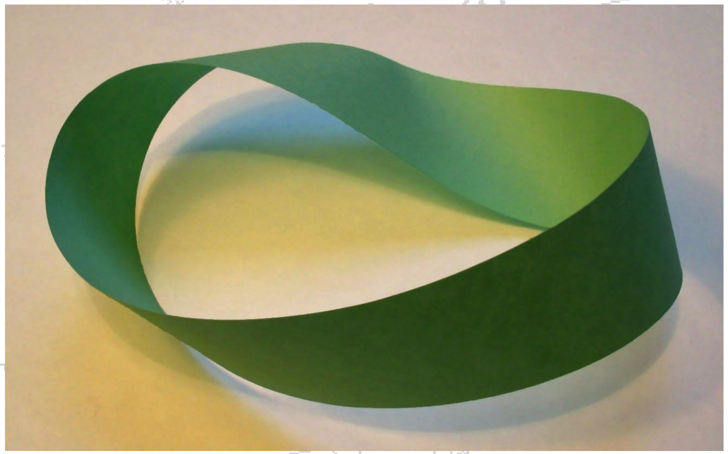




a

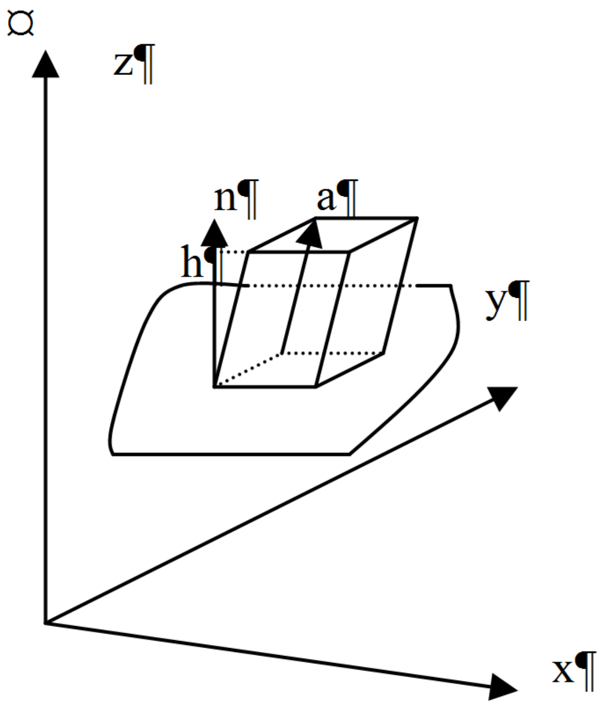






Задача о потоке жидкости через поверхность.

Поток жидкости через поверхность σ.– это количество жидкости, протекающее через поверхность σ в единицу времени.



Пусть на элементе поверхности σ площадке $d\sigma$ в некоторой ее точке М проведен вектор $\vec{a}$ перемещения частицы жидкости через площадку $d\sigma$ в единицу времени. Предполагаем, что для всех точек $d\sigma$ перемещение одинаково по величине и направлению. Поток жидкости можно вычислить как объем наклонного (по направлению вектора перемещений) параллелепипеда, построенного на $d\sigma$. Этот объем равен $d\Pi = h\, d\sigma = pr_{\vec{n}}\vec{a}\ d\sigma = \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma$, где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности. Тогда поток жидкости равен

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma$$

Здесь мы вычисляли дифференциал потока, а затем интегрировали по всей поверхности – это метод дифференциалов при построении интеграла.

Можно строить интеграл с помощью метода интегральных сумм, как мы действовали обычно.

- Введем разбиение области на элементы так, чтобы соседние элементы не содержали общих внутренних точек (*условие A)*,
- на элементах разбиения отметим точку М. Предполагая перемещение частиц жидкости постоянным на элементе и равным $\vec{a}$(М), вычислим приближенно поток через элемент разбиения и просуммируем его по элементам, получая интегральную сумму $\Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)$.
- Измельчим разбиение при условии $\max_i \Delta\sigma_i \to 0$ (*условие B)* и перейдем к пределу получая поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_\sigma \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \lim_{\max_i \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i).$$

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \lim_{\max_i \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i).$$

По виду это – поверхностный интеграл первого рода, он и имеет те же свойства, что поверхностный интеграл первого рода, но имеет еще и свойство ориентируемости. Интеграл по внешней стороне поверхности отличается знаком от интеграла по внутренней стороне поверхности, так как на различных сторонах поверхности нормали в той же точке нормали направлены по одной прямой в различные стороны.

Теорема существования формулируется так же, как для поверхностного интеграла первого рода с тем же замечанием о независимости интеграла от способа выбора разбиения (лишь бы выполнялись условия А), от выбора точек на элементах разбиения, от способа измельчения разбиения (лишь бы выполнялось условие В).

Запись поверхностного интеграла второго рода

Запишем вектор перемещений частиц и нормаль в точке M(x, y, z), выделяя скалярные компоненты векторов

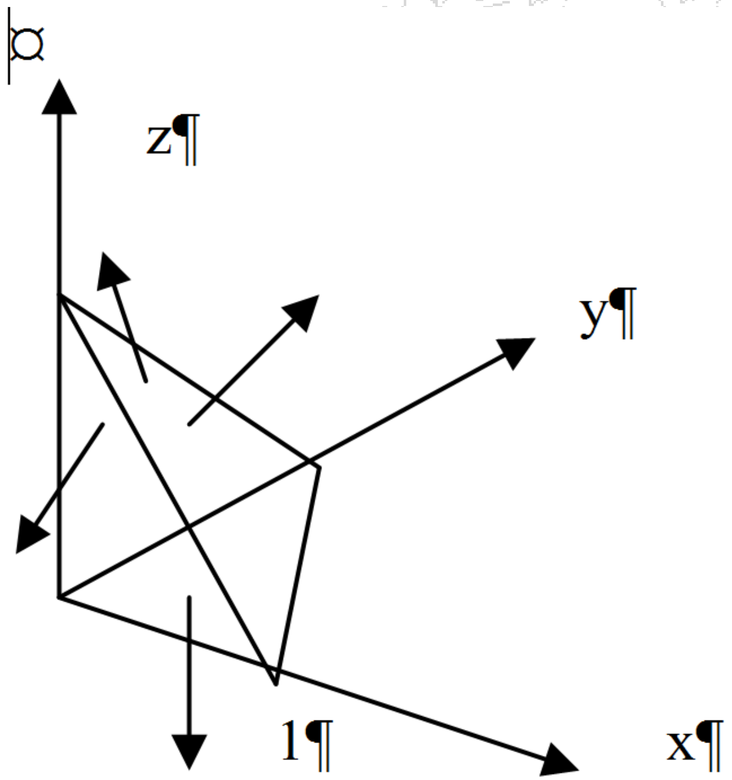
$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},\quad \vec{n}(M) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(M)\cdot\vec{n}(M) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

$$\iint_\sigma \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \pm\iint_\sigma P\,dydz \pm \iint_\sigma Q\,dxdz \pm \iint_\sigma R\,dxdy$$

$d\sigma\cos\alpha = \pm dydz$, $d\sigma\cos\beta = \pm dxdz$, $d\sigma\cos\gamma = \pm dxdy$. Знак «+» выбирается, если угол между нормалью к поверхности и осью (OX в первом интеграле, OY во втором, OZ в третьем) острый, знак «-» выбирается, если угол тупой. В самом деле, в поверхностных интегралах площади элементов поверхности положительны, а знаки «+» или «–» компенсируют знак косинуса угла между нормалью и координатной осью. При переходе от поверхностных интегралов к двойным одна из координат подставляется из уравнения поверхности, чтобы точка (x, y, z) находилась на поверхности σ.

Пример. Найти поток радиуса-вектора через полную поверхность тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью x + y + z = 1



Поток радиус-вектора через координатные плоскости нулевой, так как на них радиус-вектор точки лежит в координатной плоскости и ортогонален нормали к координатной плоскости, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$.

Вычислим поток через грань тетраэдра, лежащую в плоскости x + y + z =1. Он и будет суммарным потоком, так как поток через остальные грани нулевой. Для этой грани $\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \vec{a}=\vec{r}=\{x,y,z\}$, площадь грани – треугольника по теореме Пифагора равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поток равен

$$\varPi=\iint\limits_{\Delta}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Delta}d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

Скалярное и векторное поля.

Говорят, что в области (плоской или пространственной) задано **скалярное поле** φ (M), если в этой области задана скалярная функция φ (M).

Говорят, что в области (плоской или пространственной) задано **векторное поле** $\vec{a}$ (M), если в этой области задана векторная функция $\vec{a}$ (M).

Например, масса или температура частиц в комнате – скалярные поля, скорость или силы взаимодействия частиц – векторные поля.

В интегралах первого рода :двойных, криволинейных, поверхностных мы имели дело со скалярным полем – распределением масс точек кривой или поверхности в пространстве.

В интегралах второго рода вычислялись характеристики векторных полей: работа векторного поля (силового поля) в криволинейном интеграле, поток векторного поля в поверхностном интеграле.

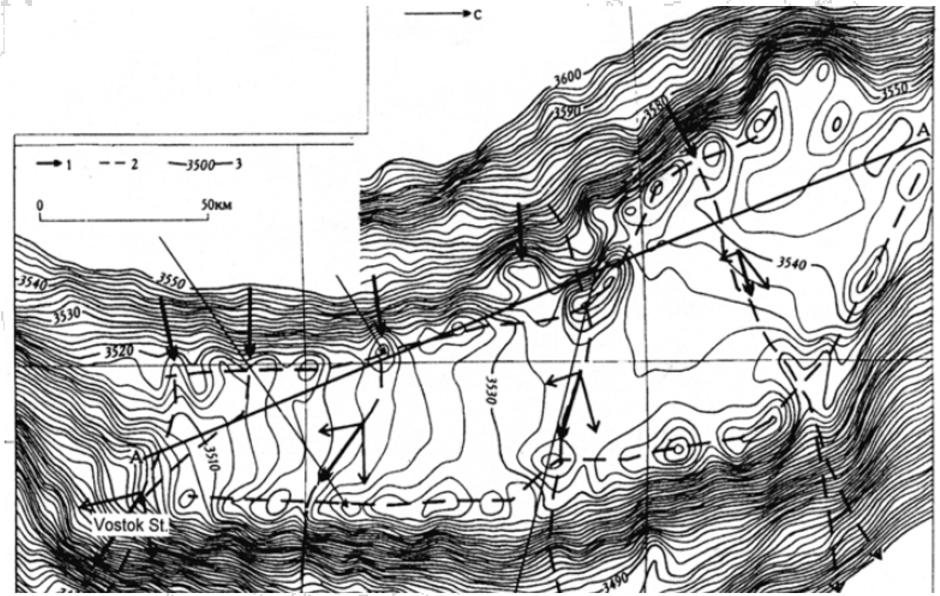
Скалярные поля.

Линии уровня плоского поля φ (x, y) – кривые, на которых значения функции постоянны   φ (x, y) = С.

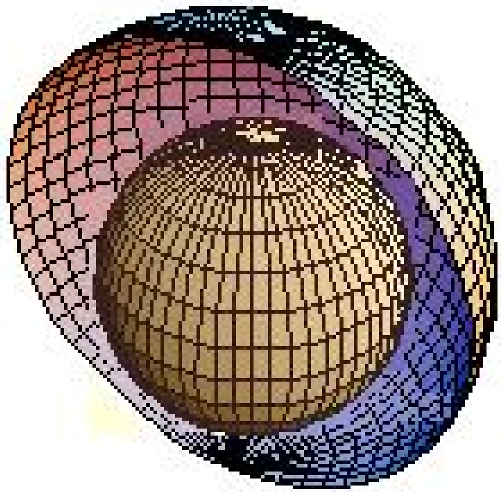
Например, линии равной высоты, нанесенные на географической карты (h (x, y) = 0 – уровень моря, h = 7000м – немногие горные вершины, h = - 10000м – самые глубокие океанские впадины).

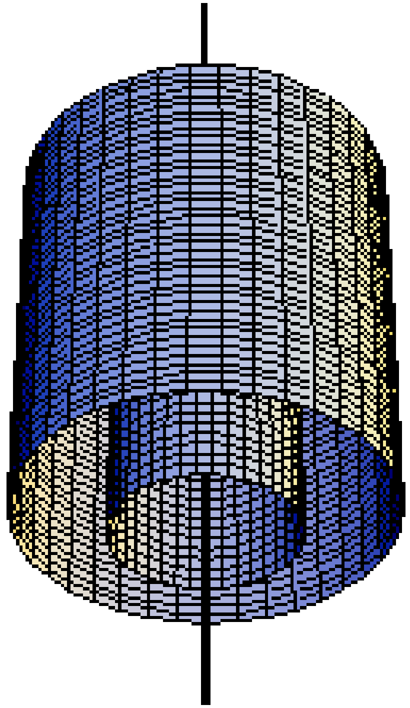
Поверхности уровня пространственного поля φ (x, y, z) – поверхности, на которых значения функции постоянны φ (x, y, z) = С.

Например, поверхности равной температуры или давления в атмосфере. Любая линия на поверхности уровня – это линия уровня.

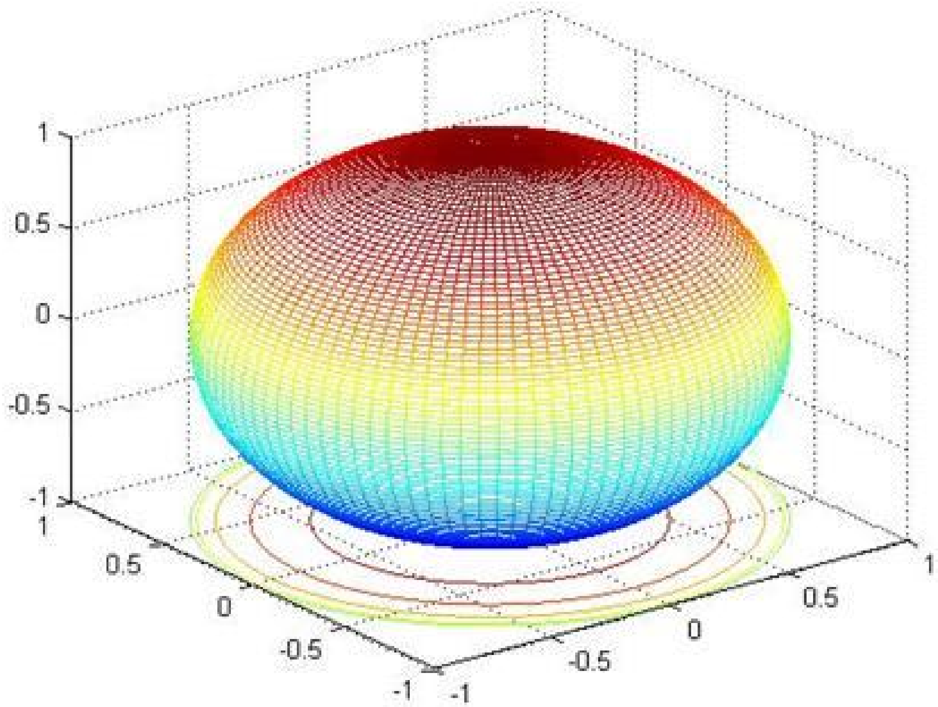


Рельеф Антарктиды в районе озера Восток





Поверхности уровня



Поверхность и линии уровня

Пример. Задано поле $x^2+y^2-z^2=C$. При C > 0 поверхности уровня – однополостные гиперболоиды, при C = 0 поверхность уровня – конус, при C < 0 поверхности уровня – двуполостные гиперболоиды.

Линии или поверхности различных уровней не пересекаются.

Чем чаще (гуще) поверхности или линии уровня, тем интенсивнее изменение поля.

Градиент поля – вектор $\overrightarrow{grad\varphi} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}$.

Утверждение. **Градиент скалярного поля ортогонален его поверхности уровня**.

Доказательство. Пусть точка (x, y, z) остается на поверхности уровня g(x, y, z) = 0 при вариациях переменных. Тогда равенство превращается в тождество, а тождество можно дифференцировать.

$$dg(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = \overrightarrow{grad\, g} \cdot \overrightarrow{dr} = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{dr}$ (x, y, z) - это вектор, касательный в точке (x, y, z) к любой кривой, лежащей на поверхности уровня, проходящей через эту точку. Поэтому в точке (x, y, z) вектор градиента ортогонален всем касательным к линии уровня, проходящим через эту точку. Следовательно, он ортогонален касательной плоскости к поверхности уровня и направлен по нормали к поверхности уровня.

Производная скалярного поля по направлению $\vec{l}$ определяется как $\frac{\partial g}{\partial l}|_M = \lim_{t\to 0} \frac{g(M + t\vec{l}) - g(M)}{t}$. Известно из теории функций многих переменных, что *производная по направлению есть проекция градиента на данное направление*

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{l}}|_M = \overrightarrow{gradg} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

Векторное поле.

Векторная линия - линия, в каждой точке которой вектор поля направлен по касательной к ней.

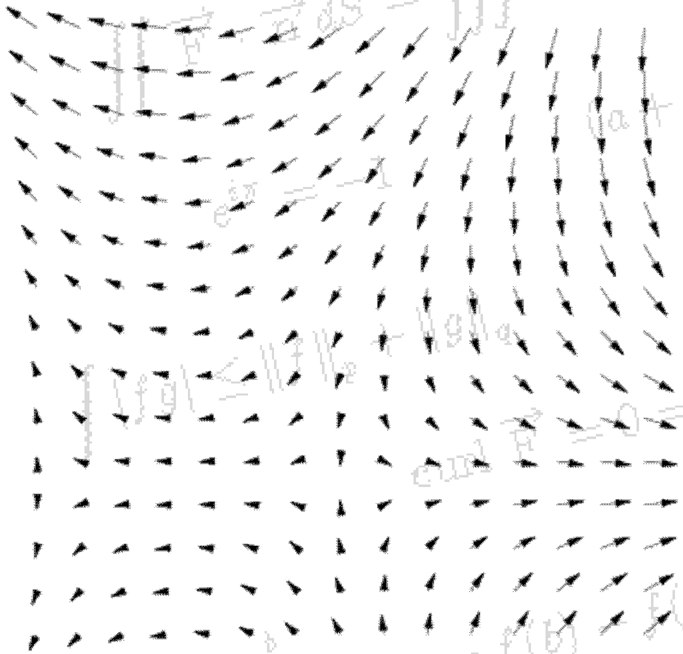
Уравнения векторной линии легко получить из условия коллинеарности векторов поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ и касательной $\overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

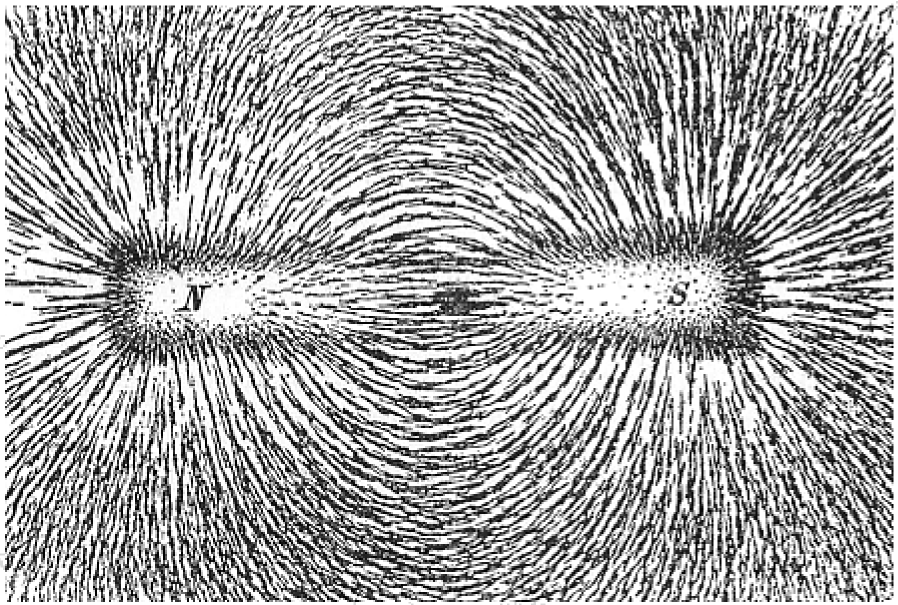
$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

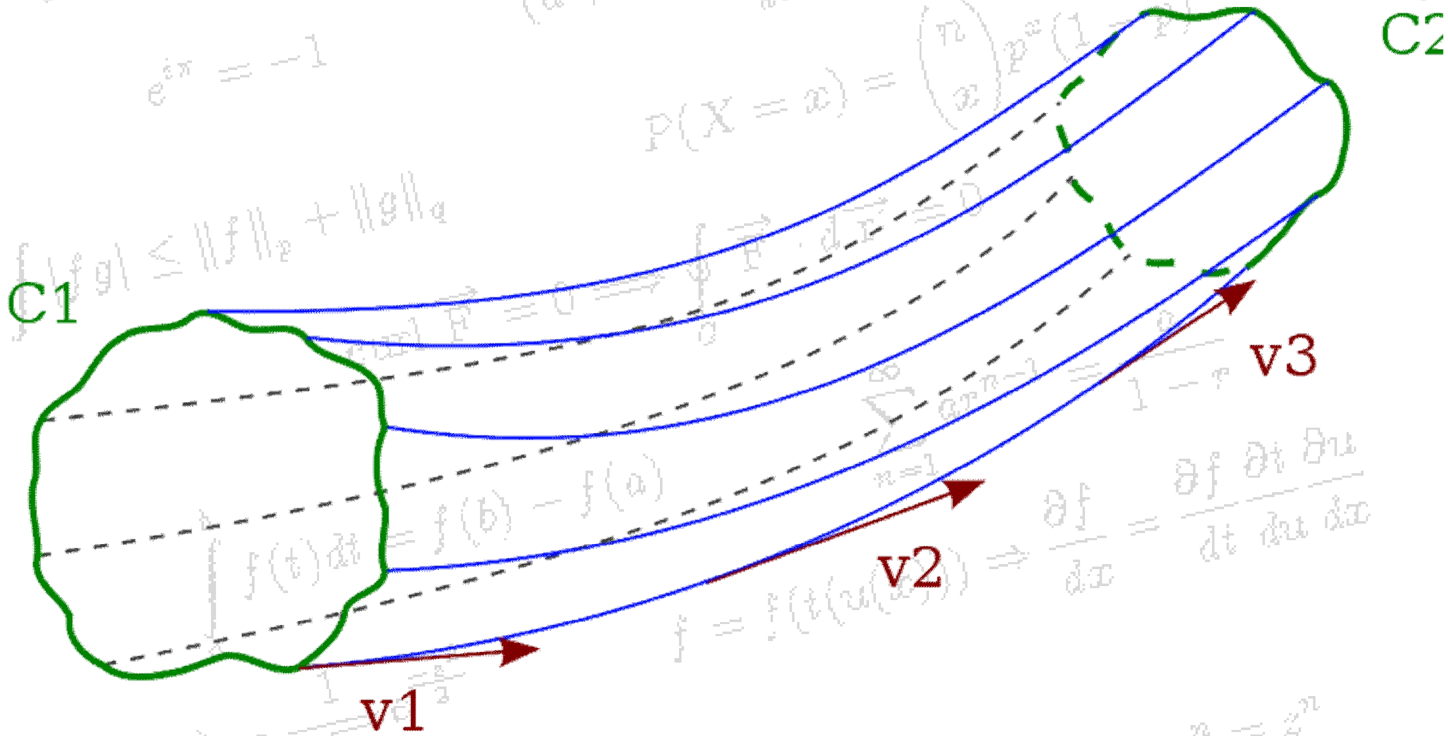
Пример. Написать уравнения векторных линий векторного поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} - x\,\vec{j}$

$\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}, \quad -xdx = ydy, \quad xdx + ydy = 0, \quad d(x^2+y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = C$ - линии уровня – окружности (С>0).

Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями




N
S


C1
C2
v1
v2
v3

Формула Остроградского – Гаусса.

Пусть компоненты векторного поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в пространственно односвязной замкнутой области V и на ее кусочно гладкой границе σ.

Тогда справедлива *формула Остроградского – Гаусса*

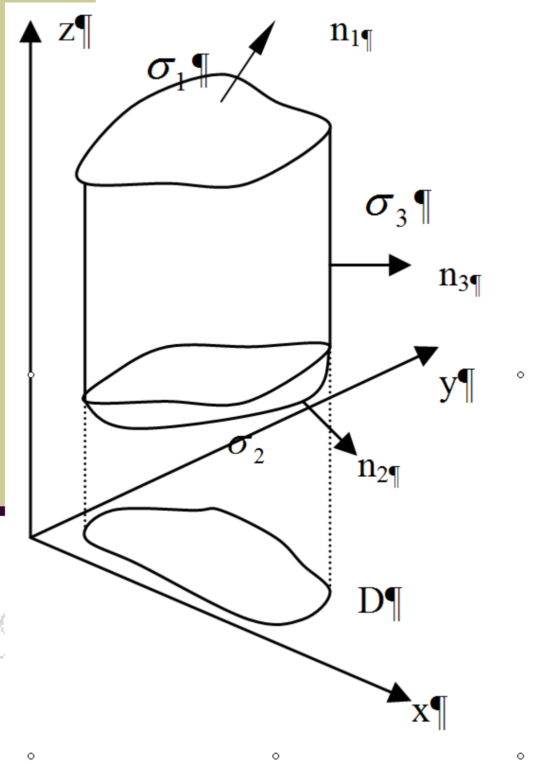
$$\oiint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

Заметим, что левая часть формулы представляет собой поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность σ.

Доказательство. 1) Формула Остроградского – Гаусса, в силу произвольности P, Q, R состоит из трех частей, в каждую из которых входит одна из компонент векторного поля P, Q, R. В самом деле, можно взять P = 0, Q = 0 и доказывать отдельно часть формулы в которую входит только R. Остальные части формулы (при P = 0, R = 0, Q = 0, R = 0) доказываются аналогично. Будем доказывать часть формулы

$$\oiint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

2) Для доказательства выбранной части формулы представим пространственную область V в виде объединения конечного числа цилиндрических тел, не имеющих общих внутренних точек, с образующими, параллельными оси OZ. Доказательство можно проводить для цилиндрического тела. В самом деле, тройной интеграл в правой части равен сумме тройных интегралов по цилиндрическим телам (свойство аддитивности). Поверхностный интеграл в левой части также равен сумме поверхностных интегралов по полным поверхностям цилиндрических тел, причем при суммировании интегралы по общим границам соседних цилиндрических тел будут сокращаться из-за противоположного направления внешних нормалей на общих границах.



Итак, будем доказывать соотношение $\oiint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dv$ для цилиндрического тела V, проектирующегося в область D на плоскости OXY. Пусть «верхняя» граница цилиндрического тела – поверхность σ_1 описывается уравнением $z = z_1(x,y)$, «нижняя» граница – поверхность σ_2 описывается уравнением $z = z_2(x,y)$. Боковую поверхность цилиндрического тела, параллельную оси OZ, обозначим σ_3.

Сразу заметим, что поток векторного поля через боковую поверхность равен нулю. Действительно, $\iint\limits_{\sigma_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\sigma_3} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma = 0$, так как нормаль на боковой поверхности ортогональна оси OZ и $\cos\gamma = 0$.

Заметим также, что на «верхней» поверхности σ_1 $\cos\gamma > 0$, а на «нижней поверхности σ_2 $\cos\gamma < 0$. Поэтому при переходе от поверхностного интеграла по σ_2 к двойному интегралу по области D и обратно надо менять знак, а при переходе от поверхностного интеграла по σ_1 к двойному интегралу по области D и обратно менять знак не надо

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint\limits_D \big(R(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy -$$

$$\iint\limits_D \big(R(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\sigma_3} R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy$$

Таким образом, соотношение $\oiint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dv$ доказано.

Дивергенция векторного поля (расходимость) есть $div\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Дивергенция – это характеристика векторного поля, инвариантная относительно системы координат.

Инвариантное определение дивергенции.

Рассмотрим произвольную точку M в пространственной области V. Выберем ее окрестность V_M – шар радиуса r с центром в точке M. Обозначим σ_M - ее границу – сферу радиуса r. По теореме о среднем для тройного интеграла

$\iiint\limits_{V_M} div\vec{a}\,dv = div\vec{a}(\breve{M})\,V_M,\quad \breve{M} \in V_M,\quad div\vec{a}(\breve{M}) = \dfrac{1}{V_M}\iiint\limits_{V_M} div\vec{a}\,dv = \dfrac{1}{V_M}\oiint\limits_{\sigma_M} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ (по формуле Остроградского – Гаусса).

Стягиваем окрестность к точке M, получаем дивергенцию векторного поля в точке M.

$div(M) = \lim_{V_M \to M} \dfrac{\oiint\limits_{\sigma_M} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{V_M}$. Это и есть *инвариантное определение дивергенции*

Инвариантное определение дивергенции.

Рассмотрим произвольную точку M в пространственной области V. Выберем ее окрестность V_M – шар радиуса r с центром в точке M. Обозначим σ_M - ее границу – сферу радиуса r. По теореме о среднем для тройного интеграла

$$\iiint\limits_{V_M} div\vec{a}\,dv = div\vec{a}(\breve{M})\,V_M, \quad \breve{M} \in V_M, \quad div\vec{a}\left(\breve{M}\right) = \frac{1}{V_M}\iiint\limits_{V_M} div\vec{a}dv = \frac{1}{V_M}\oiint\limits_{\sigma_M} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

(по формуле Остроградского – Гаусса).

Стягиваем окрестность к точке M, получаем дивергенцию векторного поля в точке M.

$$diva(M) = \lim_{V_M \to M} \frac{\oiint\limits_{\sigma_M} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{V_M}.$$

Это и есть *инвариантное определение дивергенции*.

Поэтому дивергенция векторного поля в точке М имеет смысл объемной плотности потока векторного поля через окрестность этой точки и характеризует мощность источника (если $div\vec{a}(M)>0$) или стока (если $div\vec{a}(M)<0$) векторного поля в точке М.

Если $div\vec{a}(M)>0$, то точка М – источник векторного поля, если $div\vec{a}(M)<0$, то точка М – сток векторного поля. Если в некоторой области дивергенция равна нулю, то в этой области нет ни источников, ни стоков, поток векторного поля через границу такой области равен нулю – «сколько поля втекает в область, столько и вытекает из нее».

Замечание. Формулу Остроградского – Гаусса можно записать в «полевом» виде

$$\Pi_\sigma(\vec{a}) = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\;dv$$

поток векторного поля через замкнутую поверхность σ равен объемному интегралу от дивергенции поля по области, ограниченной поверхностью σ.