Лекция 2.6

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ(3)

$$\int\limits_{\smile{AB}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\limits_{\smile{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Вычисление криволинейного интеграла по координатам.

Случай	Формула для вычисления
1. Кривая задана параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_1, t_2]$.	$\int\limits_{t_1}^{t_2} (P(t)x'_t + Q(t)y'_t + R(t)z'_t)\ \mathrm{d}t.$
2. Плоская кривая задана параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$.	$\int\limits_{t_1}^{t_2} (P(t)x'_t + Q(t)y'_t)\ \mathrm{d}t..$
3. Плоская кривая задана явным образом: $y = y(x),\ \ x \in [a,\ b]$,	$\int\limits_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x)\ \mathrm{d}x.$

Независимость интеграла 2 рода от выбора параметризации

$$\int_a^b (Px' + Qy')dt$$

Докажем корректность определения:

Делаем замену $t=t(u)$ и $\begin{cases} t(\alpha) = a \\ t(\beta) = b \end{cases}$,

$x_t' = \dfrac{x_u'}{t_u'}, y_t' = \dfrac{y_u'}{t_u'}$ и P зависит от x,y, которые, соответственно,

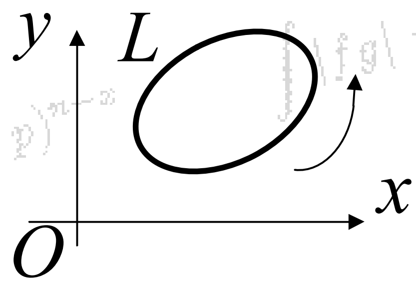
зависят от u, а значит интеграл можно представить в виде:

$$\int_a^b (Px' + Qy')dt = \int_\alpha^\beta \left(P\frac{x_u'}{t_u'} + Q\frac{y_u'}{t_u'} \right) t_u' du = \int_\alpha^\beta \left(Px_u' + Qy_u' \right) du$$

т.е. интеграл не зависит от выбора параметризации.

Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру.

Рассмотрим замкнутый контур L .

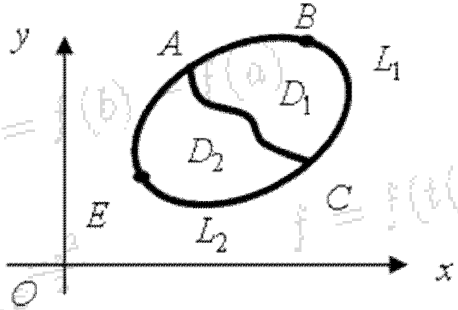


Положительным направлением обхода контура будем считать направление против часовой стрелки. Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру L обозначается

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint_{L_-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

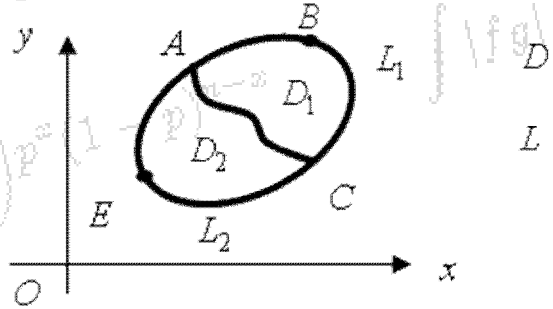
Теорема. **Если область D, ограниченную замкнутой кривой L, разбить на две части D_1 и D_2, то криволинейный интеграл по всей линии L равен сумме интегралов по линиям $L_1: CBAC$ и $L_2: AECA$.**



D

L

Доказательство:



$$\oint_{L_2} Pdx + Qdy = \oint_{AEC} Pdx + Qdy + \oint_{CA} Pdx + Qdy$$

$$\oint_{L_1} Pdx + Qdy = \oint_{AC} Pdx + Qdy + \oint_{CBA} Pdx + Qdy$$

$$\oint_{L_1} Pdx+Qdy+\oint_{L_2} Pdx+Qdy= \oint_{AEC} Pdx+Qdy+ \oint_{CBA} Pdx+Qdy=\oint_{L} Pdx+Qdy$$

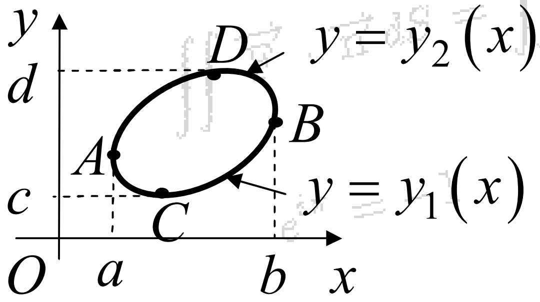
Формула Грина-Остроградского.

Пусть на плоскости Oxy задана область S, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т. е. область S — правильная.

- **Теорема.** Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области S, ограниченной контуром L, то

$$\iint\limits_S \left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Доказательство.



$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y1(x)}^{y2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y1(x)}^{y2(x)} dx = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, y_2(x)\big) - P\big(x, y_1(x)\big)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx + \int\limits_b^a P\big(x, y_1(x)\big)dx =$$

$$= \int\limits_{ADB} P(x,y)dx + \int\limits_{BCA} P(x,y)dx = -\oint\limits_L Pdx.$$

Аналогично получим

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x1(y)}^{x2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \Big(Q\big(x_2(y), y\big) - P\big(x_1(y), y\big)\Big) dy =$$

$$\int_{CBD} Q(x, y)dy + \int_{DAC} Q(x, y)dy = \oint_L Qdy.$$

Следовательно

$$\iint_S \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Замечание

Формула Грина справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

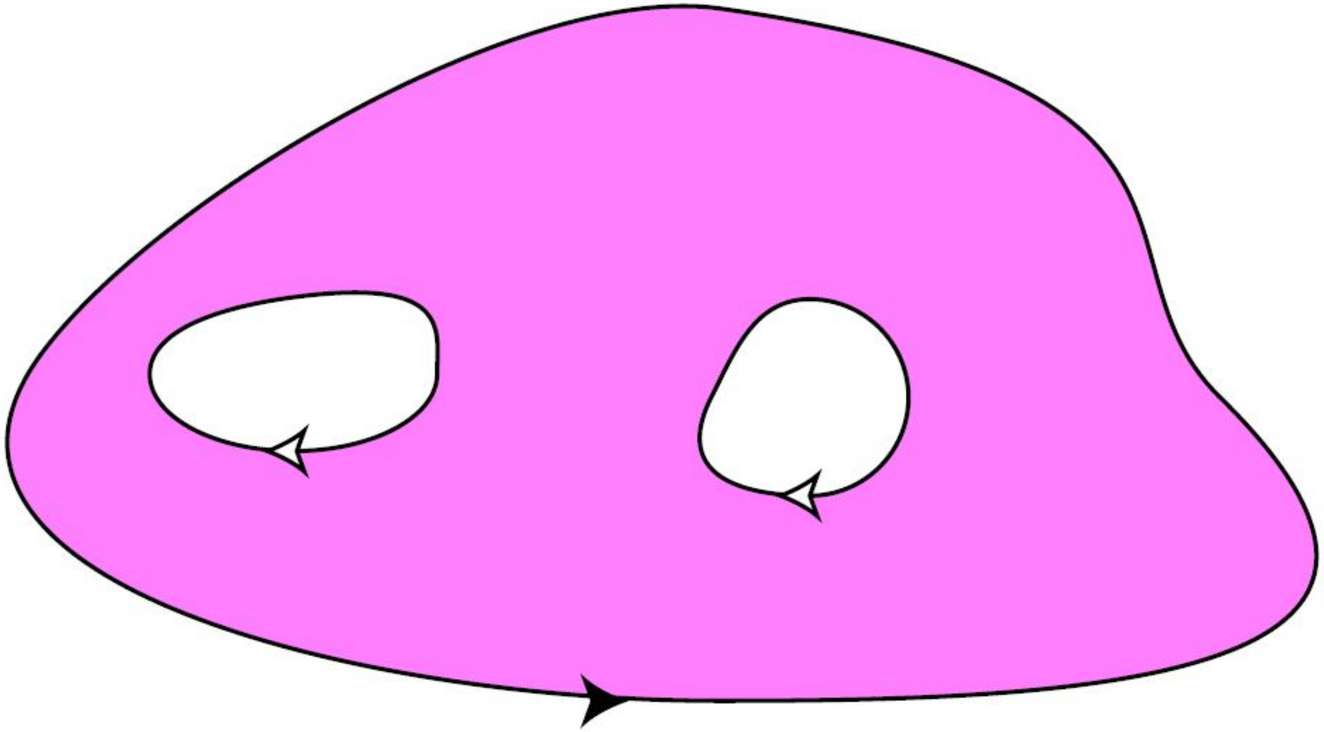


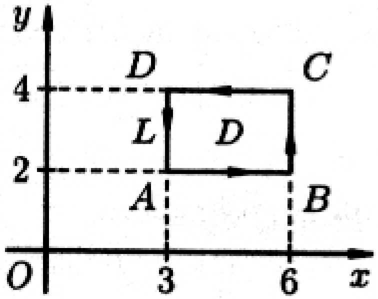
Рис. 3.1: Пример составного контура, состоящего из трех контуров. Указаны направления обхода контуров, при которых, согласно формуле Грина, сумма криволинейных интегралов $\oint Pdx + Qdy$ по всем контурам равна двойному интегралу по затененной на графике области.

Пример.

С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить

$$I = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\cdot\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$$

где L — контур прямоугольника с вершинами A(3; 2), B(6;2), C(6;4), D(3; 4).



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\cdot\left(\frac{y\cdot\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$I = \iint_D \left(\frac{y(y\sqrt{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_3^6 dx\int_2^4 y^2\,dy = 56.$$

Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy\,,$$

где AmO – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

Решение 3.4 Чтобы применить формулу Грина, дополним контур до замкнутого, отрезком оси x, от начала координат до точки $A(a, 0)$. Очевидно, интеграл по этому отрезку равен нулю. Действительно, первое слагаемое в левой части соотношения (1) равно нулю, так как на указанном отрезке $P(x, y = 0) = 0$, а второе слагаемое равно нулю поскольку $dy = 0$. Таким образом, мы имеем право заменить исходный интеграл на интеграл по замкнутому контуру:

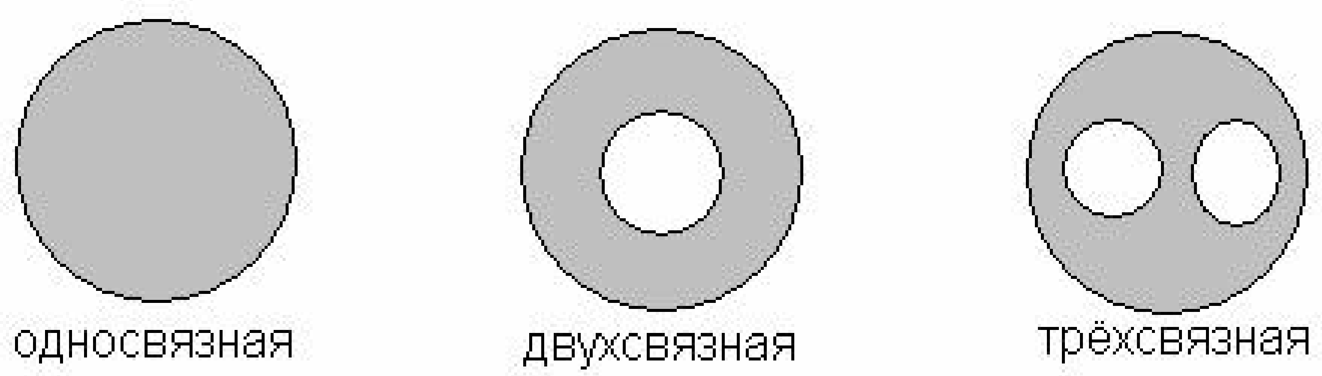
$$I = \oint\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)\ dx + (e^x \cos y - m)\ dy\,.$$

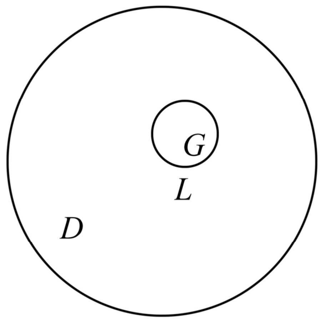
Последний равен следующему двойному интегралу по верхней половине указанного круга:

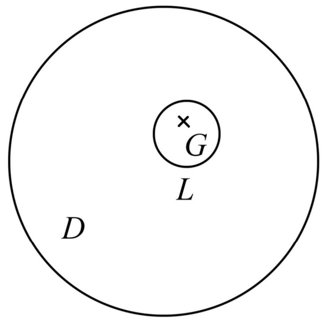
$$I = \iint\limits_S m\, dx\, dy = \frac{1}{8} m\pi a^2\,.$$

Область D называется ***односвязной,*** если вместе с любым замкнутым контуром L, лежащем в D ограничиваемая контуром L область G также целиком содержится в D.

Проще говоря, односвязная область -- область без дыр







Пример односвязной области: круг

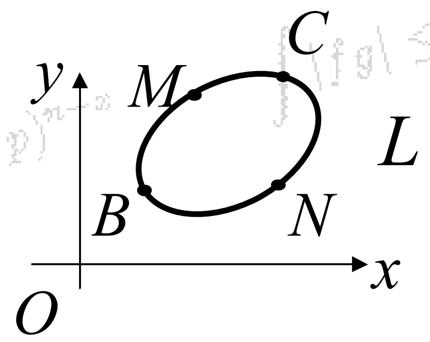
Пример неодносвязной области: круг с выколотой точкой. G содержит выколотую точку, а D - нет, следовательно G не входит в D целиком.

Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Определение. Пусть D - область, $\Gamma \subset D$, Γ - контур. Будем говорить, что $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ *не зависит от формы пути в* D, если $\forall A, B \in D$, $\forall \Gamma_1, \Gamma_2$ - контуров с началом в точке A и концом в точке B, $\Gamma_1 \subset D$, $\Gamma_2 \subset D$ $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$.

Это означает, что **величина работы силового поля не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек**.

Лемма. Для того чтобы криволинейный интеграл 2-го рода не зависел от пути интегрирования в односвязной области D необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру в D, был равен нулю.



Необходимость: Пусть $I_{BMC} = I_{BNC}$.

Тогда $I_L = I_{BNC} + I_{CMB} = I_{BNC} - I_{BMC} = 0.$

Достаточность: Пусть $I_{BNCMB} = 0.$ Тогда $I_{BNC} + I_{CMB} = 0.$

Следовательно $I_{BMC} = -I_{CNB} = I_{BNC}.$

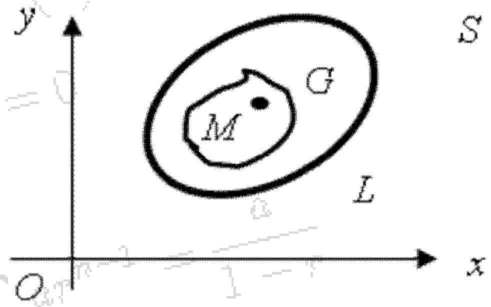
Теорема. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области S.
Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования, в односвязной области S, необходимо и достаточно, чтобы $\forall(x,y)\in S$ выполнялось равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность: Пусть $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_S\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$

Необходимость: Пусть для любого замкнутого контура $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

Тогда $\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$



Пусть в окрестности точки M $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0.$

Тогда $\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0.$ Получили противоречие.

Утверждения.

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащим в S, равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

не зависит от линии интегрирования, соединяющих две данные точки.

3) Во всех точках области S $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Эти утверждения эквивалентны!

Пример 1. $I = \oint\limits_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \oint\limits_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

Пусть замкнутый контур L не содержит начало координат.

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Следовательно $I = \oint\limits_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 0.$

Пример 2. Рассмотрим тот же криволинейный интеграл по замкнутому контуру, содержащему начало координат. Например, $L:\ x^2+y^2=R^2$.

В точке $M(0,0)$ функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их производные не существуют.
Введем параметр t.
Тогда $x=R\cos t,\ \ y=r\sin t;\ \ dx=-R\sin t,\ \ dy=R\cos t.$

$$I=\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-R\sin t(-R\sin t)+R\cos tR\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

Криволинейные интегралы 2-го рода по пространственным линиям.

Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

Равна $A = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$

- Пусть L гладкая кривая $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$
- Тогда

$$A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

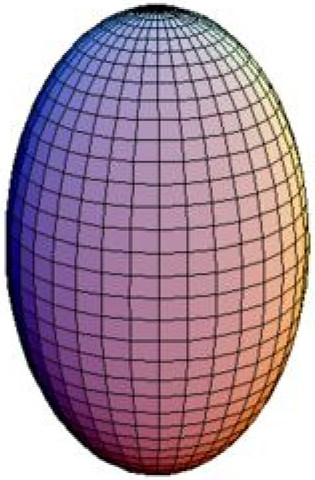
$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t) \Big)dt.$$

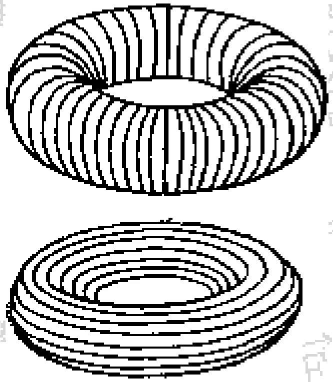
Трехмерная область Ω называется поверхностью односвязной, если на любой простой кусочно-гладкий контур, принадлежащий Ω, можно натянуть пленку, целиком лежащую в Ω.

Примеры.

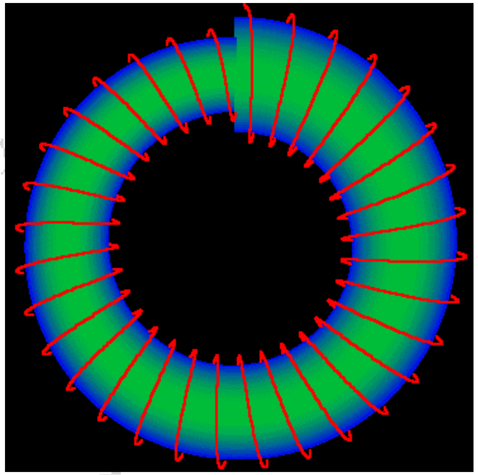
Односвязная поверхность: сфера, эллипсоид.

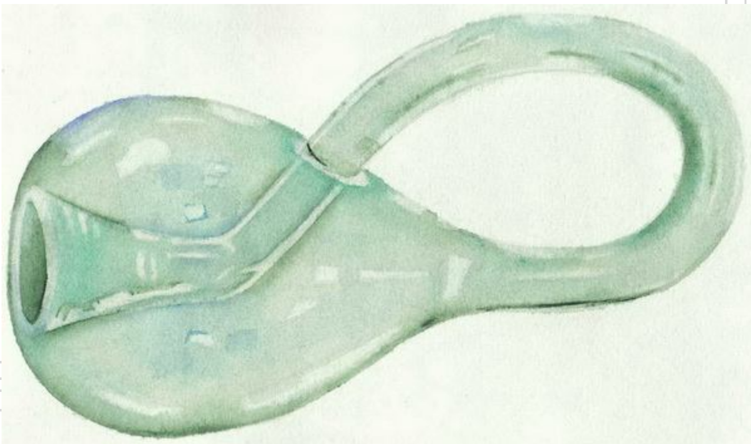
Неодносвязная поверхность: тор.

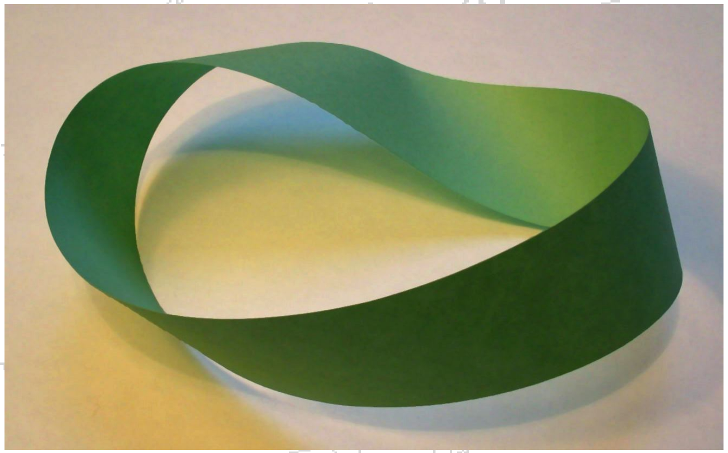




a







Теорема.

Пусть функции P, Q, R непрерывны вместе со своими производными в поверхностно односвязной области Ω.

Тогда равносильны утверждения:

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$, взятый по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от линии интегрирования.

3) $\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$

Доказательство: аналогично доказательству для плоского случаю.

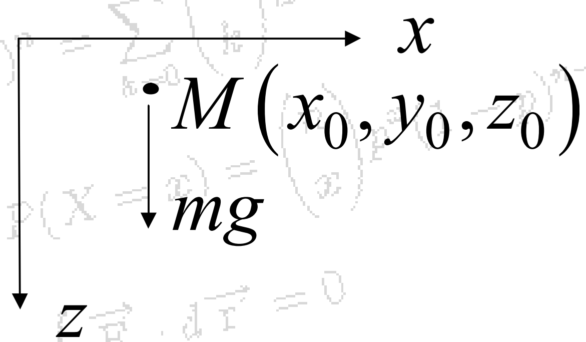
Приложения криволинейных интегралов 2-го рода к задачам механики.

1) Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$

Если $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

то работа не зависит от пути интегрирования.

2) Поле тяжести.



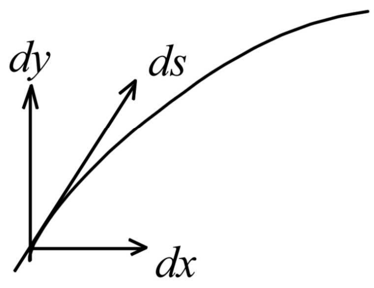
$$P(x,y,z)=0,\ \ Q(x,y,z)=0,\ \ R(x,y,z)=mg.$$

$$A=\int\limits_{x_o,y_o,z_o}^{x,y,z} mgdz = mg\int\limits_{z_o}^{z} dz = mgz - mgz_0.$$

11.8. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода.

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \left| dx = ds\cos\alpha,\ dy = ds\cos\beta,\ dz = ds\cos\gamma \right| =$$

$$= \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) ds.$$



Связь с вопросом о полном дифференциале

Если $u(x,y)$ - дифференцируемая функция двух переменных, то $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Выясним, при каких условиях на P, Q существует такая функция u, что $Pdx + Qdy = du$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

В предположении непрерывности смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ или } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Докажем, что если D - односвязная область, то верно и обратное.

Теорема. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области D, то существует $u(x, y)$ такая, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и рассмотрим переменную точку $B(x, y)$ и любую кривую Γ, соединяющую A с B.

$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ зависит только от конечной точки $B(x, y)$ и, значит, есть некоторая функция $u(x, y)$. Покажем, что $u(x, y)$ - искомая функция, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

Для этого рассмотрим точку $\left(x+\Delta x, y\right)$ и рассмотрим $u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=\int\limits_{\Gamma'} Pdx+Qdy$, где Γ' - отрезок прямой, соединяющей точки $\left(x+\Delta x, y\right)$ и $\left(x, y\right)$. На этом отрезке

$dy \equiv 0$ и $\int\limits_{\Gamma'} Pdx+Qdy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx$.

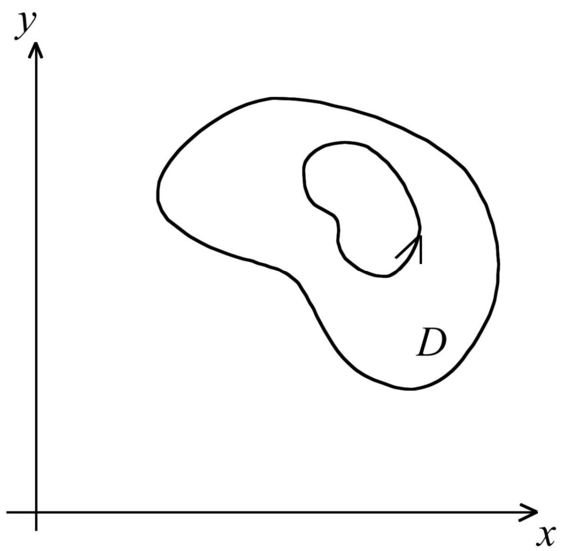
Применяя **теорему о среднем**, получаем (ввиду непрерывности P), что $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx = P\left(x+\theta\Delta x, y\right)\cdot\Delta x$, где $0<\theta<1$. Тогда

$$\frac{u\left(x+\Delta x, y\right)-u\left(x, y\right)}{\Delta x}=P\left(x+\theta\Delta x, y\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x, y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x, y)=P(x, y).$$

Для Q доказательство аналогичное.

Примечание. Условие **односвязности** существенно.



Например, если область D не содержит начала координат, то $\forall L \subset D \ \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

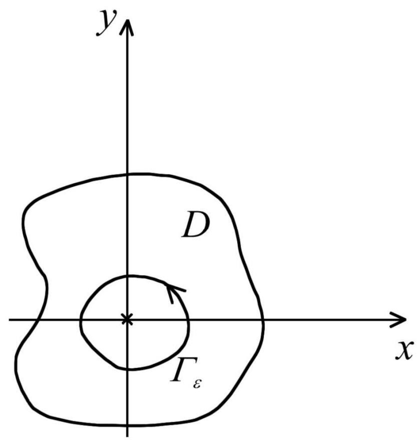
Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\left(-x^2 - y^2\right) - 2y(-y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Т.о. условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено во всей области D (которая не содержит точки $(0;0)$).

С другой стороны, пусть D содержит $(0;0)$.



Рассмотрим Γ_ε - окружность радиуса ε, содержащуюся в D. Параметризуем эту окружность: $\begin{cases} x = \varepsilon\cos t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = \varepsilon\sin t \end{cases}$. Тогда

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon\cos t \cdot \varepsilon\cos t + \varepsilon\sin t \cdot \varepsilon\sin t)}{\varepsilon^2\cos^2 t + \varepsilon^2\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ne 0 .$$

Это связано с тем, что область, в которой непрерывны $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ многосвязная.

Следствие

Если выполнено условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

то подынтегральное выражение

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции *U = U(x;y)*
Тогда

$$\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1).$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница

Функцию $U = U(x;y)$, удовлетворяющую условию

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

можно найти, используя формулу

$$U(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(\chi;y_0)\,d\chi + \int_{y_0}^{y} Q(x;\xi)\,d\xi + C.$$

Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла по пространственной кривой.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x;y;z),$$

$$\int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x_2;y_2;z_2) - U(x_1;y_1;z_1),$$

$$U(x;y;z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + C$$