Лекция 2.5

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ(2)

Криволинейный интеграл 2 – го рода (по координатам)

Задача о работе силового поля.

Предположим, что в области D задано плоское силовое поле. Т. е. на материальную точку в D действует сила $\vec{F}$, определенная для всякой

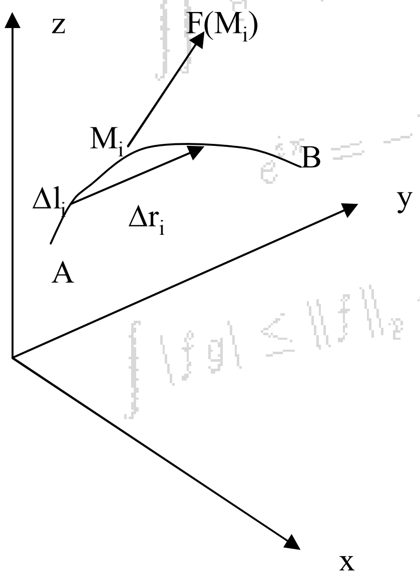
точки $(x, y) \in D$, $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$.

Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени t)

Пусть материальная точка движется по линии L.

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

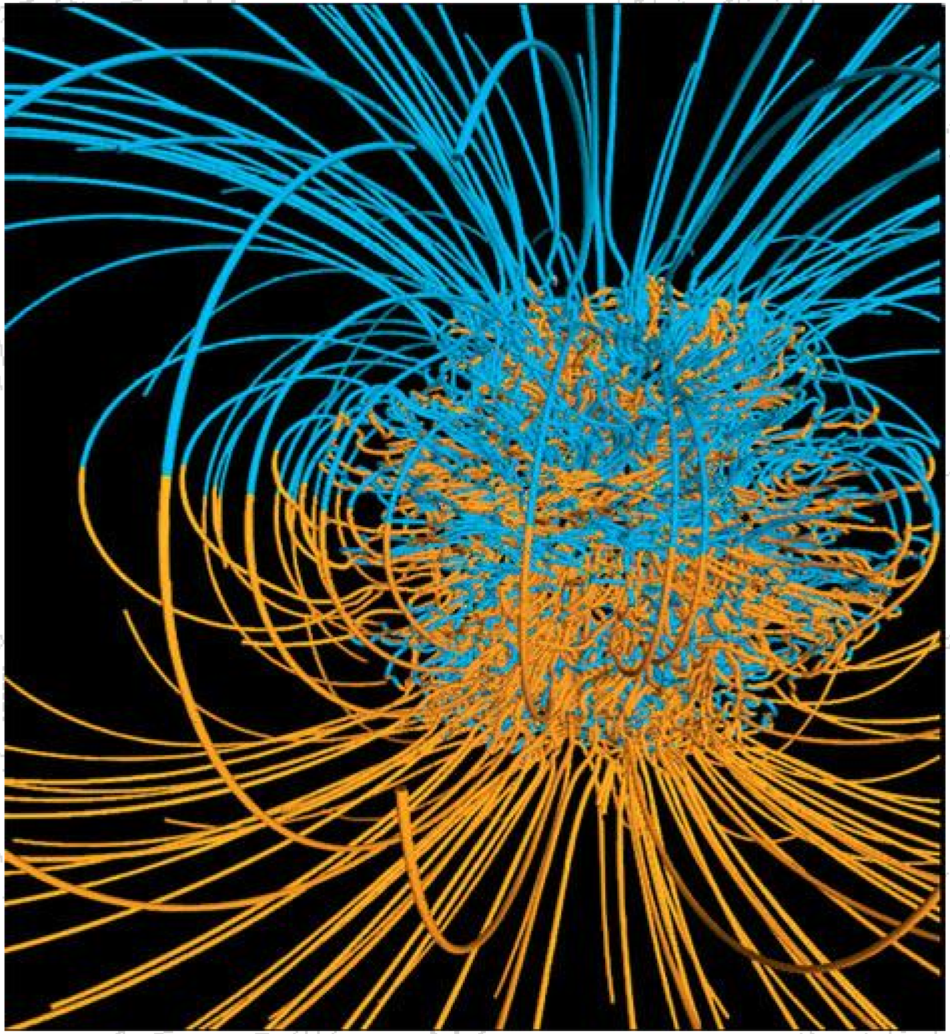
Задача о работе силового поля.



Какую работу производит сила F(M) при перемещении точки M по дуге AB?

Если бы дуга AB была отрезком прямой, а сила была бы постоянной по величине и направлению при перемещении точки M по дуге AB, то работу можно было бы вычислить по формуле $A = (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где φ - угол между векторами. В общем случае эту формулу можно использовать для построения интегральной суммы, предполагая силу постоянной на элементе дуги Δl_i достаточно малой длины. Вместо длины малого элемента дуги можно взять длину стягивающей ее хорды $\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|$, так как эти величины – эквивалентные бесконечно малые величины при условии $\max \Delta l_i \to 0$.

Силовые линии магнитного поля Земли



1. Организуем разбиение области- дуги АВ на элементы – элементарные дуги Δl_i так, чтобы эти элементы не имели общих внутренних точек и $L = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta l_i$ (***условие А***)
2. Отметим на элементах разбиения «отмеченные точки» M_i и вычислим в них значения функции $\left(\vec{F}(M_i)\right)$
3. Построим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i),\overrightarrow{\Delta r_i}\right)$, где $\overrightarrow{\Delta r_i}$ вектор, направленный по хорде, стягивающей -дугу Δl_i.

Переходя к пределу при условии $\max_i(\Delta l_i)\to 0$ (***условие B***), получим криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм (и работу силы):

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F},\overrightarrow{dr}\right)=\lim_{\max_i \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i),\overrightarrow{\Delta r_i}\right).$$

Часто обозначают $\vec{F}(M)\equiv\vec{a}(M)$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода по линии L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L

Теорема существования.

Пусть вектор - функция $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ непрерывна на кусочно-гладкой дуге L. Тогда криволинейный интеграл второго рода существует как предел интегральных сумм.

$$\int_{AB} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \lim_{\substack{\max_i \\ \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(M_i), \overrightarrow{\Delta r_i}\right).$$

Замечание. Предел этот не зависит от

- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие А
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В

Свойства криволинейного интеграла 2 рода.

1. **Линейность**

а) свойство суперпозиции $\int\limits_L ((\vec{a}_1+\vec{a}_2),\overrightarrow{dr}) = \int\limits_L (\vec{a}_1,\overrightarrow{dr}) + \int\limits_L (\vec{a}_2,\overrightarrow{dr})$

б) свойство однородности $\int\limits_L \lambda\left(\vec{a},\overrightarrow{dr}\right) = \lambda\int\limits_L \left(\vec{a},\overrightarrow{dr}\right)$.

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Так как в интегральной сумме число слагаемых конечно, используя свойство скалярного произведения, перейдем к интегральным суммам для правых частей равенств. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

2. **Аддитивность.**

Если $L = L_1 \cup L_2$, то $\int\limits_{L} \left(\overline{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \int\limits_{L_1} \left(\overline{a}, \overrightarrow{dr}\right) + \int\limits_{L_2} \left(\overline{a}, \overrightarrow{dr}\right)$.

Доказательство. Выберем разбиение области L так, чтобы ни один из элементов разбиения (первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы L_1, так и элементы L_2. Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в п.1.

Ориентируемость.

$$\int_L (\overline{a}, \overrightarrow{dr}) = -\int_{-L} (\overline{a}, \overrightarrow{dr})$$

Доказательство. Интеграл по дуге –L, т..е. в отрицательном направлении обхода дуги есть предел интегральных сумм, в слагаемых которых вместо $\overrightarrow{\Delta r_i}$ стоит $(-\overrightarrow{\Delta r_i})$. Вынося «минус» из скалярного произведения и из суммы конечного числа слагаемых, переходя к пределу, получим требуемый результат.

Заметим, что свойство ориентируемости в криволинейном интеграле первого рода отсутствует. Зато в криволинейном интеграле второго рода отсутствуют свойства интегрирования неравенств, теорема об оценке и теорема о среднем, которые есть в криволинейном интеграле первого рода.

$$\Delta A_k = P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода по линии L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Если кривая *AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то*

$$\int_L P(x;y)dx = 0 \quad (\text{все } \Delta x_i = 0);$$

Аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси *Oy:*

$$\int_L Q(x;y)dy = 0 \quad (\text{все } \Delta y_i = 0).$$

В частности, если $Q(x,y)\equiv 0$, то интеграл примет вид

$$\int_L P(x,y)\,dx$$

и называется криволинейным интегралом по координате x.

Если $P(x,y)\equiv 0,$ то интеграл примет вид

$$\int\limits_L Q(x,y)\,dy$$

и называется криволинейным интегралом по координате y.

Работа силового поля $\vec{F}$ по кривой L есть

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x,y),\ Q(x,y)$ - проекции сил поля на оси координат.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

Вычислим криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x,y)\,dx$ от точки B до точки C по линии L, **заданной параметрически** $x = x(t)$, $y = y(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны со своими производными.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Из формулы Лагранжа $\quad \Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k,$

$$\theta_k \in [t_{k-1}, t_k], \;\; \Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

В качестве промежуточной точки $\left(\xi_k, \eta_k\right)$ выберем

$$\xi_k = x\left(\theta_k\right),\ \eta_k = y\left(\theta_k\right).$$

Преобразованная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(x\left(\theta_k\right), y\left(\theta_k\right)\right) x'\left(\theta_k\right) \Delta t_k$

будет обыкновенной интегральной суммой для функции одной переменной $P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) x'\left(t\right)$,

а ее предел – определенным интегралом $\int\limits_{t_B}^{t_C} P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) x'\left(t\right) dt.$

Т. е. $$\int_L P(x,y)\,dx = \int_{t_B}^{t_C} P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Аналогично $$\int_L Q(x,y)\,dy = \int_{t_B}^{t_C} Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\,dt.$$

Правило. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от точки B до точки C по линии L: $x = x(t)$, $y = y(t)$ производится по формуле

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_B}^{t_C} \left(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\right)dt.$$

Следовательно, криволинейный интеграл 2-го рода всегда существует, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны, а $x(t)$, $y(t)$ непрерывны со своими производными.

Замечание

В случае функции прех пременных

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = .$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,\dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\big)dt$$

Если уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$, то, полагая $x = t$, имеем

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$\int\limits_{X_B}^{X_C} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)\,y'(x)\Big)dx.$$

Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.

Теорема. *Если кривая AB – кусочно-гладкая, а функции P(x, y, z), Q(x, y, z) и R(x, y, z) – непрерывны на кривой AB, то криволинейные интегралы*

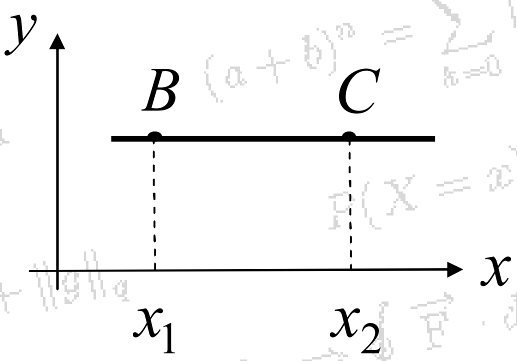
$$\int_{AB} P(x,y,z)dx;\quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy;\quad \int_{AB} R(x,y,z)dz;$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

существуют.

Примеры.

Пример 1.

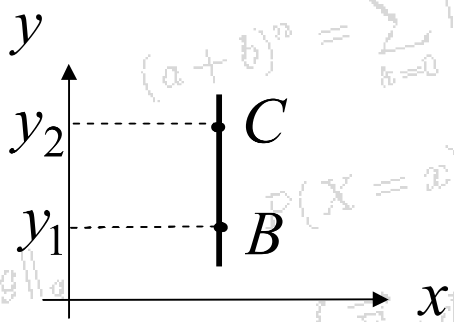


$$y = y_0$$

$$dy = 0$$

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{X_1}^{X_2} P(x,y_0)\,dx.$$

Пример 2.



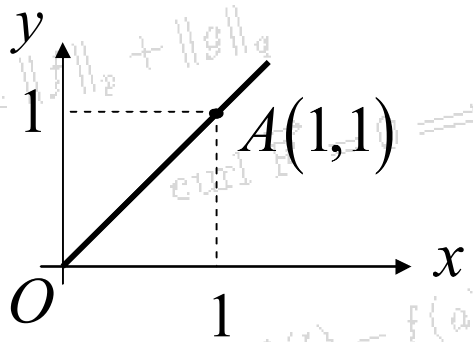
$$x = x_0$$

$$dx = 0$$

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0,y)\,dy.$$

Пример 3.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xydx + (x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $L:\ y = x.$



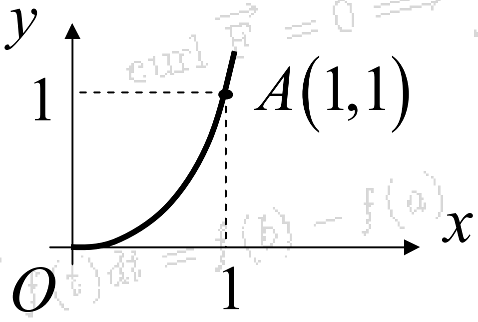
$$dy = dx$$

$$I = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 4.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xydx + (x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$

по линии L: $y = x^2$.

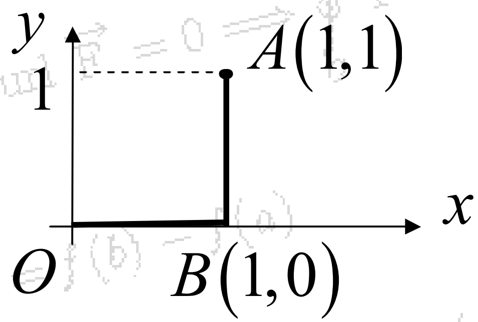


$$dy = 2xdx$$

$$I = \int\limits_0^1 \left(x^3 + 2x\left(x + x^2\right)\right)dx = \frac{17}{12}.$$

Пример 5.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_{OBA} xydx+(x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$, где линия OB задана уравнением $y=0$ $(dy=0)$, а линия BA задана уравнением $x=1$ $(dx=0)$.

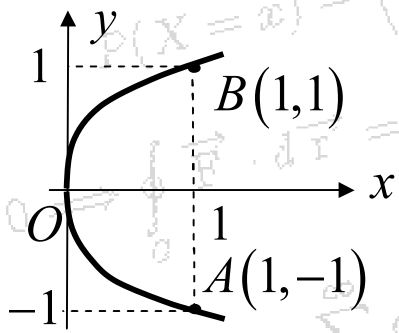


$$I=\int_0^1 (1+y)dy=\left.\frac{(1+y)^2}{2}\right|_0^1=\frac{3}{2}.$$

Пример 6.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xydx$ от

точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$ по линии $L:\ x = y^2$.



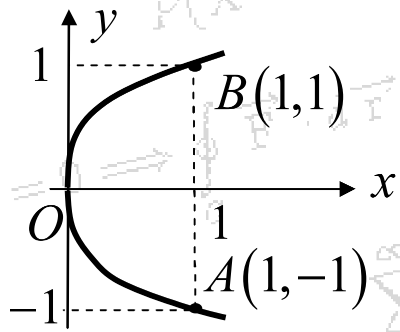
Рассмотрим два случая:

А) Проинтегрируем по dy.

Дифференциал $dx = 2ydy.$

$$I = \int\limits_{-1}^{1} y^2 y \cdot 2ydy = \left.\frac{2y^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

Б) Проинтегрируем по dx. На участке AO уравнение линии будет $y = -\sqrt{x}$. На участке OB уравнение линии будет $y = \sqrt{x}$.



Интеграл I можно представить в виде суммы интегралов

$$I = \int\limits_{AO} xydx + \int\limits_{OB} xydx = -\int\limits_{1}^{0} x\sqrt{x}dx + \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{x}dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5}.$$

Пример 7.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_L ydx-xdy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi,0)$, где L одна арка циклоиды

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$$

Параметр t изменяется от 0 до 2π.

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[4(1-\cos t)^2-4(t-\sin t)\sin t\right]dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=4\left[2t\Big|_0^{2\pi}-2\sin t\Big|_0^{2\pi}-(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}\right]=24\pi.$$

Пример 8

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{\left(y^3 - x^2\right)dx + \left(x^3 + y^2\right)dy}{x^2 + y^2},$$

где L - дуга окружности $x = R\cos t, y = R\sin t\ (0 \le t \le \pi / 2)$

$$dx = -R\sin t dt, dy = R\cos t dt, t_1 = 0, t_2 = \pi / 2.$$

$$\int_L \frac{\left(y^3 - x^2\right)dx + \left(x^3 + y^2\right)dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(R^3\sin^3 t - R^2\cos^2 t)(-R\sin t dt) + (R^3\cos^3 t + R^2\sin^2 t)R\cos\ tdt}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(R^4\cos^4 t + R^3\sin^2 t\cos t + R^3\sin t\cos^2 t - R^4\sin^4 t)}{R^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (R^2\cos^4 t + R\sin^2 t\cos t + R\sin t\cos^2 t - R^2\sin^4 t) =$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 tdt - R\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos tdt + R\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 tdt - R^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 tdt =$$

$$= R\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} - R\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}R.$$

Пример 9

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (y^2 + z^2)dx + yzdy + xdz$$

где L - дуга винтовой линии $x = t,\ y = 2\cos t,\ z = 2\sin t\ \left(0 \le t \le \pi/2\right).$

$$dx = dt,\ dy = -2\sin t dt,\ z = 2\cos t dt,$$

$$\int_L (y^2 + z^2)dx + yzdy + xdz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(4\sin^4 t + 4\cos^2 t\right)dt - 4\sin t\cos t(-2\sin tdt) + 2t\cos tdt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2t\cos t + 8\sin^2 t\cos t + 4\right)dt = 2\int_0^{\pi/2} t\cos tdt + 8\int_0^{\pi/2} \sin^2 td(\sin t) +$$

$$+ 4\int_0^{\pi/2} dt = 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi + \frac{2}{3}.$$