Лекция 2.4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение. Кривая $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$ $(a \le t \le b)$ называется **непрерывной кусочно-гладкой**, если функции φ, ψ и γ непрерывны на отрезке [a,b] и отрезок [a,b] можно разбить на конечное число частичных отрезков так, что на каждом из них функции φ, ψ и γ имеют непрерывные производные, не равные нулю одновременно.

Если определено не только разбиение кривой на частичные отрезки точками, но порядок этих точек, то кривая называется **ориентированной** кривой.
Ориентированная кривая называется **замкнутой**, если значения уравнения кривой в начальной и конечной точках совпадают.

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$$

Криволинейный интеграл 1 – го рода (по длине дуги).

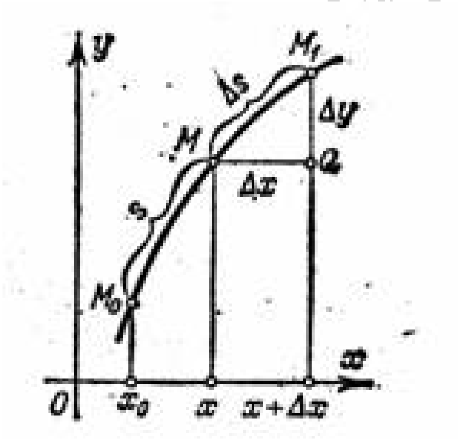
Длина дуги

Дифференциал длины дуги в плоском случае для линии, заданной уравнением

$$y = y(x)$$

равен

$$ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx.$$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \qquad \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

$$dx = \varphi'(t)dt, \qquad dy = \psi'(t)dt,$$

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

Дифференциал длины дуги в пространственном случае для линии, заданной уравнениями $y = y(x),\ z = z(x)$ равен

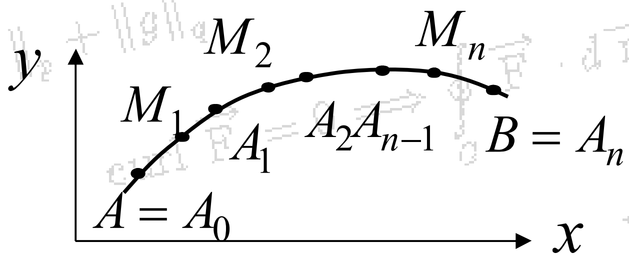
$$ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\, dx.$$

При параметрическом задании линии $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ дифференциал длины дуги в плоском случае равен

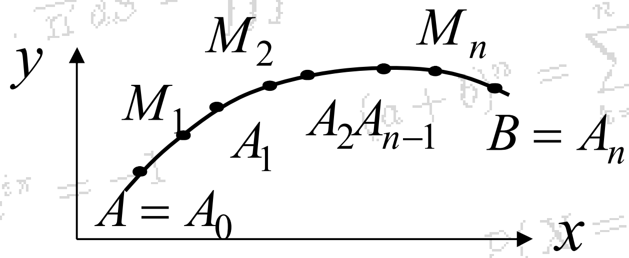
$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$ а в пространственном случае -

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt.$$

Рассмотрим функцию двух переменных $f = f(x, y)$ (заданную в некоторой связной области), и отрезок $K = AB$ плоской кривой расположенный в той же области



1) Отрезок AB разбивается на n элементарных отрезков произвольно выбранными точками $A_1, \ldots, A_{n-1}$, идущими от начала отрезка $A = A_0$ до его конца $B = A_n$.



2) Внутри (или на границе) каждого элементарного отрезка $A_{i-1}A_i$ выбирается одна произвольная точка M_i с координатами x_i, y_i.

3) Значения функции $f(x_i, y_i)$ в этих выбранных точках умножаютс на длины отрезков $A_{i-1}A_i = \Delta s_i$ (эти длины считаются положительными).

4) Все полученные n произведений $f(x_i, y_i)\Delta s_i$ складываются.

5) Вычисляется предел суммы $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$.

Определение

Если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i, M_i, то он называется **криволинейным интегралом 1-го рода от функции двух переменных $f = f(x, y)$ взятым по отрезку $K = AB$ плоской кривой, заданной своим уравнением (этот отрезок находится в области задания функции и называется путем интегрирования)**

$$\int_K f(x, y)\,ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i. \qquad (1)$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, взятый по отрезку K

пространственной кривой $\int_K f(x, y, z)\,ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i. \qquad (2)$

Теорема существования.

Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой дуге L. Тогда криволинейный интеграл первого рода существует как предел интегральных сумм.

Замечание. Предел этот не зависит от

- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие А
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В

Замечание.

Если бы мы совершали движение по кривой не от A к B, а от B к A, то в разбиении T с выбранными точками $\{M_i\}$ изменилась бы **только нумерация** отрезков и точек M_i, а сама интегральная сумма **не изменилась** бы, поскольку в ее определении фигурирует **лишь длина** Δs_i участка, которая не зависит от того, в каком направлении проходится участок. Это означает, что

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

В этом важнейшее отличие от обычного определенного интеграла, который менял бы знак при изменении направления обхода кривой.

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1. **Линейность**

а) свойство суперпозиции $\int\limits_L ((\vec a_1+\vec a_2),\overrightarrow{dr}) = \int\limits_L (\vec a_1,\overrightarrow{dr}) + \int\limits_L (\vec a_2,\overrightarrow{dr})$

б) свойство однородности $\int\limits_L \lambda\left(\vec a,\overrightarrow{dr}\right) = \lambda\int\limits_L \left(\vec a,\overrightarrow{dr}\right).$

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Так как в интегральной сумме число слагаемых конечно, используя свойство скалярного произведения, перейдем к интегральным суммам для правых частей равенств. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

2. **Аддитивность.**

Если $L = L_1 \cup L_2$, то $\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y,z)dl + \int\limits_{L_3} f(x,y,z)dl$

Доказательство. Выберем разбиение области L так, чтобы ни один из элементов разбиения (первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы L_1, так и элементы L_2. Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в п.1.

5. **Теорема об оценке.**

Если существуют константы m, M , что $\forall (x, y, z) \in L \quad m \le f(x, y, z) \le M$, то

$$mL \le \int_L f(x, y, z) \le ML$$

Доказательство. Интегрируя неравенство $m \le f(x, y, z) \le M$ (свойство 4), получим $\int_L mdl \le \int_L f(x, y, z)dl \le \int_L Mdl$. По свойству 1 константы m, M можно вынести из-под интегралов. Используя свойство 3, получим искомый результат.

6. **Теорема о среднем** (значении интеграла).

Существует точка $c(x_c, y_c, z_c) \in L$, что $f(c) = \frac{1}{L}\int_L f(x,y,z)dl$

Доказательство. Так как функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве L, то существует ее нижняя грань $\mu = \inf_L f(x,y,z)$ и верхняя грань $M = \sup_L f(x,y,z)$. Выполнено неравенство $\forall (x,y,z) \in L \quad \mu L \le \int_L f(x,y,z)dl \le ML$. Деля обе части на L, получим $\mu \le \frac{1}{L}\int_L f(x,y,z)dl \le M$. Но число $\frac{1}{L}\int_L f(x,y,z)dl$ заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве L, то в некоторой точке $c \in L$ функция должна принимать это значение. Следовательно, $f(c) = \frac{1}{L}\int_L f(x,y,z)dl$.

3. $\int\limits_L dl = L$.Здесь L – длина дуги L .

4. Если на дуге L выполнено неравенство $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, то $\int\limits_L f(x,y,z)dl \geq \int\limits_L g(x,y,z)dl$

Доказательство. Запишем неравенство для интегральных сумм и перейдем к пределу. Заметим, что, в частности, возможно $g(x,y,z) \equiv 0$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.

:

Сведение к вычислению определенного интеграла

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t)$ (для пространственной кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$), то

$$\int\limits_K f(x,y)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt, \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int\limits_K f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt. \qquad \textbf{(2)}$$

Здесь значение параметра t_0 берется для точки A, значение параметра t_1 берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $t_0 < t_1$.

Теорема. Пусть $f(M)$ - непрерывная на кривой *AB* функция (т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall M_1, M_2$ - точек кривой таких, что расстояние между M_1, M_2 меньше δ, $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$). Пусть кривая *AB* параметризована так: $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, где $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, причем каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой. Тогда $\int\limits_{AB} f(M) ds = \int\limits_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

2) Если уравнения пути интегрирования заданы в явном виде $y = y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$), то

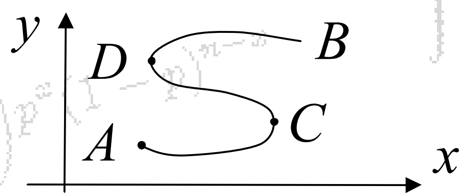
$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

$$\int_K f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f\left(x, y(x), z(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2+\left(z'(x)\right)^2}\,dx.$$

Здесь значение $x = a$ берется для точки A, значение $x = b$ берется для точки B.

Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $a < b$.

Замечание. Пусть кривая такова, что для заданного x координата y принимает несколько значений.



Тогда кривую нужно разбить промежуточными точками на отрезки таким образом, чтобы для каждого отрезка выполнялось взаимно однозначное соответствие между x и y, и интегрировать в сторону увеличения координаты x. Для данного примера криволинейный интеграл 1-го рода примет вид

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{AC} f(x,y)\,ds + \int_{DC} f(x,y)\,ds + \int_{DB} f(x,y)\,ds.$$

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением в полярных координатах,

$$r = r(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$$

то $$dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}d\varphi$$

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + {r'_\varphi}^2}d\varphi.$$

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}=$$

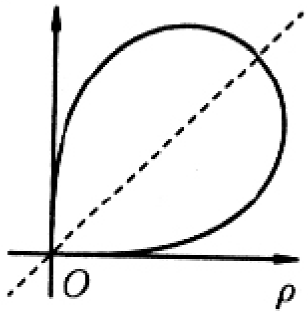
$$=\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}=$$

$$=\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}.$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi$$

Пример

Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L — лепесток лемнискаты $r=\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в 1 координатном углу.



$$dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r},$$

$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 2.$$

Пример.

Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_K yds$, где K - дуга параболы $y^2=2x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(4,\sqrt{8}\right)$.

Удобно задать уравнение параболы в виде $x=\dfrac{y^2}{2}$ и вычислять интеграл по координате y.

Производная равна $x'=y$.

Интеграл примет вид

$$I=\int\limits_K yds=\int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}\,dy=\left.\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\sqrt{8}}=\frac{26}{3}.$$

Пример

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4})\, d\ell,$$

где L - дуга астроиды $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.

Решение

Заметим, что кривая L симметрична относительно осей координат, поскольку ее уравнение инвариантно относительно преобразований $(x; y) \to (-x; y)$ и $(x; y) \to (x; -y)$. Кроме того, подынтегральная функция чётна относительно этих же преобразований, то есть принимает в симметричных точках одинаковые значения. Таким образом, координатные оси разбивают кривую L на 4 части, и интегралы по каждой из этих частей равны между собой. Поэтому можно, воспользовавшись аддитивностью, вычислить интеграл только по той части кривой L, которая лежит в первой четверти: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а затем умножить его на 4.

Положим $x = t^{3/2}$, где $t \geqslant 0$. Тогда из уравнения астроиды $y^{2/3} = a^{2/3} - t$, откуда следует, что $t \leqslant a^{2/3}$. Таким образом, если точка t пробегает отрезок $0 \leqslant t \leqslant a^{2/3}$, точка (x, y) пробежит четверть астроиды от точки $(0, a)$ до точки $(a, 0)$.

Далее, $\begin{cases} x' &= \frac{3}{2} \cdot t^{1/2}, \\ y' &= -\frac{3}{2} \cdot (a^{2/3} - t)^{1/2} \end{cases}$

Тогда $d\ell = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{t + a^{2/3} - t}\, dt = \frac{3}{2} \cdot a^{1/3}\, dt.$

$$\int_L (x^{4/3} + y^{4/3})\, d\ell = 4 \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (t^2 + a^{4/3} - 2a^{2/3}t + t^2)\, dt =$$

$$= 6\ a^{1/3} \left(\frac{2}{3}\ t^3 - a^{2/3}t^2 + a^{4/3}t \right) \Big|_0^{a^{2/3}} =$$

$$= 6\ a^{1/3} \left(\frac{2}{3}\ a^2 - a^2 + a^2 \right) = 4\ a^{7/3}.$$

Пример.

Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds$ по одному витку винтовой линии $x=\cos t;\quad y=\sin t;\quad z=t;\quad 0\le t\le 2\pi.$

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+t^2)dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

- 1) **Длина криволинейного отрезка** $K: \ L = \int\limits_K ds.$

- 2) **Масса неоднородного криволинейного отрезка** K **переменной плотности** $\gamma = \gamma(x, y, z):$

$$M = \int\limits_K \gamma(x, y, z)\, ds.$$

Площадь цилиндрической поверхности

Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая *AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz, то площадь поверхности, задаваемой функцией z = f(x;y) находится по формуле*

$$Q = \int_{AB} f(x;y)\,dl.$$