Лекция 2.3

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ(3)

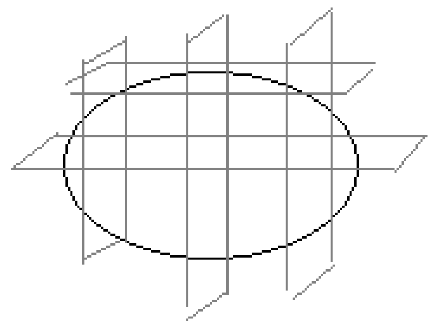
Вычисление тройных интегралов.

Декартовы координаты.

- Пусть дан тройной интеграл $$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV.$$
- Разобьем область интегрирования на элементарные объемы плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен

Разобьем область интегрирования V на элементарные объемы плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен

$$dV = dxdydz.$$



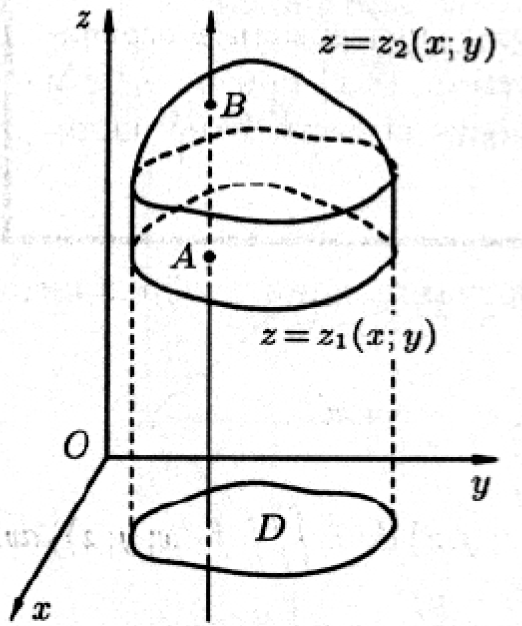
Следовательно

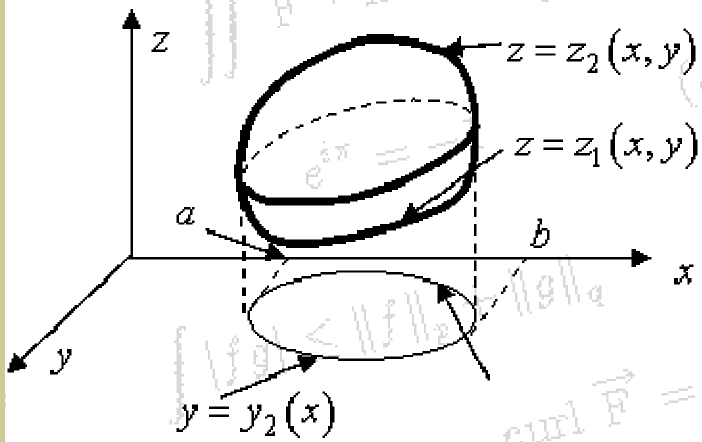
$$I = \iiint\limits_V f\left(x, y, z\right) dxdydz.$$

Правило вычисления тройного интеграла

Предположим, что любая прямая, параллельная осям Oz (Ox,Oy), пересекает границу области V не более чем в двух точках**.**

В этом случае область называется правильной в направлении Oz(Ox ,Oy)





Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$ сверху — поверхностью $z = z_2(x,y)$, причем $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ ($z_1(x,y) \le z_2(x,y)$) — непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy. Будем считать область V — правильной в направлении оси Oz:

Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x, y, z)$ имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right) ds,$$

Эта формула сводит вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *z* при постоянных *x* и *y* в пределах изменения z.

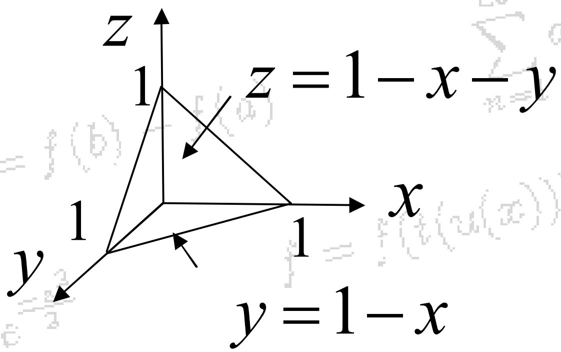
Если область D правильная в направлении Ox, то можно записать Формулу, сводящую вычисление тройного интеграла к вычислению трех однократных интегралов

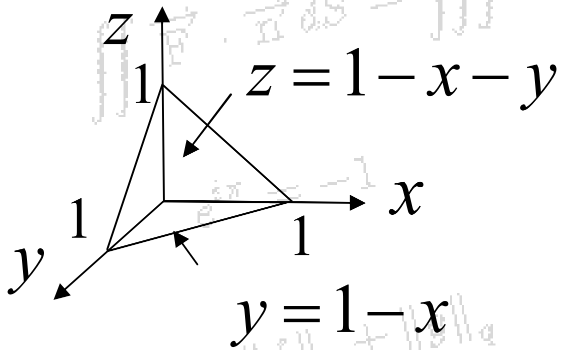
$$I=\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

Пример.

Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$ по области,

ограниченной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$.



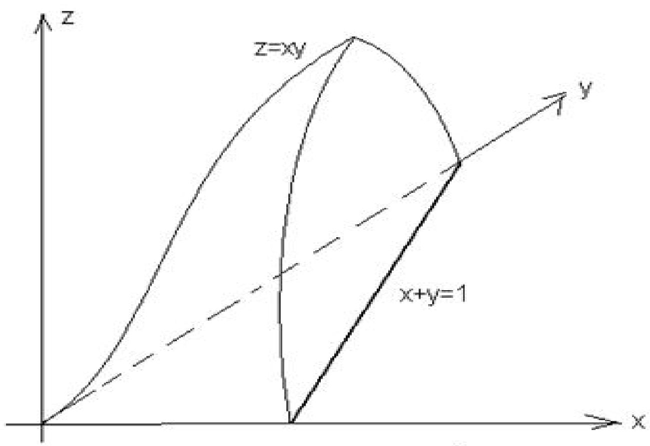


$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\left(-\frac{x^2}{2}y-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}\right)dx=\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

Пример Вычислить интеграл $\iiint\limits_G xydxdydz$, если область G ограничена гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x+y=1$ и $z=0$ ($z>0$).



Решение: Область G ограничена снизу плоскостью $z=0$, а сверху- поверхностью гиперболического параболоида (рис.34). Проекцией данной области на плоскость Oxy является треугольник, образованный осями координат $x=0$, $y=0$ и прямой $x+y=1$. Поэтому тройной интеграл сводится к повторным следующим образом:

$$\iiint\limits_G xydxdydz = \iint\limits_D xydxdy\int\limits_0^{xy} dz = \iint\limits_D x^2y^2dxdy = \int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{1-x} y^2dy = \frac{1}{180}$$

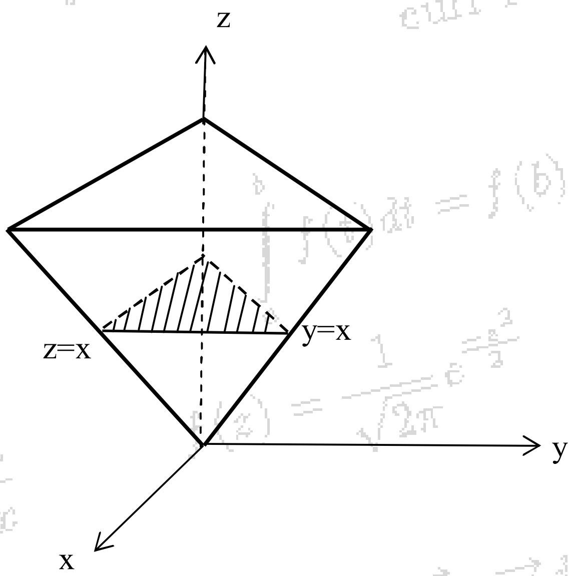
Возможен и другой подход к вычислению интеграла, когда в качестве внешнего интеграла удобно выбрать интеграл по z и расставлять пределы внутренних интегралов, используя сечение фигуры плоскостью z=const. В этом случае применяют формулу:

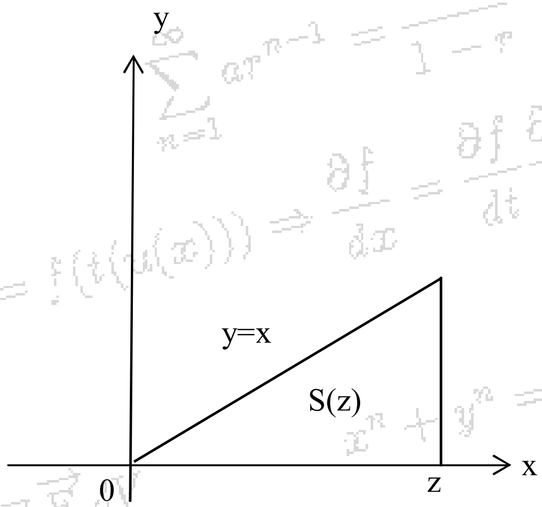
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_p^q dz \iint\limits_{S(z)} f(x,y,z)dxdy,$$

где $S(z)$ –сечение объема плоскостью z=const.

Пример: Вычислить интеграл $\iiint\limits_G zx^2y^3dxdydz$, где G- объем, ограниченный плоскостями y=0, y=x, z=1, z=x.

Решение: Построим область интегрирования (рис.35а). Выберем z в качестве внешней переменной интегрирования. Из уравнения границ видно, что z меняется от 0 до 1. Построим сечение фигуры плоскостью z=const и из уравнения границ находим значения для переменных x и y.





Подставим пределы в интеграл

$$\iiint\limits_G zx^2y^3\,dxdydz = \int\limits_0^1 zdz\int\limits_0^z x^2dx\int\limits_0^x y^3dy = \int\limits_0^1 zdz\int\limits_0^z x^2dx\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^x = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 zdz\int\limits_0^z x^6dx = \frac{1}{252}.$$

Пример : Заменить тройной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)dz$ однократным.

Решение: Построим область G, ограниченную плоскостями x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=x+y (рис.1). Чтобы свести тройной интеграл к однократному, внешний интеграл нужно взять по переменной z, т.к. подынтегральная функция является функцией z. Проведем сечение объема плоскостью z=const, причем при 0<z<1 сечение приведено на рис.1а, а при 1<z<2 – на рис.1б.

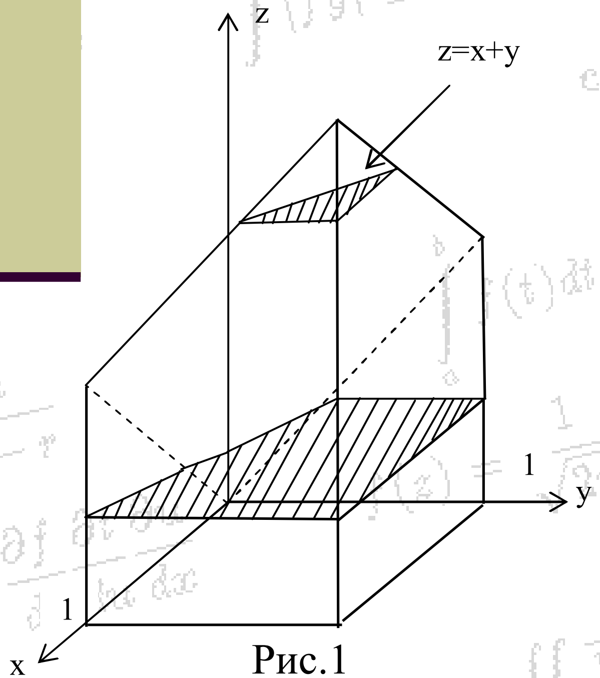


Рис.1

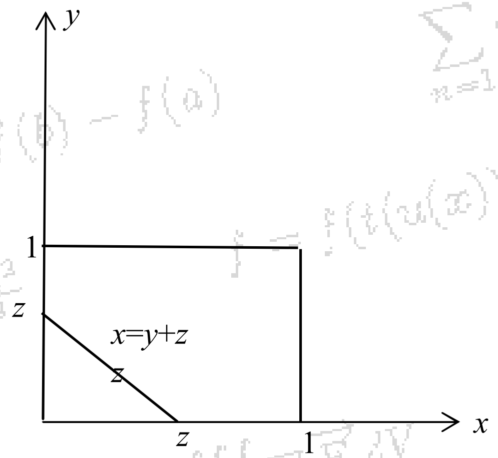


Рис.1а

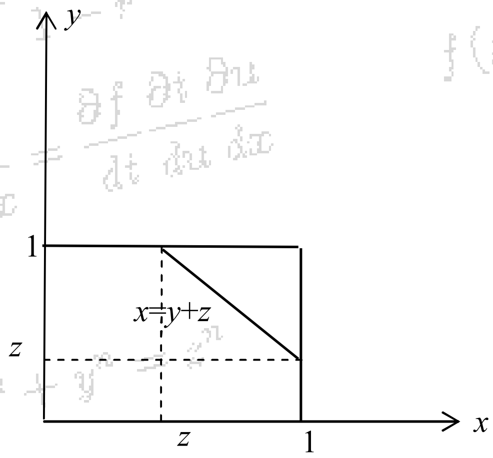


Рис.1б

Тогда интеграл можно переписать в виде

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)dz = \int_0^1 f(z)dz \iint_{S_1(z)} dxdy + \int_1^2 f(z)dz \iint_{S_2(z)} dxdy =$$

$$= \int_0^1 f(z)dz \left(\int_0^z dx \int_{z-x}^1 dy + \int_z^1 dx \int_0^1 dy \right) + \int_1^2 f(z)dz \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2 - z^2\right) f(z)dz + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-z)^2 f(z)dz$$

Общая теорема о замене переменных.

Теорема. Пусть отображение $x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями $(V^*),\ (u, v, w) \in (\Delta)$ и $(V),\ (x, y, z) \in (V)$, причем функции x, y, z - непрерывно дифференцируемые и $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ ни в одной точке (V^*).

Пусть $f(x, y, z)$ непрерывная на (V) функция. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J|\,dudvdw$$

Замечание к вычислению Якобиана: Если замена осуществляется функциями

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

то величина

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{J(u,v)}.$$

Пример: Перейти к новым координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, где G- объем, ограниченный поверхностями $x+y=1$, $x+y=-1$, $x-y=1$, $x-y=-1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

Решение: Перейдем к новым координатам $u=x+y$, $v=x-y$, $w=z$ и вычислим величину, обратную якобиану:

$$\frac{1}{J}=\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2.$$

Тогда $|J|=\dfrac{1}{2}$, а границы области Ω имеют вид: $u=1$, $u=-1$, $v=1$, $v=-1$, $w=0$, $w=x^2+y^2$.

Очевидно, что нижней границей области Ω является плоскость w=0, а верхней – поверхность параболоида вращения $w=x^2+y^2$. Проекцией Ω на плоскость Ouv является квадрат со сторонами u=1, u=-1, v=1, v=-1.Подставим полученный результат в интеграл и выполним расстановку пределов

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))dudvdw =$$

$$= \iint\limits_{D} dudv \int\limits_{0}^{\frac{u^2+v^2}{2}} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2},w\right) = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{\frac{u^2+v^2}{2}} f_1(u,v,w)dw$$

Пример: Вычислить интеграл, $\iiint\limits_G x^2 dxdydz$ если область G ограничена поверхностями $z = ay^2, z = by^2, y > 0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$, $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

Решение: Введем новые переменные $u = \dfrac{z}{y^2}, v = \dfrac{z}{x}, \; w = z$, так что область Ω будет являться прямоугольным параллелепипедом, ограниченным плоскостями $u=a$, $u=b$, $v=\alpha$, $v=\beta$, $w=0$, $w=h$. Старые переменные через новые выражаются следующим образом: $x = \dfrac{w}{v}, y = \sqrt{\dfrac{w}{u}}, z = w$.

Вычисляем якобиан преобразования

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix} 0 & -2z/y^3 & 1/y^2 \\ -z/x^2 & 0 & 1/x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{2z^2}{x^2y^3}=-\frac{2u^{3/2}v^2}{w^{3/2}},$$

$$|J|=\frac{1}{2v^2}\left(\frac{w}{u}\right)^{3/2}.$$

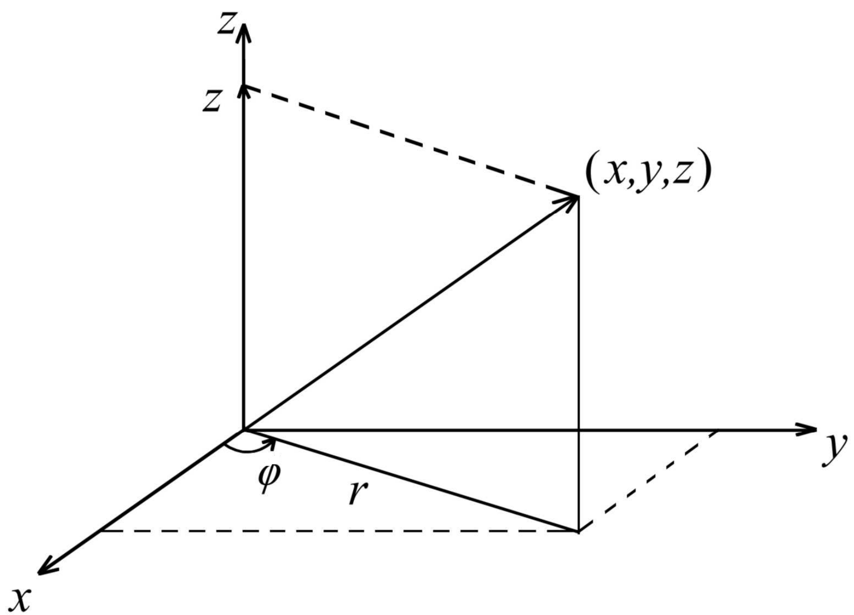
Тогда

$$\iiint\limits_G x^2dxdydz=\iiint\limits_\Omega \frac{w^2}{v^2}\frac{1}{2v^2}\left(\frac{w}{u}\right)^{3/2}dudvdw=\frac{1}{2}\int\limits_a^b u^{-\frac{3}{2}}du\int\limits_\alpha^\beta v^{-4}dv\int\limits_0^h w^{\frac{3}{2}}dw=$$

$$=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)h^4\sqrt{h}$$

Цилиндрические координаты.

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,$$
$$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\right).$$



Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rd\varphi drdz.$$

Пример Перейти к цилиндрическим координатам и вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz$, где G- объем, ограниченный цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $x+y+z=2$ и $z=0$.

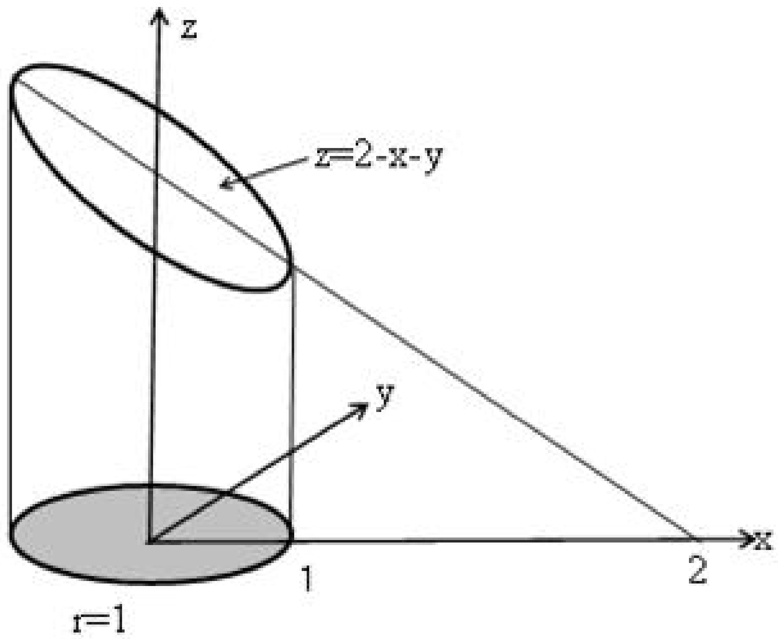


Рис.37

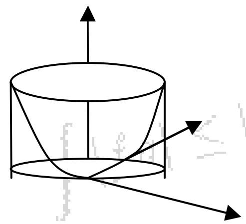
Решение: В цилиндрических координатах уравнение цилиндра имеет вид $r=1$, уравнение наклонной плоскости – $r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z=2$, а подынтегральная функция равна r^2. Область G ограничена снизу координатной плоскостью $z=0$, а сверху – наклонной плоскостью $z=2-(\cos\varphi+\sin\varphi)$ (рис.37). Проекцией области G на плоскость Oxy является круг единичного радиуса, граница которого $r=1$. Поэтому область D задается неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le 1$. В итоге получаем:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz = \iint\limits_D r^3\,drd\varphi \int\limits_0^{2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr \int\limits_0^{2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2r^3 - r^4(\cos\varphi+\sin\varphi))\,dr = \pi$$

Пример

Вычислить объем пространственного тела, заключенного между цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и параболоидом $z = x^2 + y^2.\,(z \geq 0)$.



Перейдем к цилиндрическим координатам:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ J = r.$

Уравнение параболоида примет вид:

$z = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \to z = r^2.$

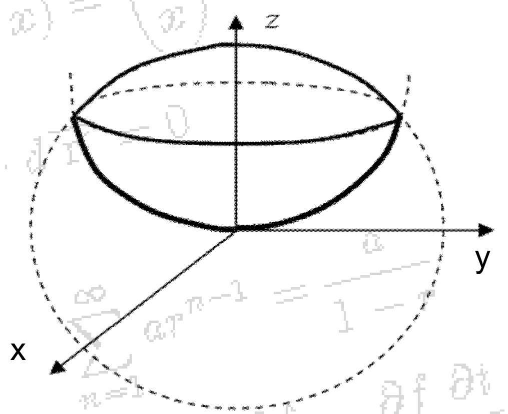
Уравнение цилиндра $r = R$

$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^{r^2} r\,dz\right)dr\right)d\varphi = 2\pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

Пример.

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\,dv$ по области, ограниченной поверхностями

$$V:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

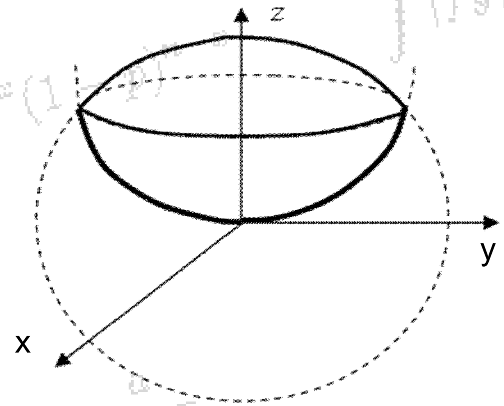


Перейдем к цилиндрическим координатам:

$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z,\quad J = r.$

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \to z = r^2.$$



Уравнение сферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \to z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей является окружность радиуса $r = \sqrt{2}\quad \left(r^2 + r^4 = 6\right)$.

Переменные изменяются в следующих пределах:

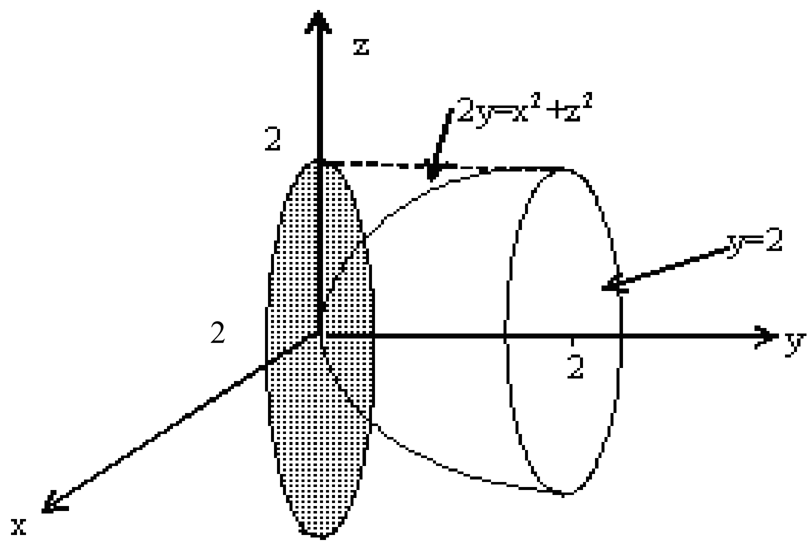
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad r^2 \le z \le \sqrt{6-r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I = \iiint\limits_V z dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r dr \int\limits_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r dr \left. \frac{z^2}{2} \right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(6 - r^2 - r^4\right) r dr = \frac{11}{3}\pi.$$

Пример: Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \left(x^2+z^2\right)dxdydz$, где область G ограничена плоскостью y=2 и параболоидом $2y = x^2 + z^2$.



Решение: Область G ограничена «справа» плоскостью y=2, а «слева» – поверхностью параболоида $2y = x^2 + z^2$, Эта область проектируется в область D плоскости Oxz , ограниченную окружностью $x^2 + z^2 = 4$. Последнее уравнение является линией пересечения плоскости y=2 и параболоида $2y = x^2 + z^2$. Введем цилиндрические координаты $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $y = y$ и уравнение параболоида принимает вид $y = r^2/2$. Область D задается неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$.

С учетом вышесказанного получаем

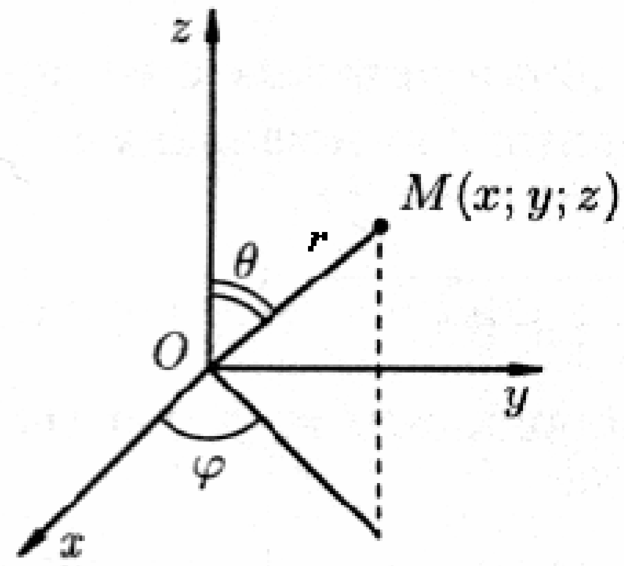
$$\iiint\limits_G \left(x^2 + z^2\right) dxdydz = \iint\limits_D r^3 drd\varphi \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{2} dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{2} dy = 2\pi \int\limits_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{16\pi}{3}$$

.

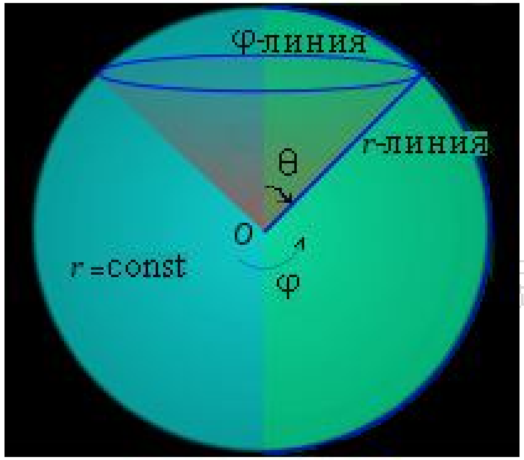
Сферические координаты.

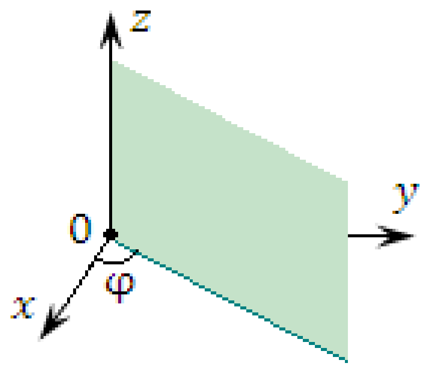
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \;\; y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \;\; z = \rho \cos\theta,$$

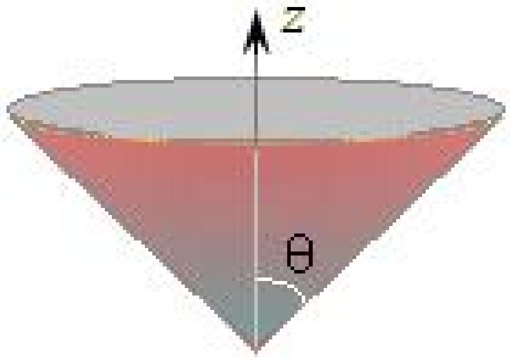
$$\left(0 \le \rho < +\infty, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 \le \theta \le \pi\right).$$



Поверхность, на которой одна из координат сохраняет постоянное значение, называется **координатной поверхностью**.







Координатные поверхности сферической системы координат:
сфера (r = const);
полуплоскость (φ = const);
конус (θ = const).

В сферической системе координатные линии, проходящие через любую точку M пространства, пересекаются под прямым углом.

Якобиан преобразования $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$

вычисляется по формуле

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

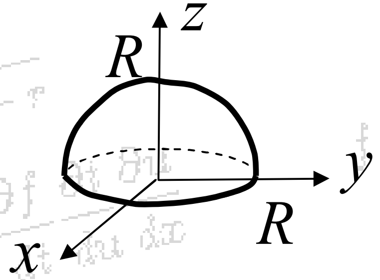
$$= \iiint\limits_{V^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, d\varphi\, dr\, d\theta.$$

Пример 1.

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dv,$

где область V - верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2.$

Перейдем к сферическим координатам:



$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=r\cos\theta,\ \ J=r^2\sin\theta.$$

Для данной области интегрирования, переменные изменяются в пределах:

$$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^4dr\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=2\pi\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)=2\pi\frac{R^5}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi R^5.$$

Пример 2

Найти интеграл $\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$

где область интегрирования U − шар, заданный уравнением

$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$

Решение.

Поскольку область U представляет собой шар, и к тому же подынтегральное выражение является функцией, зависящей от $f(x^2 + y^2 + z^2)$, то перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Новые переменные изменяются в пределах:

$$0 \le \rho \le 5, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Учитывая якобиан $\rho^2 \sin\theta$, записываем интеграл в виде:

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz = \iiint_{V'} \rho \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \cdot \left[\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \cdot \left(-\cos\pi + \cos 0\right) = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho =$$

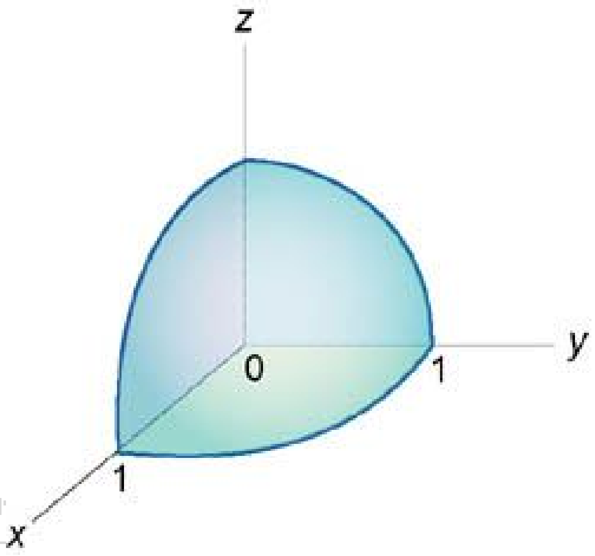
$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^5 \right] = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{5^4}{4} = \frac{625}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{625}{2} \cdot 2\pi = 625\pi.$$

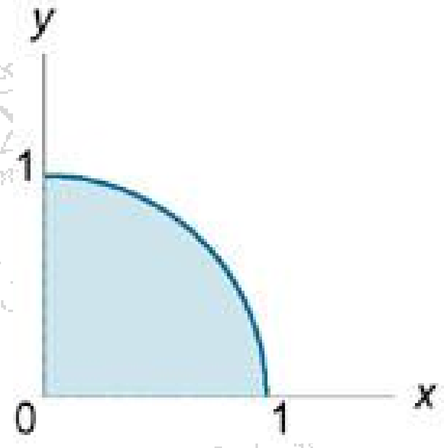
Пример 3

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dz,$

используя сферические координаты

Область интегрирования представляет собой часть шара, расположенная в первом октанте, и, следовательно, ограничена неравенствами





$$0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Подынтегральное выражение равно

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \left[(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2\right]^2 =$$

$$= \left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta\right)^2 = \left(\rho^2\sin^2\theta\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{1} + \rho^2\cos^2\theta\right)^2 =$$

$$= \left(\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta\right)^2 = \left(\rho^2\underbrace{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}_{1}\right)^2 = \rho^4,$$

а

$$dxdydz = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

получаем

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2dz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\left(\rho^4\cdot\rho^2d\rho\right)\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^6d\rho\cdot\left[\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^6d\rho\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^6d\rho\cdot 1=\int_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\left[\left(\frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_0^1\right]=\frac{1}{7}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{1}{7}\cdot\left[\left(\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\right]=\frac{1}{7}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{14}.$$

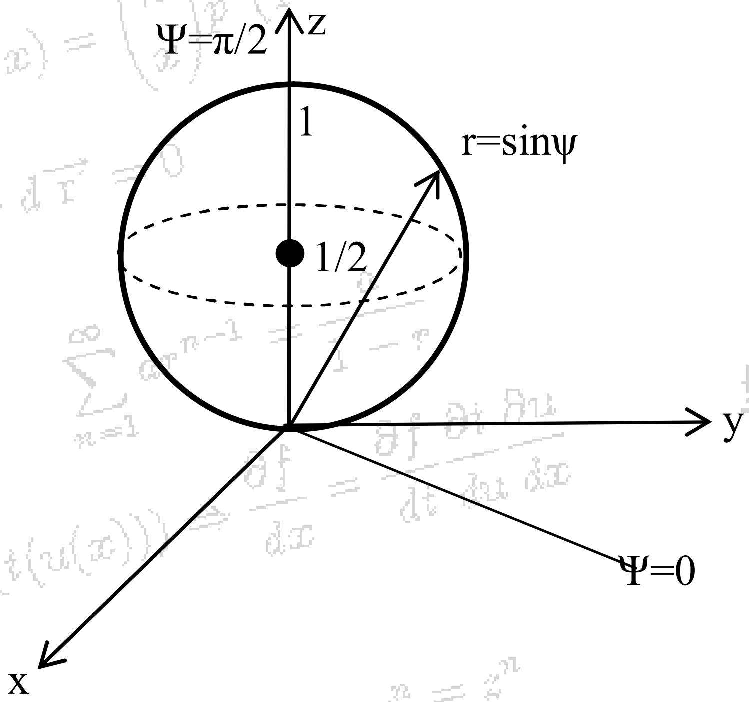
Существует альтернативное определение сферической системы координат. Сферические координаты (r, φ, ψ) связаны с декартовыми координатами

соотношениями $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$, $\psi = -\theta + \dfrac{\pi}{2}$

где $0 \le \varphi < 2\pi$, **$-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$**, $0 \le r < +\infty$.

Якобиан перехода к сферическим координатам равен $J = r^2\cos\psi$

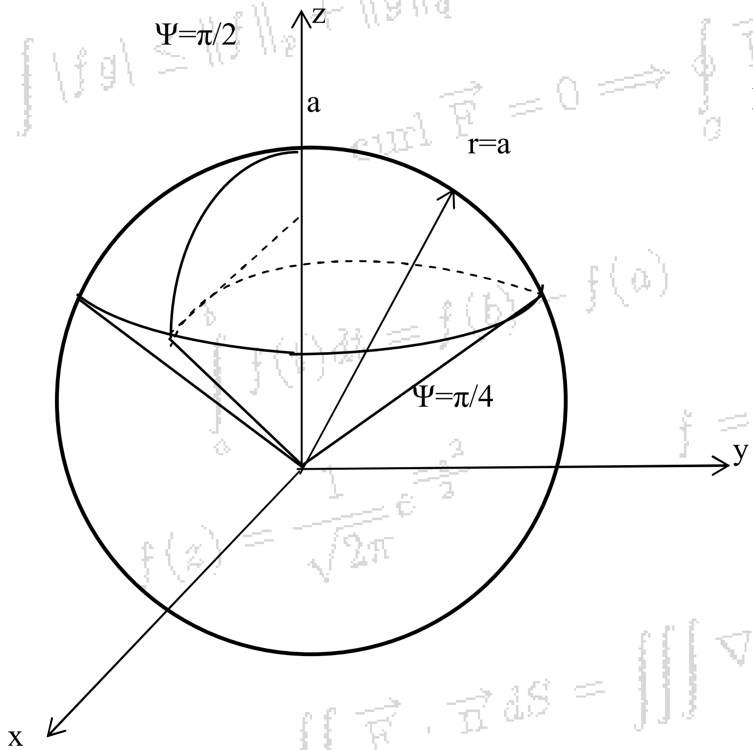
Пример: Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если область G ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$.



Решение: Преобразуем уравнение сферы к каноническому виду, выделив полный квадрат по z: $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Сфера с центром в точке (0,0,1/2) радиуса 1/2, касается начала координат и расположена выше координатной плоскости z=0. Ее уравнение в сферических координатах имеет вид r=sinθ, так что для всех внутренних точек выполняется неравенство $0 \le r \le \sin\psi$. Так как проекцией области G на плоскость Oxy является круг, то $0 \le \varphi \le 2\pi$.Угол отклонения ψ для данной области изменяется в пределах $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$. Расставляем пределы интегрирования:

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^3\cos\psi\,drd\varphi d\psi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi \int\limits_0^{\sin\psi} r^3 dr = \frac{\pi}{10}$$

Пример: Перейти к сферическим координатам и вычислить $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$, где G- объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ $\left(x^2 + y^2 \le z^2\right)$



Область G- это часть шара, лежащего в первом октанте и вырезанного конусом

Решение: Для шара в первом октанте $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, а угол ψ наименьшее значение принимает на поверхности конуса. Найдем его из уравнения конуса, преобразовав к сферическим координатам: $r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2\psi = r^2\sin^2\psi$ или $\operatorname{tg}\psi = 1$, откуда получаем $\psi = \dfrac{\pi}{4}$.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^4 \cos^2\psi \sin\psi\, dr d\varphi d\psi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi \int\limits_0^2 r^4 dr$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^2 = \frac{-2^5}{5} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left.\frac{\cos^3\psi}{3}\right|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{15}$$

Приложения тройных интегралов.

Геометрическое приложение – **вычисление объема** любого пространственного тела.

По свойству 3 тройного интеграла $\iiint\limits_V dv = V$, где V – объем области V.

С помощью двойного интеграла тоже можно вычислять объем, но только цилиндрического тела, а не произвольного.

Пример. Вычислить объем пространственного тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и шаром (единичного радиуса с центром в точке (0, 0, 1))

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{1+\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\pi \int\limits_0^1 \rho\left(1 + \sqrt{1-\rho^2} - \rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}\pi.$$

Механические приложения

Пусть дано тело V переменной плотности $\gamma(x,y,z)$.

Массу тела M можно вычислить по формуле

$$M=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv.$$

1) Статические моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dv,\qquad M_{xz}=\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)\,dv,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)\,dv.$$

2) Координаты центра тяжести:

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv},$$

$$z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv}.$$

Пример. Определить координаты центра тяжести полушара $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \gamma = z.$ По симметрии $\bar{x} = \bar{y} = 0,$

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin\theta \, dr \int_0^{\pi/2} r\cos\theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{4}.$$

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin\theta dr \int_0^{\pi/2} r\cos^2\theta \, d\theta = \frac{2\pi R^5}{15}, \quad \bar{z} = \frac{8}{15}R.$$

Если тело однородно, т. е. $\gamma(x, y, z) = const$, то

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x dv}{V}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V y dv}{V}, \quad z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V z dv}{V}.$$

3) Моменты инерции тела относительно координатных осей:

$$J_x = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\left(y^2+z^2\right)dv, \quad J_y = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\left(x^2+z^2\right)dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\left(x^2+y^2\right)dv.$$

Момент инерции тела J_a является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг своей оси **a** подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

4) Полярный момент инерции тела:

$$J_0 = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dv.$$