Лекция 2.2

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (2)

Замена переменных в двойном интеграле.

При вычислении интегралов часто бывает удобно сделать замену переменных $x = x(u, v), \ \ y = y(u, v)$.

Теорема. Пусть установлено взаимно однозначное соответствие областей D_{xy} и D_{uv} с помощью непрерывных, имеющих непрерывные частные производные функций $x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v)$. Пусть функция f(x,y) непрерывна в области D_{xy}. Тогда

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|I|\,dudv,$$

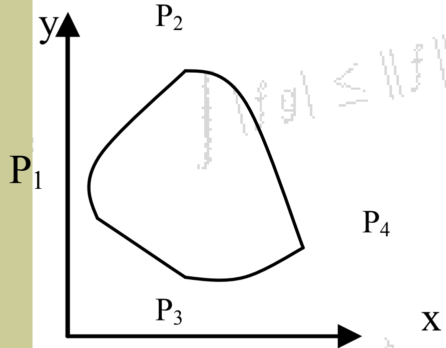
где

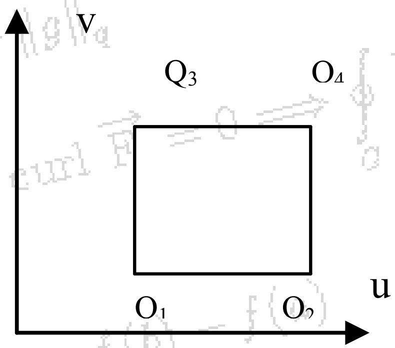
$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- функциональный определитель - определитель Якоби (**якобиан**).

Будем считать, что всюду на области D $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ не равняется 0.

Доказательство (нестрогое). Рассмотрим элементарную ячейку в координатах u, v: Q_1, Q_3, Q_4, Q_2 – прямоугольник со сторонами du, dv. Рассмотрим ее образ при отображении $x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v)$ - ячейку P_1, P_3, P_4, P_2.





Запишем координаты точек

Q_1 (u, v), Q_2 (u+du, v), Q_3 (u, v+dv),

$$P_1(\varphi(u,v),\psi(u,v)),$$

$$P_2(\varphi(u+du,v),\psi(u+du,v))\approx$$

$$P_2((\varphi(u,v)+\varphi_u' du),(\psi(u,v)+\psi_u' du))$$

$$P_3(\varphi(u,v+dv),\psi(u,v+dv))\approx$$

$$P_3((\varphi(u,v)+\varphi_v' dv),(\psi(u,v)+\psi_v' dv))$$

Приближенно будем считать ячейку P_3, P_4, P_1, P_2.параллелограммом, образованным сторонами $\overrightarrow{P_1P_2} = \{\varphi_u' du, \psi_u' du\}, \overrightarrow{P_1P_3}\{\varphi_v' dv, \psi_v' dv\}$. Вычислим площадь этой ячейки как площадь параллелограмма.

$$S = \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right| = \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_u' du & \psi_u' du & 0 \\ \varphi_v' dv & \psi_v' dv & 0 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \varphi_u' du & \psi_u' du \\ \varphi_v' dv & \psi_v' dv \end{vmatrix} \vec{k}\right| = \left|\begin{vmatrix} \varphi_u' & \psi_u' \\ \varphi_v' & \psi_v' \end{vmatrix}\right| dudv = |I|\, dudv$$

.

Подставляя в интеграл площадь параллелограмма в качестве площади ячейки dxdy, получим

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y)dxdy = \iint_{D_u} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |I|\, dudv$$

Справка

Векторное произведение векторов $\vec{a}\times\vec{b}\equiv[\vec{a}\vec{b}]\equiv[\vec{a}\times\vec{b}]$ - вектор, со следующими свойствами:

1. $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$,

2. $[\vec{a}(\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2)]=\alpha[\vec{a}\vec{b}_1]+\beta[\vec{a}\vec{b}_2]$, $[\vec{e}_1\vec{e}_2]=\vec{e}_3$, $[\vec{e}_2\vec{e}_3]=\vec{e}_1$, $[\vec{e}_3\vec{e}_1]=\vec{e}_2$.

Модуль векторного произведения – это площадь параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, равная:

$$\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

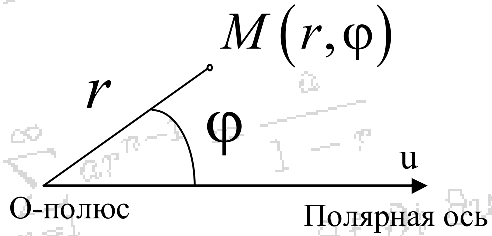
$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Двойной интеграл в полярных координатах.

Рассмотрим частный случай – полярную систему координат $u = \rho, v = \varphi$:

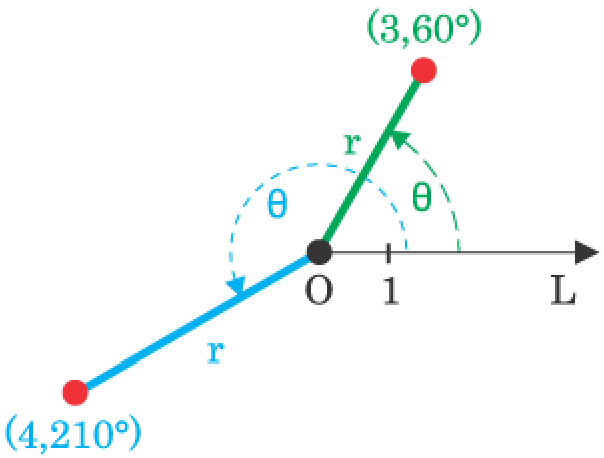
Пусть требуется посчитать $\iint_D f(x, y)dxdy$ по области D, которая задается в полярных координатах условиями

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r \le r(\varphi) \end{cases}$$

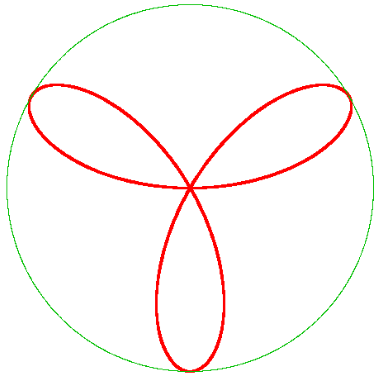


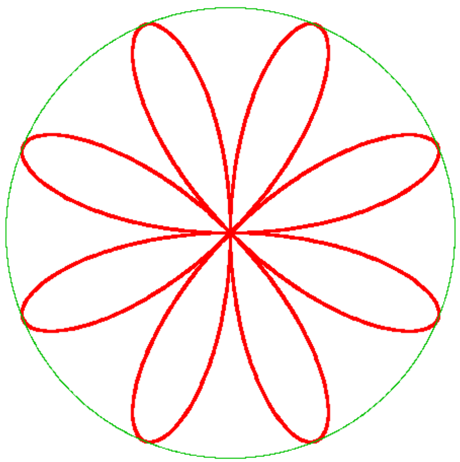
$r(M) = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус.

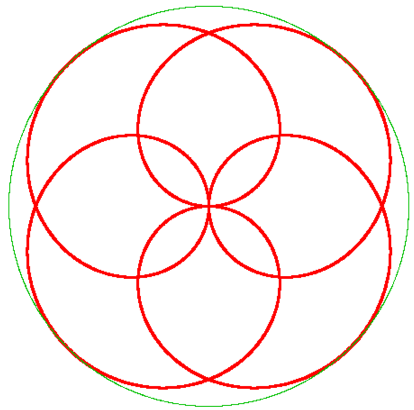
$\varphi(M)$ - полярный угол, принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на $2k\pi$. Значение φ: $0 \le \varphi < 2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi < \varphi \le \pi$).

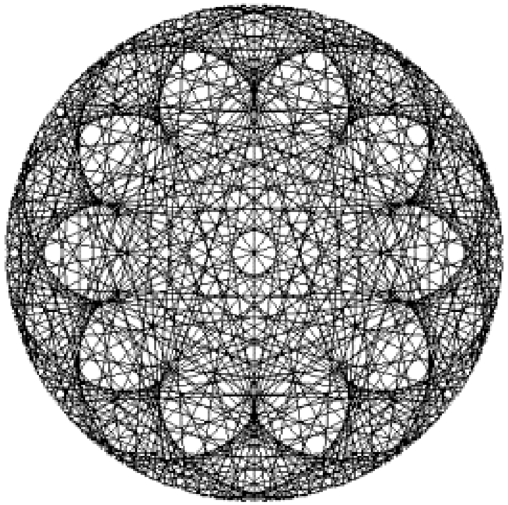


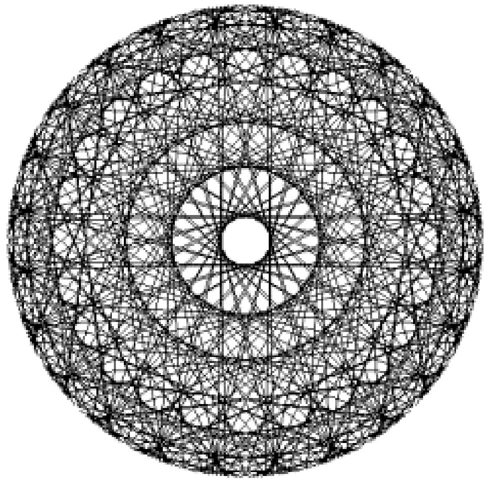
$$\rho = a \sin k\varphi \, .$$





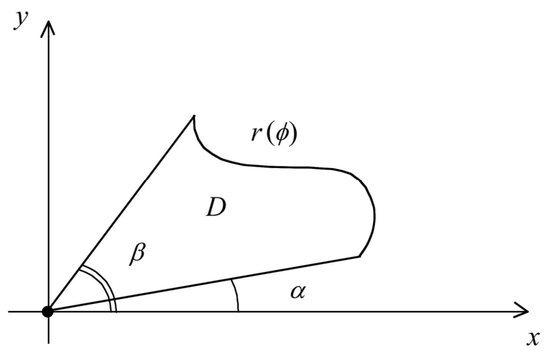


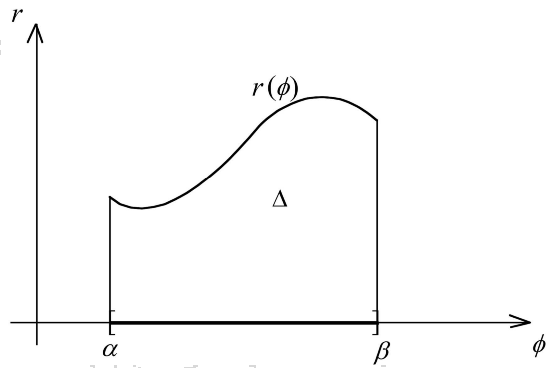




Связь декартовых и полярных координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$



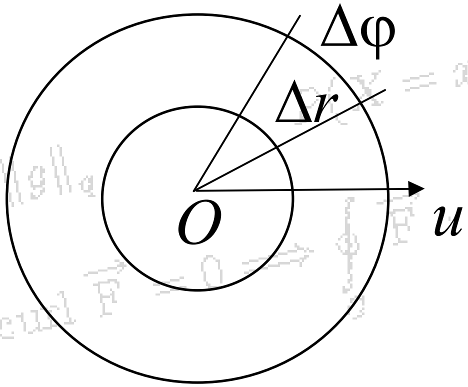


$$I(r;\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D в полярных координатах примет вид:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Элемент площади в полярных координатах вычисляется по формуле



$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi \approx r\Delta r\Delta\varphi\,.$$

т. е. $d\sigma = r dr d\varphi$.

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

В некоторых случаях удобно ввести «обобщенные» полярные координаты:

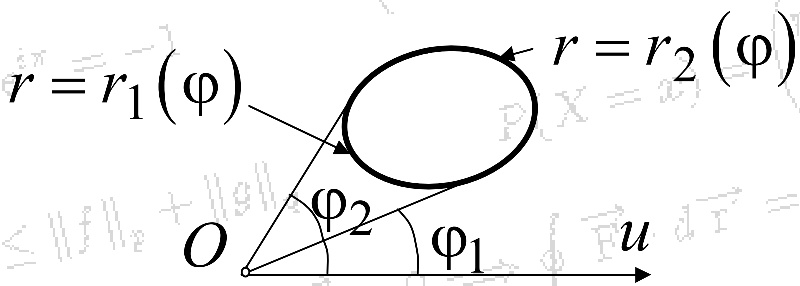
$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда

$$|J| = ab\rho, dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$$

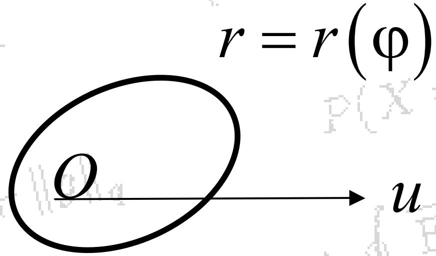
Примеры:

- ***Пример 1.*** Полюс вне области D.



$$I=\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} d\varphi \int_{r1(\varphi)}^{r2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

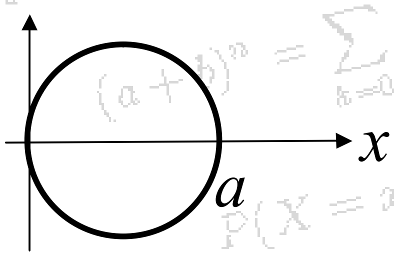
***Пример 2*.** Полюс внутри области D



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

Пример 3

$$D:\ x^2+y^2\le ax$$



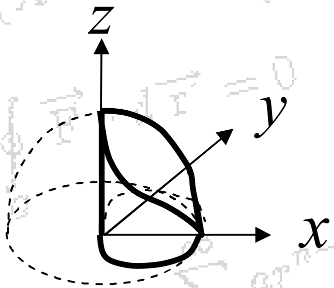
Введем полярные координаты $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ J = r$

- Уравнение границы примет вид $r^2 = ar\cos\varphi$
- или $r = a\cos\varphi$
- Тогда

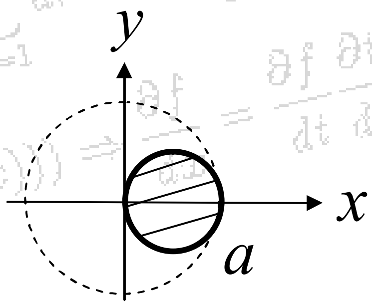
$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr$$

Пример 4.

Найти объем общей части шара радиуса $r_1 = a$ с центром в начале координат и цилиндра радиуса $r_2 = \dfrac{a}{2}$ уравнение оси которого $x = a/2$.



- Верхняя половина объема.



- Область интегрирования
- Так как областью интегрирования является окружность, то удобно перейти к полярным координатам (см. пример 3).

Из уравнения шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ для верхней полусферы

имеем $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,dr = -2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, d\left(a^2 - r^2\right) =$$

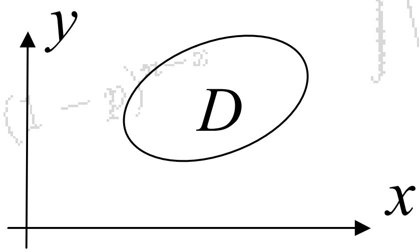
$$= -4\int_0^{\pi/2} d\varphi \left.\frac{\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}}{3}\right|_0^{a\cos\varphi} = -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi - a^3\right)d\varphi = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

Приложения двойных интегралов.

С помощью двойного интеграла можно вычислить объем цилиндрического тела, площадь и массу плоской области. От этих задач мы и пришли к двойному интегралу.

Масса плоской пластинки.

Поверхностная плотность $\mu(x,y)$

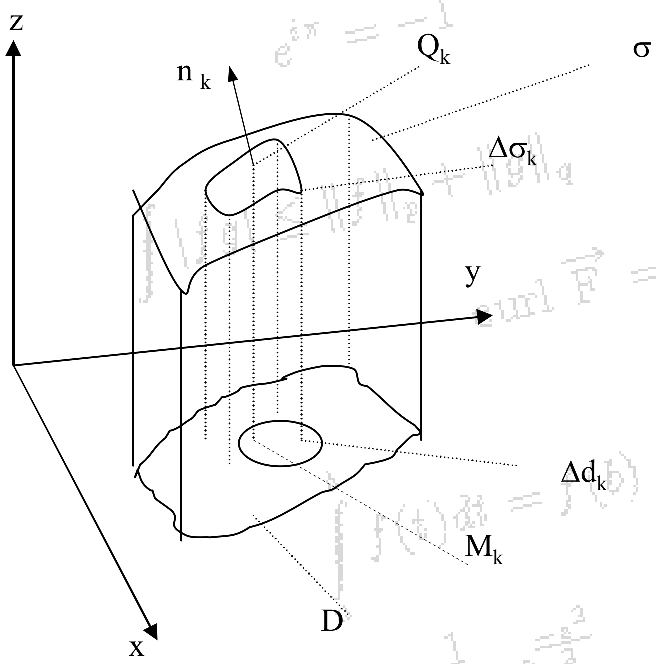


Элемент массы равен $dM = \mu(x,y)\,d\sigma$

Масса всей пластинки равна $M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma.$

Но возможны и менее очевидные приложения. С помощью двойного интеграла можно вычислять площадь поверхности, определять статические моменты, моменты инерции и центр тяжести плоской области

Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла.



Пусть поверхность σ, площадь которой надо вычислить, задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ или уравнением $z = f(x, y)$.

Введем разбиение σ на ячейки $\Delta\sigma_k$, не имеющие общих внутренних точек, площадью Δv_k. Пусть область σ и ячейки $\Delta\sigma_k$ проектируются на плоскость OXY в область D и ячейки Δd_k площадью Δs_k. Отметим на ячейке Δd_k точку M_k. В точке Q_k (ячейки $\Delta\sigma_k$), которая проектируется в точку M_k, проведем единичный вектор нормали n_k $\{\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k\}$ к поверхности σ и касательную плоскость. Если приближенно считать равными площадь Δv_k ячейки $\Delta\sigma_k$ и площадь ее проекции на касательную плоскость, то можно считать справедливым соотношение $\Delta v_k \cos\gamma_k = \Delta s_k$. Выразим отсюда $\Delta v_k = \Delta s_k / \cos\gamma_k$.

Будем измельчать разбиение при условии max diam $\Delta\sigma_k \to 0$, что для кусочно-гладкой поверхности, не ортогональной плоскости OXY, равносильно max diam $\Delta d_k \to 0$. Вычислим площадь поверхности как двойной интеграл

$$S_D =$$

$$\lim_{\max diam \Delta\sigma_k \to 0} \sum_k \Delta v_k = \lim_{\max diam \Delta d_k \to 0} \sum_k \frac{1}{|\cos\gamma(x_k, y_k, z_k)|} \Delta s_k =$$

$$\iint_D \frac{1}{|\cos\gamma(x, y.z)|} ds$$

Сюда остается лишь подставить $\cos\gamma(x, y, z)$.

Если поверхность σ задана уравнением F(x, y, z) = 0, то

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{gradF}}{\left|\overrightarrow{gradF}\right|} = \frac{1}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}\left\{F_x', F_y', F_z'\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Поэтому в этом случае $\cos\gamma = \dfrac{F_z'}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}$,

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \frac{F_x'^2}{F_z'^2} + \frac{F_y'^2}{F_z'^2}}.$$

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{F_x'^2}{F_z'^2} + \frac{F_y'^2}{F_z'^2}}\,dxdy$$

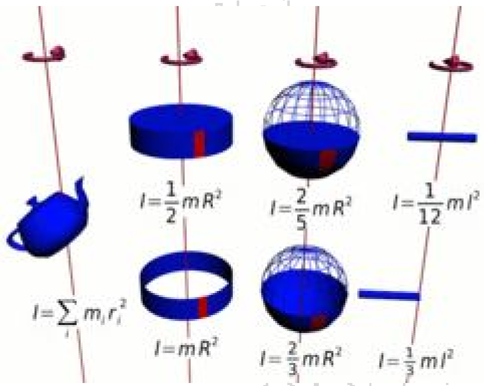
Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

Статические моменты инерции и центр тяжести пластинки.

Пусть задана плотность вещества плоской материальной области D $\mu(x, y)$. Выделим элементарную ячейку с массой $\Delta\sigma_k$ и применим к ней известные формулы для материальной точки:

Момент инерции тела J_a является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг своей оси ***a*** подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.



$$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(x_k, y_k) \Delta\sigma_k, \qquad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(x_k, y_k) \Delta\sigma_k.$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma, \qquad M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma.$$

$$x_{ц.т.} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}, \quad y_{ц.т.} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}.$$

Моменты инерции пластинки.

$$I_x = \iint\limits_D y^2 d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 d\sigma.$$

- Полярный момент инерции относительно оси Oz

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) d\sigma = I_x + I_y.$$

Теорема Штейнера. Имеем тело, момент инерции которого относительно оси, проходящей через его центр масс известен. Необходимо определить момент инерции относительно произвольно оси параллельной этой оси . Согласно теореме Штейнера, момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

Замечание о несобственных двойных интегралах.

Точно так же, как и в определенных интегралах, вводят несобственные двойные интегралы двух типов: *интеграл от непрерывной функции по неограниченной области* (первого рода) и *интеграл от разрывной функции по ограниченной области* (второго рода).

Интеграл первого рода определяют как предел последовательности двойных интегралов от непрерывной функции по «расширяющимся» областям, стремящимся к заданной неограниченной области. Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

Интеграл второго рода определяют как предел последовательности интегралов от непрерывной функции по «расширяющимся» областям, стремящимся к заданной области и исключающим точку разрыва. Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

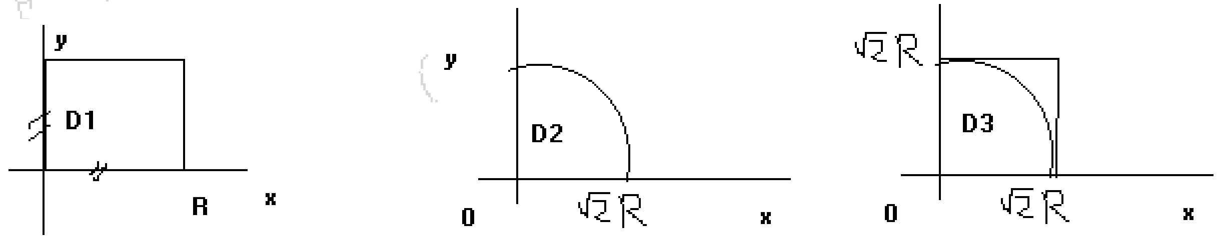
Интеграл Пуассона (интеграл вероятности)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Вычислим с помощью двойного интеграла.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ (по определению)}$$

$$I = \int_0^{R} e^{-x^2} dx \,, \quad I = \lim_{R \to +\infty} I(R) \,, \quad I^2 = \lim_{R \to +\infty} I^2(R)$$



$$(I(R))^2 = \int_0^R e^{-x^2}dx \int_0^R e^{-y^2}dy = \iint_{D_1} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = A(R)$$, где D_1–квадрат, $D_1 \subset D_2$

$$D_2 : \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 2R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$e^{-x^2-y}\ dxdy > 0 \Rightarrow \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dxdy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \mathrm{B(R)}$$

$D_1 \subset D_2 \subset D_3$

$$\mathrm{C(R)} = \iint_{D_3} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

A(R)<B(R)<C(R)

$$B(R)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 2R^2\\ x\ge 0\\ y\ge 0}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le R\end{array}\right.=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right)\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Big|_0^R\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

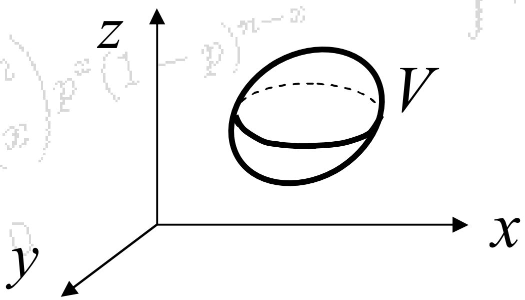
$$A(R)\le\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)\to\frac{\pi}{4}(R\to+\infty)\le C(R)$$

A(R) и C(R) имеют один предел при $R\to\infty$, т.к. $C(R)=A(\sqrt{2}R)$. Следовательно,

$$\exists\lim_{R\to\infty}(A(R))=\lim_{R\to\infty}(C(R))=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I^2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

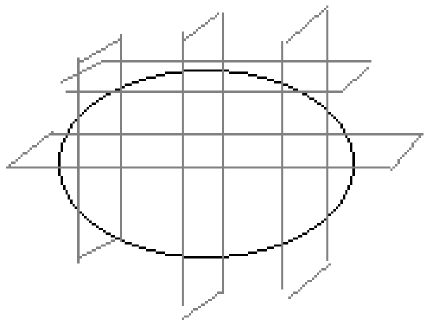
ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Масса неоднородного тела.



Рассмотрим тело объемом V

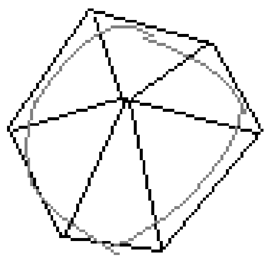
переменной плотности $\gamma = \gamma\left(x, y, z\right)$.



Разобьем тело произвольным образом на n частей элементарными объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$.

Выберем в каждом из элементарных объемов произвольную точку

$$M_k\left(x_k, y_k, z_k\right).$$



Масса элементарного объема приближенно равна

$$\Delta M_k \approx \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k.$$

Просуммируем массу всех элементарных объемов

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k .$$

- Выражение в правой части называется интегральной суммой. Устремим наибольший диаметр элементарных объемов к нулю и рассмотрим предел $\lim\limits_{\max diam(\Delta V_k)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k .$
- Если этот предел интегральной суммы существует, то, очевидно, он равен массе тела и называется тройным интегралом от функции $\gamma = \gamma\left(x, y, z\right)$ по объему V

$$M = \lim_{\max diam(\Delta V_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k = \iiint\limits_V \gamma\left(x, y, z\right) dV .$$

Вообще, тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Введем некоторые ограничения на область интегрирования и подинтегральную функцию, достаточные для существования интеграла.

Потребуем, чтобы функция f(M) была непрерывна в области V и на ее границе.

Потребуем, чтобы область V была замкнутой, ограниченной, пространственно-односвязной областью с кусочно-гладкой границей.

Область назовем пространственно-односвязной, если ее можно непрерывной деформацией стянуть в точку.

Теорема существования. Пусть область V и функция f(M)=f(x, y, z) удовлетворяют сформулированным требованиям. Тогда тройной интеграл существует как предел интегральных сумм.

$$\lim_{\max_k diam\Delta v_k \to 0} \sum_k f(M_k)\Delta v_k = \iiint_V f(x,y,z)dv.$$

Замечание. Предел этот не зависит:

1) от выбора разбиения области, лишь бы выполнялось условие A

2) от выбора отмеченных точек на элементах разбиения

3) от способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие B.

Свойства тройных интегралов (аналогичны двойным интегралам):

Линейность

1) $\iiint\limits_V \left(f_1(x,y,z) \pm \ldots \pm f_n(x,y,z)\right) dV = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \pm \ldots \pm \iiint\limits_V f_n(x,y,z)\,dV.$

2) $\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$

Эти свойства, как и для двойного интеграла, доказываются «через интегральные суммы». Составляют интегральную сумму для интегралов, стоящих в левой части равенства, в ней делают нужную операцию (это возможно, т.к. число слагаемых конечно) и получают интегральные суммы для интегралов в правой части. Затем, по теореме о предельном

Аддитивность (по множеству)

3) $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Тогда $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV$.

Доказательство проводится, как и ранее, через интегральные суммы с использованием замечания к теореме существования.
Разбиение выбирается и измельчается так, чтобы граница областей V, W состояла из границ элементов разбиения (это можно сделать, учитывая замечание). Тогда интегральная сумма для интеграла в левой части равенства равна сумме двух интегральных сумм, каждая для своего для интеграла в правой части равенства. Переходя к пределу в равенстве, получаем требуемое соотношение.

4) Если $\forall$**(x,y,z)$\in$V** $f_1(x,y,z) \geq f_2(x,y,z)$,

то $\iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \geq \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\,dV$.

Переходя к пределу в неравенстве $\sum_k f(M_k)\Delta v_k \geq \sum_k f(M_k)\Delta v_k$ (по теореме о переходе к пределу в неравенстве), получим требуемое соотношение.

Следствие. Если f(x, y, z) $\geq$0, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv \geq 0$.

Теорема об оценке интеграла

5) Если $m = f_{наим}$ *в* V, $M = f_{наиб}$ *в* V,

то $mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \le MV$, где $V = \iiint\limits_V dV$.

- Интегрируя неравенство m ≤f(x, y, z) ≤M, по свойству 4 получим требуемое неравенство.

$$\iiint\limits_V C dv = CV$$

, где V – объем области V.

Теорема о среднем.

6) Пусть выполнены требования теоремы существования. Тогда Существует точка C в области V, такая, что *f*(C) = $\frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$.

Доказательство

Так как функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве V, то существует ее нижняя грань $\mu = \inf_V f(x,y,z)$ и верхняя грань $\mathrm{M} = \sup_V f(x,y,z)$. Выполнено неравенство $\forall (x,y,z) \in V \quad \mu V \le \iint\limits_V f(x,y,z)dV \le \mathrm{M}V$. Деля обе части на V получим

$\mu \le \frac{1}{V}\iint\limits_V f(x,y,z)dV \le \mathrm{M}$. Но число $\frac{1}{V}\iint\limits_V f(x,y,z)dV$ заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве V, то в некоторой точке $C \in V$ функция должна принимать это значение.

Следовательно, $f(C) = \frac{1}{C}\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$.