МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
2 семестр

Кратные интегралы

Криволинейные интегралы

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Ряды

Д.ф.-м.н. профессор
Филатов В.В.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1-2

Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1-2

Никольский С.М. Курс математического анализа т.1-2

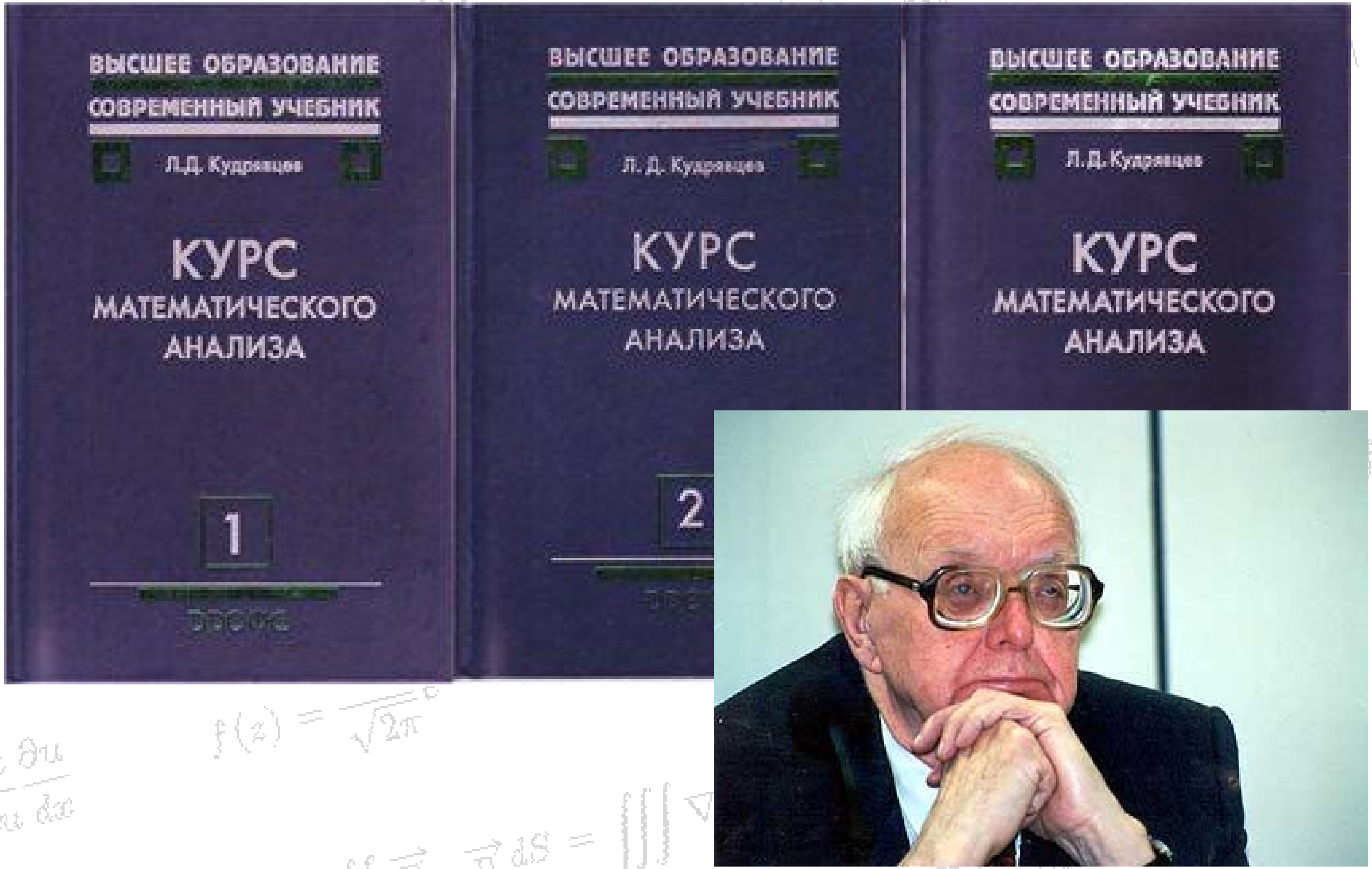
Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике ч.1-2

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа

Математический анализ в примерах и задачах (Учебник НГТУ)

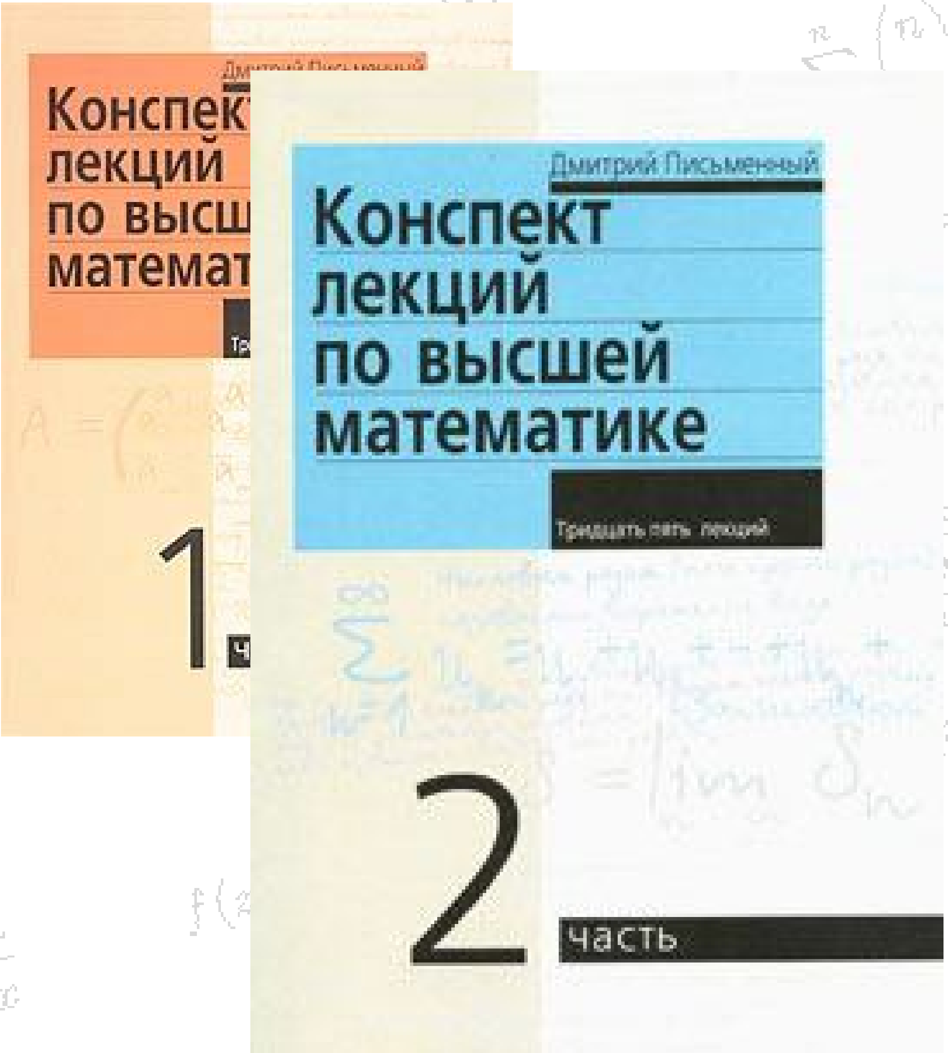
Типовые расчеты

Учебные пособия

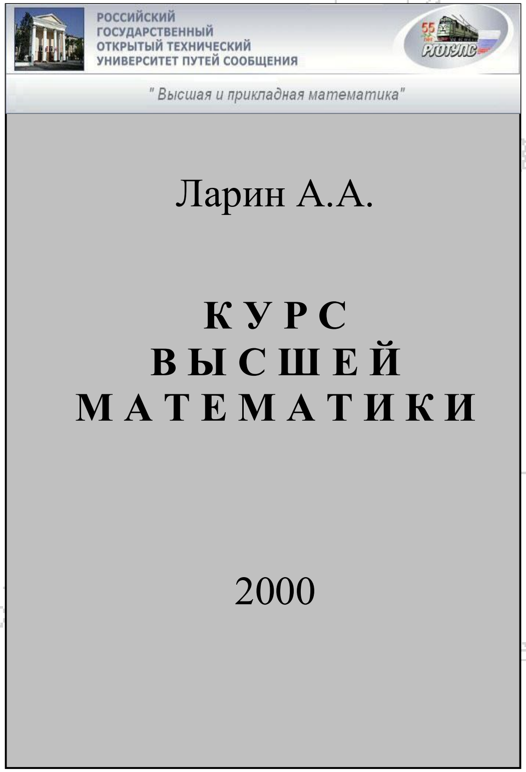



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК
Я.С. Бугров
С.М. Никольский
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
3
дрофа


В.А. Ильин
В.А. Садовничий
Бл. Х. Сендов
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
АНАЛИЗ



Дмитрий Письменный
Конспект лекций по высшей математике
Тридцать пять лекций
2
часть
1


РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

" Высшая и прикладная математика"

Ларин А.А.

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

2000

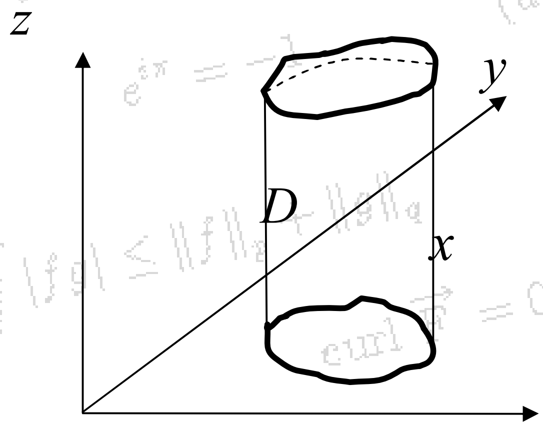
http://alexlarin.narod.ru/kvm.html

Лекция 2.1

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Объем цилиндрического тела.

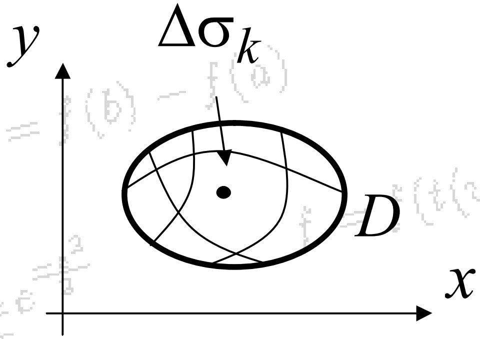


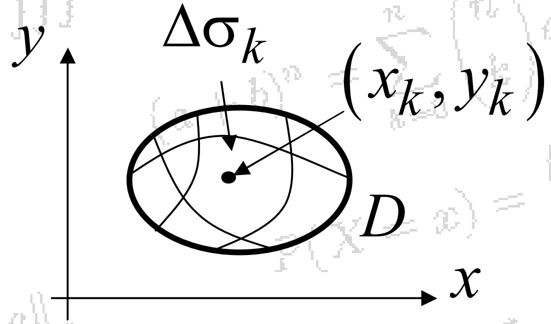
$$z = z(x, y) \geq 0$$

- Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью D плоскости Oxy, поверхностью z=z(x,y), где z=z(x,y) непрерывна и неотрицательна в области D и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей – границей области D.

Разобьем область D на n произвольных частичных областей ΔD_i (i∈(1,…,n)).

- так, чтобы эти элементы не имели общих внутренних точек и $D=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta D_i$ (***условие A***)





- Выберем в каждой из частичных областей произвольную точку с координатами (x_k, y_k) . Объем цилиндрического тела между опорной плоскостью Oxy и поверхностью z=z(x,y) над частичной областью $\Delta\sigma_k$ равен $\Delta V_k \approx z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$. Объем всего цилиндрического тела равен

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$$

Определение

Мажоранта или **верхняя грань** числового множества X — число M, такое что

$$x \le M, \ \ \forall x \in X$$

Миноранта или **нижняя грань** числового множества X — число m, такое что

$$m \le x, \ \ \forall x \in X$$

Определение

Точной верхней гранью, или **супре́мумом** (лат. *supremum* — самый высокий) подмножества X упорядоченного множества M , называется наименьший элемент *M* , который равен или больше всех элементов множества . Другими словами, супремум — это наименьшая из всех верхних граней.

$$M_0 = \sup X$$

$$\forall x \in X \Rightarrow x \le M_0$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M_0 - \varepsilon$$

Определение

Точной нижней гранью, или **инфи́мумом** (лат. *infimum* — самый низкий) подмножества X упорядоченного множества M, называется наибольший элемент M, который равен или меньше всех элементов множества X. Другими словами, инфимум — это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается

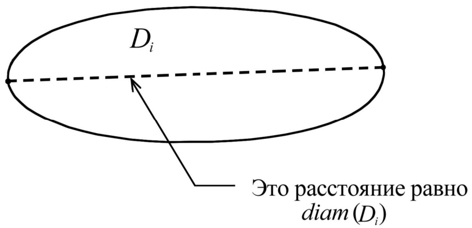
$$m_0 = \inf X$$

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geq m_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X : x < m_0 + \varepsilon$$

Замечание

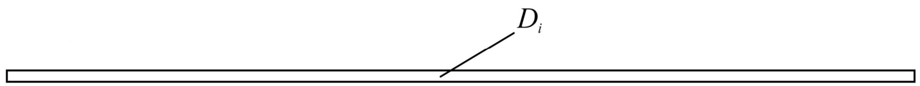
В одномерном случае мы рассматривали длины частей разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В двумерном случае обобщение понятия длины Δx_i будет площадь ΔS_i. Однако нам потребуется также и понятие ***диаметра*** D_i, $diam(D_i)$. Эта величина определяется как точная верхняя грань расстояния между точками множества D_i.



В частности, если D - круг, то $diam(D)$ - это как раз длина диаметра круга

Ясно, что если $diam(D_i)$ невелик, по и площадь D_i также невелика, поскольку неравенство $diam(D_i) < \delta$ означает, что D_i содержится в некотором круге радиуса δ и, значит, имеет площадь не больше, чем $\pi\delta^2$.

Однако площадь D_i может быть невелика, а $diam(D_i)$ - достаточно велик:



- Устремим наибольший диаметр частичных областей
- $\Delta\sigma_k$ к нулю, при этом $\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k) \to 0 \quad n \to \infty$
- (***условие B***) и рассмотрим предел интегральной суммы
- $$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$$
- Если этот предел существует, то очевидно, что

$$V = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$$

Определение.

- **Двойным интегралом** от функции z=z(x,y) по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = \iint_D z(x,y)\,d\sigma$$

- $z(x,y)\,d\sigma$ – **подынтегральное выражение;**
- z(x,y) – **подынтегральная функция**;
- $d\ \sigma$ - **элемент (дифференциал) площади**;
- D – **область интегрирования**.
- Таким образом,

$$V = \iint_D z(x,y)\,d\sigma$$

Теорема существования.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой односвязной области D. Тогда двойной интеграл существует как предел интегральных сумм.

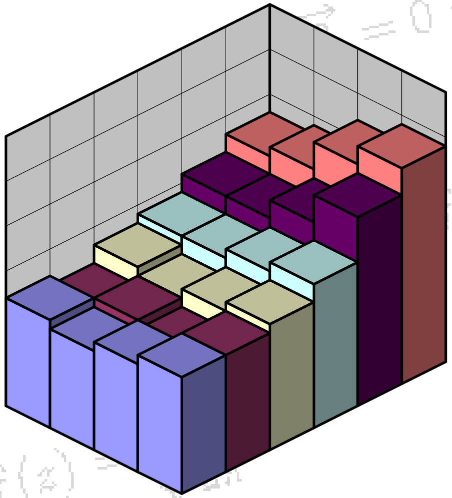
$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{\max_i diam(\Delta D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i .$$

Замечание. Предел этот не зависит от

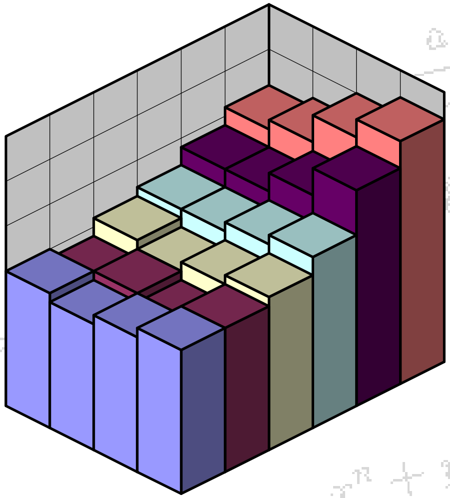
- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие A
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие B

Обычно критерий существования двойного интеграла формируется в терминах *сумм Дарбу* вида

$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$, где m_i - нижняя грань, а M_i - верхняя грань значений $f(x, y)$ при $(x, y) \in \sigma_i$.



Нижняя сумма Дарбу



Верхняя сумма Дарбу

Жа́н Гасто́н Дарбу́ (*Jean Gaston Darboux*; 14 августа 1842— 23 февраля 1917) — французский математик. Известен благодаря своим результатам в математическом анализе (теория интегрирования, дифференциальные уравнения в частных производных) и дифференциальной геометрии.

Критерий интегрируемости. Теорема Дарбу.

Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на D, необходимо и достаточно, чтобы разность сумм Дарбу

$$S_n - s_n \Rightarrow 0$$

для любых разбиений D

Свойства двойных интегралов.

1) $$\iint\limits_D \left(z_1(x,y) \pm \ldots \pm z_n(x,y)\right) d\sigma = \iint\limits_D z_1(x,y)\, d\sigma \pm \ldots \pm \iint\limits_D z_n(x,y)\, d\sigma$$

2) $$\iint\limits_D c z(x,y)\, d\sigma = c \iint\limits_D z(x,y)\, d\sigma$$

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Они равны интегральным суммам для правых частей равенств, так как число слагаемых конечно. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

3) Пусть $D = D_1 \bigcup D_2$ $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$

Тогда $$\iint\limits_{D} z(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} z(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\,d\sigma$$

Доказательство. Выберем разбиение области D так, чтобы ни один из элементов разбиения (первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы D_1, так и элементы D_2. Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в предыдущем случае

- **4)** Если ∀(x,y)∈D $z_1(x,y) \geq z_2(x,y)$

то $$\iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma \geq \iint\limits_D z_2(x,y)\,d\sigma$$

- **5)** Если $m = z_{наим}$ *в* D , $M = z_{наиб}$ *в* D ,

то $mS \leq \iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma \leq MS$, где $S = \iint\limits_D d\sigma$.

Доказательство. Интегрируя неравенство $m \leq f(x,y) \leq M$ (свойство 4), получим $\iint\limits_D mdS \leq \iint\limits_D f(x,y)dS \leq \iint\limits_D MdS$. По свойству 1 константы m, M можно вынести из-под интегралов. Используя свойство 4, получим искомый результат.

6) $$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = z(\xi,\eta)S,\ (\xi,\eta)\in D$$

$z(\xi,\eta)$ - среднее значение z в области D.

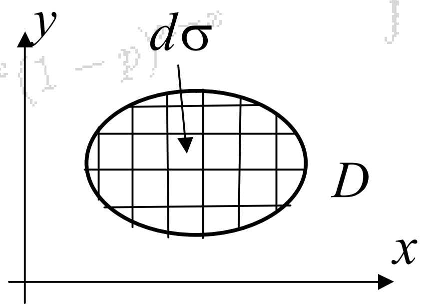
Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то существует ее нижняя грань $\mu = \inf_D f(x,y)$ и верхняя грань $\mathrm{M} = \sup_D f(x,y)$. Выполнено неравенство $\forall (x,y)\in D \quad \mu S_D \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le \mathrm{M}S_D$. Деля обе части на S_D, получим $\mu \le \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dS \le \mathrm{M}$. Но число $\frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dS$ заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то в некоторой точке $z\in D$ функция должна принимать это значение. Отсюда следует утверждение теоремы

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует цилиндр постоянной высоты $f(c)$, объем которого равен объему цилиндрического тела $\iint\limits_D f(x,y)dS$

Вычисление двойных интегралов.

- Разобьем область D с помощью линий,
- параллельных осям координат
- с шагом dx и dy соответственно.
- Тогда $d\sigma = dxdy$ и, следовательно,

$$\iint_D z(x,y)\,d\sigma = \iint_D z(x,y)\,dxdy.$$



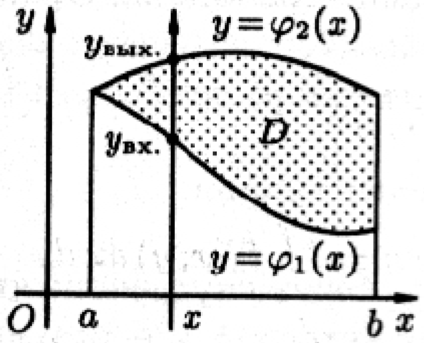
- При вычислении двойного интеграла будем использовать формулу

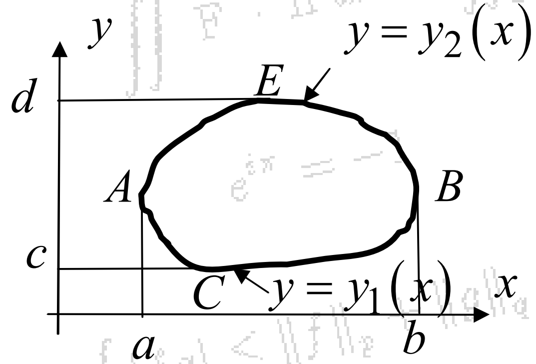
$$V = \int_a^b S(x)\,dx,$$

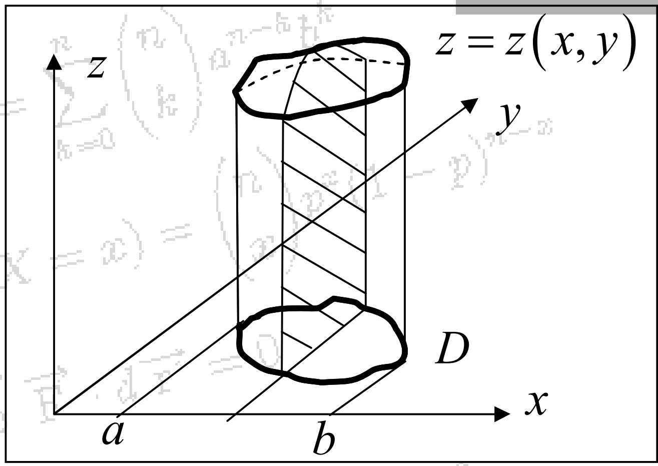
- где $S(x)$ - площадь поперечного сечения тела плоскостью x=const.

Предположим, что любая прямая, параллельная осям Oy (или Ox), пересекает границу области D не более чем в двух точках.

В этом случае область называется правильной в направлении Oy (Ox)







- Площадь поперечного сечения

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy$$

- При вычислении интеграла по dy считается, что x – постоянная.

Согласно формуле, выражающей объем через поперечные сечения, получим:

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy \qquad \textbf{(1.1)}$$

- Изменив порядок интегрирования, аналогично получим

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx \qquad \textbf{(1.2)}$$

Определения

Выражение типа $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$

называется **двухкратным** или **повторным** интегралом

- Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному.

$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$ называется ***внутренним интегралом***.

Для вычисления двукратного интеграла

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$$

сначала берем внутренний интеграл, считая *x* постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от *a* до *b*.

Теорема (Фубини).

Пусть $f(x,y)$ непрерывна в области D, ограниченной сверху графиком функции $y = y_2(x)$, снизу - $y = y_1(x)$, $x \in [a;b]$, а по бокам отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

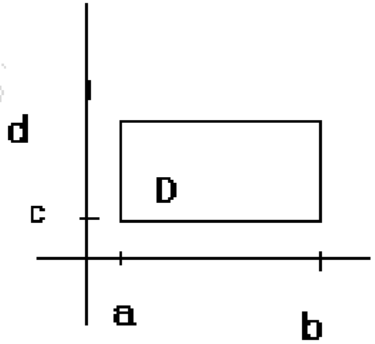
$$\iint\limits_D z(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$$

Фубини Гвидо (Fubini Guido), род. 19.01.1879, Венеция - ум. 06.06.1943, Нью-Йорк.

Итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи в Риме. Окончил Высшую нормальную школу в Пизе (1900). В 1910-38 профессор Туринского университета. С 1939 жил и работал в США. Основные труды по теории функций и геометрии. Установил (1907) теорему о возможности сведения двойного интеграла к повторному (теорема Фубини); предложил (1904) интерпретацию пространства Римана.

Следствия:

1. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = S(D)$, если $f(x,y) \equiv 1$



2.Пусть область интегрирования D – прямоугольник,
а функция $f(x,y)$ представима в виде $f(x,y)=h(x)\,g(y)$, тогда

$$\iint\limits_D h(x)g(y)dxdy = \left(\int\limits_a^b h(x)dx\right)\left(\int\limits_c^d g(y)dy\right)$$

Доказательство сл.2:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d h(x)g(y)dy = \int\limits_a^b h(x)dx \int\limits_c^d g(y)dy = \left(\int\limits_a^b h(x)dx\right)\left(\int\limits_c^d g(y)dy\right)$$

Замечания.

1. Формулы (1.1) и (1.2) справедливы и в случае, когда $z(x;y) < 0$, $(x;y) \in D$.

2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (1.1), так и по формуле (1.2).

3. Если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для **сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy.**

4. Полезно помнить, что **внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.**

Геометрический и физический «смысл» двойного интеграла.

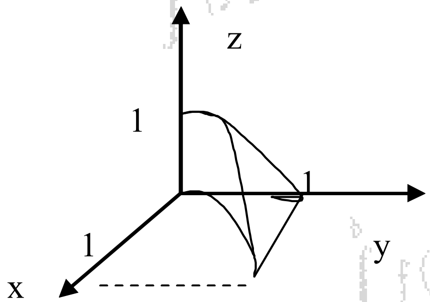
К двойному интегралу $\iint\limits_D f(x,y)dS$.мы пришли от задачи об объеме цилиндрического тела, расположенного над областью D с переменной высотой $f(x,y)$.

В этом и состоит его *геометрический смысл.*

Можно рассмотреть задачу о массе плоской пластины, представляющей собой плоскую область D, плотность которой равна $f(x,y)$, т.е. меняется от точки к точке. Достаточно ассоциировать переменную плотность с переменной высотой в задаче об объеме, чтобы понять, что мы имеем ту же модель.

Поэтому *физический смысл двойного интеграла заключается в том, что* $\iint\limits_D f(x,y)dS$ равен массе плоской области D, плотность которой равна $f(x,y)$.

Пример. Вычислить объем V цилиндрического тела, ограниченного двумя параболическими цилиндрами z = $1-y^2$ и x = y^2 и площадь его основания D, расположенного в плоскости OXY..

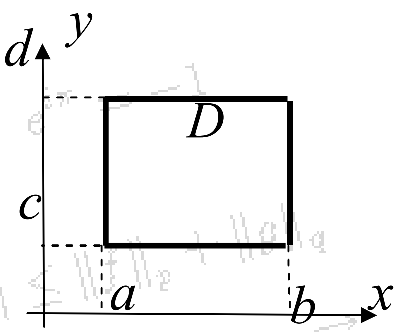


$$V_D = 2\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} (1-y^2)dx \right) dy = 2\int_0^1 (y^2 - y^4)dy = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{4}{15}$$

$$S_D = 2\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} dx \right) dy = 2\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3}$$

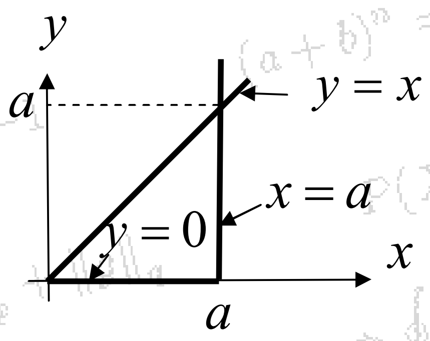
Примеры:

- ***Пример 1***



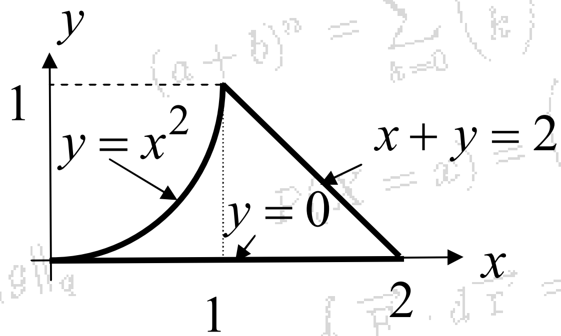
$$\iint_D z(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx\int_c^d z(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b z(x,y)\,dx$$

Пример 2



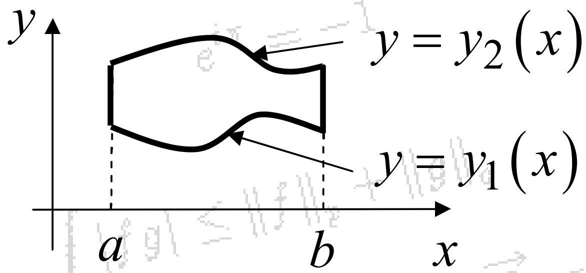
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x z(x,y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a z(x,y)\,dx$$

Пример 3



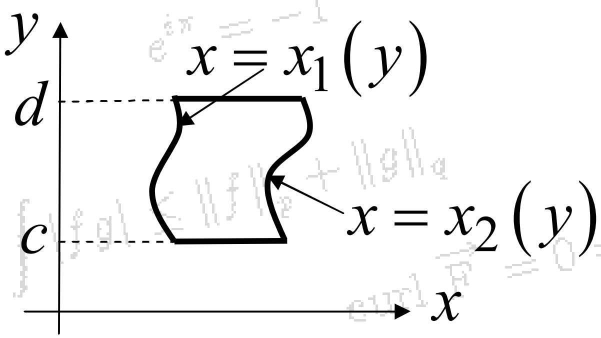
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} z(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} z(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} z(x,y)\,dx$$

Пример 4



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$$

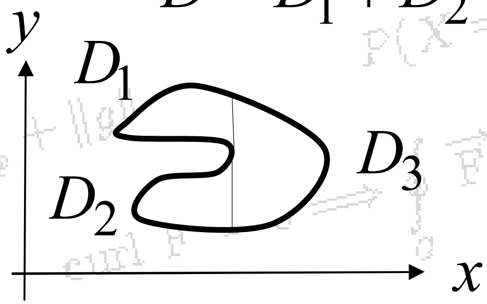
Пример 5



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx$$

Пример 6

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

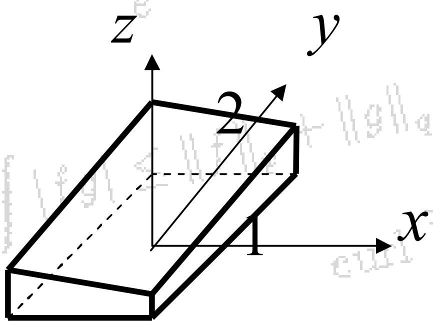


$$\iint_D z(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} z(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} z(x,y)\,dxdy + \iint_{D_3} z(x,y)\,dxdy$$

Пример 7 **Найти интеграл** $\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy$

$$z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y \quad D:\ (-1 \le x \le 1;\ -2 \le y \le 2).$$



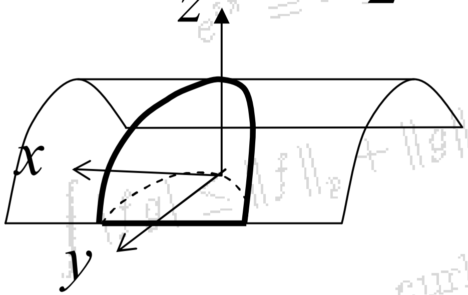
$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy =$$

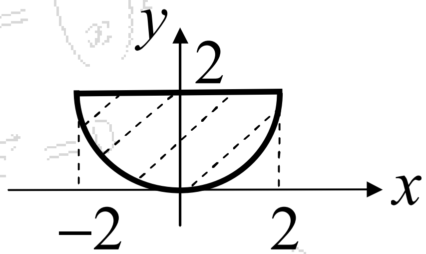
$$= \int_{-1}^{1} dx \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 \right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 8.$$

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 4 - y^2,\ \ y = \frac{x^2}{2},\ \ z = 0. \qquad z = 4 - y^2,\ \ z = 0,\ \ y = 2,\ \ y = \frac{x^2}{2}.$$



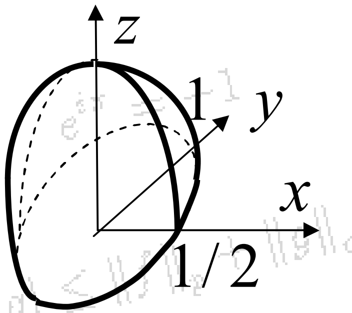


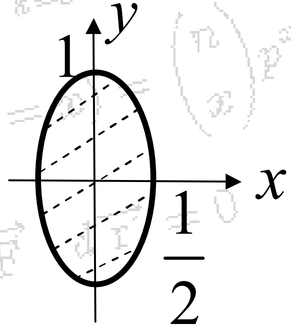
$$V = 2\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{2} \left(4 - y^2\right) dy = 2\int_0^2 dx \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{2} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right) dx = 2\left(\frac{16}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{21}.$$

Пример 9. **Найти объем тела, ограниченного поверхностями:**

$$z = 1 - 4x^2 - y^2,\ \ z = 0. \qquad 4x^2 + y^2 = 1.$$





$$V = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \left(1 - 4x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= 4\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \left|2x = \sin t\right| = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$