

**Курс общей физики, том II. Электричество**

Главная цель книги — познакомить студентов прежде всего с основными идеями и методами физики. Особое внимание обращено на разъяснение смысла физических законов и на сознательное применение их. Несмотря на сравнительно небольшой объем, книга содержит изложение всех вопросов учения об электричестве, знание которых необходимо для изучения теоретической физики и других физических дисциплин. Изложение ведется в Международной системе единиц (СИ), однако, так как до последнего времени в теоретической физике применяется гауссова система единиц, читатель знакомится и с этой системой.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие к четвертому изданию	7	§ 14. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях	50
Из предисловия к первому изданию	8	§ 15. Поляризация диэлектриков	52
<b>Глава I. Электрическое поле в вакууме</b>	11	§ 16. Описание поля в диэлектриках	60
§ 1. Введение	11	§ 17. Преломление линий электрического смещения	69
§ 2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона	13	§ 18. Силы, действующие на заряд в диэлектрике	72
§ 3. Системы единиц	14	§ 19. Сегнетоэлектрики	77
§ 4. Рационализованная запись формул	16	§ 20. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект	78
§ 5. Электрическое поле. Напряженность поля	17	<b>Глава III. Проводники в электрическом поле</b>	81
§ 6. Суперпозиция полей. Поле диполя	20	§ 21. Равновесие зарядов на проводнике	81
§ 7. Линии напряженности. Поток вектора напряженности	23	§ 22. Проводник во внешнем электрическом поле	84
§ 8. Теорема Гаусса	26	§ 23. Генератор Ван-де-Граафа	86
§ 9. Работа сил электростатического поля	36	§ 24. Емкость	87
§ 10. Потенциал	38	§ 25. Конденсаторы	89
§ 11. Связь между, напряженностью электрического поля и потенциалом	42	§ 26. Соединение конденсаторов	93
§ 12. Эквипотенциальные поверхности	46	<b>Глава IV. Энергия электрического поля</b>	96
<b>Глава II. Электрическое поле в диэлектриках</b>	48	§ 27. Энергия системы зарядов	96
§ 13. Полярные и неполярные молекулы	43	§ 28. Энергия заряженного проводника	98
		§ 29. Энергия заряженного конденсатора	99
		§ 30. Энергия электрического	101

поля		§ 50. Классификация магнетиков	169
<b>Глава V. Постоянный</b>	106	§ 51. Магнитомеханические явления. Магнитные моменты атомов и молекул	170
<b>электрический ток</b>		§ 52. Диамагнетизм	176
§ 31. Электрический ток	106	§ 53. Парамагнетизм	180
§ 32. Электродвижущая сила	108	§ 54. Ферромагнетизм	183
§ 33. Закон Ома. Сопротивление проводников	111	<b>Глава X. Электромагнитная индукция</b>	190
§ 34. Закон Джоуля — Ленца	114	§ 55. Явление электромагнитной индукции	190
§ 35. Закон Ома для неоднородного участка цепи	115	§ 56. Электродвижущая сила индукции	192
§ 36. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа	117	§ 57. Методы измерения магнитной индукции	197
§ 37. Коэффициент полезного действия источника тока	121	§ 58. Токи Фуко	200
<b>Глава VI. Магнитное поле в вакууме</b>	124	§ 59. Явление самоиндукции	201
§ 38. Взаимодействие токов	124	§ 60. Ток при замыкании и размыкании цепи	204
§ 39. Магнитное поле	126	§ 61. Энергия магнитного поля	207
§ 40. Закон Био — Савара. Поле движущегося заряда	128	§ 62. Взаимная индукция	210
§ 41. Поля прямого и кругового токов	131	§ 63. Работа перемагничивания ферромагнетика	216
§ 42. Циркуляция вектора В. Поле соленоида и тороида	135	<b>Глава XI. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях</b>	219
<b>Глава VII. Магнитное поле в веществе</b>	142	§ 64. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле	219
§ 43. Магнитное поле в веществе	142	§ 65. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями	221
§ 44. Описание поля в магнетиках	143	§ 66. Определение заряда и массы электрона	225
§ 45. Преломление линий магнитной индукции	151	§ 67. Определение удельного заряда положительных ионов. Масс-спектрографы	230
<b>Глава VIII. Действие магнитного поля на токи и заряды</b>	156	§ 68. Циклотрон	235
§ 46. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Закон Ампера	156	<b>Глава XII. Электрический ток в металлах и полупроводниках</b>	238
§ 47. Сила Лоренца	158	§ 69. Природа носителей тока в	238
§ 48. Контур с током в магнитном поле	161		
§ 49. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле	165		
<b>Глава IX. Магнетики</b>	169		

металлах		через индуктивность	
§ 70. Элементарная классическая теория металлов	240	§ 94. Переменный ток, текущий через емкость	341
§ 71. Основы квантовой теории металлов	246	§ 95. Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление	343
§ 72. Полупроводники	254	§ 96. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока	346
§ 73. Эффект Холла	261	§ 97. Символический метод	348
§ 74. Работа выхода	265	§ 98. Резонанс токов	353
§ 75. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы	268	<b>Глава XVI. Электрические колебания</b>	357
§ 76. Контактная разность потенциалов	274	§ 99. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления	357
§ 77. Термоэлектрические явления	277	§ 100. Свободные затухающие колебания	360
§ 78. Полупроводниковые диоды и триоды	284	§ 101. Вынужденные электрические колебания	364
<b>Глава XIII. Ток в электролитах</b>	292	§ 102. Получение незатухающих колебаний	369
§ 79. Диссоциация молекул в растворах	292	<b>Глава XVII. Электромагнитное поле</b>	372
§ 80. Электролиз	296	§ 103. Вихревое электрическое поле	372
§ 81. Законы Фарадея	298	§ 104. Бетатрон	374
§ 82. Электролитическая проводимость	300	§ 105. Ток смешения	377
§ 83. Технические применения электролиза	303	§ 106. Электромагнитное поле	380
<b>Глава XIV. Электрический ток в газах</b>	305	§ 107. Описание свойств векторных полей	381
§ 84. Виды газового разряда	305	§ 108. Уравнения Максвелла	393
§ 85. Несамостоятельный газовый разряд	306	<b>Глава XVIII. Электромагнитные волны</b>	397
§ 86. Ионизационные камеры и счетчики	310	§ 109. Волновое уравнение	397
§ 87. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде	317	§ 110. Плоская электромагнитная волна	400
§ 88. Газоразрядная плазма	322	§ 111. Экспериментальное исследование электромагнитных волн	404
§ 89. Тлеющий разряд	325	§ 112. Энергия электромагнитного поля	407
§ 90. Дуговой разряд	330	§ 113. Импульс электромагнитного поля	410
§ 91. Искровой и коронный разряды	334		
<b>Глава XV. Переменный ток</b>	338		
§ 92. Квазистационарные токи	338		
§ 93. Переменный ток, текущий	339		

§ 114. Излучение диполя	412	формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе	
Приложение I. Единицы измерения электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе	417		
Приложение II. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе	419		
		Предметный указатель	426

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авогадро число 300	Вебер 194
Автоколебательная система 369	Вектор намагничивания 143
Акцептор 260	— плотности тока 107
Ампер 15, 108, 124	— поляризации 53, 148
— на метр 146	Векторная диаграмма 339, 354
Ампера гипотеза 142, 170	Весы крутильные 13
— закон 124, 156	Вибратор полуволновой 405
Ампер-виток 139	Видемана — Франца закон 244
Ампер-секунда 125	Вихрь 388
Анион 296	Внешняя область короны 336
Анод 269	Волновая зона диполя 413
Антиферромагнетизм 188, 189	Волновое уравнение 399
Астона масс-спектрограф 232	Вольт 41
Астоново темное пространство 326	— на метр 19
База транзистора 290	Вольт-амперная характеристика 269, 288, 330
Баллистический метод измерения магнитной индукции 184, 198	Вольтметр искровой 335
Барнетта опыт 173	Восприимчивость диэлектрическая 53
Бейнбриджа масс-спектрограф 233	— магнитная 147, 179, 180, 182, 185
Бетатрон 374, 415	— — атомная 169
Био — Савара — Лапласа закон 129	— — килоатомная 169
Богуславского — Ленгмюра закон 270	— — молярная 169
Больцмана функция распределения 252, 254	— — киломолярная 169
Бора магнетон 174	— — удельная 169
— теория 170	Вторичные химические реакции 296
Буша опыт 226	Выпрямитель германиевый 289
Вавилова — Черенкова излучение 416	— кремниевый 289
Валентность 299	— на газотроне 333
Ван-де-Граафа генератор 86	— полупроводниковый 289
	— ртутный 332
	— селеновый 289

- Выпрямление тока 271, 289  
 — — двухполупериодное 272  
 — — однополупериодное 271  
 Вырождение 247  
 Газотрон 332  
 Гальваномагнитное явление 262  
 Гальванометр баллистический 199  
 Гальванопластика 303  
 Гальваностегия 303  
 Гамильтона оператор 391  
 Гамма-лучи 377  
 Гаусс 130, 133, 147  
 Гаусса теорема для вектора  $\mathbf{B}$  143  
 — — — —  $\mathbf{D}$  62, 63  
 — — — —  $\mathbf{E}$  28, 61  
 Генератор ламповый 369  
 — электростатический 86  
 Генри 202  
 — на метр 203  
 Герца вибратор 404, 412  
 — опыты 404  
 Гидратация ионов 296  
 Гиромагнитное отношение 171, 173  
 Гиромагнитные явления 171  
 Гистерезис 77  
 — магнитный 184, 188  
 Гистерезиса петля 77, 185, 217  
 — — максимальная 185  
 Градиент 42, 391  
 — потенциала 42, 43  
 Грамм-эквивалент 299  
 Давление световое 412  
 — электромагнитной волны 410  
 Двойное преломление  
     электромагнитных волн 407  
 Двойной электрический слой 265,  
     286  
 Дейтерий 304  
 Джоуля — Ленца закон 114, 243  
 — — — в дифференциальной форме  
     115  
 Диаграмма направленности диполя  
     414  
 Диамагнетизм 176  
 Диамагнетики 170  
 Дивергенция 57, 382, 384, 391  
 — вектора  $\mathbf{B}$  395,  
     — —  $\mathbf{D}$  395  
 Диод вакуумный 269, 271  
 — — двойной 272  
     — кристаллический 284  
     — плоскостной 285  
     — полупроводниковый 284  
 Диполь 20  
 — жесткий 50  
     — полуволновой 405  
     — упругий 50  
     — элементарный 412  
 Диполя излучение 412  
     — электрический момент 21  
 Диссоциация электролитическая 292  
 Диффузионная разность потенциалов  
     279  
 Диэлектрик 12  
 Домены сегнетоэлектрика 78  
     — ферромагнетика 187  
 Донор 259  
 Дроссель 405  
 Друде теория металлов 240  
 Дуанты 235  
 Дуга вольтова 330  
     — с холодным катодом 331  
     — термоэлектронная 331  
     — электрическая 330  
 Дырка 255, 257, 260  
 Единица заряда абсолютная  
     электростатическая 14  
     — — в СИ 16, 108, 125  
     — напряженности магнитного поля  
         146, 147  
     — — электрического поля 19  
     — электрического смещения 63  
 Единицы емкости 89  
     — индуктивности 202  
     — магнитного момента 174  
     — — потока 194

- магнитной индукции 129, 130
- потенциала 41
- силы тока 108, 124
- сопротивления 111
- Емкость 88, 339, 341
  - конденсатора 90
  - плоского конденсатора 91
  - сферического конденсатора 92
  - цилиндрического конденсатора 93
  - шара 89
- Закон преломления линий магнитной индукции 153
  - — — электрического смещения 72
  - сохранения заряда 12
  - трех вторых 270
  - электромагнитной индукции 193, 393
- Заряд индуцированный 84
  - пробный 18
  - свободный 60
  - связанный 60
  - точечный 13
  - удельный 219, 227, 230
  - — электрона 227
  - электрический 11
  - элементарный 11, 15, 16, 230, 300
- Защита магнитная 154
  - электростатическая 85
- Зеебека явление 277
- Зона валентная 249, 255
  - запрещенная 248, 256
  - проводимости 250, 255
  - разрешенная 248
  - энергетических уровней 246, 247
- Излучение атома 413
- Изолятор 12, 250
- Изотоп 232
- Импульс электромагнитного поля 410
  - электромагнитной волны 411
- Индуктивность 202, 204, 339
  - взаимная 211, 215
  - соленоида 203
- Индукция взаимная 211
  - магнитная 128, 146
  - — остаточная 184
  - электрическая 61, 63
  - электромагнитная 190
- Интенсивность излучения 414
- Ионизационная камера 310, 313
  - — импульсная 313
  - — интегрирующая 315
- Ионизация 306
  - термическая 305, 323, 330
  - ударом 310, 323, 327
- Ионосфера 323
- Ионы 84, 86, 292, 305
  - Ланжевена 308
- Истечение с острия 84
- Источники 381
- Катион 296
- Катод 269
  - оксидный 271
- Катодная светящаяся пленка 326
- Катодное падение потенциала 327
  - пятно 331
- Катодолюминесценция 329
- Квадролуль 23
- Квант действия 174
  - света 317
- Квантование момента импульса 175
  - энергии 246
- Кварц 79
- Кенотрон 271
- Килограмм-эквивалент 299
- Кирхгофа правила 117, 338, 353
- Клаузиуса — Мосотти формула 76
- Колебательный контур 357, 404
  - —, добротность 363, 367, 369
  - —, собственная частота 360
- Коллектор 290
- Конденсатор 89
  - плоский 32, 91
  - , —, соединение параллельное 93
  - , —, последовательное 94
  - сферический 35, 93

- цилиндрический 34, 92
- Конденсатор электролитический 304
- Контактная разность потенциалов 274
  - — — внешняя 275
  - — — внутренняя 276, 278
- Контурь связанные 211, 215
- Концентрация носителей тока 263
  - эквивалентная 302
- Корона 336
  - дипольная 337
- Коронирование 87
- Коэффициент взаимной индукции 211
  - вторичной эмиссии 320
  - газового усиления 312, 315
  - диссоциации 294
  - мощности 348
  - Пельтье 282, 284
  - полезного действия источника тока 122
  - самоиндукции 202
  - теплопроводности 244
  - термо-э. д. с. 280, 282, 284
  - Томсона 284
  - электропроводности 112, 244
- Кратер анода 330
- Кратность вырождения 247
- Кривая намагничивания нулевая 184
  - — основная 184
- Круксово темное пространство 326, 329
- Крутизна характеристика 273, 370
- Кулон 16, 108, 125
  - на квадратный метр 63
- Кулона закон 13, 14, 16, 73
- Кюри закон 180, 183
  - постоянная 180, 183
- Кюри — Вейсса закон 188
- Лампа двухэлектродная 269
  - пятиэлектродная 274
  - трехэлектродная 272
  - четырехэлектродная 274
- Лампы дневного света 332
  - люминесцентные 332
  - неоновые 329
  - ртутные дуговые 331
  - сверхвысокого давления 331
  - электронные 268
- Ланжевена теория парамагнетизма 180
- Ларморова прецессия 177, 179
  - частота 177
- Лебедева опыты 406, 412
- Ленца правило 191, 200
- Ленц-джоулево тепло 114, 243, 409
- Линии напряженности 23
- Логарифмический декремент затухания 362
- Лоренца сила 158, 193, 195, 219
  - теория металлов 240
- Лучи каналовые 330
  - катодные 329
  - положительные 330
- Люминофор 332
- Магнетики 142, 169
- Магнит постоянный 185
- Магнитное поле 126
  - — движущегося заряда 131
  - — кругового тока 133, 134
  - — прямого тока 132
  - — соленоида 139
  - — тороида 141
- Магнитный момент атома 174
  - — индуцированный 177
  - — контура 127, 128
  - — молекулы 174
  - — электрона орбитальный 171
  - — — собственный 173
- Магнитомеханические явления 171, 187
- Магнитострикция 186
- Майкельсона опыт 380
- Максвелл 194
- Максвелла теория 374, 377, 379, 393

- Максвелла уравнения в  
     дифференциальной форме 395  
 — — — интегральной форме 393,  
     394  
 Мандельштама и Папалекси опыт  
     239  
 Масс-спектрограмма 233  
 Масс-спектрограф 233  
 Масс-спектрометр 234  
 Масса, зависимость от скорости 228  
   — покоя 228  
   — электромагнитного поля 411  
 Металл 249  
 Метастабильное состояние 317, 318  
 Метатитанат бария 78, 79  
 Метод магнитной фокусировки 226  
 Механический момент электрона  
   орбитальный 171  
   — — — собственный 173  
 Микромикрофарада 89  
 Микрофарада 89  
 Милликена опыт 228  
 Мировой эфир 378  
 Молекулы неполярные 49  
   — полярные 49, 292  
 Молекулярные токи 142, 149  
 Молизация ионов 293  
 Молния 334  
 Мощность излучения 414  
   — источника 381  
   — — удельная 382  
   — переменного тока 348  
   — полезная 122  
   — постоянного тока 122  
   — тока удельная 115  
 Намагничение 142, 143  
   — остаточное 185  
   — спонтанное 187  
 Направление запорное 289  
   — обратное 289  
   — пропускное 288  
   — проходное 288  
   — прямое 288  
 Напряжение 111  
   — действующее 348  
   — обратное 288  
   — прямое 287, 288  
 Напряженность поля диполя 22  
   — — магнитного 145, 146  
   — — сторонних сил 110  
   — — электрического 18, 146  
 Неупругие столкновения второго  
   рода 318  
   — — первого рода 318  
 Носители заряда 12, 106, 107, 238,  
     292, 305  
   — тока 106, 107, 238, 292, 305  
 Области спонтанного намагничения  
     187  
 Области спонтанной поляризации 78  
 Область Гейгера 312  
   — непрерывного разряда 313  
   — пропорциональности 312  
   — частичной пропорциональности  
     312  
 Обратная связь 371  
 Огни святого Эльма 337  
 Октуполь 23  
 Ом 111  
 Ома закон 111, 242, 338, 351  
   — — в дифференциальной форме  
     112  
   — — для газов 308  
   — — — замкнутой цепи 116  
   — — — неоднородной цепи 116  
   — — — — в дифференциальной  
     форме 117  
   — — — электролитов 301  
 Омо-метр 112  
 Оператор Гамильтона 391  
   — Лапласа 392  
   — набла 42, 391  
 Остроградского  
   — Гаусса теорема 385  
 Осциллограф 224  
 Падение напряжения 111



- Парамагнетизм 180  
Парамагнетики 170  
Паули принцип 247  
Пашена закон 334  
Пельтье тепло 282  
— явление 282, 283  
Пентод 274  
Печь индукционная 200  
Пикофарада 89  
Плазма 322, 328  
— высокотемпературная 323, 330  
— газоразрядная 323, 328, 332  
— изотермическая 323, 325  
Планка постоянная 174, 321  
Плотность заряда линейная 29  
— — объемная 29  
— — поверхностная 29  
— импульса электромагнитной волны 411  
— потока энергии 407, 408, 414  
— связанных зарядов объемная 57  
— — — поверхностная 58, 59  
— силы 158, 410  
— тока 107  
— — насыщения 270, 309  
— — полная 379  
— — проводимости 378, 379, 394  
— — смещения 379  
— энергии магнитного поля 209, 210, 218  
— — электрического поля 102  
— — электромагнитного поля 407  
p-n-переход 285, 289, 290  
Поверхностный эффект 201  
Поверхность эквипотенциальная 46  
Подвижность ионов в газах 308  
— — — электролитах 301  
— носителей тока 264, 301  
— электронов в металлах 301  
Пойнтинга вектор 408  
Поле вектора 23  
— — **B** 393  
— — скорости 23, 381  
Поле вихревое 138, 372  
— истинное 60, 142  
Поле магнитное 126, 142  
— макроскопическое 60, 142  
— микроскопическое 60, 142  
— однородное 32  
— потенциальное 36, 137, 373  
— размагничивающее 151  
— соленоидальное 138  
— электрическое 17  
— электромагнитное 380  
Полный магнитный поток 197  
Положительная нормаль 127, 387  
Положительный столб 326—328  
Полупроводники 12, 250, 254  
— — n-типа 258, 264  
— примесные 258  
— p-типа 260, 264  
— собственные 255  
— электронные 250  
Поляризация диэлектрика 52  
— остаточная 77  
— спонтанная 77  
Поляризуемость молекулы 50  
Попова опыты 407  
Порог области Гейгера 312  
— пропорциональной области 312  
Постоянная времени цепи 206, 314  
— магнитная 17, 125, 417  
— электрическая 16, 17, 417  
— электродинамическая 16, 17, 126, 417  
Потенциал 39, 40, 138  
— векторный 393  
— выхода 267  
— системы зарядов 40  
— точечного заряда 39  
Поток вектора 25, 381  
— — Пойнтийга 409  
— — поляризации 58  
— — скорости 25, 381  
— магнитной индукции 143, 190  
— — смещения 62

- Поток энергии 408  
Потокоосцепление 197  
Правило левой руки 156  
Прецессия электронной орбиты 177, 179  
Примесь акцепторная 260  
— донорная 259  
Принцип относительности Галилея 380  
— — Эйнштейна 380  
— суперпозиции полей 20  
Пробой газового промежутка 335  
Проводник 12  
— второго рода 292  
— первого рода 292  
Проницаемость диэлектрическая 62, 63, 68, 77  
— — абсолютная 62  
— — относительная 62, 64, 68, 77  
— магнитная 148, 185  
— — абсолютная 148  
— — относительная 148, 150, 185  
Пьезоэлектрики 79  
Пьезоэлектрический эффект  
  обратный 80  
— — поперечный 79  
— — продольный 79  
— — прямой 78, 79  
Работа выхода 267, 270  
— — полная 267  
Работа выхода эффективная 267  
— перемещения проводника с током в магнитном поле 166  
Размагничивающий фактор 151  
Разряд аperiодический 364  
— газовый 305  
— — дуговой 330, 332  
— — искровой 334  
— — кистевой 336  
— — коронный 87, 336  
— — несамостоятельный 305, 306  
— — самостоятельный 305, 325  
— — тлеющий 326  
Расхождение 382  
Рафинирование металлов 303  
Резерфорда опыты 170  
Резонанс напряжений 345  
— токов 353  
Резонансная частота 345, 353, 355, 367  
Резонансные кривые 366, 367  
Рекомбинация ионов 293, 306, 328  
— электронов и дырок 257, 286  
Рентгеновские лучи 377  
Рикке опыт 238  
Ричардсона формула 271  
Ротор 388, 390, 391  
Самоиндукция 201  
Сантиметр, единица емкости 89  
—, — индуктивности 202  
Сверхпроводимость 113  
—, критическая температура 113  
—, критическое поле 113  
Сегнетова соль 77, 79  
Сегнетоэлектрики 77, 185  
Селектор скоростей 233  
Сетка 272, 333  
Сеточная характеристика 273  
Сила взаимодействия токов 124, 156  
— коэрцитивная 78, 185  
— лоренцева 158  
— сторонняя 109  
— термоэлектродвижущая 278  
— тока 106  
— — действующая 347  
— — эффективная 347  
Символический метод 348  
Синхротрон 236  
— протонный 236  
Синхрофазотрон 236  
Синхроциклотрон 236  
Система единиц абсолютная  
  электромагнитная 15  
— — — электростатическая 15  
— — гауссова 15, 126, 130

- Система единиц международная 15,  
16  
— — рационализованная 16  
Скин - эффект 201  
Скорость света 126, 399  
— электромагнитных волн 126, 399  
Соленоид 138  
Сольват 296  
Сольватация ионов 296  
Соотношение между массой в  
энергией 412  
Сопротивление активное 339  
— емкостное 342  
— индуктивное 341  
— комплексное 351  
Сопротивление критическое 364  
— металлов, зависимость от  
температуры 113, 245, 254  
— остаточное 113  
— полное 344  
— реактивное 345  
— удельное 112  
— электрическое 111, 243  
Спин 173  
Стоки 381  
Стокса теорема 390  
Столетова опыты 184, 198  
Страты 327  
Стример 334, 335  
Суперпозиция полей магнитных 128  
— — электрических 20  
Счетчик газоразрядный 310  
— Гейгера — Мюллера 316  
— несамогасящийся 316  
— пропорциональный 310, 315  
— самогасящийся 316  
Температура критическая  
сверхпроводника 113  
— электронов 325  
Теория металлов квантовая 246  
— — классическая 240  
Теплоемкость металлов 246, 254  
Термометр сопротивления 114  
Термопара 281  
Термоэлектрические явления 277  
Термоэлектродвижущая сила 278  
— — удельная 281  
Тесла 129, 133  
Тетрод 274  
Тиратрон 333  
Тлеющее свечение 326, 329  
Ток анодный 269  
— вихревой 200  
— индукционный 190  
— квазистационарный 338  
— насыщения 270, 309  
— обратный 288  
— переменный 338  
— постоянный 108  
— проводимости 377, 394  
— сеточный 272  
— смещения 377  
—380, 393. 394  
— электрический 106  
Толмена и Стюарта опыт 239  
Томсона метод парабол 230  
— опыт 225  
— формула 360  
— явление 284  
Тороид 140  
Точка Кюри антиферромагнитная  
189  
— — сегнетоэлектрика 78  
— — ферромагнетика 188  
— Нееля 189  
Транзистор 284, 290  
Триод вакуумный 272  
— кристаллический 284  
— полупроводниковый 284, 290  
Туннельный эффект 321  
Тяжелая вода 304  
Узел цепи 117  
Уровень энергетический 246  
— — акцепторный 260  
— — донорный 259  
— — локальный 259, 260

- Успокоитель электромагнитный 200  
Фазотрон 236  
Фарада 89  
Фарадеево темное пространство 328  
Фарадея закон электромагнитной индукции 193  
— законы электролиза 298  
— число 299  
Ферми уровень 252, 255, 260, 261, 268, 275, 278, 286, 287  
— функция распределения 252, 255  
Ферриты 183, 201  
Ферромагнетизм 183  
Ферромагнетики 170, 183  
— жесткие 186  
— мягкие 186  
Ферроэлектрики 78  
Фильтр скоростей 233  
Фотоионизация 321, 335, 336  
— ступенчатая 321  
Фотон 317, 321  
Фотоэффект 322  
Фуко токи 200  
Химический эквивалент 299  
Холла постоянная 262, 263, 264  
— эффект 262, 264  
Циклическая перестановка координат 389  
Циклотрон 235  
Циркуляция 38, 381, 385, 386  
Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  136, 137  
— —  $\mathbf{E}$  38, 373  
— —  $\mathbf{H}$  146, 379  
— —  $\mathbf{J}$  145  
Частицы элементарные 11  
Частный цикл 185  
Частота ларморовой прецессии 177  
Шоттки эффект 266, 271  
Штерна и Герлаха опыт 175  
Эйнштейна и де-Хааса опыт 171  
Электрические колебания 357  
— — вынужденные 364  
— — затухающие 360  
— — свободные 357  
Электрический ветер 84  
Электрическое смещение 61, 146  
Электродвижущая сила 109  
— — взаимной индукции 211, 371  
— — индукции 192, 197  
— — самоиндукции 203  
Емкость 88  
Электроискровая обработка металлов 336  
Электролиз 297  
Электролит 292  
Электромагнит 154  
Электромагнитные волны 126, 393, 397  
— — плоские 400  
Электрометаллургия 303  
Электрон 11, 238  
— вторичный 320, 327  
—, заряд 228, 230  
—, магнитный момент орбитальный 171  
—, — — собственный 173, 187  
—, масса 230  
—, механический момент орбитальный 171  
—, — — собственный 173  
—, спин 173, 247  
—, удельный заряд 225, 226, 227  
Электронвольт 41  
Электроннолучевая трубка 224  
Электронный газ 240  
— умножитель 320  
Электроны проводимости 240  
— свободные 240  
— —, концентрация 240  
Электрополировка 303  
Электросварка 331  
Электрострикция 72, 80  
Электрофильтер 337  
Электрохимический эквивалент 298  
Эмиссия автоэлектронная 321, 331  
— — вторичная электронная 320, 327

Эмиссия термоэлектронная 268, 322,  
330, 332

— фотоэлектронная 322

— холодная 321

Эмиттер 290

Энергия диполя в электрическом  
поле 51

Энергия заряженного конденсатора  
99

— — проводника 98

— магнитного момента в магнитном  
поле 163

— поля связанных контуров 215

— — тока 208

— системы зарядов 97

Эрстед 147

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию . . . . .	7
Из предисловия к первому изданию . . . . .	8
<b>Глава I. Электрическое поле в вакууме . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Введение . . . . .	11
§ 2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона . . . . .	13
§ 3. Системы единиц . . . . .	14
§ 4. Рационализованная запись формул . . . . .	16
§ 5. Электрическое поле. Напряженность поля . . . . .	17
§ 6. Суперпозиция полей. Поле диполя . . . . .	20
§ 7. Линии напряженности. Поток вектора напряженности . . . . .	23
§ 8. Теорема Гаусса . . . . .	26
§ 9. Работа сил электростатического поля . . . . .	36
§ 10. Потенциал . . . . .	38
§ 11. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом . . . . .	42
§ 12. Эквипотенциальные поверхности . . . . .	46
<b>Глава II. Электрическое поле в диэлектриках . . . . .</b>	<b>48</b>
§ 13. Полярные и неполярные молекулы . . . . .	48
§ 14. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях . . . . .	50
§ 15. Поляризация диэлектриков . . . . .	52
§ 16. Описание поля в диэлектриках . . . . .	60
§ 17. Преломление линий электрического смещения . . . . .	69
§ 18. Силы, действующие на заряд в диэлектрике . . . . .	72
§ 19. Сегнетоэлектрики . . . . .	77
§ 20. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект . . . . .	78
<b>Глава III. Проводники в электрическом поле . . . . .</b>	<b>81</b>
§ 21. Равновесие зарядов на проводнике . . . . .	81
§ 22. Проводник во внешнем электрическом поле . . . . .	84
§ 23. Генератор Ван-де-Граафа . . . . .	86
§ 24. Емкость . . . . .	87
§ 25. Конденсаторы . . . . .	89
§ 26. Соединение конденсаторов . . . . .	93

<b>Глава IV. Энергия электрического поля . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 27. Энергия системы зарядов . . . . .	96
§ 28. Энергия заряженного проводника . . . . .	98
§ 29. Энергия заряженного конденсатора . . . . .	99
§ 30. Энергия электрического поля . . . . .	101
<b>Глава V. Постоянный электрический ток . . . . .</b>	<b>106</b>
§ 31. Электрический ток . . . . .	106
§ 32. Электродвижущая сила . . . . .	108
§ 33. Закон Ома. Сопротивление проводников . . . . .	111
§ 34. Закон Джоуля — Ленца . . . . .	114
§ 35. Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . . .	115
§ 36. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа . . . . .	117
§ 37. Коэффициент полезного действия источника тока . . . . .	121
<b>Глава VI. Магнитное поле в вакууме . . . . .</b>	<b>124</b>
§ 38. Взаимодействие токов . . . . .	124
§ 39. Магнитное поле . . . . .	126
§ 40. Закон Био — Савара. Поле движущегося заряда . . . . .	128
§ 41. Поля прямого и кругового токов . . . . .	131
§ 42. Циркуляция вектора <b>B</b> . Поле соленоида и тороида . . . . .	135
<b>Глава VII. Магнитное поле в веществе . . . . .</b>	<b>142</b>
§ 43. Магнитное поле в веществе . . . . .	142
§ 44. Описание поля в магнетиках . . . . .	143
§ 45. Преломление линий магнитной индукции . . . . .	151
<b>Глава VIII. Действие магнитного поля на токи и заряды . . . . .</b>	<b>156</b>
§ 46. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Закон Ампера . . . . .	156
§ 47. Сила Лоренца . . . . .	158
§ 48. Контур с током в магнитном поле . . . . .	161
§ 49. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле . . . . .	165
<b>Глава IX. Магнетики . . . . .</b>	<b>169</b>
§ 50. Классификация магнетиков . . . . .	169
§ 51. Магнитомеханические явления. Магнитные моменты атомов и молекул . . . . .	170
§ 52. Диамагнетизм . . . . .	176
§ 53. Парамагнетизм . . . . .	180
§ 54. Ферромагнетизм . . . . .	183
<b>Глава X. Электромагнитная индукция . . . . .</b>	<b>190</b>
§ 55. Явление электромагнитной индукции . . . . .	190
§ 56. Электродвижущая сила индукции . . . . .	192
§ 57. Методы измерения магнитной индукции . . . . .	197
§ 58. Токи Фуко . . . . .	200
§ 59. Явление самоиндукции . . . . .	201
§ 60. Ток при замыкании и размыкании цепи . . . . .	204
§ 61. Энергия магнитного поля . . . . .	207
§ 62. Взаимная индукция . . . . .	210
§ 63. Работа перемагничивания ферромагнетика . . . . .	216

<b>Глава XI. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях</b>	<b>219</b>
§ 64. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле	219
§ 65. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями	221
§ 66. Определение заряда и массы электрона	225
§ 67. Определение удельного заряда положительных ионов. Масс-спектрографы	230
§ 68. Циклотрон	235
<b>Глава XII. Электрический ток в металлах и полупроводниках</b>	<b>238</b>
§ 69. Природа носителей тока в металлах	238
§ 70. Элементарная классическая теория металлов	240
§ 71. Основы квантовой теории металлов	246
§ 72. Полупроводники	254
§ 73. Эффект Холла	261
§ 74. Работа выхода	265
§ 75. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы	268
§ 76. Контактная разность потенциалов	274
§ 77. Термоэлектрические явления	277
§ 78. Полупроводниковые диоды и триоды	284
<b>Глава XIII. Ток в электролитах</b>	<b>292</b>
§ 79. Диссоциация молекул в растворах	292
§ 80. Электролиз	296
§ 81. Законы Фарадея	298
§ 82. Электролитическая проводимость	300
§ 83. Технические применения электролиза	303
<b>Глава XIV. Электрический ток в газах</b>	<b>305</b>
§ 84. Виды газового разряда	305
§ 85. Несамостоятельный газовый разряд	306
§ 86. Ионизационные камеры и счетчики	310
§ 87. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде	317
§ 88. Газоразрядная плазма	322
§ 89. Глеющий разряд	325
§ 90. Дуговой разряд	330
§ 91. Искровой и коронный разряды	334
<b>Глава XV. Переменный ток</b>	<b>338</b>
§ 92. Квазистационарные токи	338
§ 93. Переменный ток, текущий через индуктивность	339
§ 94. Переменный ток, текущий через емкость	341
§ 95. Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление	343
§ 96. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока	346
§ 97. Символический метод	348
§ 98. Резонанс токов	353



Глава XVI. Электрические колебания . . . . .	357
§ 99. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления . . . . .	357
§ 100. Свободные затухающие колебания . . . . .	360
§ 101. Вынужденные электрические колебания . . . . .	364
§ 102. Получение незатухающих колебаний . . . . .	369
Глава XVII. Электромагнитное поле . . . . .	372
§ 103. Вихревое электрическое поле . . . . .	372
§ 104. Бетатрон . . . . .	374
§ 105. Ток смещения . . . . .	377
§ 106. Электромагнитное поле . . . . .	380
§ 107. Описание свойств векторных полей . . . . .	381
§ 108. Уравнения Максвелла . . . . .	393
Глава XVIII. Электромагнитные волны . . . . .	397
§ 109. Волновое уравнение . . . . .	397
§ 110. Плоская электромагнитная волна . . . . .	400
§ 111. Экспериментальное исследование электромагнитных волн . . . . .	404
§ 112. Энергия электромагнитного поля . . . . .	407
§ 113. Импульс электромагнитного поля . . . . .	410
§ 114. Излучение диполя . . . . .	412
Приложение I. Единицы измерения электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе . . . . .	417
Приложение II. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе . . . . .	419
Предметный указатель . . . . .	426

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к настоящему изданию книга была существенно переработана. Коренным образом изменены главы II и VII, посвященные электрическому и магнитному полям в веществе, а также § 56, в котором рассматривается электродвижущая сила индукции. При рассмотрении полей в вакууме используются только величины  $E$  и  $B$ . Добавлен новый параграф (§ 107), содержащий элементарные сведения из векторного анализа. Существенные добавления сделаны в параграфах 18, 30, 40, 47 и 112. Небольшие добавления и изменения сделаны в некоторых других параграфах.

Автор выражает благодарность Н. И. Гольдфарбу за полезные советы и замечания, которые были учтены при переработке второго тома.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Как и первый том этого курса, второй том предназначен прежде всего для студентов инженерно-физических специальностей вузов. Несмотря на небольшой объем, предлагаемое вниманию читателей пособие содержит изложение всех вопросов, значение которых необходимо для изучения теоретической физики и других физических дисциплин.

Сокращение объема книги достигнуто (как и в первом томе) главным образом за счет отказа от описания лекционных демонстраций, устаревших приборов и экспериментальной техники прошлых столетий. Исторический материал дан также в крайне малом объеме. Сказанное вовсе не означает, что изложение ведется без опоры на эксперимент. Все фундаментальные опыты, послужившие основой современного учения об электромагнетизме, описаны достаточно подробно. Для примера укажем на совокупность опытов, предпринятых для выяснения природы носителей тока в металлах (Рикке, Мандельштама и Папалекси, Толмена и Стюарта), группу опытов, посвященных установлению природы магнетизма (Эйнштейна и де Хааса, Барнетта, Штерна и Герлаха), опыты по определению заряда и удельного заряда электрона и положительных ионов (Милликена, Томсона, Астона), опыты Герца с электромагнитными волнами и т. п. Описан также ряд экспериментальных методик и

установок: ускорители заряженных частиц, ионизационные камеры и счетчики, масс-спектрографы и т. д.

Более подробно, чем это обычно делается в вузовских учебниках, изложены диа- и парамагнетизм, зонная теория металлов и полупроводников, газовый разряд и электромагнитные волны. При этом автор отказался от некоторых встречающихся в учебниках упрощений, искажающих сущность явлений и ставящих в тупик думающего читателя. Например, определение уровня Ферми как максимальной энергии электронов при абсолютном нуле оставляет совершенно непонятным возникновение контактной термо-э. д. с. (ибо при таком определении уровень Ферми из функции от температуры превращается в характерную для данного металла константу). Такое определение неприменимо также к полупроводникам, у которых уровень Ферми попадает в запрещенную зону. В качестве второго примера можно указать объяснение излучения электромагнитных волн диполем с помощью так называемого отшнуровывания силовых линий. Во-первых, это «отшнуровывание» создает лишь видимость объяснения — по-настоящему его понять нельзя. Вместе с тем оно является в принципе неверным, поскольку никак не учитывает лежащих в основе возникновения и распространения волн единства и взаимосвязи электрического и магнитного полей. В рассуждениях об отшнуровывании возникновение электрического и возникновение магнитного полей волны рассматриваются совершенно независимо друг от друга, что противоречит истинной физической сути явлений.

Изложение ведется в Международной системе единиц (СИ). До последнего времени в советской физической литературе (в частности, во всех учебниках теоретической физики) применялась гауссова система единиц. Поэтому мы сочли необходимым познакомить читателя и с этой системой. Весь текст, относящийся

к гауссовой системе, дан петитом и может быть полностью опущен читателем, если эта система не представляет для него интереса. В приложениях в конце книги даны единицы измерения электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе, а также сопоставлен вид основных формул электромагнетизма в обеих системах.

Приношу большую благодарность заведующему кафедрой физики Московского энергетического института профессору В. А. Фабриканту и преподавателям этой кафедры И. П. Федоровой и Ю. Б. Горбатову за ряд весьма полезных советов и замечаний. Считаю также долгом выразить признательность редактору книги Е. Б. Кузнецовой, много сделавшей для исправления и улучшения текста.

*И. Савельев*

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

## § 1. Введение

Из школьного курса физики известно, что при определенных условиях тела приобретают электрический заряд (электризуются). Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами.

Имеется два вида электрических зарядов, условно называемых положительным и отрицательным. Заряды одного знака отталкиваются, разных знаков — притягивают друг друга.

Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых так называемых элементарных частиц. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. Его можно назвать элементарным зарядом. Обозначать его мы будем буквой  $e$ .

К числу элементарных частиц принадлежат, например, электрон (несущий отрицательный заряд), протон (несущий положительный заряд) и нейтрон (заряд которого равен нулю). Поскольку из этих частиц построены атомы вещества, электрические заряды оказываются органически входящими в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным. Если каким-либо образом (например, натиранием) создать в теле избыток частиц одного знака

(соответственно недостаток частиц другого знака), тело окажется заряженным. Можно также, не изменяя общего количества положительных и отрицательных частиц, вызвать их перераспределение в теле таким образом, что в одной части тела возникнет избыток зарядов одного знака, в другой — другого. Это можно осуществить, приблизив к металлическому телу другое заряженное тело.

Поскольку всякий заряд  $q$  образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным  $e$ :

$$q = \pm Ne.$$

Однако элементарный заряд настолько мал (см. § 3), что возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно.

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь. Однако всегда возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда противоположных знаков. Поэтому суммарный заряд электрически изолированной системы<sup>1)</sup> не может изменяться. Это утверждение носит название закона сохранения электрического заряда.

Если заряженные частицы, например электроны, могут более или менее свободно перемещаться в пределах тела, то соответствующее вещество способно проводить электрический ток. Носителями заряда, движение которых создает ток, могут быть не только электроны, но и ионы, т. е. атомы или молекулы, потерявшие либо присоединившие к себе один или несколько электронов.

В соответствии со способностью проводить электрический ток все вещества подразделяются на диэлектрики (или изоляторы), проводники и полупроводники. Идеальных изоляторов в природе не существует. Все вещества хотя бы в ничтожной степени проводят электрический ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят ток в  $10^{15}$ — $10^{20}$  раз хуже, чем вещества, называемые проводниками. Полупроводниками называется обширная группа веществ, которые по способности про-

---

<sup>1)</sup> Система называется электрически изолированной, если через ограничивающую ее поверхность не может течь электрический ток.

водить ток заполняют промежуточную область между проводниками и диэлектриками. Помимо величины проводимости полупроводники отличаются от проводников рядом других особенностей.

## § 2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона

Как уже отмечалось, наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело взаимодействует с другими заряженными телами. Тела, несущие заряды одинакового знака (или, как говорят, заряженные одноименно), отталкивают друг друга. Тела, заряженные разноименно, притягиваются друг к другу. Закон, которому подчиняется сила взаимодействия так называемых точечных зарядов, был установлен в 1785 г. Кулоном.

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

С помощью крутильных весов (рис. 1), подобных тем, которые были использованы Кавендишем для определения гравитационной постоянной (см. т. I, § 46). Кулон измерял силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и от расстояния между ними. При этом Кулон исходил из того, что при касании к заряженному металлическому шарiku точно такого же незаряженного шарика заряд распределяется между обоими шариками поровну.

В результате своих опытов Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Направление силы совпадает с проходящей через заряды прямой.

Закон Кулона может быть выражен следующей формулой:

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

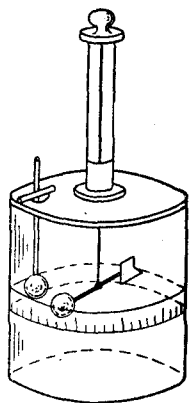


Рис. 1.



где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $q_1$  и  $q_2$  — величины взаимодействующих зарядов,  $r$  — расстояние между ними.

В случае одноименных зарядов сила, вычисленная по формуле (2.1), оказывается положительной (что соответствует отталкиванию между зарядами). В случае разноименных зарядов сила отрицательна (что соответствует притяжению зарядов друг к другу) <sup>1)</sup>.

Закон Кулона можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{f} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.2)$$

В этом выражении под  $\mathbf{r}$  следует подразумевать вектор, проведенный от одного заряда к другому и имеющий направление к тому из зарядов, к которому приложена сила  $\mathbf{f}$  (рис. 2).



Рис. 2.

Зная закон взаимодействия между точечными зарядами, можно вычислить

силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды  $dq$ , чтобы их можно было считать точечными, вычислить по формуле (2.2) силу взаимодействия между зарядами  $dq$ , взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил. Математически эта операция полностью совпадает с вычислением силы гравитационного притяжения между телами конечных размеров (см. т. I, § 46).

### § 3. Системы единиц

Надлежащим выбором единицы измерения заряда (единицы для  $f$  и  $r$  были установлены в механике) можно добиться того, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (2.1) стал равен единице. Соответствующая единица заряда ( $f$  и  $r$  предполагаются измеренными в единицах СГС-системы) называется абсолютной электростатической единицей заряда (сокращенно: СГСЭ-единицей заряда). Она представляет собой такой заряд,

<sup>1)</sup> Сопоставьте это со знаком и характером силы взаимодействия между молекулами (см. т. I, § 117).

который взаимодействует в вакууме с равным ему и находящимся на расстоянии 1 см зарядом с силой в 1 дин.

Посредством тщательных измерений (см. § 66) было найдено, что элементарный заряд равен

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ-ед. заряда.}$$

Приняв единицы длины, массы, времени и заряда за основные, можно построить систему единиц измерения электрических и магнитных величин. Система, в основе которой лежат сантиметр, грамм-масса, секунда и СГСЭ-единица заряда, называется абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ-системой). В основе этой системы лежит закон Кулона, т. е. закон взаимодействия между заряженными телами. Впоследствии мы познакомимся с абсолютной электромагнитной системой единиц (СГСМ-системой), в основе которой лежит закон взаимодействия между проводниками, по которым течет электрический ток. Абсолютной является также гауссова система, в которой единицы измерения электрических величин совпадают с единицами СГСЭ-системы, а магнитных величин — с единицами СГСМ-системы.

В системе СГСЭ формула, выражающая закон Кулона, принимает следующий вид:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.1)$$

Эта формула справедлива в том случае, если заряды находятся в пустоте. Для зарядов, помещающихся в некоторой среде, она должна быть уточнена (см. § 18).

С 1 января 1963 г. в СССР введен в действие Государственный стандарт ГОСТ 9867—61, которым предписывается предпочтительное применение Международной системы единиц, обозначаемой символом СИ. Основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина и свеча. Единицей силы в СИ служит ньютон (н), равный  $10^5$  дин.

При установлении единиц измерения электрических и магнитных величин СИ, как и СГСМ-система, исходит из закона взаимодействия не зарядов, а проводников с током. Поэтому коэффициент пропорциональности в формуле закона Кулона оказывается отличной от единицы размерной величиной.

Единицей заряда в СИ является кулон ( $\kappa$ ). Опытным путем установлено, что

$$1 \kappa = 2,998 \cdot 10^9 \text{ (приблизительно } 3 \cdot 10^9) \text{ СГСЭ-ед. заряда.} \quad (3.2)$$

Чтобы составить представление о величине заряда в 1  $\kappa$ , вычислим силу, с которой взаимодействовали бы два точечных заряда величиной 1  $\kappa$  каждый, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. В соответствии с (3.1)

$$f = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2} \text{ СГСЭ} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ н} \approx 10^9 \text{ кг.}$$

Элементарный заряд, выраженный в кулонах, равен

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \kappa.$$

#### § 4. Рационализованная запись формул

Во многие формулы электродинамики, если записывать их в СГС (в частности, в гауссовой) системах, входят множителями  $4\pi$  и так называемая электродинамическая постоянная  $c$ , равная скорости света в пустоте. Для того что бы избавиться от них в практически наиболее важных формулах, коэффициент пропорциональности в законе Кулона полагают равным  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Тогда выражение закона для зарядов, помещающихся в пустоте, принимает вид

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (4.1)$$

Соответственно изменяются и другие формулы. Видоизмененная подобным образом запись формул называется рационализованной. Системы единиц, построенные с использованием рационализованных формул, также называются рационализованными. К их числу принадлежит и СИ.

Величину  $\epsilon_0$  называют электрической постоянной. Она имеет размерность электрической емкости, деленной на длину. Соответственно ее выражают в единицах, называемых фарада на метр (см. § 25).

Чтобы найти численное значение  $\epsilon_0$ , подставим в формулу (4.1) значения величин, соответствующие случаю двух зарядов по 1 к, расположенных на расстоянии друг от друга, равном 1 м. В предыдущем параграфе мы нашли, что сила взаимодействия в этом случае равна  $9 \cdot 10^9$  н. Подставив это значение силы, а также  $q_1 = q_2 = 1$  к и  $r = 1$  м в формулу (4.1), получим

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м.} \quad (4.2)$$

Электрическая постоянная  $\epsilon_0$  совместно с магнитной постоянной  $\mu_0$  (см. § 38) заменяют фигурирующую в гауссовой системе электродинамическую постоянную  $c$ .

В изданной за прошлые годы в СССР литературе по физике используется преимущественно гауссова система единиц. Поэтому мы считаем необходимым познакомить учащихся как с системой единиц СИ, так и с гауссовой системой. Изложение будет вестись в СИ. Попутно будет указываться, как полученные формулы выглядят в гауссовой системе. В приложении II в конце книги сопоставлена запись основных формул электродинамики в СИ и в гауссовой системе.

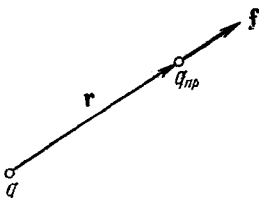
## § 5. Электрическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства — создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы. Следовательно, для того чтобы выяснить, имеется ли в данном месте электрическое поле, нужно поместить туда заряженное тело (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто заряд) и установить, испытывает оно действие электрической силы или нет. По величине силы, действующей на данный заряд, можно, очевидно, судить об «интенсивности» поля.

Итак, для обнаружения и исследования электрического поля нужно воспользоваться некоторым «пробным»

зарядом. Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле «в данной точке», пробный заряд должен быть точечным. В противном случае сила, действующая на заряд, будет характеризовать свойства поля, усредненные по объему, занимаемому телом, которое несет на себе пробный заряд.

Исследуем с помощью точечного пробного заряда  $q_{пр}$  поле, создаваемое точечным зарядом  $q$ . Поместив пробный заряд в точку, положение которой относительно заряда  $q$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 3), мы обнаружим, что на пробный заряд действует сила



$$\mathbf{f} = q_{пр} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (5.1)$$

Рис. 3.

Из формулы (5.1) следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от величин, определяющих поле (от  $q$  и  $\mathbf{r}$ ), но и от величины пробного заряда  $q_{пр}$ . Если брать разные по величине пробные заряды  $q'_{пр}$ ,  $q''_{пр}$  и т. д., то и силы  $\mathbf{f}'$ ,  $\mathbf{f}''$ , ..., которые они испытывают в данной точке поля, будут различны. Легко, однако, видеть из (5.1), что отношение  $\mathbf{f}/q_{пр}$  для всех пробных зарядов будет одно и то же и зависит лишь от величин  $q$  и  $\mathbf{r}$ , определяющих поле в данной точке. Поэтому естественно принять это отношение в качестве величины, характеризующей электрическое поле:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q_{пр}}. \quad (5.2)$$

Векторную величину (5.2) называют напряженностью электрического поля в данной точке (т. е. в той точке, в которой пробный заряд  $q_{пр}$  испытывает действие силы  $\mathbf{f}$ ).

В соответствии с формулой (5.2) напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

К понятию о напряженности электрического поля мы пришли, исследуя поле точечного заряда. Однако определение (5.2) распространяется и на случай поля, созда-

ваемого любой совокупностью зарядов. В этом случае, впрочем, необходимо следующее уточнение. Может случиться, что взаимное расположение зарядов, обуславливающих исследуемое поле, изменяется под воздействием пробного заряда. Это произойдет, например, когда заряды, создающие поле, расположены на проводнике и могут свободно перемещаться в его пределах. Поэтому, чтобы не внести изменений в исследуемое поле, величину пробного заряда нужно брать достаточно малой.

Как следует из формул (5.2) и (5.1), напряженность поля точечного заряда пропорциональна величине заряда  $q$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  от заряда до данной точки поля:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (5.3)$$

Направлен вектор  $E$  вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Согласно формуле (3.1) в гауссовой системе формула для напряженности поля точечного заряда в пустоте имеет вид

$$E = \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (5.4)$$

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность в такой точке, в которой на заряд, равный единице (1 к в СИ, 1 СГСЭ-единице заряда в гауссовой системе) действует сила, величина которой также единица (1 н в СИ, 1 дин в гауссовой системе). В гауссовой системе эта единица специального названия не имеет. В СИ единица напряженности электрического поля имеет название вольт на метр и обозначается  $в/м$  [см. формулу (11.8)].

Согласно (5.3) заряд в 1 к создает в пустоте на расстоянии 1 м напряженность

$$E = \frac{1}{4\pi \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} \frac{1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ в/м.}$$

Та же напряженность в гауссовой системе равна

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{100^2} = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-единиц.}$$

Сопоставляя оба результата, находим, что

$$1 \text{ СГСЭ-единица напряженности поля} = 3 \cdot 10^4 \text{ в/м.}$$

Согласно (5.2) сила, действующая на пробный заряд, равна

$$\mathbf{f} = q_{\text{пр}} \cdot \mathbf{E}.$$

Очевидно, что на всякий точечный заряд  $q^1$ ) в точке поля с напряженностью  $\mathbf{E}$  будет действовать сила

$$\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E}. \quad (5.5)$$

Если заряд  $q$  положителен, направление силы совпадает с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . В случае отрицательного  $q$  направления векторов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{E}$  противоположны.

## § 6. Суперпозиция полей. Поле диполя

Опыт показывает, что сила, с которой система зарядов действует на некоторый не входящий в систему заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности. Отсюда вытекает, что *напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i. \quad (6.1)$$

Последнее утверждение носит название принципа суперпозиции (наложения) электрических полей.

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов. Разбивая протяженные заряды на достаточно малые доли  $dq$ , любую систему зарядов можно свести к совокупности точечных зарядов. Вклад каждого из таких зарядов в результирующее поле вычисляется по формуле (5.3).

Воспользуемся принципом суперпозиции для нахождения напряженности поля электрического диполя.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов:  $+q$  и  $-q$ , расстояние между которыми  $l$

---

<sup>1)</sup> В формуле (5.3)  $q$  означает заряд, обуславливающий поле. В формуле (5.5) через  $q$  обозначен заряд, испытывающий в точке с напряженностью  $\mathbf{E}$  действие силы  $\mathbf{f}$ .

значительно меньше, чем расстояние до тех точек, в которых определяется поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя. Найдем напряженность поля на оси диполя, а также на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к

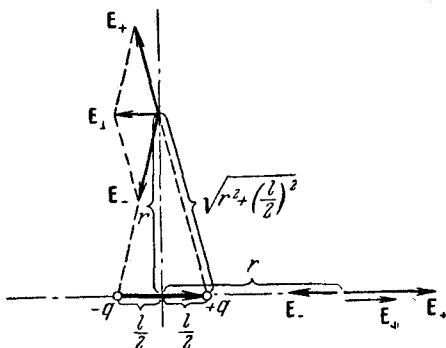


Рис. 4.

его оси (рис. 4). Положение точек на этих прямых будем характеризовать их расстоянием  $r$  от центра диполя. Напомним, что в соответствии с определением диполя должно выполняться условие:  $r \gg l$ .

Поле в каждой точке будет представлять собой суперпозицию полей  $E_+$  и  $E_-$ , создаваемых точечными зарядами  $+q$  и  $-q$ . На оси диполя векторы  $E_+$  и  $E_-$  имеют противоположные направления. Поэтому результирующая напряженность  $E_{||}$  будет равна по модулю разности модулей векторов  $E_+$  и  $E_-$ :

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Пренебрегая в знаменателе  $l/2$  по сравнению с  $r$ , получаем

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}, \quad (6.2)$$

где через  $p$  обозначено произведение  $ql$ , называемое электрическим моментом диполя.



Для точек на прямой, перпендикулярной к оси,  $E_+$  и  $E_-$  имеют одинаковые модули, равные

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (6.3)$$

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на отрезок  $l$  и на вектор  $E_\perp$  (рис. 4), следует, что

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r}.$$

Заменяв в этом соотношении  $E_+$  его значением (6.3), получим

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (6.4)$$

Можно показать, что напряженность поля диполя в произвольной точке определяется формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (6.5)$$

где  $\alpha$  — угол между осью диполя и направлением на данную точку (рис. 5). Подстановка в (6.5)  $\alpha = 0$  (или  $\pi$ ) и  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  приводит к формулам (6.2) и (6.4).

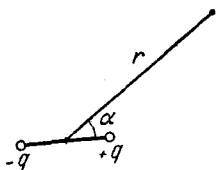


Рис. 5.

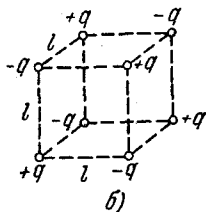
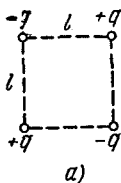


Рис. 6.

В гауссовой системе в формулах (6.2), (6.4) и (6.5) отсутствует множитель  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

Характерным для напряженности поля диполя является то, что она определяется не величиной образующих диполь зарядов, а моментом диполя  $p = ql$ . С рас-

стоянием от диполя напряженность убывает как  $1/r^3$ , т. е. быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (убывающая как  $1/r^2$ ). Напряженность показанной на рис. 6, а системы зарядов, называемой квадруполем, убывает с расстоянием еще быстрее — как  $1/r^4$ . Напряженность октуполя (рис. 6, б) убывает как  $1/r^5$ . Общим для диполя, квадруполя и октуполя является то, что алгебраическая сумма образующих их зарядов равна нулю.

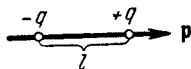


Рис. 7.

Отметим, что помимо  $q$  и  $l$  для полного определения диполя необходимо задать еще и ориентацию оси диполя в пространстве. В соответствии с этим момент диполя следует рассматривать как вектор  $\mathbf{p}$ . Этому вектору приписывается направление от отрицательного заряда к положительному (рис. 7). Если ввести радиус-вектор  $\mathbf{l}$ , проведенный от  $-q$  к  $+q$ , то момент диполя можно представить в виде

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}. \quad (6.6)$$

## § 7. Линия напряженности. Поток вектора напряженности

Электрическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора  $\mathbf{E}$ . Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электрического поля (ср. с полем вектора скорости, т. I, § 54). Поле вектора скорости можно, как мы знаем, представить очень наглядно с помощью линий тока. Аналогично электрическое поле можно описать с помощью линий напряженности, которые мы будем называть сокращенно линиями  $\mathbf{E}$ . Линии напряженности проводятся таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности перпендикулярной к линиям площадки, было равно численному значению вектора  $\mathbf{E}$ . Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и величине вектора  $\mathbf{E}$  в разных точках пространства (рис. 8).

Линии  $\mathbf{E}$  точечного заряда, очевидно, представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных

от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 9). Линии одним концом опираются на заряд, другим уходят в бесконечность. В самом деле, полное число  $N$  линий, пересекающих сферическую поверхность произвольного радиуса  $r$ , будет равно произведению густоты линий на поверхность сферы  $4\pi r^2$ . Густота линий по условию численно равна  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ .

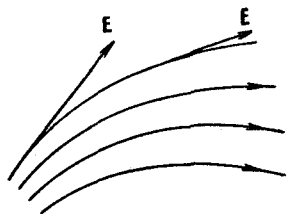


Рис. 8.

Следовательно,  $N$  численно равно

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (7.1)$$

т. е. число линий на любом расстоянии от заряда будет одно и то же. Отсюда и вытекает, что линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются; они, начавшись на заряде, уходят в бесконечность (заряд положителен), либо, приходя из бесконечности, заканчиваются на заряде (заряд отрицателен). Это свойство

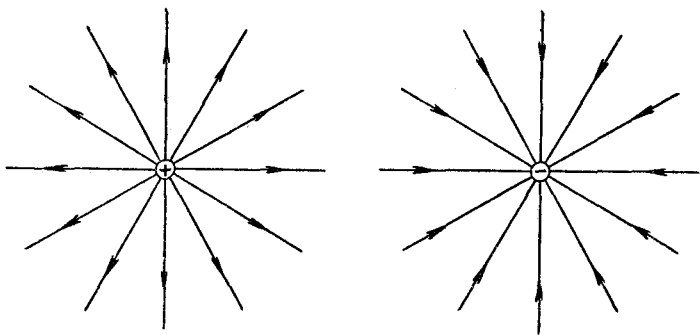


Рис. 9.

линий  $E$  является общим для всех электростатических полей, т. е. полей, создаваемых любой системой неподвижных зарядов: линии напряженности могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность. Ниже, на рис. 26, показана картина линий  $E$  поля диполя.

Поскольку густота линий  $\mathbf{E}$  выбирается равной численному значению  $E$ , количество линий, пронизывающих площадку  $dS$ , перпендикулярную к вектору  $\mathbf{E}$ , будет численно равно  $E dS$ . Если площадка  $dS$  ориентирована так, что нормаль к ней образует с вектором  $\mathbf{E}$  угол  $\alpha$ , то количество линий, пронизывающих площадку, будет численно равно [ср. с формулой (82.12), т. I]:

$$E dS \cos \alpha = E_n dS, \quad (7.2)$$

где  $E_n$  — составляющая вектора  $\mathbf{E}$  по направлению нормали к площадке. Отсюда для количества линий  $\mathbf{E}$ , пронизывающих произвольную поверхность, получается следующее выражение:

$$N \text{ численно равно } \int_S E_n dS. \quad (7.3)$$

Если имеется поле некоторого вектора  $\mathbf{A}$ , то выражение

$$\Phi = \int_S A_n dS, \quad (7.4)$$

где  $A_n$  — составляющая вектора  $\mathbf{A}$  по направлению нормали к  $dS$ , называется потоком вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность  $S$ .

В зависимости от природы вектора  $\mathbf{A}$  выражение (7.4) имеет различный физический смысл. Так, например, поток вектора плотности потока энергии равен, как известно, потоку энергии через соответствующую поверхность (см. т. I, § 82). Предоставляем читателю самому убедиться в том, что поток вектора скорости

$$\Phi = \int_S v_n dS$$

дает объем жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность  $S$ .

Из формулы (7.3) следует, что поток вектора  $\mathbf{E}$

$$\Phi = \int_S E_n dS \quad (7.5)$$

численно равен количеству линий  $\mathbf{E}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

Как мы увидим в дальнейшем, понятие потока вектора напряженности поля играет большую роль в учении об электричестве и магнетизме.

Заметим, что поток (7.5) есть алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность  $S$  при вычислении  $\Phi$ . Изменение направления нормали на противоположное изменяет знак у  $E_n$ , а следовательно и знак у потока  $\Phi$ .

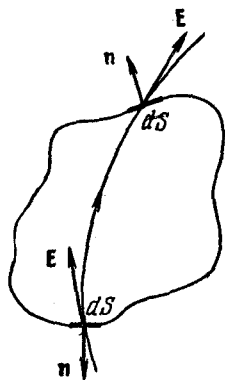


Рис. 10.

В случае замкнутых поверхностей принято вычислять поток, выходящий из охватываемой поверхностью области наружу. Соответственно под нормалью к  $dS$  в дальнейшем будет всегда подразумеваться обращенная наружу, т. е. внешняя, нормаль. Поэтому в тех местах, где вектор  $E$  направлен наружу (т. е. линия  $E$  выходит из объема, охватываемого поверхностью),  $E_n$  и соответственно  $d\Phi$  будут положительны; в тех же местах, где вектор  $E$  направлен внутрь (т. е. линия  $E$  входит в объем, охватываемый поверхностью),  $E_n$  и  $d\Phi$  будут отрицательны (рис. 10).

## § 8. Теорема Гаусса

В предыдущем параграфе было показано [см. формулу (7.1)], что окружающую точечный заряд  $q$  сферическую поверхность любого радиуса  $r$  пересекает  $q/\epsilon_0$  линий  $E$ <sup>1)</sup>. Отсюда вытекает, что из точечного заряда выходит (либо к нему сходится)  $q/\epsilon_0$  линий (в гауссовой системе это число равно  $4\pi q$ ).

В соответствии с формулой (7.3) поток вектора  $E$  через некоторую поверхность численно равен количеству линий  $E$ , пересекающих эту поверхность. Следовательно, поток вектора  $E$  через охватывающую заряд

<sup>1)</sup> Разумеется, количество линий  $E$  лишь численно равно  $q/\epsilon_0$ . Количество линий — безразмерная величина, выражение же  $q/\epsilon_0$  имеет размерность. Однако мы для краткости будем условно говорить, что число линий равно  $q/\epsilon_0$ .

сферическую поверхность равен  $q/\epsilon_0$ <sup>1)</sup>). Знак потока совпадает со знаком заряда. Покажем, что и для поверхности любой другой формы, если она замкнута и заключает внутри себя точечный заряд  $q$ , поток вектора  $E$  также будет равен  $q/\epsilon_0$ . Для поверхности, не имеющей «морщин» (рис. 11, а), это утверждение является очевидным. Действительно, такая поверхность, как и поверхность сферы, пересекается каждой линией  $E$  только

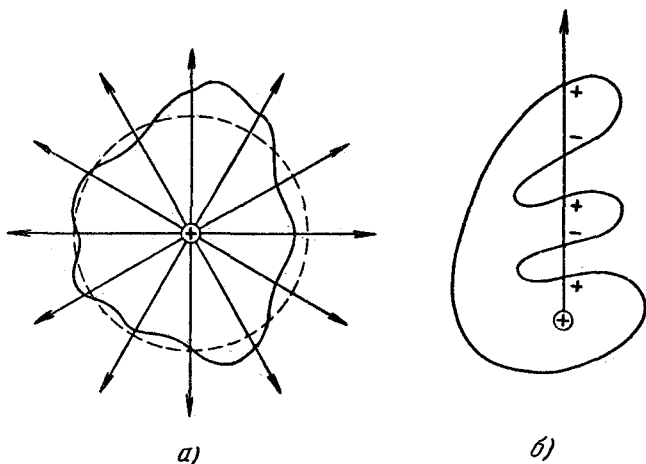


Рис. 11.

один раз. Поэтому число пересечений равно количеству линий, выходящих из заряда, т. е.  $q/\epsilon_0$ .

При вычислении потока через поверхность с «морщинами» (см. рис. 11, б, на котором показана только одна из  $q/\epsilon_0$  линий  $E$ ) нужно учесть, что число пересечений данной линии  $E$  с поверхностью может быть в рассматриваемом случае только нечетным, причем эти пересечения будут вносить в общий поток попеременно то положительный, то отрицательный вклад. В итоге, сколько бы раз данная линия не пересекала поверхность, результирующий вклад в поток будет равен либо плюс единице (для линии, выходящей в конечном счете

<sup>1)</sup> В данном случае идет речь не только о численном равенстве. Размерность потока вектора  $E$  равна размерности  $q/\epsilon_0$ .

наружу), либо минус единице (для линии, входящей внутрь).

Таким образом, какова бы ни была форма замкнутой поверхности, охватывающей точечный заряд  $q$ , поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь эту поверхность оказывается равным  $q/\epsilon_0$ .

Пусть внутри некоторой замкнутой поверхности заключено несколько точечных зарядов произвольных знаков:  $q_1, q_2$  и т. д. Поток вектора  $\mathbf{E}$  по определению равен

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}_n dS. \quad (8.1)$$

(кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутой поверхности).

В силу принципа суперпозиции полей

$$\mathbf{E}_n = E_{n1} + E_{n2} + \dots = \sum E_{ni}. \quad (8.2)$$

Подставив (8.2) в выражение для потока, получим

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S \left( \sum E_{ni} \right) dS = \sum \oint_S E_{ni} dS,$$

где  $E_{ni}$  — нормальная составляющая напряженности поля, создаваемого  $i$ -м зарядом в отдельности.

Но, как было показано выше,

$$\oint_S E_{ni} dS = \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i. \quad (8.3)$$

Доказанное нами утверждение носит название теоремы Гаусса. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом: *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .*

В частности, если внутри поверхности заряды отсутствуют, поток равен нулю. В этом случае каждая линия

напряженности поля (создаваемого зарядами, расположенными вне поверхности) пересекает поверхность четное число раз, выходя наружу столько же раз, сколько и входя внутрь (рис. 12). В итоге вклад, вносимый в поток каждой из линий, будет равен нулю.

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ <sup>1)</sup>, теорема Гаусса должна быть записана следующим образом:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (8.4)$$

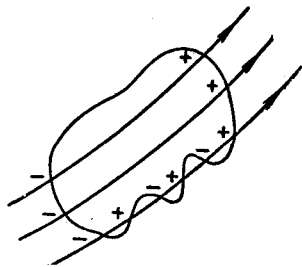


Рис. 12.

где интеграл справа берется по объему  $V$ , охватываемому поверхностью  $S$ .

В гауссовой системе в формулах (8.3) и (8.4) вместо  $1/\epsilon_0$  стоит множитель  $4\pi$ .

Теорема Гаусса позволяет в ряде случаев найти напряженность поля гораздо более простыми средствами, чем с использованием формулы (5.3) для напряженности поля точечного заряда и принципа суперпозиции полей. Продемонстрируем возможности теоремы Гаусса на нескольких полезных для дальнейшего примерах.

<sup>1)</sup> Объемная плотность заряда определяется по аналогии с обычной плотностью следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

где  $\Delta q$  — заряд, заключенный внутри малого объема  $\Delta V$ .

Кроме объемной плотности заряда нам понадобятся в дальнейшем

$$\text{поверхностная плотность } \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

где  $\Delta q$  — заряд, находящийся на элементе поверхности  $\Delta S$ ,

$$\text{линейная плотность } \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l},$$

где  $\Delta q$  — заряд, находящийся на отрезке цилиндрического тела, имеющем длину  $\Delta l$ .



1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости. Рассмотрим поле, создаваемое бесконечной плоскостью, заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ ; для определенности будем считать заряд положительным. Из соображений симметрии вытекает, что напряженность в любой точке поля имеет направление, перпендикулярное к плоскости. В самом деле, поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно (т. е. с постоянной плотностью), нет никаких оснований к тому, чтобы сила, действующая на пробный заряд, отклонялась в какую-либо сторону от нормали к плоскости. Далее очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность поля будет одинакова по величине и противоположна по направлению.

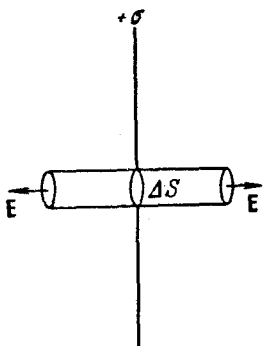


Рис. 13.

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями величины  $\Delta S$ , расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 13). Применим к этой поверхности теорему Гаусса. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, поскольку  $E_n$  в каждой ее точке равна нулю. Для оснований  $E_n$  совпадает с  $E$ . Следовательно, суммарный поток через поверхность будет равен  $2E \Delta S$ . Внутри поверхности заключен заряд  $\sigma \cdot \Delta S$ . Согласно теореме Гаусса должно выполняться условие

$$2E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

Полученный нами результат не зависит от длины цилиндра. Таким образом, на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Картина линий напряженности выглядит так, как показано на рис. 14. Для отрицательно заряженной плоскости

сти результат будет таким же, лишь направление вектора  $\mathbf{E}$  и линий напряженности изменится на обратное.

Если взять плоскость конечных размеров, например заряженную тонкую пластинку<sup>1)</sup>, то полученный выше результат будет справедливым лишь для точек, расстояние которых от края пластинки значительно превышает расстояние от самой пластинки (на рис. 15 область этих точек обведена пунктирной кривой). По мере удаления от плоскости или приближения к ее краям поле будет

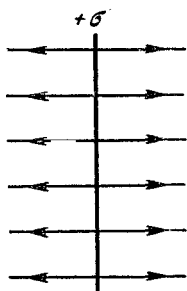


Рис. 14.

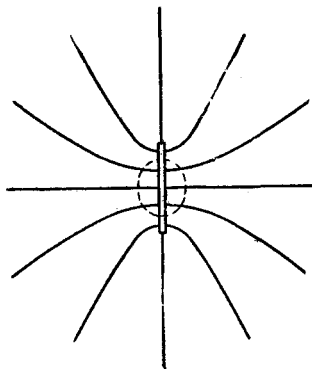


Рис. 15.

все больше отличаться от поля бесконечной заряженной плоскости. Характер поля на больших расстояниях легко представить, если учесть, что на расстояниях, значительно превышающих размеры пластинки, создаваемое ею поле можно рассматривать как поле точечного заряда.

## 2. Поле двух разноименно заряженных плоскостей.

Поле двух параллельных бесконечных плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , можно найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. Легко видеть (рис. 16), что в области

<sup>1)</sup> В случае пластинки под  $\sigma$  в формуле (8.5) следует понимать заряд, сосредоточенный на  $1 \text{ м}^2$  пластинки по всей ее толщине. У металлических тел заряд распределяется по внешней поверхности. Следовательно, плотности  $\sigma$  в формуле (8.5) соответствует удвоенная величина плотности заряда на ограничивающих металлическую пластинку поверхностях.

между плоскостями складываемые поля имеют одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

В гауссовой системе эта формула имеет вид

$$E = 4\pi\sigma. \quad (8.7)$$

Вне объема, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между плоскостями. Напряженность поля во всех точках

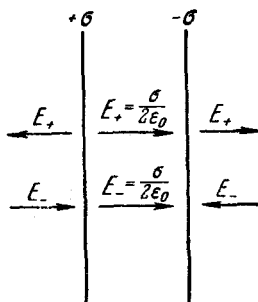


Рис. 16.

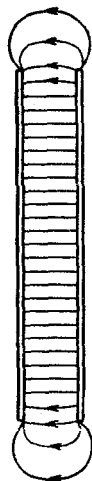


Рис. 17.

этой области одинакова по величине и по направлению. Поле, обладающее такими свойствами, называется однородным. Линии напряженности однородного поля представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых.

Полученный нами результат приближенно справедлив и в случае плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности и величины напряженности от  $\sigma/\epsilon_0$  наблюдаются только вблизи краев пластин (рис. 17).

3. Поле бесконечного заряженного цилиндра. Рассмотрим поле, создаваемое бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса  $R$ , заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Из соображений симметрии следует, что напряженность поля в любой точке должна быть направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а величина напряженности может зависеть лишь от расстояния  $r$  от оси цилиндра. Представим себе мысленно коаксиальную с заряженной поверхностью замкнутую цилиндрическую

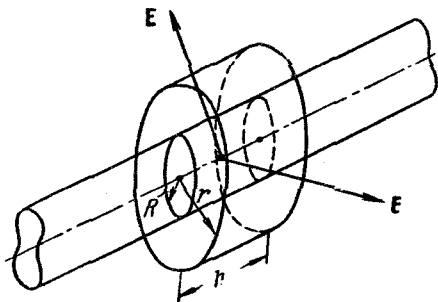


Рис. 18.

поверхность радиуса  $r$  и высоты  $h$  (рис. 18). Для оснований этого цилиндра  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$  (заряд считаем положительным). Следовательно, поток линий  $\mathbf{E}$  через эту замкнутую поверхность будет равен  $E(r) \cdot 2\pi r h$ . Если  $r > R$ , внутрь поверхности попадает заряд  $q = \lambda h$ , где  $\lambda$  — линейная плотность заряда. Применяя теорему Гаусса, получаем

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (r \geq R). \quad (8.8)$$

Если  $r < R$ , рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, вследствие чего  $E(r) = 0$ .

Таким образом, внутри заряженной цилиндрической поверхности бесконечной длины поле отсутствует. Напряженность поля вне поверхности определяется лишь

линейной плотностью заряда  $\lambda$ <sup>1)</sup> и расстоянием  $r$  от оси цилиндра. Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля цилиндра, заряженного положительно, только направлением вектора  $\mathbf{E}$ .

Из формулы (8.8) следует, что, уменьшая радиус цилиндра  $R$  (при неизменной линейной плотности заряда  $\lambda$ ), вблизи поверхности цилиндра можно получить

очень сильное поле, т. е. поле с очень большой напряженностью  $\mathbf{E}$ .

Учтя, что  $\lambda = 2\pi R\sigma$ , для напряженности в непосредственной близости от поверхности ( $r = R$ ) в соответствии с (8.8) получаем

$$E(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (8.9)$$

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндрических поверхностей,

заряженных с одинаковой по величине, но отличающейся знаком линейной плотностью  $\lambda$  (рис. 19). Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами величина напряженности поля определяется формулой (8.8). Это справедливо и для цилиндрических поверхностей конечной длины, если зазор между поверхностями значительно меньше их длины (цилиндрический конденсатор). Заметные отступления от поля поверхностей бесконечной длины будут наблюдаться только вблизи краев цилиндров.

**4. Поле заряженной сферической поверхности.** Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса  $R$ , заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , будет, очевидно, отличаться центральной симметрией. Это означает, что направление вектора  $\mathbf{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а величина напряженности является функцией расстояния  $r$  от центра сферы. Вообразим сферическую поверхность радиуса  $r$ . Для

<sup>1)</sup> Предполагается, что заряд распределен равномерно не только вдоль оси цилиндра, но и по его поверхности ( $\sigma = \text{const}$ ).

всех точек этой поверхности  $E_n = E(r)$ . Если  $r > R$ , внутрь поверхности попадает весь заряд  $q$ , создающий рассматриваемое поле. Следовательно,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (8.10)$$

В гауссовой системе в этой формуле нет множителя  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

Сферическая поверхность радиуса  $r$ , меньшего, чем  $R$ , не будет содержать зарядов, вследствие чего для  $r < R$  получается  $E(r) = 0$ .

Таким образом, внутри сферической поверхности, заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , поле отсутствует. Вне этой поверхности поле имеет такой же вид, как поле точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы.

Заменив в (8.10)  $q$  через  $4\pi R^2\sigma$  и положив  $r = R$ , получим для напряженности поля вблизи заряженной сферической поверхности

$$E(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (8.11)$$

[ср. с формулой (8.9)].

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что поле двух концентрических сферических поверхностей (сферический конденсатор), несущих одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды  $+q$  и  $-q$ , сосредоточено в зазоре между поверхностями, причем величина напряженности поля в этом зазоре определяется формулой (8.10).

**5. Поле объемно заряженной сферы.** Рассмотрим сферу радиуса  $R$ , заряженную с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Поле такой сферы, очевидно, обладает центральной симметрией. Легко видеть, что для поля вне сферы получается тот же результат [в том числе и формула (8.10)], что и в случае поверхностно заряженной сферы. Однако для точек внутри сферы результат будет иным. В самом деле, сферическая поверхность радиуса  $r$  ( $r < R$ ) заключает в себе заряд, равный  $\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$ . Следовательно, теорема Гаусса для такой

поверхности запишется следующим образом:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

откуда, заменяя  $\rho$  через  $\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , получаем

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r \quad (r \leq R). \quad (8.12)$$

Таким образом, внутри сферы напряженность поля растет линейно с расстоянием  $r$  от центра сферы. Вне сферы напряженность убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

### § 9. Работа сил электростатического поля

Легко сообразить, что сила, действующая на точечный заряд, находящийся в поле другого неподвижного точечного заряда, является центральной. Центральное поле сил, как известно из механики (см. т. I, § 26), потенциально. Убедимся в потенциальности сил электростатического поля (т. е. поля, создаваемого неподвижными зарядами) непосредственно. Для этого вычислим работу, которая совершается силами поля неподвижного точечного заряда  $q$  над перемещающимся в этом поле точечным зарядом  $q'$ . Работа на элементарном пути  $dl$  равна (рис. 20)

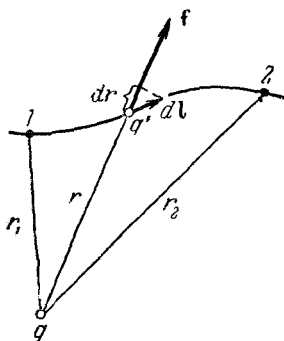


Рис. 20.

$dA = f dl \cos \alpha =$   
 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr$

(мы учли, что  $dl \cos \alpha = dr$ ). Отсюда для работы на пути 1—2 получается выражение

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_r \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right). \quad (9.1)$$

В гауссовой системе в этой формуле нет множителя  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

Полученный нами результат свидетельствует о том, что работа действительно не зависит от пути, по которому перемещался в электрическом поле заряд  $q'$ , а зависит лишь от начального и конечного положений этого заряда (от  $r_1$  и  $r_2$ ). Следовательно, силы, действующие на заряд  $q'$  в поле неподвижного заряда  $q$ , являются потенциальными. Этот вывод легко распространяется на поле любой системы неподвижных зарядов. В самом деле, сила  $\mathbf{f}$ , действующая на точечный заряд  $q'$  в таком поле, может по принципу суперпозиции быть представлена в виде

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i,$$

где  $\mathbf{f}_i$  — сила, обусловленная  $i$ -м зарядом создающей поле системы. Работа в этом случае равна, как известно, алгебраической сумме работ, совершаемых отдельными силами:

$$A = \sum A_i.$$

Каждое из слагаемых в правой части этого выражения не зависит от пути. Следовательно, не зависит от пути и работа  $A$ .

Из механики известно, что работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю. Работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q'$  при обходе его по замкнутому контуру, может быть представлена как

$$\oint q' E_l dl,$$

где  $E_l$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на направление элементарного перемещения  $d\mathbf{l}$  (кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутому контуру). Приравняв выражающий работу интеграл нулю и сократив на постоянную величину  $q'$ , придем к следующему соотношению:

$$\oint E_l dl = 0, \quad (9.2)$$

которое должно выполняться для любого замкнутого контура. Следует иметь в виду, что формула (9.2) справедлива только для электростатического поля. Впоследствии будет показано, что поле движущихся зарядов (т. е. поле, изменяющееся со временем) не является



потенциальным; следовательно, условие (9.2) для него не выполняется.

Выражение вида  $\oint A_i dl$  называется циркуляцией вектора  $\mathbf{A}$  по данному контуру. Таким образом, характерным для электростатического поля является то, что циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю.

## § 10. Потенциал

Мы знаем из механики, что тело, находящееся в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля. Следовательно, работа (9.1) может быть представлена как разность значений потенциальной энергии, которыми обладал заряд  $q'$  в точках 1 и 2 поля заряда  $q$ :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_2} = W_{p1} - W_{p2}.$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда  $q'$  в поле заряда  $q$  получаем

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

Значение const в выражении для потенциальной энергии обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность ( $r = \infty$ ) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (10.1)$$

Воспользуемся зарядом  $q'$  в качестве пробного заряда для исследования поля. Согласно (10.1) потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины  $q'$ , но и от величин  $q$  и  $r$ , определяющих поле. Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля, подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды  $q'_{пр}$ ,  $q''_{пр}$  и т. д. будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией

$W'_p, W''_p$  и т. д. Однако, как видно из (10.1), отношение  $W_p/q_{\text{пр}}$  будет для всех зарядов одно и то же. Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}} \quad (10.2)$$

называется потенциалом поля в данной точке и используется, наряду с напряженностью поля  $E$ , для описания электрических полей.

Как следует из (10.2), потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.

Подставляя в (10.2) значение потенциальной энергии (10.1), получаем для потенциала поля точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (10.3)$$

В гауссовой системе потенциал поля точечного заряда в пустоте определяется формулой

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots$ . Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим  $r_1, r_2, \dots$ . Работа, совершаемая силами этого поля над зарядом  $q'$ , будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum A_i.$$

Но согласно (9.1) каждая из работ  $A_i$  равна

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

где  $r_{i1}$  — расстояние от заряда  $q_i$  до начального положения заряда  $q'$ ,  $r_{i2}$  — расстояние от  $q_i$  до конечного положения заряда  $q'$ . Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Сопоставляя это выражение с соотношением

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2},$$

получаем для потенциальной энергии заряда  $q'$  в поле системы зарядов выражение

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q'}{r_i},$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}. \quad (10.4)$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В то время как напряженности поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов оказывается обычно гораздо проще, чем вычисление напряженностей электрического поля.

Из соотношения (10.2) вытекает, что заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией

$$W_p = q \cdot \varphi. \quad (10.5)$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом  $q$  может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10.6)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. Если заряд  $q$  из точки с потенциалом  $\varphi$  удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_\infty = q\varphi. \quad (10.7)$$

Отсюда следует, что потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. Такую же по величине работу необходимо совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Соотношение (10.7) можно использовать для установления единиц измерения потенциала. За единицу

потенциала следует, очевидно, принять потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. Так, за СИ-единицу потенциала, называемую вольт (сокращенное обозначение —  $v$ ), принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного 1 кулону, нужно совершить работу в 1 джоуль:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ к} \cdot 1 \text{ в},$$

отсюда

$$1 \text{ в} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ к}}. \quad (10.8)$$

За абсолютную электростатическую единицу потенциала (СГСЭ-ед. потенциала) принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного +1 единице СГСЭ, необходимо совершить работу в 1 эрг.

Выражая в соотношении (10.8) 1 Дж и 1 к через единицы СГСЭ, найдем соотношение между вольт и СГСЭ-ед. потенциала:

$$1 \text{ в} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ к}} = \frac{10^7 \text{ эрг}}{3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}} = \frac{1}{300} \text{ СГСЭ-ед. потенциала.}$$

Таким образом, одна СГСЭ-единица потенциала равна 300 в.

В физике часто пользуются единицей работы и энергии, называемой электронвольт (эв). Под электронвольт подразумевается работа, совершаемая силами поля над зарядом, равным заряду электрона (т. е. над элементарным зарядом  $e$ ) при прохождении им разности потенциалов в 1 в:

$$1 \text{ эв} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ к} \cdot 1 \text{ в} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Используются также кратные электронвольту единицы:

$$1 \text{ кэв (килоэлектронвольт)} = 10^3 \text{ эв},$$

$$1 \text{ Мэв (мегаэлектронвольт)} = 10^6 \text{ эв},$$

$$1 \text{ Гэв (гигаэлектронвольт)} = 10^9 \text{ эв}.$$

Отметим, что величина  $kT$ , характеризующая среднюю энергию теплового движения молекул, равна при комнатной температуре

$$kT = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ эв} = \frac{1}{40} \text{ эв}.$$

## § 11. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

В предыдущих параграфах было выяснено, что электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\mathbf{E}$ , либо с помощью скалярной величины  $\varphi$ . Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Если учесть, что  $\mathbf{E}$  пропорционально силе, действующей на заряд, а  $\varphi$  — потенциальной энергии заряда, легко сообразить, что эта связь должна быть аналогична связи между потенциальной энергией и силой. Действительно, работа сил поля над зарядом  $q$  на отрезке пути  $dl$  может быть представлена, с одной стороны, как  $qE_l dl$ , с другой же стороны — как убыль потенциальной энергии заряда, т. е. как  $-d(q\varphi) = -q \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl$ . Приравнивая эти выражения, получим

$$qE_l dl = -q \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl,$$

откуда находим, что

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad (11.1)$$

где через  $l$  обозначено произвольно выбранное направление в пространстве. В частности,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (11.2)$$

откуда

$$\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z = -\left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называется градиентом скаляра  $\varphi$  (обозначается  $\text{grad } \varphi$ )<sup>2)</sup>. Используя обозначение градиента, можно написать:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (11.3)$$

<sup>1)</sup> Умножив обе части этого равенства на  $q$ , мы приходим к соотношению

$$f_l = -\frac{\partial W_p}{\partial l}$$

[см. формулу (28.5), т. I].

<sup>2)</sup> Для обозначения градиента применяется также символ  $\nabla$  (набла):

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi.$$

Таким образом, напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком. Градиент некоторой скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  есть векторная величина, обладающая следующими свойствами. Направление градиента совпадает с направлением  $n$ , в котором при смещении из данной точки функция  $\varphi$ , возрастая по величине, изменяется с наибольшей скоростью. Величина производной  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  по этому направлению дает модуль градиента. Частные производные  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$  представляют собой проекции градиента на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Аналогично производная  $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ , взятая по произвольному направлению  $l$ , будет проекцией градиента на это направление. Проекция градиента на перпендикулярное к нему направление  $\tau$ , очевидно, равна нулю:  $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$ .

Поясним соотношение между напряженностью поля и потенциалом на примере поля точечного заряда. Потенциал этого поля выражается функцией [см. (10.3)]

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

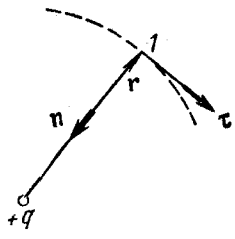


Рис. 21.

Рассмотрим точку поля  $I$ , положение которой определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 21 выполнен в предположении, что  $q$  положителен). Очевидно, что при смещении из этой точки в разных направлениях на одинаковый по величине малый отрезок  $dl$  наибольшее положительное приращение  $\varphi$  получается для направления от точки  $I$  к заряду  $q$ , если заряд положителен, и для направления от заряда  $q$  к точке  $I$ , если заряд отрицателен. Следовательно, направление градиента  $\mathbf{n}$  может быть представлено в виде

$$\mathbf{n} = \mp \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{11.4}$$

где знак « $\leftarrow$ » соответствует случаю положительного заряда, знак « $\rightarrow$ » — отрицательного. Проекция  $\text{grad } \varphi$  на

направление  $\mathbf{r}$  равна

$$(\text{grad } \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (11.5)$$

Знак «—» в этом выражении указывает на то, что  $\text{grad } \varphi$  в случае положительного заряда имеет направление, противоположное  $\mathbf{r}$ , а в случае отрицательного заряда — совпадающее с  $\mathbf{r}$ . Модуль  $\text{grad } \varphi$ , очевидно, равен модулю выражения (11.5). Поэтому, принимая во внимание (11.4), можно написать

$$\text{grad } \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (11.6)$$

[легко убедиться в том, что условие (11.4) учитывается такой записью автоматически]. Используя соотношение (11.3), получаем из (11.6) для напряженности поля точечного заряда уже известную нам формулу (5.3).

Формула (11.3) позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т. е. по заданным значениям  $\mathbf{E}$  в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого учтем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = \int_1^2 qE_l dl.$$

Вместе с тем в соответствии с (10.6) та же работа может быть представлена в виде

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняв друг другу эти два выражения и сокращая на  $q$ , получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl. \quad (11.7)$$

Интеграл в правой части можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$

и формула (11.7) переходит в уже знакомое нам соотношение (9.2).

Используем формулу (11.7) для вычисления разности потенциалов между двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями. Напряженность поля между плоскостями, как мы установили в § 8, всюду равна  $\sigma/\epsilon_0$  и направлена перпендикулярно к плоскостям. Соединим

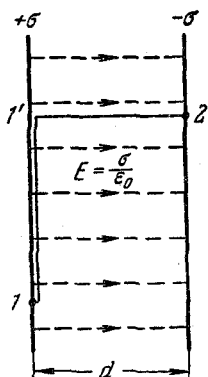


Рис. 22.

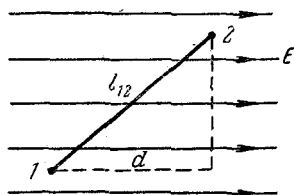


Рис. 23.

точки 1 и 2, взятые произвольным образом на разных плоскостях, линией 1—1'—2, как показано на рис. 22. Согласно формуле (11.7)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl = \int_1^{1'} E_l dl + \int_{1'}^2 E_l dl.$$

На участке 1—1'  $E_l = 0$ ; поэтому первое слагаемое в правой части равно нулю (отсюда следует, что потенциал точек 1 и 1' один и тот же). На участке 1'—2  $E_l = E = \text{const}$ , следовательно,

$$\int_{1'}^2 E_l dl = E \int_{1'}^2 dl = Ed,$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями. Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed. \quad (11.8)$$

Очевидно, что этот результат справедлив для разности потенциалов между двумя точками, взятыми в однородном поле напряженности  $E$ , причем под  $d$  следует понимать в этом случае проекцию расстояния  $l_{12}$  между точками 1 и 2 на направление вектора  $E$  (рис. 23).



## § 12. Эквипотенциальные поверхности

Для наглядного изображения поля можно вместо линий напряженности воспользоваться поверхностями равного потенциала или эквипотенциальными поверхностями. Как следует из ее названия, эквипотенциальная поверхность — это такая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Если потенциал задан как функция  $x$ ,  $y$  и  $z$ , уравнение эквипотенциальной поверхности имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

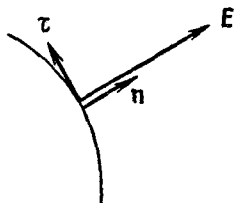


Рис. 24.

Направление нормали к эквипотенциальной поверхности будет совпадать с направлением вектора  $E$  в той же точке. Чтобы убедиться в этом, проведем в некоторой точке касательную  $\tau$  к поверхности (рис. 24). При смещении вдоль  $\tau$  на бесконечно малую величину  $d\tau$  потенциал  $\varphi$  не изменится, так что  $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$  равно нулю. Но  $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$  с точностью до знака равно проекции вектора  $E$  на направление  $\tau$ . Следовательно, тангенциальная составляющая  $E$  равна нулю, откуда вытекает, что вектор  $E$  направлен по нормали к поверхности. Учтя, что вектор  $E$  вместе с тем направлен по касательной к линии  $E$ , легко сообразить, что линии напряженности в каждой точке ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля. Следовательно, таких поверхностей может быть построено бесконечное множество. Уславливаются, однако, проводить поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов  $\varphi_{i+1} - \varphi_i$  для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряженности поля. Действительно, чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности. Следовательно, тем больше в данном месте  $\text{grad } \varphi$ , а значит и  $E$ .

На рис. 25 показаны эквипотенциальные поверхности (точнее, их пересечения с плоскостью чертежа) для поля точечного заряда. В соответствии с характером изменения  $E$  эквипотенциальные поверхности при приближении к заряду становятся гуще.

Для однородного поля эквипотенциальные поверхности, очевидно, представляют собой систему равноотстоящих друг от друга плоскостей, перпендикулярных к направлению поля.

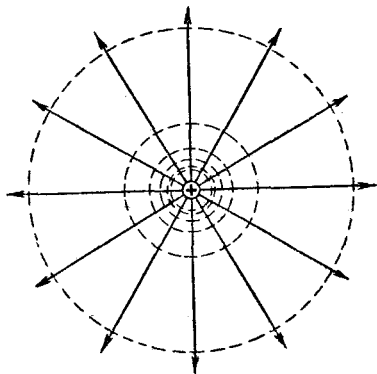


Рис. 25.

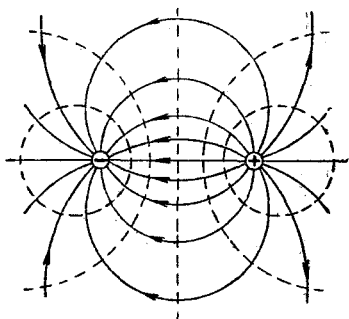


Рис. 26.

На рис. 26 изображены эквипотенциальные поверхности и линии напряженности для поля диполя. Из рис. 25 и 26 видно, что при одновременном использовании и эквипотенциальных поверхностей, и линий напряженности картина поля получается особенно наглядной.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

## § 13. Полярные и неполярные молекулы

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенные изменения. Чтобы понять, почему это происходит, нужно учесть, что в составе атомов и молекул имеются положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны. Электроны движутся в пределах атома или молекулы с огромной скоростью, непрерывно изменяя свое положение относительно ядер. Поэтому действие каждого электрона на внешние заряды будет примерно таким, как если бы он находился в покое в некоторой точке, полученной усреднением положения электрона по времени.

Для расстояний, больших по сравнению с размерами молекулы, действие электронов эквивалентно действию их суммарного заряда, помещенного в некоторую точку внутри молекулы. Назовем эту точку центром тяжести отрицательных зарядов. Аналогично действие ядер эквивалентно действию их суммарного заряда, помещенного в центр тяжести положительных зарядов. Очевидно, что положение центра тяжести зарядов определяется так же, как и положение обычного центра тяжести, но с заменой масс частиц их зарядами. Следовательно, радиус-вектор центра тяжести положительных зарядов вычисляется по формуле

$$\mathbf{r}^+ = \frac{\sum q_i^+ \mathbf{r}_i^+}{\sum q_i^+} = \frac{\sum q_i^+ \mathbf{r}_i^+}{q}, \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{r}_i^+$  — радиус-вектор точки, в которой помещается  $i$ -й положительный заряд,  $q$  — суммарный положительный заряд молекулы.

Аналогично для радиуса-вектора центра тяжести отрицательных зарядов имеем

$$\mathbf{r}^- = \frac{\sum q_j^- \mathbf{r}_j^-}{\sum q_j^-} = \frac{\sum q_j^- \mathbf{r}_j^-}{-q}, \quad (13.2)$$

где  $\mathbf{r}_j^-$  — радиус-вектор усредненного по времени положения  $j$ -го отрицательного заряда. Мы учли, что, поскольку молекула в целом нейтральна, суммарный отрицательный заряд равен положительному заряду, взятому с обратным знаком.

В отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов могут либо совпадать, либо быть сдвинутыми друг относительно друга. В последнем случае молекула эквивалентна электрическому диполю и называется полярной. Полярная молекула обладает собственным электрическим моментом  $\mathbf{p}$ , для которого с учетом формул (13.1) и (13.2) получается следующее выражение (рис. 27):

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} = q(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-) = \sum q_i^+ \mathbf{r}_i^+ + \sum q_j^- \mathbf{r}_j^-.$$

Применяя единую нумерацию для положительных и отрицательных зарядов, этому выражению можно придать вид

$$\mathbf{p} = \sum q_k \mathbf{r}_k, \quad (13.3)$$

где  $q_k$  — алгебраическая величина; суммирование производится по всем как положительным, так и отрицательным зарядам молекулы. Заметим, что для нейтральной в целом системы зарядов выражение (13.3) не зависит от выбора точки, относительно которой берутся радиусы-векторы  $\mathbf{r}_k$ .

Молекула, у которой центры тяжести зарядов разных знаков в отсутствие поля совмещены, собственным электрическим моментом не обладает и называется неполярной. Под действием внешнего электрического

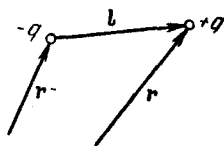


Рис. 27.

поля заряды в неполярной молекуле смещаются друг относительно друга: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. В результате молекула приобретает электрический момент, величина которого, как показывает опыт, пропорциональна напряженности поля. В рационализованной системе коэффициент пропорциональности записывают в виде  $\epsilon_0\beta$ , где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная, а  $\beta$  — величина, называемая поляризуемостью молекулы. Учитывая, что направления  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают, можно написать

$$\mathbf{p} = \beta\epsilon_0\mathbf{E}. \quad (13.4)$$

Дипольный момент имеет размерность, равную  $[q]L$ . Согласно формуле (5.3) размерность  $\epsilon_0 E$  равна  $[q]L^{-2}$ . Следовательно, поляризуемость молекулы  $\beta$  обладает размерностью  $L^3$ .

Процесс поляризации неполярной молекулы протекает так, как если бы положительные и отрицательные заряды молекулы были связаны друг с другом упругими силами. Поэтому говорят, что неполярная молекула ведет себя во внешнем поле как упругий диполь.

Действие внешнего поля на полярную молекулу сводится в основном к стремлению повернуть молекулу так, чтобы ее электрический момент установился по направлению поля. На величину электрического момента внешнее поле практически не влияет. Следовательно, полярная молекула ведет себя во внешнем поле как жесткий диполь.

Поскольку молекулы по электрическим свойствам эквивалентны диполям, для понимания явлений в диэлектриках нужно знать, как ведет себя диполь во внешнем электрическом поле.

#### § 14. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях

Если диполь поместить в однородное электрическое поле, образующие диполь заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  (рис. 28). Эти силы образуют пару, плечо которой равно  $l \sin \alpha$ , т. е. зависит от ориентации диполя относительно поля. Модуль каждой

из сил равен  $qE$ . Умножив его на плечо, получим величину момента пары сил, действующих на диполь:

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha, \quad (14.1)$$

где  $p$  — электрический момент диполя.

Формула (14.1), очевидно, может быть написана в векторном виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \quad (14.2)$$

Момент (14.2) стремится повернуть диполь так, чтобы его момент  $\mathbf{p}$  установился по направлению поля.

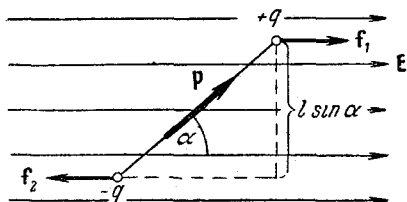


Рис. 28.

Чтобы увеличить угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$  на  $d\alpha$ , нужно совершить против сил, действующих на диполь в электрическом поле, работу

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha.$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии  $W$ , которой обладает диполь в электрическом поле

$$dW = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (14.3)$$

Интегрирование выражения (14.3) дает для энергии диполя в электрическом поле выражение

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const.}$$

Наконец, полагая  $\text{const}$  равной нулю, получаем

$$W = -pE \cos \alpha = -\mathbf{pE}. \quad (14.4)$$

Выбрав таким образом значение  $\text{const}$ , мы полагаем энергию диполя равной нулю в том случае, когда диполь устанавливается перпендикулярно к полю. Наименьшее значение энергии, равное  $-pE$ , получается при ориентации диполя по направлению поля, наибольшее,

равное  $pE$ , — при  $p$ , направленном в сторону, противоположную  $E$ .

В неоднородном поле силы, действующие на заряды диполя, вообще говоря, не одинаковы по величине. При малых размерах диполя силы  $f_1$  и  $f_2$  можно приближенно считать коллинеарными (рис. 29). Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении  $x$ , совпадающем с направлением  $E$  в том месте, где расположен диполь. Положительный заряд диполя смещен относительно отрицательного в направлении  $x$  на величину  $\Delta x = l \cos \alpha$ . Поэтому напряженность поля в точках, где

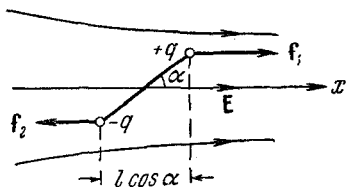


Рис. 29.

помещаются заряды, отличается на  $\Delta E = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha$ . Следовательно, результирующая  $f_1 + f_2$  сил, действующих на диполь, будет отлична от нуля. Проекция этой результирующей на ось  $x$ , очевидно, равна

$$f = q \Delta E = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha. \quad (14.5)$$

Таким образом, в неоднородном поле на диполь кроме вращательного момента (14.2) действует сила (14.5). Под действием этой силы диполь будет либо втягиваться в область более сильного поля (угол  $\alpha$  острый), либо выталкиваться из нее (угол  $\alpha$  тупой).

Отметим, что выражение для силы  $f$  можно получить из формулы (14.4) для энергии диполя, используя известное из механики соотношение между потенциальной энергией и силой. Действительно, продифференцировав (14.4) по  $x$  в предположении, что  $\alpha$  (т. е. ориентация диполя) остается постоянной, и изменив у результата знак на обратный, мы приходим к формуле (14.5).

## § 15. Поляризация диэлектриков

В отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика или равны нулю (неполярные молекулы), или распределены по направлениям в пространстве хаотическим образом (полярные

молекулы). В обоих случаях суммарный электрический момент диэлектрика равен нулю.

Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется. Это означает, что результирующий электрический момент диэлектрика становится отличным от нуля. В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, естественно взять электрический момент единицы объема. Если поле или диэлектрик (или оба они) неоднородны, степень поляризации в разных точках диэлектрика будет различна. Чтобы охарактеризовать поляризацию в данной точке, нужно выделить заключающий в себе эту точку физически бесконечно малый объем<sup>1)</sup>  $\Delta V$ , найти сумму  $\sum_{\Delta V} p_i$  моментов, заключенных в этом объеме молекул, и взять отношение

$$P = \frac{\sum p_i}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Величина  $P$ , определяемая формулой (15.1), называется вектором поляризации диэлектрика.

Дипольный момент  $p_i$  имеет размерность  $[q]L$ . Следовательно, размерность  $P$  равна  $[q]L^{-2}$ , т. е. совпадает с размерностью  $\epsilon_0 E$  [см. формулу (5.3)].

У диэлектриков любого типа (кроме сегнетоэлектриков, о которых будет речь в § 19) вектор поляризации связан с напряженностью поля в той же точке простым соотношением

$$P = \kappa \epsilon_0 E, \quad (15.2)$$

где  $\kappa$  — не зависящая от  $E$  величина, называемая диэлектрической восприимчивостью диэлектрика<sup>2)</sup>. Размерность  $P$  и  $\epsilon_0 E$ , как мы видели, одинакова. Следовательно,  $\kappa$  — безразмерная величина.

<sup>1)</sup> Физически бесконечно малым называют такой объем, который содержит достаточное для усреднения количество молекул и вместе с тем настолько мал, что макроскопические величины — плотность, температура, напряженность поля  $E$  и т. д. — можно считать в его пределах постоянными [см. также текст, следующий за формулой (39.2), т. I, § 39].

<sup>2)</sup> В анизотропных диэлектриках направления  $P$  и  $E$ , вообще говоря, не совпадают. Мы ограничимся рассмотрением лишь изотропных диэлектриков.



Для диэлектриков, построенных из неполярных молекул, формула (15.2) вытекает из следующих простых соображений. В пределы объема  $\Delta V$  попадает количество молекул, равное  $n\Delta V$ , где  $n$  — число молекул в единице объема. Каждый из моментов  $p_i$  определяется в этом случае формулой (13.4). Таким образом,

$$\sum_{\Delta V} p_i = n \Delta V \beta \epsilon_0 E.$$

Разделив это выражение на  $\Delta V$ , получим вектор поляризации

$$P = n \beta \epsilon_0 E.$$

Наконец, введя обозначение

$$\kappa = n \beta \epsilon_0, \quad (15.3)$$

приходим к формуле (15.2).

В случае диэлектриков, построенных из полярных молекул, ориентирующему действию внешнего поля противится тепловое движение молекул, стремящееся разбросать их дипольные моменты по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов молекул в направлении поля. Соответствующий статистический расчет показывает в согласии с опытом, что при неизменной температуре вектор поляризации пропорционален напряженности поля, т. е. приводит к формуле (15.2). При постоянной напряженности поля вектор поляризации диэлектриков, построенных из полярных молекул, уменьшается с повышением температуры. Диэлектрическая восприимчивость таких диэлектриков обратно пропорциональна абсолютной температуре.

В ионных кристаллах, как известно, отдельные молекулы утрачивают свою обособленность. Весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами. При действии на ионы кристалла внешнего поля

<sup>1</sup>) Соотношение (15.3) является приближенным. Более точное выражение, связывающее величины  $\kappa$  и  $\beta$ , будет дано в конце § 18.

обе решетки сдвигаются друг относительно друга, что приводит к поляризации диэлектрика. Вектор поляризации и в этом случае связан с напряженностью поля соотношением (15.2).

Рассмотрим в однородном изотропном диэлектрике с неполярными молекулами воображаемую площадку  $S$ , перпендикулярную к направлению поля  $E$ , а следовательно и к направлению вектора поляризации  $P$  (рис. 30). Пусть в единице объема диэлектрика имеется  $n$  одинаковых частиц с зарядом  $+e$  и  $n$  одинаковых частиц с зарядом  $-e$ . Если поле в пределах диэлектрика однородно, то при включении  $E$  все положительные заряды сместятся в направлении  $E$  (совпадающем с направлением  $P$ , см. рис. 30) на одинаковое расстояние  $l_1$ , а все отрицательные заряды сместятся в противоположном направлении на одинаковое расстояние  $l_2$ .

При этом через площадку  $S$  пройдет некоторое количество положительных зарядов в направлении слева направо и некоторое количество отрицательных зарядов в направлении справа налево. Раз положительные носители смещаются на расстояние  $l_1$ , то площадку  $S$  пересекут все заряды  $+e$ , которые до включения поля отстояли от нее не более чем на  $l_1$ , т. е. все  $+e$ , заключенные в цилиндрическом объеме с основанием  $S$  и высотой  $l_1$  (на рис. 30 этот объем заштрихован горизонтальной штриховкой). Число этих зарядов равно  $nSl_1$ , а переносимый ими в направлении  $P$  заряд равен  $+enSl_1$ . Аналогично в направлении, противоположном  $P$ , пересекут площадку все отрицательные заряды, заключенные в объеме  $Sl_2$  (на рис. 30 этот объем заштрихован наклонной штриховкой). В результате через площадку пройдет справа налево отрицательный заряд, равный  $-enSl_2$ .

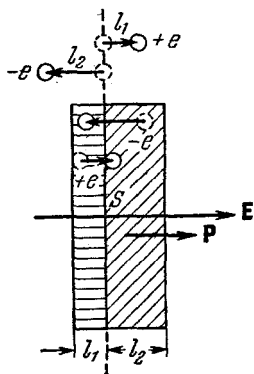


Рис. 30.

Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Поэтому можно считать, что при включении поля через

Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Поэтому можно считать, что при включении поля через

площадку  $S$  переносится в направлении вектора  $\mathbf{P}$  положительный заряд

$$q' = enSl_1 + enSl_2 = e(l_1 + l_2)nS.$$

Но  $l_1 + l_2$  есть расстояние  $l$ , на которое смещаются друг относительно друга положительные и отрицательные заряды в диэлектрике. В результате такого смещения каждая пара зарядов  $+e$  и  $-e$  приобретает дипольный момент  $p = el = e(l_1 + l_2)$ . Таких пар в единице объема  $n$ . Следовательно, произведение  $e(l_1 + l_2)n = eln = pn$  дает модуль вектора поляризации  $P$ . Таким образом, заряд, проходящий при включении поля через площадку  $S$  в направлении вектора  $\mathbf{P}$ , равен

$$q' = PS. \quad (15.4)$$

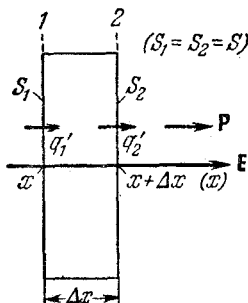


Рис. 31.

Рассмотрим внутри диэлектрика две одинаковые по величине воображаемые площадки  $S_1$  и  $S_2$ . Площадки предполагаем перпендикулярными к  $\mathbf{E}$  и отстоящими друг от друга на  $\Delta x$  (рис. 31). До включения поля суммарный заряд, заключенный в цилиндрическом объеме с основанием  $S$  и высотой  $\Delta x$ , равен нулю (диэлектрик всюду нейтрален). При включении поля через площадку  $S_1$  входит внутрь цилиндра положительный заряд  $q = P_1S$  [см. (15.4),  $P_1$  — модуль вектора  $\mathbf{P}$  в сечении  $S_1$ ]. Одновременно через  $S_2$  выходит из цилиндра положительный заряд  $q'_2 = P_2S$  ( $P_2$  — модуль вектора  $\mathbf{P}$  в сечении  $S_2$ ). В результате в рассматриваемом объеме оказывается избыточный связанный положительный заряд

$$q'_{\text{изб}} = q'_1 - q'_2 = (P_1 - P_2)S. \quad (15.5)$$

Если диэлектрик поляризован однородно ( $\mathbf{P} = \text{const}$ ), то  $P_1 = P_2$  и выражение (15.5) обращается в нуль. Следовательно, в однородно поляризованном диэлектрике избыточные объемные связанные заряды не возникают. Однако, если диэлектрик по какой-либо причине поляризуется неоднородно, равенство  $P_1$  и  $P_2$  уже не выполняется. Причинами неоднородной поляризации могут

быть как неоднородности самого диэлектрика, так и неоднородности поля  $\mathbf{E}$  (правда, не всякие, а лишь такие, какие вызваны присутствием свободных зарядов в месте неоднородности).

Предположим, что степень поляризации диэлектрика изменяется только в направлении оси  $x$ , совпадающей с направлением  $\mathbf{E}$  (рис. 31). Тогда  $P_2 - P_1$  представляет собой приращение  $\Delta P$ , которое получает модуль вектора  $\mathbf{P}$  при смещении вдоль оси  $x$  на  $\Delta x$ . Поскольку  $\Delta P \neq 0$ , в цилиндрическом объеме величиной  $S \Delta x$  возникает избыточный заряд, равный согласно (15.5)

$$q'_{\text{изб}} = - (P_2 - P_1) S = - \Delta P \cdot S.$$

Разделив этот заряд на объем цилиндра  $S \Delta x$ , получим объемную плотность связанных зарядов в сечении с координатой  $x$  ( $\Delta x$  полагаем малым):

$$\rho' = - \frac{\Delta P \cdot S}{S \Delta x}.$$

Сократив на  $S$  и устремив  $\Delta x$  к нулю, придем к формуле

$$\rho' = - \frac{dP}{dx} \quad (15.6)$$

Полученное нами соотношение оказывается справедливым и для диэлектриков с полярными молекулами.

Из выражения (15.5) для избыточного связанного заряда, заключенного в рассматриваемом объеме, вытекает еще одно важное соотношение. Найдем поток вектора  $\mathbf{P}$  через поверхность цилиндра, изображенного на рис. 31. Поток через боковую поверхность равен нулю, так как вектор  $\mathbf{P}$  касателен к этой поверхности. Нормальная составляющая  $\mathbf{P}$  для площадки  $S_2$  равна модулю вектора  $\mathbf{P}$  в сечении 2, т. е.  $P_2$ . Поэтому для

1) В общем случае, когда  $\mathbf{P}$  не совпадает по направлению с осью  $x$  и зависит не только от  $x$ , но и от координат  $y$  и  $z$ , для  $\rho'$  получается формула

$$\rho' = - \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{P} \quad (15.7)$$

(смысл символа  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  разъясняется в § 107).

В случае, для которого мы получили формулу (15.6),  $P_x = P$ ,  $P_y = P_z = 0$ , так что (15.6) есть не что иное, как (15.7), написанная для рассмотренного нами частного случая.

потока через  $S_2$  получается значение  $P_2S$  (напомним, что площадь площадок  $S_1$  и  $S_2$  одинакова и равна  $S$ ). Нормальная составляющая  $\mathbf{P}$  для площадки  $S_1$  равна  $-P_1$  (направления внешней нормали к  $S_1$  и вектора  $\mathbf{P}$  противоположны), так что соответствующий поток равен  $-P_1S$ . Таким образом, полный поток вектора  $\mathbf{P}$  через поверхность цилиндра равен

$$\Phi_P = P_2S - P_1S = (P_2 - P_1)S.$$

Сопоставив полученное нами выражение с правой частью формулы (15.5), приходим к соотношению между избыточным связанным зарядом, заключенным внутри цилиндра, и потоком вектора  $\mathbf{P}$  через поверхность цилиндра:

$$q'_{\text{изб}} = -\Phi_P. \quad (15.8)$$

Избыточный заряд, заключенный в некотором объеме, равен алгебраической сумме находящихся в этом объеме связанных зарядов:  $q'_{\text{изб}} = \sum q'$ . Поэтому (15.8) можно записать в виде

$$\Phi_P = \oint_S P_n dS = -\sum q'. \quad (15.9)$$

Можно доказать, что формула (15.9) остается справедливой и в самом общем случае, т. е. для поверхности любой формы, при произвольной зависимости вектора  $\mathbf{P}$  от координат  $x, y, z$ , а также для диэлектриков как с неполярными, так и с полярными молекулами.

Теперь выясним, что происходит на поверхности поляризованного диэлектрика. Предположим вначале, что внешняя плоская грань диэлектрика перпендикулярна к вектору  $\mathbf{P}$  (рис. 32, а). При включении поля все отрицательные заряды сместятся относительно положительных зарядов влево (против  $\mathbf{P}$ ) на одинаковую величину  $l$  (соответствующую  $l_1 + l_2$  на рис. 30). В результате в поверхностном слое толщины  $l$  останутся только положительные заряды, дающие в сумме  $q'_{\text{изб}} = enSl$  (на противоположной грани образуется такой же по величине отрицательный заряд). Разделив  $q'_{\text{изб}}$  на  $S$ , получим поверхностную плотность связанного заряда:  $\sigma' = eln$ . Но  $eln$ , как мы установили выше, есть модуль

вектора поляризации  $\mathbf{P}$ , поэтому можно написать, что

$$\sigma' = P. \quad (15.10)$$

Перейдем к случаю, когда нормаль  $\mathbf{n}$  к внешней плоской грани диэлектрика образует с вектором  $\mathbf{P}$  произвольный угол  $\alpha$  (рис. 32, б). В этом случае свободен от отрицательных зарядов объем косоугольного цилиндра, равный

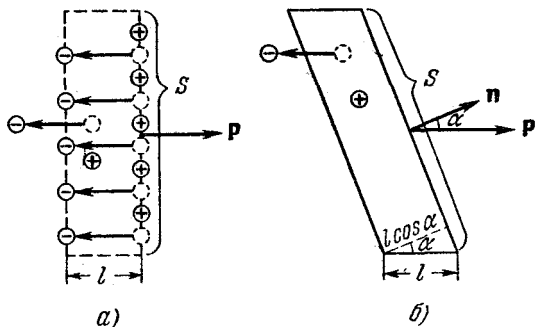


Рис. 32.

$Sl \cos \alpha$ . Содержащийся в нем избыточный заряд равен  $q'_{\text{изб}} = enSl \cos \alpha$ . Разделив этот заряд на  $S$  и учтя, что  $eln = P$ , получим

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (15.11)$$

где  $P_n$  — проекция вектора  $\mathbf{P}$  на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика. При  $\alpha = 0$  проекция  $P_n$  равна  $P$ , и мы приходим к формуле (15.10).

Формула (15.11) дает не только величину, но и знак поверхностного связанного заряда. В тех точках поверхности, где угол между внешней нормалью  $\mathbf{n}$  и вектором  $\mathbf{P}$  острый,  $P_n > 0$  и  $\sigma'$  положительна. В тех точках, где  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{P}$  образуют тупой угол,  $P_n < 0$  и  $\sigma'$  отрицательна.

Выразив согласно (15.2)  $\mathbf{P}$  через  $\kappa$  и  $\mathbf{E}$ , приходим к формуле

$$\sigma' = \kappa \epsilon_0 E_n, \quad (15.12)$$

где  $E_n$  — нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика. В соответствии с (15.12) в тех местах, где линии напряженности выходят из диэлектрика ( $E_n > 0$ ), на поверхности выступают

положительные связанные заряды, там же, где линии напряженности входят в диэлектрик ( $E_n < 0$ ), появляются отрицательные поверхностные заряды.

Формулы (15.11) и (15.12) справедливы и в самом общем случае, когда неоднородный диэлектрик произвольной формы находится в неоднородном электрическом поле. Под  $P_n$  и  $E_n$  в этом случае нужно понимать нормальную составляющую соответствующего вектора, взятую в непосредственной близости к тому элементу поверхности, для которого определяется  $\sigma'$ .

Формула (15.11) имеет такой же вид и в гауссовой системе. Формула же (15.2) имеет в этой системе вид

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (15.13)$$

Соответственно формула (15.12) записывается следующим образом:

$$\sigma' = \kappa E_n. \quad (15.14)$$

## § 16. Описание поля в диэлектриках

Под напряженностью поля в диэлектрике понимают значение  $\mathbf{E}$ , получающееся усреднением истинного поля по физически бесконечно малому объему. Истинное (микроскопическое) поле в диэлектрике сильно меняется в пределах межмолекулярных расстояний. Однако при рассмотрении действия поля на макроскопические тела эти изменения сказываться не будут и действие поля на тело определяется усредненным (макроскопическим) значением  $\mathbf{E}$ .

Макроскопическое поле  $\mathbf{E}$  получается в результате наложения двух полей: поля  $\mathbf{E}_0$ , создаваемого свободными зарядами, т. е. такими зарядами, которые могут передаваться от одного тела к другому при их касании, и поля  $\mathbf{E}'$  связанных зарядов. В силу принципа суперпозиции полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (16.1)$$

Поляризация диэлектрика обусловлена действием суммарного поля (16.1). Следовательно, именно это  $\mathbf{E}$  нужно подставлять в формулы (15.2) и (15.12).

Связанные заряды отличаются от свободных лишь тем, что не могут покинуть пределы молекулы (или атома), в состав которой они входят. В остальном же их свойства таковы, как и у всех прочих зарядов. В ча-

стности, на связанных зарядах начинаются либо заканчиваются  $q'/\epsilon_0$  линий вектора  $\mathbf{E}'$ . Поэтому теорему Гаусса для определяемого выражением (16.1) вектора  $\mathbf{E}$  нужно записывать следующим образом:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum q + \sum q' \right), \quad (16.2)$$

т. е. при вычислении потока вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность учитывать алгебраическую сумму не только свободных, но также и связанных зарядов, заключенных внутри поверхности. Поэтому формула (16.2) оказывается малоприменимой для нахождения вектора  $\mathbf{E}$  в диэлектрике — она выражает свойства неизвестной величины  $\mathbf{E}$  через связанные заряды  $q'$ , которые в свою очередь определяются неизвестной  $\mathbf{E}$  [см. формулу (15.12)].

К счастью, затруднение, обусловленное тем, что  $\mathbf{E}$  зависит также и от связанных зарядов, можно обойти, введя в рассмотрение вспомогательную величину, связанную простым соотношением с вектором  $\mathbf{E}$  и определяемую лишь распределением в пространстве свободных зарядов. Чтобы установить вид этой вспомогательной величины, сопоставим формулу (16.2) с выражением (15.9). С точностью до знака и множителя  $1/\epsilon_0$  правая часть выражения (15.9) совпадает со второй из сумм в формуле (16.2). Это дает возможность исключить из соотношений заряды  $q'$ , заменив их потоком вектора  $\mathbf{P}$ . Легко проверить, что, объединив вместе (15.9) и (16.2), можно получить следующую формулу:

$$\epsilon_0 \Phi_E + \Phi_P = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})_n dS = \sum q. \quad (16.3)$$

Выражение, стоящее в скобках под знаком интеграла, и есть та вспомогательная величина, о которой шла речь выше. Ее обозначают буквой  $\mathbf{D}$  и называют электрическим смещением (или электрической индукцией).

Итак, электрическим смещением (электрической индукцией) называется физическая величина, определяемая соотношением

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (16.4)$$



С использованием этой величины формула (16.3) может быть записана в виде

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q. \quad (16.5)$$

Если свободные заряды распределены внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , формула (16.5) видоизменяется следующим образом:

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV. \quad (16.6)$$

Формулы (16.5) и (16.6) выражают теорему Гаусса для вектора электрического смещения: *поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.*

В вакууме  $\mathbf{P} = 0$ , так что определяемая выражением (16.4) величина  $\mathbf{D}$  превращается в  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  и формулы (16.5) и (16.6) переходят в формулы (8.3) и (8.4).

Единицей потока вектора электрического смещения является кулон ( $\kappa$ ). Согласно (16.5) заряд в 1  $\kappa$  создает через охватывающую его поверхность поток смещения в 1  $\kappa$ .

Подставив в формулу (16.4) выражение (15.2) для  $\mathbf{P}$ , получим

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E}. \quad (16.7)$$

Безразмерную величину

$$\epsilon = 1 + \kappa \quad (16.8)$$

называют относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической проницаемостью среды<sup>1)</sup>. Следовательно, соотношение (16.7) можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (16.9)$$

<sup>1)</sup> Иногда для упрощения формул вводят так называемую абсолютную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ . Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

<sup>2)</sup> В анизотропных диэлектриках направления  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, не совпадают (см. сноску на стр. 53).

Это и есть то простое соотношение между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , о котором речь была выше.

Согласно формулам (5.3) и (16.9) электрическое смещение поля точечного заряда в вакууме равно

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (16.10)$$

Единицей электрического смещения служит кулон на квадратный метр ( $\kappa/\text{м}^2$ ).

Электрическую индукцию<sup>1)</sup> в гауссовой системе определяют соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (16.11)$$

Подстановка в него значения (15.13) для  $\mathbf{P}$  дает

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{E}. \quad (16.12)$$

Величину

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (16.13)$$

называют диэлектрической проницаемостью. Введя эту величину в формулу (16.12), получим

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (16.14)$$

В гауссовой системе электрическая индукция в вакууме совпадает с напряженностью поля  $\mathbf{E}$ . Следовательно, электрическая индукция поля точечного заряда в вакууме определяется формулой (5.4).

Согласно формуле (16.10) электрическое смещение, создаваемое зарядом в 1 к на расстоянии 1 м, составляет

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4\pi} \kappa/\text{м}^2.$$

В гауссовой системе электрическая индукция в этом случае равна

$$D = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-единиц.}$$

Таким образом, 1  $\kappa/\text{м}^2$  соответствует  $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$  СГСЭ-ед. электрической индукции.

В гауссовой системе выражение теоремы Гаусса имеет вид

$$\oint D_n dS = 4\pi \sum q, \quad (16.15)$$

или

$$\oint D_n dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (16.16)$$

<sup>1)</sup> Термин «электрическое смещение» применительно к величине (16.11) не употребляется.

В гауссовой системе заряд в один кулон создает поток вектора электрической индукции, равный  $4\pi q = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$  СГСЭ-единиц. Таким образом, между единицами потока вектора  $\mathbf{D}$  существует соотношение

$$1 \text{ к} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-единиц потока.}$$

Чтобы выяснить физический смысл величин  $\mathbf{D}$  и  $\epsilon$ , рассмотрим несколько примеров полей в диэлектриках.

**1. Поле внутри плоской пластины.** Рассмотрим поле, создаваемое в вакууме двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями. Обозначим напряженность поля  $E_0$ , а электрическое смещение  $D_0 = \epsilon_0 E_0$ . Внесем в это поле пластину из однородного диэлектрика

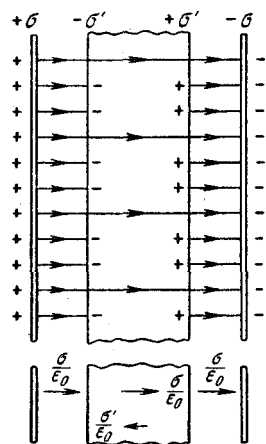


Рис. 33.

и расположим ее так, как показано на рис. 33. Под действием поля диэлектрик поляризуется и на его поверхностях появятся связанные заряды плотности  $\sigma'$ . Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле, напряженность которого согласно формуле (8.6) равна  $E' = \sigma'/\epsilon_0$ . Вне диэлектрика в данном случае  $E' = 0$ . Напряженность поля  $E_0$  равна  $\sigma/\epsilon_0$ . Оба поля направлены навстречу друг другу, следовательно, внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma'). \quad (16.17)$$

Вне диэлектрика  $E = E_0$ .

Поляризация диэлектрика обусловлена полем (16.17). Поскольку оно перпендикулярно к поверхности пластины,  $E_n = E$  и в соответствии с (15.12)  $\sigma' = \kappa \epsilon_0 E$ . Подставляя это значение в формулу (16.17), получаем

$$E = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (16.18)$$

Итак, в рассматриваемом случае относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется поле за счет диэлектрика.

Умножив (16.18) на  $\epsilon_0\epsilon$ , получим электрическое смещение внутри пластины

$$D = \epsilon_0\epsilon E = \epsilon_0 E_0. \quad (16.19)$$

Таким образом, внутри пластины электрическое смещение равно напряженности поля свободных зарядов, умноженной на  $\epsilon_0$ , т. е. совпадает с электрическим смещением внешнего поля  $D_0$ . Вне пластины  $\epsilon = 1$  и  $D$  также равно  $\epsilon_0 E_0$ .

Чтобы найти  $\sigma'$ , выразим в (16.18)  $E$  и  $E_0$  через плотности зарядов

$$\frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}.$$

Отсюда

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma. \quad (16.20)$$

Рис. 33 выполнен в предположении, что  $\epsilon = 3$ . В соответствии с этим густота линий  $E$  в диэлектрике в три раза меньше, чем вне пластины. Линии проведены на одинаковых расстояниях друг от друга, поскольку поле однородно. В данном случае  $\sigma'$  можно найти, не прибегая к формуле (16.20). Действительно, раз напряженность поля внутри пластины в три раза меньше, чем вне ее, то из трех линий напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на свободных зарядах, две должны заканчиваться (соответственно, начинаться) на связанных зарядах. Отсюда вытекает, что плотность связанных зарядов должна быть равной  $2/3$  плотности свободных зарядов.

В гауссовой системе напряженность  $E'$ , создаваемая связанными зарядами  $\sigma'$ , в соответствии с формулой (8.7) равна  $4\pi\sigma'$ . Поэтому соотношение (16.17) имеет вид

$$E = E_0 - E' = E_0 - 4\pi\sigma'.$$

Заменив  $\sigma'$  через  $E_n = E$  по формуле (15.14), получим

$$E = E_0 - 4\pi\epsilon E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + 4\pi\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , так же как и  $\epsilon$  в СИ, показывает, во сколько раз ослабляется поле за счет диэлектрика. Следовательно, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  совпадает с  $\epsilon$  в гауссовой системе. Отсюда, принимая во

внимание (16.8) и (16.13), заключаем, что диэлектрическая восприимчивость в гауссовой системе ( $\kappa_{ГС}$ ) и в СИ ( $\kappa_{СИ}$ ) отличаются друг от друга множителем  $4\pi$ :

$$\kappa_{СИ} = 4\pi\kappa_{ГС}. \quad (16.21)$$

**2. Поле внутри шарового слоя.** Окружим заряженную сферу концентрическим шаровым слоем из однородного диэлектрика (рис. 34). На внутренней поверхности слоя появится связанный заряд  $q'_1$ , распределенный с плотностью  $\sigma'_1$  ( $q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1$ ), на наружной — заряд  $q'_2$ , распределенный с плотностью  $\sigma'_2$  ( $q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2$ ).

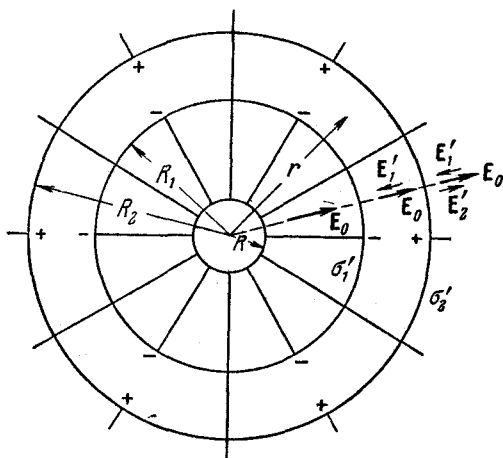


Рис. 34.

Знак заряда  $q'_2$  совпадает со знаком заряда  $q$  сферы, знак  $q'_1$  ему противоположен. Заряды  $q'_1$  и  $q'_2$  создают на расстояниях  $r$ , превышающих соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , поле, совпадающее с полем точечного заряда такой же величины [см. формулу (8.10)]. Внутри поверхностей, по которым они распределены, заряды  $q'_1$  и  $q'_2$  поля не создают. Следовательно, напряженность поля  $E'$  внутри диэлектрика равна

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1^2 \sigma'_1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2}$$

и противоположна по направлению напряженности поля  $E_0$ . Результирующее поле в диэлектрике

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2}, \quad (16.22)$$

как легко видеть, убывает по закону  $1/r^2$ . Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2}, \quad \text{т. е.} \quad E(R_1) = E(r) \frac{r^2}{R_1^2},$$

где  $E(R_1)$  — напряженность поля в диэлектрике в непосредственной близости к внутренней поверхности слоя. Именно эта напряженность определяет величину  $\sigma'_1$ :

$$\sigma'_1 = \kappa\epsilon_0 E(R_1) = \kappa\epsilon_0 E(r) \frac{r^2}{R_1^2} \quad (16.23)$$

(в каждой точке поверхности  $E_n = E$ ).

Подставляя выражение (16.23) в формулу (16.22), получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \kappa\epsilon_0 E(r) r^2}{r^2 R_1^2} = E_0(r) - \kappa E(r),$$

откуда находим, что внутри диэлектрика  $E = \frac{E_0}{\epsilon}$  и, следовательно,  $D = \epsilon_0 E_0$  [ср. с формулами (16.18) и (16.19)].

Заметим, что, поскольку поле внутри диэлектрика изменяется по закону  $1/r^2$ , выполняется соотношение  $\sigma'_1 : \sigma'_2 = R_2^2 : R_1^2$ . Отсюда вытекает, что  $q'_1 = q'_2$ . Следовательно, поля, создаваемые этими зарядами, на расстояниях, превышающих  $R_2$ , взаимно уничтожают друг друга, так что вне шарового слоя  $E' = 0$  и  $E = E_0$ .

Положив  $R_1$  равным  $R$ , а  $R_2 = \infty$ , мы придем к случаю заряженной сферы, погруженной в безграничный однородный диэлектрик. Напряженность поля вне такой сферы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}. \quad (16.24)$$

Такова же будет напряженность поля, создаваемого в однородном безграничном диэлектрике точечным зарядом.

Оба рассмотренных примера характерны тем, что диэлектрик был однородным и ограничивающие его поверхности совпадали с эквипотенциальными поверхностями. Полученный нами в этих случаях результат является общим. Если однородный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, то вектор электрического смещения совпадает с вектором напряженности поля свободных зарядов, умноженным на  $\epsilon_0$ , и, следовательно, напряженность поля внутри диэлектрика в  $\epsilon$  раз меньше, чем напряженность поля свободных зарядов.

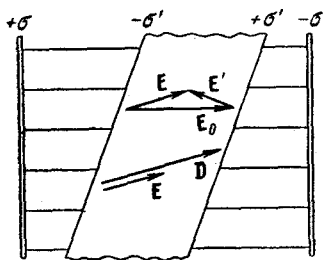


Рис. 35.

Если упомянутые условия не соблюдаются, векторы  $\mathbf{D}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$  не совпадают. На рис. 35 показано поле в пластине диэлектрика, перекошенной относительно плоскостей, несущих свободные заряды. Вектор  $\mathbf{E}'$  перпендикулярен к граням пластины, поэтому  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_0$  неколлинеарны. Вектор  $\mathbf{D}$  направлен так же, как  $\mathbf{E}$ , следовательно,

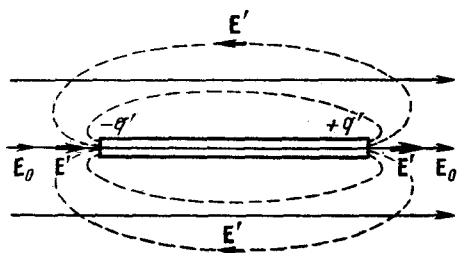


Рис. 36.

$\mathbf{D}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$  не совпадают по направлению. Можно показать, что они не совпадают и по величине.

Во всех рассмотренных выше примерах из-за специально выбранной формы диэлектрика поле  $\mathbf{E}'$  было отлично от нуля только внутри диэлектрика. В общем случае  $\mathbf{E}'$  может быть отлично от нуля и за пределами диэлектрика. Поместим в первоначально однородное поле стержень из диэлектрика (рис. 36). Вследствие по-

ляризации на концах стержня образуются связанные заряды противоположных знаков. Их поле вне стержня эквивалентно полю диполя (линии  $E'$  показаны на рисунке пунктиром). Легко видеть, что результирующее поле  $E$  вблизи концов стержня больше  $E_0$ .

## § 17. Преломление линий электрического смещения

Поле вектора  $D$  можно изобразить с помощью линий электрического смещения (мы будем для краткости называть их линиями смещения), направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий вектора  $E$  (см. § 7).

Поместим в однородное поле  $E_0$  две сложенные вместе плоскопараллельные однородные пластины из разных диэлектриков (рис. 37). При разных  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  плотности зарядов  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  также будут различными. Следовательно, на поверхности, по которой соприкасаются

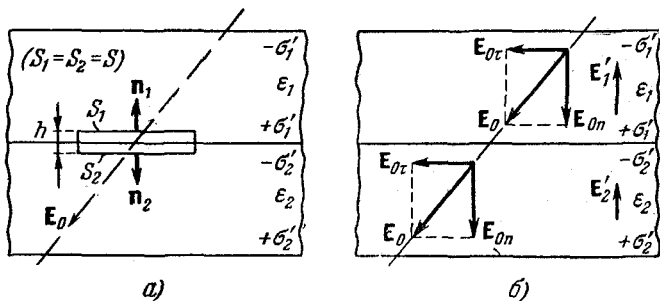


Рис. 37.

пластины, возникнет избыточный связанный заряд  $q'_{изб}$ . Однако, как мы знаем, линии вектора  $D$  могут начинаться и заканчиваться только на свободных зарядах. Поэтому линии смещения пройдут через поверхность раздела двух диэлектриков, не прерываясь. Они лишь, как мы покажем ниже, претерпевают на этой поверхности излом.

Найдем соотношения между нормальными, а также между тангенциальными (по отношению к поверхности раздела) составляющими векторов  $D$  и  $E$  в первом и во втором диэлектриках.



Рассмотрим воображаемый цилиндр высоты  $h$ , основания которого  $S_1$  и  $S_2$  расположены по разные стороны поверхности раздела (рис. 37, а). Применим к этому цилиндру теорему Гаусса (16.5). Внутри цилиндра имеются лишь связанные заряды, свободных зарядов по предположению там нет. Поэтому правая часть в формуле (16.5) обращается в нуль. Потоком  $\mathbf{D}$  через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как  $h$  мы будем стремить к нулю. Поток через верхнее основание цилиндра равен  $D_{1n}S_1$ , где  $D_{1n}$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  в первом диэлектрике в непосредственной близости к поверхности раздела. Аналогично поток через нижнее основание есть  $D_{2n}S_2$ , где  $D_{2n}$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  во втором диэлектрике также в непосредственной близости к поверхности раздела диэлектриков. Сложив эти два потока, мы получим полный поток, который по условию должен быть равен нулю:

$$\Phi_D = D_{1n}S_1 + D_{2n}S_2 = (D_{1n} + D_{2n})S = 0.$$

Отсюда следует, что  $D_{1n} = -D_{2n}$ . Знаки составляющих оказались различными вследствие того, что нормали  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если проектировать  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  на одну и ту же нормаль, то получится, что

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (17.1)$$

Заменяя согласно (16.9) составляющие  $\mathbf{D}$  соответствующими составляющими вектора  $\mathbf{E}$ , умноженными на  $\epsilon_0\epsilon$ , получим соотношение

$$\epsilon_0\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0\epsilon_2 E_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (17.2)$$

Теперь обратимся к тангенциальным составляющим векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Согласно формуле (16.1)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ . Вектор  $\mathbf{E}_0$  в обоих диэлектриках по предположению одинаков. Векторы  $\mathbf{E}'$ , как видно из рис. 37, б, направлены по нормали к поверхности раздела, вследствие чего оказывают влияние только на нормальные составляющие вектора  $\mathbf{E}$ . Отсюда заключаем, что тангенциальные со-

ставляющие вектора  $\mathbf{E}$  в обоих диэлектриках должны быть одинаковыми:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (17.3)$$

Заменяя согласно (16.9) составляющие  $\mathbf{E}$  соответствующими составляющими вектора  $\mathbf{D}$ , деленными на  $\epsilon_0\epsilon$ , получим соотношение

$$\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_0\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_0\epsilon_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (17.4)$$

Резюмируя, можно сказать, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора  $\mathbf{D}$  и нормальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  при переходе через границу раздела претерпевают разрыв.

Соотношения (17.1) — (17.4) справедливы и для границы диэлектрика с вакуумом. В этом случае одну из диэлектрических проницаемостей нужно положить равной единице.

На рис. 38 показаны линии смещения для тех же пластин, что и на рис. 37. Вне пластин  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}_0$ . На границах диэлектриков линии терпят излом (преломляются), вследствие чего угол  $\alpha$  между нормалью к поверхности раздела и линией  $\mathbf{D}$  изменяется. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} : \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}},$$

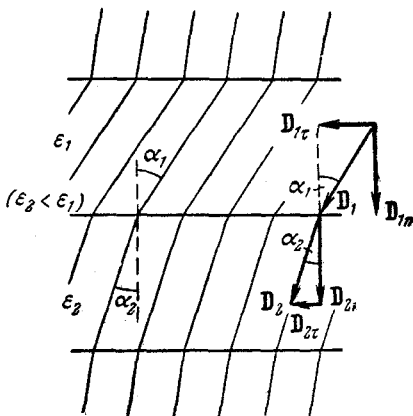


Рис. 38.

откуда с учетом формул (17.1) и (17.4) получается закон преломления линий электрического смещения

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (17.5)$$

При переходе в диэлектрик с меньшей  $\epsilon$  угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, следовательно, линии располагаются реже; при переходе в диэлектрик с большей  $\epsilon$  линии смещения, напротив, сгущаются.

## § 18. Силы, действующие на заряд в диэлектрике

Если в электрическое поле в вакууме внести заряженное тело таких размеров, что внешнее поле в пределах тела можно считать однородным (в этом случае тело можно рассматривать как точечный заряд), то на тело будет действовать сила

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}. \quad (18.1)$$

Чтобы заряженное тело поместить в поле, созданное в диэлектрике, в последнем нужно сделать полость. В жидком или газообразном диэлектрике такую полость образует само тело, вытесняя диэлектрик из занимаемого им объема. На поверхности полости возникают связанные заряды, поэтому поле внутри полости будет отлично от поля  $\mathbf{E}$  в сплошном диэлектрике. Таким образом, силу, действующую на помещенное в полость заряженное тело, нельзя вычислять как произведение заряда  $q$  на напряженность поля  $\mathbf{E}$ .

Вычисляя силу, действующую на заряженное тело в жидком или газообразном диэлектрике, нужно учитывать еще одно обстоятельство. При поляризации диэлектрики слегка деформируются. Это явление называется электрострикцией. Из-за электрострикции на границе с телом в диэлектрике возникают механические натяжения, что приводит к появлению дополнительной механической силы, действующей на тело. В случае полости в твердом диэлектрике подобная сила, естественно, не возникает.

Таким образом, сила, действующая на заряженное тело в диэлектрике, вообще говоря, не может быть определена по формуле (18.1), где  $\mathbf{E}$  — напряженность поля

в сплошном диэлектрике, и задача ее вычисления обычно бывает весьма сложной. Можно, однако, показать, что в том случае, когда заряженное тело погружено в однородный диэлектрик, заполняющий все пространство, где поле отлично от нуля, результирующая действующих на тело электрических и механических сил равна силе (18.1). Напряженность поля, создаваемого в однородном безграничном диэлектрике точечным зарядом, определяется формулой (16.24). Следовательно, для силы взаимодействия двух точечных зарядов, погруженных в однородный безграничный<sup>1)</sup> диэлектрик, можно написать

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (18.2)$$

Формула (18.2) выражает закон Кулона для зарядов, находящихся в диэлектрике. Она применима только для жидких и газообразных диэлектриков.

Теперь найдем силу, действующую на точечный заряд, помещенный в полость внутри твердого диэлектрика. Рассмотрим несколько случаев.

**1. Узкая поперечная щель.** Сделаем в однородно поляризованном диэлектрике полость в виде узкой щели, перпендикулярной к векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  (рис. 39). На поверхностях диэлектрика, ограничивающих щель, возникнут связанные заряды, плотность которых  $\sigma' = P$ . В середине щели они создадут дополнительное поле напряженности  $\frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$ , направленное так же, как и поле  $\mathbf{E}$  в сплошном диэлектрике. Следовательно, напряженность поля в середине щели равна  $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ . Согласно (16.4) эта величина совпадает с  $\mathbf{D}/\epsilon_0$  в диэлектрике. Таким образом, сила, действующая на заряд, помещенный в середине узкой поперечной щели, равна  $q \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = q\epsilon\mathbf{E}$ .

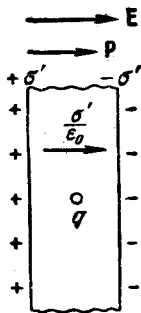


Рис. 39.

<sup>1)</sup> Практически достаточно, чтобы границы диэлектрика отстояли от зарядов на расстояние, значительно превышающее расстояние между ними.

**2. Узкая продольная полость.** Если полость в диэлектрике имеет вид узкого длинного цилиндра с образующими, параллельными векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  (рис. 40), напряженность поля в ее середине будет такой же, как в сплошном диэлектрике. Это объясняется тем, что связанные заряды, возникающие на торцах полости, малы по величине (мала площадь торца) и далеко отстоят от середины полости; поэтому создаваемое ими дополнительное поле пренебрежимо мало. Сила, действующая на заряд, помещенный в середине узкой продольной полости, равна  $qE$ .

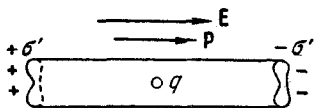


Рис. 40.

сила, действующая на заряд, помещенный в середине узкой продольной полости, равна  $qE$ .

**3. Полость сферической формы.** Вычислим напряженность дополнительного поля в центре сферической полости радиуса  $R$  (рис. 41). Нормальная составляющая вектора поляризации для разных точек поверхности полости изменяется в пределах от  $P$  до нуля. Соответственно изменяется и плотность связанных зарядов  $\sigma'$ .

Будем характеризовать точки поверхности полярным углом  $\vartheta$ , отсчитываемым от направления, противоположного  $\mathbf{E}$ , и азимутальным углом  $\alpha$ . Легко видеть, что  $\sigma' = P_n = P \cos \vartheta$ . Из соображений симметрии ясно, что создаваемое связанными зарядами поле имеет такое же направление, как и поле в диэлектрике  $\mathbf{E}$ . Поэтому для его вычисления нужно от каждого вектора напряженности  $d\mathbf{E}_{\text{доп}}$ , создаваемого связанным зарядом элемента поверхности  $dS$ , взять составляющую  $dE_{\parallel}$  в направлении  $\mathbf{E}$  и затем сложить эти составляющие для всех элементов поверхности.

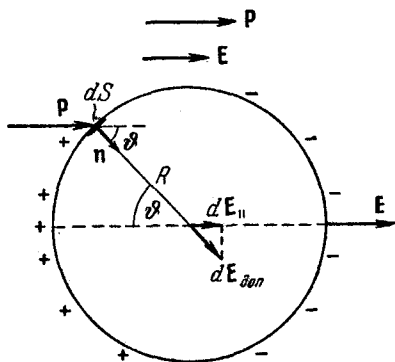


Рис. 41.

Выразим элемент поверхности в сферической системе координат:  $dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ . На нем помещается за-

ряд  $dq = \sigma' dS$ , который создает в центре сферы поле напряженности

$$dE_{\text{доп}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma' dS}{R^2} = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \vartheta R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.$$

Составляющая  $dE_{\text{доп}}$  по направлению  $\mathbf{E}$  равна

$$dE_{\parallel} = dE_{\text{доп}} \cos \vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.$$

Проинтегрировав это выражение по  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$  и по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi$ , получим напряженность дополнительного поля

$$E_{\text{доп}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^{\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{1}{3} \frac{P}{\epsilon_0}.$$

Следовательно, напряженность поля в центре сферической полости равна

$$\mathbf{E} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (18.3)$$

В гауссовой системе эта формула имеет вид:

$$\mathbf{E} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{P}. \quad (18.4)$$

Каждая отдельно взятая молекула диэлектрика помещается как бы в центре сферической полости. Поэтому действующее на нее поле должно быть ближе к значению (18.3), чем к  $\mathbf{E}$ . Строгий расчет показывает, что поле, действующее на отдельно взятую молекулу, точно совпадает с (18.3) только в случае кристаллического диэлектрика кубической системы. Для жидких и газообразных диэлектриков напряженность поля, действующего на отдельную молекулу, определяется значением (18.3) лишь приближенно.

В § 13 при рассмотрении поляризации молекул мы по существу предполагали, что поле, деформирующее упругую молекулу, т. е. поле, фигурирующее в формуле (13.4), есть среднее макроскопическое поле  $\mathbf{E}$ . Теперь мы можем утверждать, что это не так. Среднее макроскопическое поле создается всеми молекулами диэлектрика,

включая и рассматриваемую молекулу. В формулу же (13.4) нужно подставлять среднее поле, создаваемое всеми молекулами кроме той, дипольный момент которой мы хотим определить. Последнее поле, как мы установили, ближе к значению (18.3), чем к  $E$ . Учтя это обстоятельство, выражение для индуцированного дипольного момента неполярной молекулы нужно писать в виде

$$\mathbf{p} = \beta \epsilon_0 \left( \mathbf{E} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right),$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации диэлектрика. Умножив этот момент на число молекул в единице объема  $n$ , получим дипольный момент единицы объема, т. е. вектор поляризации  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\beta\epsilon_0\mathbf{E} + \frac{1}{3}n\beta\mathbf{P}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P} = \frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta} \epsilon_0\mathbf{E}.$$

Сопоставив эту формулу с выражением  $\mathbf{P} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}$  [см. (15.2)], приходим к соотношению

$$\frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta} = \kappa. \quad (18.5)$$

При  $n\beta \ll 1$  (что выполняется для газов при не очень высоких давлениях) выражение (18.5) переходит в формулу (13.4).

Разрешив (18.5) относительно  $n\beta$ , получим, что

$$\frac{1}{3}n\beta = \frac{\kappa}{3 + \kappa}.$$

Наконец, заменив в соответствии с (16.8)  $\kappa$  через  $\epsilon - 1$ , придем к формуле

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\beta}{3}, \quad (18.6)$$

которая носит название формулы Клаузиуса — Мосотти. Эта формула дает хорошее согласие с опытом для неполярных диэлектриков в газообразном и жидком состояниях, а также для кристаллов кубической системы.

## § 19. Сегнетоэлектрики

Существует группа веществ, которые могут обладать спонтанной (самопроизвольной) поляризацией в отсутствие внешнего поля. Это явление было открыто первоначально для сегнетовой соли<sup>1)</sup>, в связи с чем все подобные вещества получили название сегнетоэлектриков. Первое детальное исследование электрических свойств сегнетовой соли было осуществлено советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей:

1. В то время как у обычных диэлектриков  $\epsilon$  составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например,  $\epsilon = 81$ ), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч.

2. Зависимость  $D$  от  $E$  не является линейной, следовательно, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от напряженности поля (ветвь 1 на кривой рис. 42).

3. При изменениях поля значения вектора поляризации  $P$  (а следовательно, и  $D$ ) отстают от напряженности поля  $E$ , в результате чего  $P$  и  $D$  определяются не только величиной  $E$  в данный момент, но и предшествующими значениями  $E$ , т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом (от греческого «гистерезис» — запаздывание). При циклических изменениях поля зависимость  $P$  от  $E$  следует изображенной на рис. 42 кривой, называемой петлей гистерезиса. При первоначальном включении поля поляризация растет с  $E$  в соответствии с ветвью кривой 1. Уменьшение  $P$  происходит по ветви 2. При обращении  $E$  в нуль вещество сохраняет значение поляризации  $P_r$ , называемое остаточной поляризацией. Только под действием противоположно направленного поля напряженности  $E_c$  поляризация становится равной

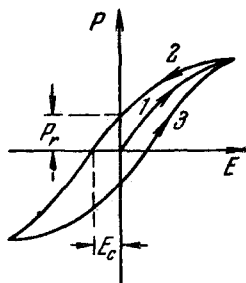


Рис. 42.

<sup>1)</sup> Так называют двойную калиево-натриевую соль винной кислоты  $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ .



нулю. Это значение напряженности поля называется коэрцитивной силой. При дальнейшем изменении  $E$  получается ветвь 3 петли гистерезиса и т. д.

Поведение поляризации сегнетоэлектриков аналогично поведению намагничивания ферромагнетиков (см. § 54). По этой причине сегнетоэлектрики иногда называют ферроэлектриками. Сегнетоэлектриками могут быть только кристаллические вещества, причем такие, у которых отсутствует центр симметрии. Так, например, кристаллы сегнетовой соли принадлежат к ромбической системе (см. т. I, § 138). Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях одинаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же кристалл распадается на области, в пределах каждой из которых дипольные моменты параллельны друг другу, однако направления поляризации разных областей бывают различны, так что результирующий момент всего кристалла может быть равен нулю. Области спонтанной (самопроизвольной) поляризации называются также доменами. Под действием внешнего поля моменты доменов поворачиваются как целое, устанавливаясь по направлению поля.

Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, выше которой вещество утрачивает необычные свойства и становится нормальным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: при  $-15^{\circ}\text{C}$  и  $+22,5^{\circ}\text{C}$ , причем она ведет себя как сегнетоэлектрик лишь в температурном интервале, ограниченном указанными значениями. При температуре ниже  $-15^{\circ}\text{C}$  и выше  $+22,5^{\circ}\text{C}$  электрические свойства сегнетовой соли обычны.

Очень важное практическое значение имеет открытый советским физиком Б. М. Вулом и его сотрудниками сегнетоэлектрик — метатитанат бария ( $\text{BaTiO}_2$ ), точка Кюри которого равна  $125^{\circ}\text{C}$ .

## § 20. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект

Некоторые кристаллы, не имеющие центра симметрии (в том числе все сегнетоэлектрики), при деформации поляризуются. Это явление называется прямым пьезоэлектрическим эффектом или просто пье-

зоэлектрическим эффектом. Величина поляризации пропорциональна деформации, а следовательно, в пределах упругости и механическому напряжению. При изменении знака деформации знак поляризации меняется также на обратный.

Важнейшими пьезоэлектриками (т. е. пьезоэлектрическими кристаллами) являются кварц, сегнетова соль, метатитанат бария и др.

Кристаллы кварца принадлежат к гексагональной системе. Если вырезать из кристалла кварца пластинку, перпендикулярную к кристаллографической оси  $a$  (см. т. I, § 138), и подвергнуть ее сжатию вдоль этой оси, то на гранях пластинки появляются связанные заряды (на рис. 43 пластинка расположена так, что кристаллографическая ось  $c$  направлена на нас). То же самое происходит, если пластинку подвергнуть

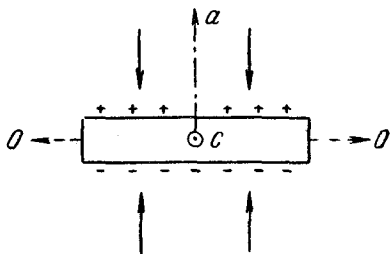


Рис. 43.

растяжению вдоль оси  $OO$ , перпендикулярной к кристаллографическим направлениям  $a$  и  $c$ . В последнем случае эффект называют поперечным, в первом случае — продольным. При изменении знака деформации (т. е. при растяжении вдоль  $a$  или сжатии вдоль  $OO$ ) на гранях пластинки появляются связанные заряды другого знака. Для практического использования пьезоэлектрического эффекта на грани пластинки накладывают металлические обкладки. Если эти обкладки включить в замкнутую цепь, то при изменениях деформации кристалла в цепи будут возникать импульсы тока. Такие процессы протекают, например, в пьезоэлектрическом микрофоне — знакопеременная деформация пластинки под действием звуковой волны преобразуется в переменный ток той же частоты.

Пьезоэлектрический эффект имеет следующее объяснение. Решетку всякого кристалла можно представить в виде нескольких образованных разными атомами или группами атомов более простых решеток, вставленных друг в друга. Если кристалл не имеет центра симметрии,

то при деформации происходит сдвиг простых решеток друг относительно друга, который может вызвать появление у кристалла электрического момента.

Наряду с описанным выше прямым эффектом, у пьезоэлектрических кристаллов наблюдается обратный эффект, заключающийся в том, что поляризация под действием электрического поля сопровождается механическими деформациями кристалла. Таким образом, если на металлические обкладки изображенной на рис. 43 пластинки подать переменное электрическое напряжение, то пластинка будет попеременно растягиваться и сжиматься вдоль оси  $a$  (одновременно происходят сжатие и растяжение вдоль оси  $OO$ ), т. е. в ней возбуждятся механические колебания. Эти колебания станут особенно интенсивными, если частота переменного напряжения совпадает с собственной (резонансной) частотой пластинки.

Такие настроенные в резонанс пьезоэлектрические пластинки используются для возбуждения ультразвуковых волн (см. т. I, § 90), для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний в радиотехнике и т. п.

Обратный пьезоэлектрический эффект следует отличать от электрострикции. Последняя имеет место во всех диэлектриках — твердых, жидких и газообразных. Пьезоэлектрический эффект возникает только в некоторых кристаллах. Далее, деформация при электрострикции зависит от поля квадратично и при изменении направления поля знака не меняет. Пьезоэлектрический эффект зависит от поля линейно и при изменении направления поля меняет знак.

## ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

## § 21. Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому равновесие зарядов на проводнике может наблюдаться лишь при выполнении следующих условий:

1. Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю

$$E = 0. \quad (21.1)$$

В соответствии с (11.3) это означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным ( $\varphi = \text{const}$ ).

2. Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности

$$E = E_n. \quad (21.2)$$

Следовательно, в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд  $q$ , то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Представим себе мысленно произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. Поскольку при равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует, поток вектора электрического смещения через поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности также будет

равна нулю. Это справедливо для поверхности любых размеров, проведенной внутри проводника произвольным образом. Следовательно, при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов — все они расположатся по поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ .

Так как в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Таким образом, избыточный заряд распределяется на полном проводнике так же, как и на сплошном, т. е. по

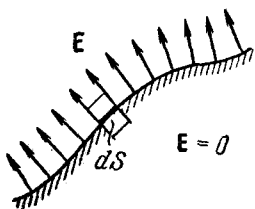


Рис. 44.

его наружной поверхности. На поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут. Этот вывод вытекает также из того, что одноименные элементарные заряды, образующие данный заряд  $q$ , взаимно отталкиваются и, следовательно, стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга.

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями величинами  $dS$ , одно из которых расположено внутри, а другое вне проводника (рис. 44). Поток вектора электрического смещения через эту поверхность равен  $DdS$ , где  $D$  — величина смещения в непосредственной близости к поверхности проводника. Действительно, поток через внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $E$ , а значит и  $D$ , равно нулю. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля  $E$  направлена по нормали к поверхности проводника. Следовательно, для выступающей наружу боковой поверхности цилиндра  $D_n = 0$ , а для внешнего основания  $D_n = D$  (внешнее основание предполагается расположенным очень близко к поверхности проводника). Внутрь цилиндра попадает свободный заряд  $\sigma dS$  ( $\sigma$  — плотность заряда в данной точке поверхности проводника). Применяя к цилиндрической поверхности теорему Гаусса, получим  $DdS = \sigma dS$ , т. е.  $D = \sigma$ . Отсюда

для напряженности поля вблизи поверхности проводника получаем

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (21.3)$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник [ср. этот результат с формулами (8.9) и (8.11) для цилиндра и сферы, находящихся в вакууме].

В гауссовой системе эта формула имеет вид

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}. \quad (21.4)$$

Рассмотрим поле, создаваемое изображенным на рис. 45 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности

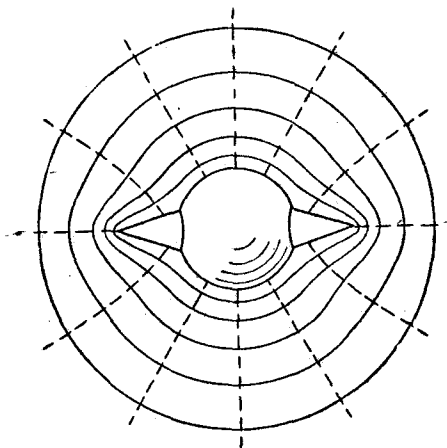


Рис. 45.

имеют характерную для точечного заряда форму сферы (на рисунке для экономии места сферическая поверхность изображена на небольшом расстоянии от проводника; пунктиром показаны линии напряженности поля). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая, как мы знаем,

является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит и напряженность поля здесь больше. Отсюда согласно (21.3) получается, что плотность зарядов на выступах особенно велика. К тому же выводу можно прийти, учитывая, что из-за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Вблизи углублений в проводнике (рис. 46) эквипотенциальные поверхности расположены реже. Соответственно напряженность поля и плотность зарядов в этих местах будет меньше. Вообще, плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности — она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность зарядов на остриях. Поэтому напряженность поля вблизи остриев может быть настолько большой, что происходит ионизация молекул газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем  $q$ , притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и  $q$ , начинают двигаться от проводника, увлекая с собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ощутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается, он как бы стекает с острия и уносится ветром. Поэтому такое явление называют истечением заряда с острия.

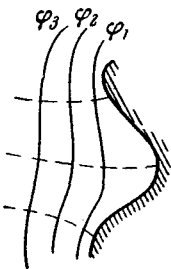


Рис. 46.

§ 22. Проводник во внешнем электрическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные в направлении вектора  $E$ , отрицательные — в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 47; пунктиром показаны линии напряженности внешнего поля). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Таким образом, накапливание зарядов

у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не будут выполнены условия (21.1) и (21.2), т. е. пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника перпендикулярными к его поверхности (рис. 47). Следовательно, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий

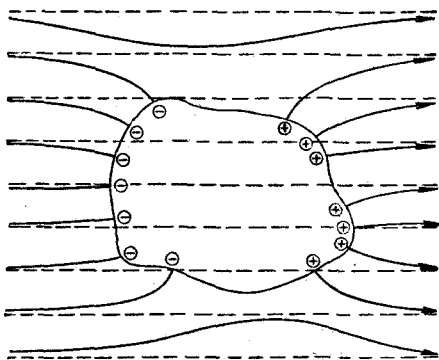


Рис. 47.

напряженности — они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее также обращается в нуль. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим футляром (экраном). Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

Наличие острия у проводящего тела может приводить не только к стеканию зарядов с него, но и к «натеканию» на проводник зарядов с других тел. Под



действием поля, создаваемого заряженным телом 1 (рис. 48); на теле 2 возникают индуцированные заряды. Сильное поле, создаваемое вблизи острия находящимся на нем индуцированным зарядом, ионизует молекулы газа. Ионы разных знаков движутся в противоположные стороны и оседают на соответствующих телах. В результате заряд  $q$  тела 1 уменьшается, а на проводнике с острием накапливается заряд, противоположный с  $q$ . Заряд как бы переходит от заряженного тела 1 к первоначально незаряженному телу 2.

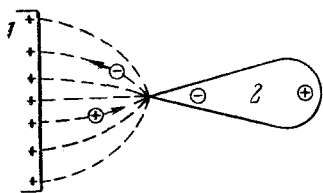


Рис. 48.

Рис. 48.

Рис. 48.

### § 23. Генератор Ван-де-Граафа

В 1929 г. Ван-де-Грааф предложил конструкцию электростатического генератора, основывающегося на том, что избыточные заряды располагаются по внешней поверхности проводника. Схема такого генератора показана на рис. 49. Полый металлический шар, называемый кондуктором, устанавливается на изолирующей колонне. Внутри шара введена надежная на валики бесконечная движущаяся лента из шелка или прорезиненной ткани. У основания колонны вблизи ленты установлена гребенка из остриев, с которых стекает на ленту заряд, возбуждаемый генератором напряжения (ГН) на несколько десятков киловольт. Внутри кондуктора установлена вторая гребенка, на острия которой переходит заряд с ленты. Эта гребенка соединена с кондуктором, так что снятый с ленты заряд сразу же переходит на его внешнюю поверхность. По мере накопления на кондукторе зарядов потенциал его рас-

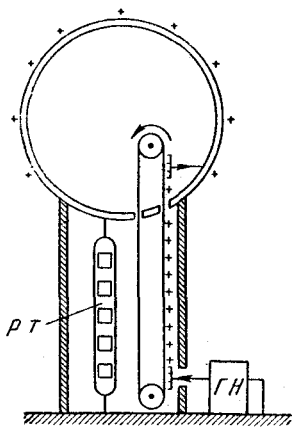


Рис. 49.

тет, пока утечка заряда не станет равна подводимому заряду. Утечка происходит в основном за счет ионизации газа вблизи поверхности кондуктора (возникающее вследствие этого прохождение тока через газ называется коронным разрядом или просто коронированием; см. § 91). Чтобы уменьшить коронирование, поверхность кондуктора тщательно шлифуют (вспомним, что напряженность поля вблизи выступов бывает больше).

Напряженность поля, при которой возникает разряд в воздухе при атмосферном давлении, составляет примерно  $30 \text{ кв/см}$ . Такая напряженность достигается вблизи поверхности шара тем быстрее, чем меньше его радиус [см. формулу (16.24)]. Поэтому для получения больших разностей потенциалов приходится делать кондуктор больших размеров (до  $10 \text{ м}$  в диаметре). Электрическая прочность газа (т. е. напряженность поля, при которой начинается разряд) возрастает с повышением давления. Поэтому удается заметно уменьшить размеры генератора, помещая его в атмосферу сжатого газа. Генератор целиком монтируют в баке, который заполняют газом (азотом или имеющим повышенную электрическую прочность фреоном<sup>1)</sup>) под давлением порядка  $10 \text{ ат}$ . Предельная разность потенциалов, которую можно практически получить с помощью генератора Ван-де-Граафа, составляет около  $10^7 \text{ в}$ .

Генератор Ван-де-Граафа используется для ускорения заряженных частиц в опытах по исследованию атомного ядра. Ускорение частиц осуществляется в разрядной трубке (РТ), к электродам которой прикладывается разность потенциалов, получаемая на генераторе. Иногда генератор Ван-де-Граафа строят в виде двух одинаковых расположенных рядом колонн, кондукторы которых заряжаются разноименно. В этом случае разрядная трубка включается между кондукторами.

## § 24. Емкость

Сообщенный проводнику заряд  $q$  распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Если проводнику, уже несущему заряд  $q$ , сообщить еще заряд той же

<sup>1)</sup> Фреоном называется дихлордифторметан  $\text{CCl}_2\text{F}_2$ .

величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый, в противном случае он создаст в проводнике поле, не равное нулю.

Следует оговорить, что это справедливо лишь в том случае, если увеличение заряда на проводнике не вызовет изменений в распределении зарядов на окружающих телах. Таким образом, различные по величине заряды распределяются на удаленном от других тел (уединенном) проводнике подобным образом, т. е. отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одно и то же. Отсюда вытекает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду. Действительно, увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Следовательно, в такое же число раз возрастет работа переноса по любому пути единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т. е. потенциал проводника. Таким образом, для уединенного проводника

$$q = C\varphi. \quad (24.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между потенциалом и зарядом называется электроемкостью (сокращенно просто емкостью) проводника. Из (24.1) следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (24.2)$$

Емкость численно равна заряду, сообщению которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Вычислим потенциал заряженного шара радиуса  $R$ . Между разностью потенциалов и напряженностью поля существует соотношение (11.7). Поэтому потенциал шара  $\varphi$  можно найти, проинтегрировав выражение (16.24) по  $r$  от  $R$  до  $\infty$  (потенциал на бесконечности полагаем равным нулю):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (24.3)$$

Сопоставляя (24.3) с (24.2), находим, что емкость уединенного шара радиуса  $R$ , погруженного в однородный безграничный диэлектрик с относительной проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (24.4)$$

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 в при сообщении ему заряда в 1 к. Эта единица емкости называется фарадой ( $\phi$ ).

В гауссовой системе формула для емкости уединенного шара имеет вид  $C = \epsilon R$ . Поскольку  $\epsilon$  — безразмерная величина, емкость имеет размерность длины. За единицу емкости принимается емкость уединенного шара радиуса 1 см, находящегося в вакууме. Эту единицу емкости называют сантиметром. Согласно (24.2)

$$1 \phi = \frac{1 \text{ к}}{1 \cdot \text{в}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ СГСЭ} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Емкостью в одну фараду обладал бы уединенный шар радиуса  $9 \cdot 10^9$  м, т. е. радиусом, примерно в 1500 раз большим радиуса Земли. Таким образом, фарада — очень большая величина. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарады — микрофарадой ( $\text{мкф}$ ) и микромикрофарадой ( $\text{мкмкф}$ ) или пикофарадой ( $\text{пф}$ ), которые определяются следующим образом:

$$1 \text{ мкф} = 10^{-6} \phi,$$

$$1 \text{ пф} = 10^{-12} \phi = 0,9 \text{ см.}$$

## § 25. Конденсаторы

Уединенные проводники обладают малой емкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет емкость всего лишь 700 мкф. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливали бы на себе («конденсировали») заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых конденсаторами, положен тот факт, что электроемкость проводника возрастает при приближении к нему других

тел. Действительно, под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника  $q$ , располагаются ближе к проводнику, чем одноименные с  $q$ , и, следовательно, оказывают большее влияние на его потенциал. Поэтому при поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле (24.2) это означает увеличение емкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют его обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали воздействия на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было полностью сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 8) две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы.

Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, свободные заряды, возникающие на разных обкладках, имеют одинаковую величину  $q$  и различны по знаку. Под емкостью конденсатора понимается физическая величина, пропорциональная заряду  $q$  и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (25.1)$$

Емкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенного проводника.

Величина емкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок и величиной зазора между ними), а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками. Найдем формулу для емкости плоского кон-

денсатора. Если площадь обкладки  $S$ , а заряд на ней  $q$ , то напряженность поля между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$$

(мы воспользовались формулой (8.6) и учли возможность наличия диэлектрика в зазоре между пластинками).

Согласно соотношению (11.8), разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S},$$

откуда для емкости плоского конденсатора получается следующая формула:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (25.2)$$

где  $S$  — площадь обкладки,  $d$  — величина зазора между обкладками,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.

Из формулы (25.2) следует, что размерность электрической постоянной  $\epsilon_0$  равна размерности емкости, деленной на размерность длины (напомним, что  $\epsilon$  — безразмерная величина). В соответствии с этим единицы, в которых измеряется  $\epsilon_0$ , носят название «фарада на метр» ( $\text{ф/м}$ ) [см. (4.2)].

В гауссовой системе формула для емкости плоского конденсатора имеет вид

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (25.3)$$

Вычислим емкость цилиндрического и сферического конденсаторов. Заменяя в формуле (8.8)  $\lambda$  через  $q/l$  ( $l$  — длина обкладок) и учтя возможность наличия диэлектрика, для напряженности поля между обкладками цилиндрического конденсатора получим следующее выражение:

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{lr}.$$

Разность потенциалов между обкладками находим путем интегрирования:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

( $R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней обкладок).

Разделив  $q$  на найденное значение  $\varphi_1 - \varphi_2$ , получим емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (25.4)$$

Если зазор между обкладками относительно мал, т. е. выполняется условие  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , знаменатель формулы (25.4) можно преобразовать следующим образом:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{d}{R_1} \quad 1).$$

Выражение  $2\pi R_1 l$  дает площадь обкладки  $S$ . Таким образом, в случае малого зазора емкость цилиндрического конденсатора можно вычислять приближенно по формуле (25.2).

Согласно (8.10) напряженность поля между обкладками сферического конденсатора равна

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

(как и в предыдущих случаях, учтена возможность наличия диэлектрика в зазоре между обкладками).

Найдем разность потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

( $R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней обкладок).

1) Мы воспользовались известной формулой:  $\ln(1+x) \approx x$ , справедливой для  $x \ll 1$ .

Отсюда для емкости получается выражение

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (25.5)$$

В случае, когда  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , емкость сферического конденсатора также можно вычислять по формуле для емкости плоского конденсатора. В самом деле, выражение  $4\pi R_1 R_2$  в этом случае примерно равно площади  $S$  любой из обкладок. Поэтому формула (25.5) может быть приближенно записана в виде (25.2).

Из выражений (25.2), (25.4) и (25.5) ясно, почему введение между обкладками прослойки из сегнетоэлектрика (например, метатитаната бария) позволяет получить при небольших размерах конденсатора большую емкость.

Помимо емкости, каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением<sup>1)</sup>  $U_{\max}$ , которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

## § 26. Соединение конденсаторов

Располагая некоторым набором конденсаторов, можно значительно расширить число возможных значений емкости и рабочего напряжения, если применить соединение конденсаторов в батареи.

При параллельном соединении (рис. 50) одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал  $\varphi_1$ , а другая  $\varphi_2$ . Следовательно, на каждой из двух систем обкладок накапливается суммарный заряд

$$q = \sum q_k = \sum C_k (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k.$$

Емкость батареи получим, разделив суммарный заряд на приложенное к ней напряжение. В результате

---

<sup>1)</sup> Электрическим напряжением  $U$  в данном случае называется разность потенциалов между обкладками [см. формулу (32.5)]. Напряжение не следует смешивать с напряженностью поля.



получим

$$C = \sum C_k. \quad (26.1)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов емкости складываются. Предельное напряжение батареи, очевидно, равно наименьшему из значений  $U_{\max}$  для конденсаторов, включенных в батарею.

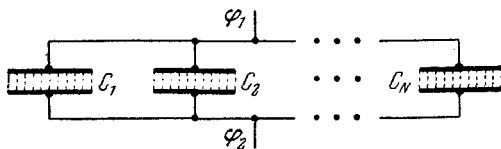


Рис. 50.

На рис. 51 показано последовательное соединение конденсаторов. Вторая обкладка первого конденсатора образует с первой обкладкой второго единый проводник, на котором при подаче напряжения на батарею возникают индуцированные заряды такой же величины, как заряд на первой обкладке первого и второй обкладке  $N$ -го конденсатора (вспомним, что линии смещения начинаются на одной обкладке данного конденсатора и заканчиваются на другой). То же самое справедливо для второй обкладки второго конденсатора и первой обкладки третьего и т. д. Следовательно, для всех конденсаторов, включенных последовательно, характерна одинаковая величина заряда  $q$  на обкладках. Поэтому напряжение на каждом из конденсаторов

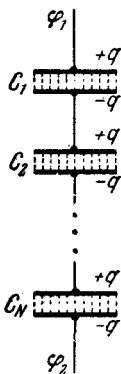


Рис. 51.

$$U_k = \frac{q}{C_k}. \quad (26.2)$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов, приложенной к батарее:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k},$$

откуда получается, что

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}. \quad (26.3)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные их емкостям. Согласно (26.2) доля общего напряжения, приходящаяся на данный конденсатор, обратна его емкости. Необходимо, чтобы ни для одного из конденсаторов  $U_k$  не превышало указанное для него значение  $U_{\max}$ .

Если все конденсаторы одинаковы и имеют емкость  $C_1$  и предельное напряжение  $U_{\max}$ , то при последовательном соединении  $C = \frac{1}{N} C_1$ , а  $(U_{\max})_{\text{бат}} = N U_{\max}$ .

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

## § 27. Энергия системы зарядов

Силы, с которыми взаимодействуют заряженные тела, консервативны (их работа не зависит от пути). Следовательно, система заряженных тел обладает потенциальной энергией. Найдем выражение для потенциальной энергии системы точечных зарядов. Начнем с системы из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r_{12}$ . Когда заряды удалены друг от друга на бесконечность, они не взаимодействуют. Положим в этом случае их энергию равной нулю. Сблизим заряды на заданное расстояние  $r_{12}$ . При этом мы должны будем совершить работу против электрических сил, которая пойдет на увеличение потенциальной энергии системы. Сближение зарядов можно произвести, приближая  $q_1$  к  $q_2$  либо  $q_2$  к  $q_1$ . В обоих случаях совершается одинаковая работа. Работа переноса заряда  $q_1$  из бесконечности в точку, удаленную от  $q_2$  на  $r_{12}$ , согласно (10.7) равна

$$A_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}}, \quad (27.1)$$

где  $\varphi_1$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в той точке, в которую перемещается заряд  $q_1$ .

Аналогично работа переноса заряда  $q_2$  из бесконечности в точку, удаленную от  $q_1$  на  $r_{12}$ , равна

$$A_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}, \quad (27.2)$$

где  $\varphi_2$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в той точке, в которую перемещается заряд  $q_2$ .

Значения работ (27.1) и (27.2) одинаковы, и каждое из них выражает энергию системы

$$W = q_1\Phi_1 = q_2\Phi_2.$$

Для того чтобы в выражение энергии системы оба заряда входили симметрично, напомним его следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} (q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2). \quad (27.3)$$

Формула (27.3) дает энергию системы двух зарядов. Перенесем из бесконечности еще один заряд  $q_3$  и поместим его в точку, находящуюся на расстоянии  $r_{13}$  от  $q_1$  и  $r_{23}$  от  $q_2$ . При этом мы совершим работу

$$A_3 = q_3\Phi_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right),$$

где  $\Phi_3$  — потенциал, создаваемый зарядами  $q_1$  и  $q_2$  в той точке, в которую мы поместили заряд  $q_3$ .

В сумме с  $A_1$  или  $A_2$  работа  $A_3$  будет равна энергии трех зарядов:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r_{12}} + q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right).$$

Последнее выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ q_1 \left( \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left( \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2 + q_3\Phi_3), \end{aligned}$$

где  $\Phi_1$  — потенциал, создаваемый зарядами  $q_2$  и  $q_3$  в той точке, где расположен заряд  $q_1$ , и т. д.

Добавляя к системе зарядов последовательно  $q_4$ ,  $q_5$  и т. д., можно убедиться в том, что в случае  $N$  зарядов потенциальная энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i\Phi_i, \quad (27.4)$$

где  $\Phi_i$  — потенциал, создаваемый в той точке, где находится  $q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го.

## § 28. Энергия заряженного проводника

Заряд  $q$ , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов  $\Delta q$ . Согласно сказанному в предыдущем параграфе, такая система обладает энергией, равной работе, которую нужно совершить, чтобы перенести все заряды  $\Delta q$  из бесконечности и расположить на поверхности проводника.

Перенос из бесконечности на поверхность проводника первой порции заряда  $\Delta q$  не сопровождается совершением работы, так как потенциал проводника первоначально равен нулю. В результате сообщения проводнику заряда  $\Delta q$  его потенциал становится отличным от нуля, вследствие чего перенос второй порции  $\Delta q$  уже требует совершения некоторой работы. Так как по мере увеличения заряда на проводнике потенциал его растет, при перемещении каждой последующей порции заряда  $\Delta q$  должна совершаться все большая по величине работа

$$\Delta A = \varphi \Delta q = \frac{q}{C} \Delta q, \quad (28.1)$$

где  $\varphi$  — потенциал проводника, обусловленный уже имеющимся на нем зарядом  $q$ ,  $C$  — емкость проводника.

Работа (28.1) идет на увеличение энергии проводника. Поэтому, переходя к дифференциалам, имеем

$$dW = \frac{1}{C} q dq,$$

откуда получается выражение для энергии:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \text{const.}$$

Естественно считать энергию незаряженного проводника равной нулю. Тогда  $\text{const}$  также обращается в нуль. Учтя соотношение (24.2) между емкостью, зарядом и потенциалом проводника, можно написать

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (28.2)$$

Формулу (28.2) можно получить также на основании следующих соображений. Поверхность проводника является эквипотенциальной, поэтому потенциалы тех точек, в которых находятся точечные заряды  $\Delta q$ , одина-

ковы и равны потенциалу  $\varphi$  проводника. Применяя к системе зарядов  $\Delta q$  формулу (27.4), получим

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi \Delta q = \frac{1}{2} \varphi \sum \Delta q = \frac{1}{2} \varphi q,$$

что совпадает с (28.2).

## § 29. Энергия заряженного конденсатора

Процесс возникновения на обкладках конденсатора зарядов  $+q$  и  $-q$  можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимаются очень малые порции заряда  $\Delta q$  и перемещаются на другую обкладку. Работа переноса очередной порции равна

$$\Delta A = \Delta q (\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U,$$

где  $U$  — напряжение на конденсаторе. Заменяя  $U$  в соответствии с (25.1) и переходя к дифференциалам, получим

$$dW = dA = U dq = \frac{q}{C} dq.$$

Наконец, интегрируя последнее выражение, приходим к формуле для энергии заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (29.1)$$

Формулы (29.1) отличаются от формул (28.2) только заменой  $\varphi$  на  $U$ .

Тот же результат для энергии конденсатора можно получить с помощью формулы (27.4). Каждый из элементарных зарядов, на которые можно мысленно разделить заряд  $+q$ , находится в точке с потенциалом  $\varphi_1$ , а каждый из зарядов, на которые можно разделить  $-q$ , — в точках с потенциалом  $\varphi_2$ . Следовательно, энергия такой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} [(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU,$$

что совпадает с (29.1).

С помощью выражения для энергии можно найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Для этого предположим, что

расстояние между пластинами может меняться. Подставим в формулу (29.1) выражение (25.2) для емкости плоского конденсатора, обозначив переменный зазор между обкладками через  $x$  (вместо  $d$ )

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} x.$$

Теперь воспользуемся соотношением, связывающим потенциальную энергию и силу, причем будем считать заряд на обкладках постоянным (конденсатор отключен от источника напряжения):

$$f = - \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} \quad (29.2)$$

(знак «—» указывает на то, что сила стремится уменьшить  $x$ , т. е. является силой притяжения).

Попытаемся вычислить силу притяжения между обкладками плоского конденсатора как произведение напряженности поля, создаваемого одной из обкладок, на заряд, сосредоточенный на другой. По формуле (8.5) напряженность поля, создаваемого одной обкладкой, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \quad (29.3)$$

Рис. 52. ( $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  создается зарядами обеих обкладок).

Диэлектрик ослабляет поле в зазоре в  $\epsilon$  раз, но это имеет место только внутри диэлектрика [см. формулу (16:17) и связанный с нею текст]. Заряды на обкладках располагаются вне диэлектрика и поэтому находятся под действием поля напряженности (29.3). Умножив заряд обкладки  $q$  на эту напряженность, получим

$$f' = - \frac{q}{2\epsilon_0 S} q = - \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (29.4)$$

(знак «—» обусловлен тем, что заряд, создающий поле, и заряд, на который это поле действует, имеют разные знаки).

Формулы (29.2) и (29.4) не совпадают. Опыт согласуется со значением силы (29.2), получающимся из выражения для энергии. Это объясняется тем, что

кроме «электрической» силы (29.4) на обкладки действуют со стороны диэлектрика механические силы, стремящиеся их раздвинуть (см. § 18). У края обкладок имеется рассеянное поле, убывающее по величине при удалении от краев. Молекулы диэлектрика, обладая дипольным моментом, испытывают действие силы (рис. 52), стягивающей их в область более сильного поля [см. формулу (14.5)]. В результате давление между обкладками повышается и появляется сила, ослабляющая действие силы (29.4) в  $\epsilon$  раз.

### § 30. Энергия электрического поля

Энергию конденсатора (29.1) можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками. Сделаем это для плоского конденсатора. Подставим в (29.1) выражение (25.2) для емкости, тогда

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 S d.$$

Согласно (11.8)  $\frac{U}{d} = E$ ; произведение  $Sd$  представляет собой объем  $V$ , занимаемый полем. Таким образом, можно написать

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (30.1)$$

Формула (29.1) связывает энергию конденсатора с зарядом на его обкладках, формула (30.1) — с напряженностью поля. Логично поставить вопрос: где же локализована (т. е. сосредоточена) энергия, что является носителем энергии — заряды или поле? В пределах электростатики, которая изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, дать ответ на этот вопрос невозможно. Постоянные поля и обусловившие их заряды не могут существовать обособленно друг от друга. Однако меняющиеся во времени поля могут существовать независимо от возбудивших их зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. В частности, энергия, за счет которой существует жизнь на Земле, доставляется от Солнца электромагнитными (световыми) волнами, энергия,



заставляющая звучать радиоприемник, приносится от передающей станции электромагнитными волнами и т. д. Эти факты заставляют признать, что носителем энергии является поле.

Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью  $\omega$ , равной энергии поля, деленной на заполняемый полем объем. Следовательно, согласно (30.1) плотность энергии поля плоского конденсатора

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (30.2)$$

Формула (30.2) справедлива и для неоднородного поля. Учтя соотношение (16.9), ее можно записать в виде

$$\omega = \frac{ED}{2}, \quad (30.3)$$

или

$$\omega = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (30.4)$$

В изотропном диэлектрике направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают. Поэтому формуле (30.3) можно придать вид

$$\omega = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}.$$

Заменив в этой формуле  $\mathbf{D}$  его значением (16.4), получим для  $\omega$  следующее выражение:

$$\omega = \frac{\mathbf{E}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{2} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{E}\mathbf{P}}{2}. \quad (30.5)$$

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с плотностью энергии поля  $\mathbf{E}$  в вакууме. Второе слагаемое, как мы сейчас докажем, представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика.

Поляризация диэлектрика состоит в том, что заряды, входящие в состав молекул, смещаются из своих положений под действием электрического поля  $\mathbf{E}$ . В расчете на единицу объема диэлектрика работа, затрачиваемая на смещение зарядов  $q_k$  на величины  $d\mathbf{r}_k$ , равна

$$dA = \sum_{k=1} q_k \mathbf{E} d\mathbf{r}_k = \mathbf{E} d \left( \sum_{k=1} q_k \mathbf{r}_k \right)$$

(для простоты мы считаем, что поле  $\mathbf{E}$  однородно).

Согласно формуле (13.3)  $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_k \mathbf{r}_k$  равна дипольному моменту единицы объема, который по определению есть вектор поляризации диэлектрика  $\mathbf{P}$ . Следовательно,

$$dA = \mathbf{E} d\mathbf{P}. \quad (30.6)$$

В соответствии с формулой (15.2)  $\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , откуда  $d\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 d\mathbf{E}$ . Подставив это значение  $d\mathbf{P}$  в (30.6), получим для  $dA$  выражение

$$dA = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} = d\left(\frac{\kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathbf{E}\mathbf{P}}{2}\right).$$

Наконец, произведя интегрирование, найдем для работы, затрачиваемой на поляризацию единицы объема диэлектрика, выражение

$$A = \frac{\mathbf{E}\mathbf{P}}{2},$$

которое совпадает со вторым слагаемым в формуле (30.5). Таким образом, выражения (30.2), (30.3) и (30.4) для плотности энергии включают в себя, кроме собственно энергии поля  $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ , еще и энергию  $\frac{\mathbf{E}\mathbf{P}}{2}$ , затрачиваемую при создании поля на поляризацию диэлектрика.

В гауссовой системе выражения для плотности энергии электрического поля имеют следующий вид:

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \quad (30.7)$$

Вычислим энергию поля заряженного шара радиуса  $R$ , помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в этом случае является функцией только от  $r$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщиной  $dr$ . Объем слоя равен  $dV = 4\pi r^2 dr$ . В нем заключена энергия

$$dW = w dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

## Энергия поля

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

[согласно (24.4)  $4\pi\epsilon_0\epsilon R$  равно емкости шара].

Полученное нами выражение совпадает с найденным ранее выражением (28.2) для энергии заряженного проводника.

Сообщим обкладкам плоского конденсатора с воздушным зазором заряды  $+q$  и  $-q$ . Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха практически равна единице. Поэтому емкость конденсатора можно считать равной  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , а энергию

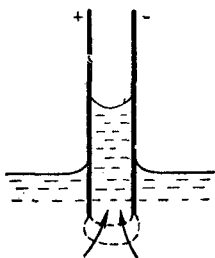


Рис. 53.

$W_0 = \frac{q^2}{2C_0}$ . Теперь погрузим обкладки частично в жидкий диэлектрик (рис. 53). В этом случае конденсатор можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора, один из которых имеет площадь обкладки, равную  $xS$  ( $x$  — относительная часть зазора, заполненная жидкостью), и заполнен диэлектриком с  $\epsilon > 1$ , второй с воздушным зазором имеет площадь обкладки, равную  $(1-x)S$ . Вычисляя емкость по формуле (26.1), получаем

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S (1-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S x}{d} = C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) S}{d} x > C_0.$$

Энергия же  $W = \frac{q^2}{2C}$  будет меньше, чем  $W_0$ . Следовательно, заполнение зазора диэлектриком оказывается энергетически выгодным. Поэтому диэлектрик втягивается в конденсатор и уровень его в зазоре поднимается. Это в свою очередь приводит к возрастанию потенциальной энергии диэлектрика в поле сил тяжести. В конечном итоге уровень диэлектрика в зазоре установится на некоторой высоте, соответствующей минимуму суммарной энергии (электрического поля и обусловленной силами тяжести). Это явление сходно с капиллярным поднятием жидкости в узком зазоре между пластинками (см. т. I, § 146).

Втягивание диэлектрика в зазор между обкладками можно объяснить также и с микроскопической точки зрения. У краев пластин конденсатора имеется неоднородное поле. Молекулы диэлектрика обладают собственным дипольным моментом либо приобретают его под действием поля; поэтому на них действуют силы, стремящиеся переместить их в область сильного поля, т. е. внутрь конденсатора. Под действием этих сил жидкость втягивается в зазор до тех пор, пока электрические силы, действующие на жидкость у края пластин, не будут уравновешены весом столба жидкости.

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

## § 31. Электрический ток

Если в проводнике создать электрическое поле, то носители заряда придут в упорядоченное движение: положительные в направлении поля, отрицательные в противоположную сторону. Упорядоченное движение зарядов называется электрическим током. Его принято характеризовать силой тока — скалярной величиной, равной заряду, переносимому носителями через рассматриваемую поверхность (например, через поперечное сечение проводника) в единицу времени. Если за время  $dt$  переносится заряд  $dq$ , то сила тока  $i$  по определению равна

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (31.1)$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Если в проводнике движутся носители обоих знаков, причем за время  $dt$  через данную поверхность положительные носители переносят заряд  $dq^+$  в одном направлении, а отрицательные  $dq^-$  в противоположном, то

$$i = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$$

( $dq^-$  — абсолютная величина отрицательного заряда).

За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители.

Носители заряда принимают участие в молекулярном тепловом движении и, следовательно, движутся с некоторой скоростью  $\mathbf{v}$  и в отсутствие поля. Но в этом случае через произвольную площадку, проведенную мысленно в проводнике, проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей любого знака, так что сила тока (31.1) равна нулю. При включении поля на хаотическое движение носителей со скоростью  $\mathbf{v}$  налагается упорядоченное движение со скоростью  $\mathbf{u}$ <sup>1)</sup>. Таким образом, скорость носителей будет  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ . Так как среднее значение  $\mathbf{v}$  (но не  $v$ ) равно нулю, то средняя скорость носителей равна  $\mathbf{u}$ :

$$\overline{\mathbf{v} + \mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}.$$

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально электрический ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ . Этот вектор численно равен силе тока  $di$  через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей площадку  $dS_{\perp}$ ; отнесенной к величине этой площадки:

$$\mathbf{j} = \frac{di}{dS_{\perp}}. \quad (31.2)$$

За направление  $\mathbf{j}$  принимается направление вектора скорости  $\mathbf{u}^+$  упорядоченного движения положительных носителей.

Поле вектора плотности тока можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся так же, как и линии тока в текущей жидкости, линии вектора  $\mathbf{E}$  и т. д.

Зная вектор плотности тока в каждой точке проводника, можно найти силу тока  $i$  через любую поверхность  $S$ :

$$i = \int_S j_n dS \quad (31.3)$$

[ср. (7.5) и т. I, формула (82.14)].

<sup>1)</sup> Подобно этому в потоке газа на хаотическое тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение.

Пусть в единице объема содержится  $n^+$  положительных носителей и  $n^-$  отрицательных. Абсолютная величина зарядов носителей равна соответственно  $e^+$  и  $e^-$ . Если под действием поля носители приобретают скорости  $u^+$  и  $u^-$ , то за единицу времени через единичную площадку пройдет  $n^+ u^+$  положительных носителей<sup>1)</sup>, которые перенесут заряд  $e^+ n^+ u^+$ . Аналогично отрицательные носители перенесут заряд  $e^- n^- u^-$ . Таким образом, для плотности тока получается следующее выражение:

$$j = e^+ n^+ u^+ + e^- n^- u^-. \quad (31.4)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным. Мы будем обозначать его силу буквой  $I$ , сохранив для непостоянного тока обозначение  $i$ . Очевидно, что

$$I = \frac{q}{t}, \quad (31.5)$$

где  $q$  — заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечное время  $t$ .

В СИ единица силы тока ампер ( $a$ ) является основной. Ее определение будет дано позже (см. § 38). Единица заряда кулон определяется как заряд, переносимый за 1 сек через поперечное сечение проводника при силе тока в 1  $a$ .

За единицу тока в СГСЭ-системе принимается такой ток, при котором через данную поверхность переносится за 1 сек одна СГСЭ-ед. заряда. Учтя соотношение (3.2), получаем

$$1 a = 3 \cdot 10^9 \cdot \text{СГСЭ-ед. силы тока}. \quad (31.6)$$

## § 32. Электродвижущая сила

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то, как мы установили в § 22, перемещение носителей заряда приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника ис-

<sup>1)</sup> Выражение для числа молекул, пролетающих через единичную площадку в единицу времени, содержит, кроме того, множитель  $1/4$ , обусловленный тем, что молекулы движутся хаотически [см. т. I, формулу (100.6)]. В данном случае этого множителя нет, так как все носители данного знака движутся упорядоченно в одну и ту же сторону.

чезнет и, следовательно, ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом (носители заряда предполагаются положительными) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить (рис. 54). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Циркуляция вектора электростатического поля равна нулю [см. формулу (9.2)]. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные заряды движутся в сторону убывания  $\varphi$ , должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания  $\varphi$ , т. е. против сил электростатического поля (см. изображенную пунктиром часть цепи на рис. 54). Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых сторонними силами. Таким образом, для поддержания тока необходимы сторонние силы, действующие либо на всем протяжении цепи, либо на отдельных ее участках. Они могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей заряда в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями (см. § 103), и т. д.

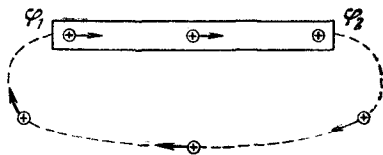


Рис. 54.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Величина, равная работе сторонних сил, отнесенной к единице положительного заряда, называется электродвижущей силой (э. д. с.)  $\mathcal{E}$ , действующей в цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом  $q$  равна  $A$ , то по определению

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \quad (32.1)$$



Из сопоставления формул (32.1) и (10.7) вытекает, что размерность э. д. с. совпадает с размерностью потенциала. Поэтому  $\mathcal{E}$  измеряется в тех же единицах, что и  $\varphi$ .

Стороннюю силу  $\mathbf{f}_{\text{ст}}$ , действующую на заряд  $q$ , можно представить в виде

$$\mathbf{f}_{\text{ст}} = \mathbf{E}^* q.$$

Векторную величину  $\mathbf{E}^*$  называют напряженностью поля сторонних сил. Работу сторонних сил над зарядом  $q$  на всем протяжении замкнутой цепи можно выразить следующим образом:

$$A = \oint \mathbf{f}_{\text{ст}i} dl = q \oint \mathbf{E}_i^* dl.$$

Разделив эту работу на  $q$ , получим э. д. с., действующую в цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_i^* dl. \quad (32.2)$$

Таким образом, э. д. с., действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

Электродвижущая сила, действующая на участке 1—2, очевидно, равна

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_i^* dl. \quad (32.3)$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля  $\mathbf{f}_E = q\mathbf{E}$ . Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд  $q$ , равна

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{ст}} + \mathbf{f}_E = q(\mathbf{E}^* + \mathbf{E}).$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом  $q$  на участке цепи 1—2, дается выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \mathbf{E}_i^* dl + q \int_1^2 \mathbf{E}_i dl = q\mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (32.4)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, так что  $A = q\mathcal{E}$ .

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением  $U$  на данном участке цепи. В соответствии с формулой (32.4)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (32.5)$$

При отсутствии сторонних сил напряжение  $U$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

### § 33. Закон Ома. Сопротивление проводников

Ом экспериментально установил закон, согласно которому сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения  $U$  на проводнике:

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (33.1)$$

Однородным называется проводник, в котором не действуют сторонние силы. В этом случае, как мы видели, напряжение  $U$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , поддерживаемой на концах проводника. Величина  $R$  называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей сопротивления служит ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1 в течет ток силой в 1 а.

За единицу сопротивления в гауссовой системе принимается сопротивление такого проводника, в котором при разности потенциалов в 1 СГСЭ-ед. потенциала течет ток силой в 1 СГСЭ-ед. силы тока. Найдем соотношение между этой единицей и омом:

$$1 \text{ ом} = \frac{1 \text{ в}}{1 \text{ а}} = \frac{1/300}{3 \cdot 10^9} \text{ СГСЭ} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ СГСЭ-ед. сопротивления.}$$

Таким образом,

$$1 \text{ СГСЭ-ед. сопротивления} \approx 9 \cdot 10^{11} \text{ ом.} \quad (33.2)$$

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (33.3)$$

где  $l$  — длина проводника,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $\rho$  — зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением вещества. Если  $l = 1$  и  $S = 1$ , то  $R$  численно равно  $\rho$ . В СИ  $\rho$  измеряется в о м - мет - ра х ( $ом \cdot м$ ). На практике часто характеризуют материал сопротивлением при  $l = 1 м$  и  $S = 1 мм^2$ , т. е. выражают  $\rho$  в  $\frac{ом \cdot мм^2}{м}$ .

Закон Ома можно записать в дифференциальной форме. Выделим мысленно в окрестности некоторой

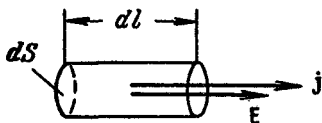


Рис. 55.

точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем (рис. 55) с образующими, параллельными вектору плотности тока  $\mathbf{j}$  в данной точке. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой  $\mathbf{j}dS$ . Напряжение, приложенное к цилиндру, равно  $E dl$  где  $E$  — напряженность поля в данном месте. Наконец, сопротивление цилиндра, согласно формуле (33.3), равно  $\rho \frac{dl}{dS}$ . Подставим эти значения в формулу (33.1), тогда

$$\mathbf{j} dS = \frac{dS}{\rho dl} \cdot E dl.$$

Носители заряда в каждой точке движутся в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Поэтому направления  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают<sup>1)</sup>. Таким образом, можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (33.4)$$

где  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  — величина, называемая коэффициентом электропроводности или просто проводимостью материала.

Формула (33.4) выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Способность вещества проводить ток характеризуется его удельным сопротивлением  $\rho$  либо проводимостью  $\sigma$ . Их величина определяется химической при-

<sup>1)</sup> В анизотропных телах направления векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  могут не совпадать.

родой вещества и условиями, в частности температурой, при которых оно находится. Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ),$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ \text{C}$ ,  $t^\circ$  — температура по шкале Цельсия,  $\alpha$  — коэффициент, численно равный примерно  $1/273$ . Переходя к абсолютной температуре, получаем

$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (33.5)$$

При низких температурах наблюдаются отступления от этой закономерности (рис. 56). В большинстве случаев зависимость  $\rho$  от  $T$  следует кривой 1. Величина остаточного сопротивления  $\rho_{ост}$  в сильной степени зависит от чистоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце. Поэтому после отжига  $\rho_{ост}$  заметно уменьшается. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле  $\rho = 0$ .

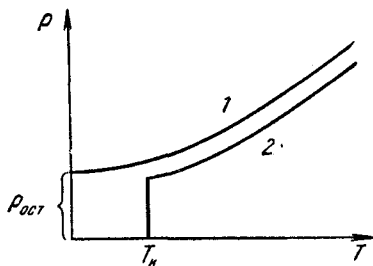


Рис. 56.

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких градусов Кельвина сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 56). Впервые это явление, названное сверхпроводимостью, было обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом для ртути. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца, олова, цинка, алюминия и других металлов, а также у ряда сплавов. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура  $T_k$ , при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. При действии на сверхпроводник магнитного поля сверхпроводящее состояние нарушается. Величина критического поля  $H_k$ , разрушающего сверхпроводимость, равна нулю при  $T = T_k$  и растет с понижением температуры.

Полное теоретическое объяснение сверхпроводимости было дано в 1958 г. советским физиком Н. Н. Боголюбовым и его сотрудниками.

Зависимость электрического сопротивления от температуры положена в основу термометров сопротивления. Такой термометр представляет собой металлическую (обычно платиновую) проволоку<sup>1)</sup>, намотанную на фарфоровый или слюдяной каркас. Проградуированный по постоянным температурным точкам термометр сопротивления позволяет измерять с точностью порядка нескольких сотых градуса как низкие, так и высокие температуры.

### § 34. Закон Джоуля — Ленца

При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество выделяющегося в проводнике тепла пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени:

$$Q = RI^2t. \quad (34.1)$$

Если сила тока изменяется со временем, то

$$Q = \int_0^t Ri^2 dt. \quad (34.2)$$

Соотношения (34.1) и (34.2) выражают закон Джоуля — Ленца. Подставляя  $R$  в омах,  $i$  в амперах, а  $t$  в секундах,  $Q$  получим в джоулях.

Закон (34.2) имеет следующее объяснение. Рассмотрим однородный проводник, к которому приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через каждое сечение проводника проходит заряд  $dq = i dt$ . Это равносильно тому, что заряд  $dq = idt$  переносится за время  $dt$  из одного конца проводника в другой. При этом силы поля совершают работу  $dA = U dq = Ui dt$ . Заменяя  $U$  в соответствии с законом Ома через  $Ri$  и интегрируя, получим для работы электрических сил выражение, совпадающее с выражением (34.2) для  $Q$ . Таким образом, нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами поля над носителями заряда.

<sup>1)</sup> В последнее время все большее применение находят термометры сопротивления из полупроводников.

От формулы (34.1), определяющей тепло, выделяемое во всем проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника. Выделим в проводнике таким же образом, как это было сделано при выводе формулы (33.4), элементарный объем в виде цилиндра. Согласно закону Джоуля — Ленца за время  $dt$  в этом объеме выделится тепло

$$dQ = Ri^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt, \quad (34.3)$$

где  $dV = dS dl$  — величина элементарного объема.

Количество тепла  $dQ$ , отнесенное к единице времени и единице объема, назовем удельной мощностью тока  $\omega$ . Из (34.3) получаем

$$\omega = \rho j^2. \quad (34.4)$$

Воспользовавшись соотношением (33.4) между  $j$ ,  $E$ ,  $\rho$  и  $\sigma$ , формуле (34.4) можно придать следующий вид:

$$\omega = jE = \sigma E^2. \quad (34.5)$$

Формулы (34.4) и (34.5) выражают закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме. Чтобы, исходя из них, получить количество тепла, выделяющееся во всем проводнике за время  $t$ , нужно проинтегрировать  $\omega$  по объему проводника в некоторый момент времени  $t$ , а затем полученное выражение проинтегрировать по времени  $t$ :

$$Q = \int_0^t dt \int_V \rho j^2 dV.$$

## § 35. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Закон Ома в виде (33.1) справедлив для однородного участка цепи, т. е. такого участка, в котором не действует электродвижущая сила. Чтобы получить выражение закона Ома для неоднородного участка цепи, будем исходить из закона сохранения энергии. Пусть на концах участка поддерживается разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (рис. 57). Э. д. с., действующую на участке, обозначим  $\mathcal{E}_{12}$ . Задавшись определенным направлением (например, обозначенным на рис. 57 стрелкой), ток  $I$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_{12}$

нужно рассматривать как алгебраические величины. Ток будем считать положительным, если он течет в направлении, указанном стрелкой, и отрицательным при противоположном направлении. Аналогично э. д. с. будем считать положительной, если она действует в направлении стрелки (это значит, что над положительным зарядом, перемещающимся в этом направлении, сторонние силы совершают положительную работу), и отрицательной, если она действует в противоположную сторону.

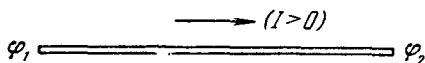


Рис. 57.

Если проводники, образующие участок цепи, неподвижны, единственным результатом прохождения тока будет нагревание проводников. Поэтому работа всех сил (электростатических и сторонних), совершенная над носителями заряда, должна быть равна выделившемуся теплу. За время  $dt$  по проводнику переносится заряд  $dq = I dt$ . Согласно (32.4) работа, совершаемая над этим зарядом, равна

$$dA = \mathcal{E}_{12} dq + (\varphi_1 - \varphi_2) dq.$$

За время  $dt$  выделяется тепло

$$dQ = I^2 R dt = IR (I dt) = IR dq.$$

Приравнявая эти два выражения и сокращая на  $dq$ , получаем

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}, \quad (35.1)$$

откуда

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (35.2)$$

Формулы (35.1) и (35.2) выражают закон Ома для неоднородного участка цепи. При  $\mathcal{E}_{12} = 0$  формула (35.2) переходит в выражение (33.1) закона Ома для однородного участка цепи. Положив в (35.1)  $\varphi_1 = \varphi_2$ , получим выражение закона Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (35.3)$$

где  $\mathcal{E}$  — э. д. с., действующая в цепи,  $R$  — суммарное сопротивление всей цепи.

В дифференциальной форме закон Ома при наличии сторонних сил запишется следующим образом:

$$j = \sigma (E + E^*). \quad (35.4)$$

Рассмотрим пример на применение формулы (35.2). Пусть на концах участка цепи поддерживаются потенциалы  $\varphi_1 = 20$  в и  $\varphi_2 = 15$  в (рис. 58). Участок содержит

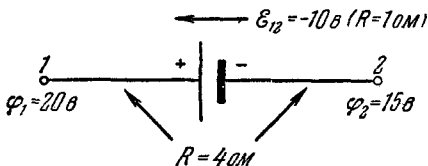


Рис. 58.

э. д. с.  $\mathcal{E}_{12} = -10$  в (знак минус указывает на то, что э. д. с. действует в направлении  $2 \rightarrow 1$ ). Сопротивление источника э. д. с. 1 ом, остальных звеньев участка 4 ом. Следовательно, полное сопротивление участка  $R = 5$  ом. Подставим заданные значения в формулу (35.2):

$$I = \frac{20 - 15 - 10}{5} = -1 \text{ а.}$$

Для тока получилось отрицательное значение. Это означает, что ток течет в направлении  $2 \rightarrow 1$ .

### § 36. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. Узлом называется точка, в которой сходится более чем два проводника (рис. 59). Ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), текущий от узла — имеющим другой знак (минус или плюс). Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (36.1)$$



Справедливость этого утверждения вытекает из следующих соображений. Если бы алгебраическая сумма токов была отлична от нуля, в узле происходило бы накопление или уменьшение заряда, что в свою очередь приводило бы к изменению потенциала узла и изменению текущих в цепи токов. Таким образом, чтобы токи в цепи были постоянными, должно выполняться условие (36.1).

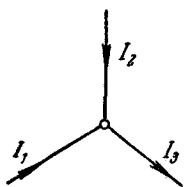


Рис. 50.

Уравнение (36.1) можно написать для каждого из  $N$  узлов цепи. Однако независимыми являются только  $N - 1$  уравнение,  $N$ -е будет следствием из них.

Выделим мысленно в разветвленной цепи произвольный замкнутый контур (см. контур 1—2—3—4—1 на рис. 60). Зададимся направлением обхода (например,

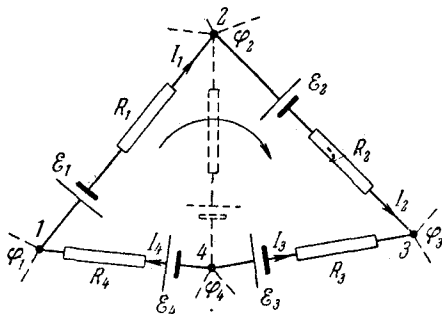


Рис. 60.

по часовой стрелке, как указано на рисунке) и применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3,$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \mathcal{E}_4.$$

При сложении этих выражений потенциалы сокращаются и получается уравнение

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k, \quad (36.2)$$

которое выражает второе правило Кирхгофа.

Уравнение (36.2) может быть составлено для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. Но независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

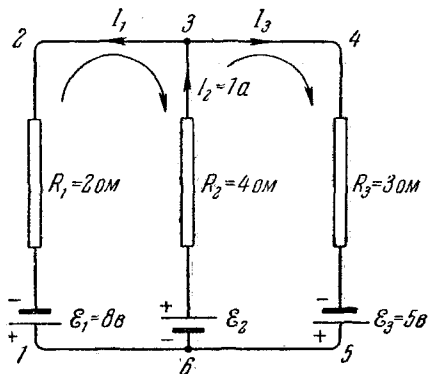


Рис. 61.

Так, например, для цепи, изображенной на рис. 61, можно составить три уравнения:

- 1) для контура 1—2—3—6—1,
- 2) для контура 3—4—5—6—3,
- 3) для контура 1—2—3—4—5—6—1.

Последний контур получается наложением первых двух. Следовательно, указанные уравнения не будут независимыми. В качестве независимых можно взять любые два уравнения из трех.

При составлении уравнений второго правила Кирхгофа токам и э. д. с. нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Например, ток  $I_1$  на рис. 61 нужно считать отрицательным, так как он течет навстречу выбранному направлению обхода. Э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  также нужно приписать знак «—», так как она действует в направлении, противоположном направлению обхода, и т. д.

Направления обхода в каждом из контуров можно выбирать совершенно произвольно и независимо от

выбора направлений в других контурах. При этом может случиться, что один и тот же ток либо одна и та же э. д. с. войдет в разные уравнения с различными знаками (так получается с током  $I_2$  на рис. 61 при указанных направлениях обхода в контурах). Это, однако, не имеет никакого значения, потому что изменение направления обхода вызывает лишь изменение всех знаков в уравнении (36.2) на обратные.

Составляя уравнения, следует помнить, что через любое сечение неразветвленного участка цепи течет один и тот же ток. Например, на участке  $6 - \mathcal{E}_2$  течет такой же ток  $I_2$ , как на участке  $\mathcal{E}_2 - 3$ .

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, оказывается равным числу различных токов, текущих в разветвленной цепи. Поэтому, если заданы э. д. с. и сопротивления для всех неразветвленных участков, то могут быть вычислены все токи. Можно решить и задачи иного рода, например найти э. д. с., которые нужно включить в каждый из участков цепи, чтобы получить при заданных сопротивлениях нужные токи.

В заключение разберем пример на расчет разветвленной цепи, изображенной на рис. 61. Даны  $R_1, R_2, R_3, \mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_3$ . Нужно найти  $\mathcal{E}_2$ , при которой  $I_2 = 1$  а, и получающиеся при этом токи  $I_1$  и  $I_3$ .

Цепь имеет два узла (точки 3 и 6). При указанных стрелками направлениях токов уравнения (36.1) для этих узлов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \quad \text{для узла 3,} \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \quad \text{для узла 6.} \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

Эти уравнения не независимы — любое из них можно получить из другого заменой знаков на обратные. Используем в дальнейшем первое из них.

Теперь составим уравнения (36.2) для контуров  $1-2-3-6-1$  и  $3-4-5-6-3$ , приняв в обоих случаях направление обхода по часовой стрелке:

$$\left. \begin{aligned} -I_1 R_1 - I_2 R_2 &= -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2^1. \end{aligned} \right\} \quad (36.4)$$

<sup>1)</sup> Рекомендуем читателю составить уравнение для контура  $1-2-3-4-5-6-1$  и убедиться в том, что оно является следствием уравнений (36.4).

Подставим в уравнения (36.3) и (36.4) заданные величины и перепишем их следующим образом:

$$\begin{aligned} -1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_3 + 0 \cdot \mathcal{E}_2 &= -1, \\ -2 \cdot I_1 - 0 \cdot I_3 + 1 \cdot \mathcal{E}_2 &= -4, \\ 0 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3 - 1 \cdot \mathcal{E}_2 &= 1. \end{aligned}$$

Мы пришли к системе из трех уравнений с неизвестными  $I_1$ ,  $I_3$  и  $\mathcal{E}_2$ . Решая систему, получаем

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{5} = -1,6 \text{ в.}$$

Таким же способом можно найти, что  $I_1 = 1,2 \text{ а}$ ,  $I_3 = -0,2 \text{ а}$ .

Для  $\mathcal{E}_2$  мы получили отрицательное значение. Это означает, что направление  $\mathcal{E}_2$  должно быть взято противоположным изображенному на рис. 61, которое принималось при расчете. Ток  $I_3$  также течет не в направлении 3—4, как указано на рисунке, а в противоположном направлении.

### § 37. Коэффициент полезного действия источника тока

Электрическая цепь состоит, как правило, из источника тока, подводящих проводов и потребителя тока или нагрузки. Каждый из этих элементов цепи обладает сопротивлением. Сопротивление подводящих проводов обычно бывает очень мало, поэтому мы будем им пренебрегать. Согласно формуле (35.3) ток в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R}, \quad (37.1)$$

где  $R_0$  — сопротивление источника,  $R$  — сопротивление нагрузки.

Напряжение на нагрузке (совпадающее с напряжением на зажимах э. д. с.)

$$U = IR = \mathcal{E} \frac{R}{R_0 + R}$$

меньше  $\mathcal{E}$ . При  $R = \infty$  (т. е. когда цепь разомкнута)  $U$  делается равным  $\mathcal{E}$ . Таким образом, напряжение на зажимах разомкнутого источника тока равно его э. д. с.

Применив формулу (32.4) к замкнутой цепи, получим, что работа, совершаемая над переносимым вдоль цепи зарядом  $dq$ , равна

$$dA = \mathcal{E} dq.$$

Разделив работу  $dA$  на время  $dt$ , за которое она совершается, получим мощность, развиваемую источником э. д. с.,

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathcal{E} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} I.$$

Таким образом, мощность, развиваемая источником тока, равна

$$P = \mathcal{E} I. \quad (37.2)$$

Подставив в эту формулу значение тока (37.1), получим полную мощность  $P$ , выделяемую во всей цепи,

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0 + R}. \quad (37.3)$$

В нагрузке выделяется только часть этой мощности:

$$P_{\text{н}} = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_0 + R)^2} R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0 + R} \cdot \frac{R}{R_0 + R}, \quad (37.4)$$

которую мы назовем полезной мощностью. Остальная мощность расходуется в источнике тока (и подводящих проводах) и оказывается бесполезной.

Отношение полезной мощности ко всей мощности, развиваемой э. д. с. в цепи, определяет коэффициент полезного действия (к. п. д.) источника тока:

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P} = \frac{R}{R_0 + R}. \quad (37.5)$$

Из этой формулы следует, что к. п. д. будет тем больше, чем больше сопротивление нагрузки  $R$  по сравнению с сопротивлением источника  $R_0$ . Поэтому сопротивление источника стремятся делать как можно меньшим.

Мощность, развиваемая данным источником тока, зависит от сопротивления нагрузки  $R$ . Она максималь-

на при коротком замыкании ( $R = 0$ ), но в этом случае вся мощность выделяется в самом источнике и оказывается совершенно бесполезной. С ростом  $R$  полная мощность убывает, стремясь к нулю при  $R \rightarrow \infty$ .

Найдем соотношение между  $R$  и  $R_0$ , при котором полезная мощность, отбираемая от данного источника тока, будет наибольшей. Для этого продифференцируем формулу (37.4) для  $P_H$  по  $R$  и приравняем производную нулю:

$$\frac{dP_H}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{R_0 - R}{(R_0 + R)^3} = 0.$$

Отсюда находим, что  $P_H$  имеет максимум при  $R = R_0$  (другое решение,  $R = \infty$ , соответствует минимуму  $P_H$ ). Следовательно, чтобы отобрать от данной э.д.с. наибольшую полезную мощность, нужно взять сопротивление нагрузки, равное сопротивлению источника тока. Согласно формуле (37.5) к.п.д. в этом случае составляет 0,5.

На рис. 62 приведены кривые зависимости  $P$ ,  $P_H$  и  $\eta$  от отношения  $R/R_0$ .

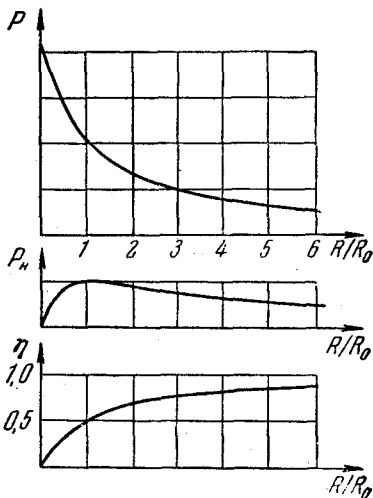


Рис. 62.

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

## § 38. Взаимодействие токов

Электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи (мы будем называть их прямыми токами), притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и

Опыт показывает, что сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величинам токов в них  $i_1$  и  $i_2$  и обратно пропорциональна расстоянию  $b$  между ними:

$$f_1 = k \frac{2i_1 i_2}{b}. \quad (38.1)$$

По соображениям, которые станут ясными в дальнейшем, коэффициент пропорциональности мы обозначили через  $2k$ .

Закон взаимодействия токов был установлен в 1820 г. Ампером. С общим выражением этого закона, пригодным для проводников любой формы, мы познакомимся в § 46.

На основании закона (38.1) устанавливается единица силы тока в СИ и в абсолютной электромагнитной системе единиц (СГСМ-системе). Единица силы тока в СИ — ампер — определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  н на каждый метр длины.

Кулон определяют как заряд, проходящий за 1 сек через поперечное сечение проводника, по которому течет постоянный ток силой в 1 а. В соответствии с этим кулон называют также ампер-секундой ( $a \cdot \text{сек}$ ).

В рационализованном виде формула (38.1) записывается следующим образом:

$$f_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2i_1 i_2}{b}, \quad (38.2)$$

где  $\mu_0$  — так называемая магнитная постоянная [ср. с формулой (4.1)]. Чтобы найти численное значение  $\mu_0$ , воспользуемся тем, что согласно определению ампера при  $i_1 = i_2 = 1 \text{ а}$  и  $b = 1 \text{ м}$   $f_1$  получается равной  $2 \cdot 10^{-7} \text{ н/м}$ . Подставим эти значения в формулу (38.2):

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1}.$$

Отсюда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}^1. \quad (38.3)$$

Коэффициент  $k$  в формуле (38.1) можно сделать равным 1 за счет выбора единицы измерения силы тока. Так устанавливается абсолютная электромагнитная единица силы тока (СГСМ-ед. силы тока), которая определяется как сила такого тока, который, протекая по тонкому прямолинейному бесконечно длинному проводу, действует на равный и параллельный ему прямой ток, отстоящий на 1 см, с силой в 2 дин на каждый сантиметр длины.

В СГСЭ-системе  $k$  оказывается размерной величиной, не равной единице. Согласно формуле (38.1) размерность  $k$  определяется следующим выражением:

$$[k] = \frac{[f_1] [b]}{[i]^2} = \frac{[f]}{[i]^2}. \quad (38.4)$$

Мы учли, что размерность  $f_1$  есть размерность силы, деленная на размерность длины, поэтому размерность произведения  $f_1 b$  равна размерности силы. Согласно формулам (3.1) и (31.5)

$$[f] = \frac{[q]^2}{L^2}; \quad [i] = \frac{[q]}{T}.$$

Подставляя эти значения в выражение (38.4), находим, что

$$[k] = \frac{T^2}{L^2}.$$

Таким образом, в СГСЭ-системе  $k$  можно представить в виде

$$k = \frac{1}{c^2}, \quad (38.5)$$

<sup>1)</sup> Генри на метр (см. § 59).



где  $c$  — имеющая размерность скорости величина, называемая электродинамической постоянной. Чтобы найти ее численное значение, воспользуемся соотношением (3.2) между кулоном и СГСЭ-единицей заряда, которое было установлено опытным путем. Сила в  $2 \cdot 10^{-7}$  н/м эквивалентна  $2 \cdot 10^{-4}$  дин/см. Согласно формуле (38.1) с такой силой взаимодействуют токи по  $3 \cdot 10^9$  СГСЭ-единиц (т. е. 1 а) каждый при  $b = 100$  см. Следовательно,

$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{c^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100},$$

откуда

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.} \quad (38.6)$$

Значение электродинамической постоянной совпадает со значением скорости света в пустоте. Из теории Максвелла вытекает существование электромагнитных волн, скорость которых в пустоте равна электродинамической постоянной  $c$ . Совпадение  $c$  со скоростью света в пустоте дало основание Максвеллу предположить, что свет есть электромагнитная волна.

Значение  $k$  в формуле (38.1) равно 1 в СГСМ-системе и  $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(3 \cdot 10^{10})^2} \frac{\text{сек}^2}{\text{см}^2}$  в СГСЭ-системе. Отсюда следует, что ток силой в 1 СГСМ-единицу эквивалентен току силой в  $3 \cdot 10^{10}$  СГСЭ-единиц:

$$1 \text{ СГСМ-ед. силы тока} = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ-ед. силы тока} = 10a. \quad (38.7)$$

Таким образом,  $i_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} i_{\text{СГСЭ}}$ . Соответственно,  $q_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} q_{\text{СГСЭ}}$ . Поэтому в гауссовой системе во все формулы, содержащие наряду с магнитными величинами силу тока или заряд, входит по одному множителю  $1/c$  на каждую стоящую в формуле величину  $i$  или  $q$ . Этот множитель превращает значение соответствующей величины ( $i$  или  $q$ ), выраженное в единицах СГСЭ, в значение, выраженное в единицах СГСМ (система единиц СГСМ построена так, что коэффициенты пропорциональности во всех формулах равны 1).

## § 39. Магнитное поле

Взаимодействие токов осуществляется через поле, которое называется магнитным. Это название происходит от того, что, как обнаружил в 1820 г. Эрстед, поле, создаваемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку.

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства — создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.

Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный точечный заряд, применим для исследования магнитного поля пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали к контуру, связанной с направлением тока правилом правого винта (рис. 63). Такую нормаль мы будем называть положительной.



Рис. 63.

Внеся пробный контур в магнитное поле, мы обнаружим, что поле оказывает на контур ориентирующее действие, устанавливая его положительной нормалью в определенном направлении. Примем это направление за направление поля в данной точке. Если контур повернуть так, чтобы направления нормали и поля не совпадали, возникает вращательный момент, стремящийся вернуть контур в равновесное положение. Величина момента зависит от угла  $\alpha$  между нормалью и направлением поля, достигая наибольшего значения  $M_{\max}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (при  $\alpha = 0$  момент равен нулю).

Вращательный момент зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств контура. Внося в одну и ту же точку разные пробные контуры, мы обнаружим, что величина  $M_{\max}$  пропорциональна силе тока  $I$  в контуре и площади контура  $S$  и совершенно не зависит от формы контура. Таким образом, действие магнитного поля на плоский контур с током определяется величиной

$$p_m = IS, \quad (39.1)$$

которую называют магнитным моментом контура (аналогично вращательный момент, действующий в электрическом поле на диполь, пропорционален электрическому моменту диполя  $p = ql$ ).

В гауссовой системе магнитный момент должен измеряться в СГСМ-единицах, а сила тока — в СГСЭ-единицах. Поэтому в выражение для  $p_m$  в гауссовой системе вводится множитель  $1/c$ :

$$p_m = \frac{1}{c} IS. \quad (39.2)$$

Кроме силы тока  $I$  и площади  $S$ , контур характеризуется также ориентацией в пространстве. Поэтому магнитный момент следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали:

$$\mathbf{p}_m = p_m \mathbf{n}$$

( $\mathbf{n}$  — единичный вектор).

На пробные контуры, отличающиеся значением  $p_m$ , действуют в данной точке поля разные по величине вращательные моменты  $M_{\max}$ . Однако отношение  $M_{\max}/p_m$  будет для всех контуров одно и то же и может быть принято для количественной характеристики поля. Физическую величину  $B$ , пропорциональную этому отношению, называют магнитной индукцией:

$$B \sim \frac{M_{\max}}{p_m}. \quad (39.3)$$

Магнитная индукция — вектор, направление которого определяется равновесным направлением положительной нормали к пробному контуру (мы назвали его направлением поля). Формула (39.3) определяет модуль вектора  $\mathbf{B}$ .

Поле вектора  $\mathbf{B}$  можно представить наглядно с помощью линий магнитной индукции, которые строятся по тем же правилам, что и линии вектора  $\mathbf{E}$  (см. § 7).

Из сказанного вытекает, что  $\mathbf{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на ток и, следовательно, является аналогом напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , которая характеризует силовое действие электрического поля на заряд.

#### § 40. Закон Био — Савара. Поле движущегося заряда

Био и Савар провели в 1820 г. исследование магнитных полей токов различной формы. Они установили, что магнитная индукция во всех случаях пропорциональна силе тока, создающего магнитное поле, и более или менее сложным образом зависит от расстояния до той точки, в которой определялась  $\mathbf{B}$ . Лаплас проанализировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и нашел, что магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей,

создаваемых отдельными элементарными участками тока. Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока длины  $dl$ , Лаплас получил формулу

$$d\mathbf{B} = k' \frac{i [dl, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (40.1)$$

где  $k'$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения,  $i$  — сила тока,  $dl$  — вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в какую течет ток (рис. 64),  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный от элемента тока в ту точку, в которой определяется  $d\mathbf{B}$ ,  $r$  — модуль этого вектора.

Соотношение (40.1) носит название закона Био — Савара — Лапласа или более кратко закона Био — Савара.

Направлен вектор  $d\mathbf{B}$  перпендикулярно к плоскости, проходящей через  $dl$  и точку, в которой вычисляется поле, причем так, что вращение вокруг  $dl$  в направлении  $d\mathbf{B}$  связано с  $dl$  правилом правого винта (рис. 64). Для модуля  $d\mathbf{B}$  можно написать следующее выражение:

$$dB = k' \frac{i dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (40.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $dl$  и  $\mathbf{r}$ .

В рационализованной форме закон Био — Савара записывается следующим образом:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (40.3)$$

т. е. полагается  $k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ . Единица магнитной индукции в СИ называется тесла (Тл).

В системах СГСЭ и СГСМ единицы измерения  $B$  выбираются так, чтобы коэффициент  $k'$  в выражении закона Био — Савара был

<sup>1)</sup> Напоминаем, что в этой главе рассматриваются только магнитные поля в вакууме.

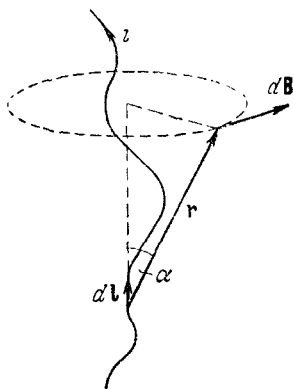


Рис. 64.

равен 1. Следовательно, между единицами  $B$  в этих системах имеется то же соотношение, что и между единицами силы тока:

$$1 \text{ СГСМ-ед. } B = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ-ед. } B. \quad (40.4)$$

СГСМ-единица магнитной индукции имеет специальное название — гаусс ( $гс$ ).

Гаусс предложил абсолютную систему единиц, в которой все электрические величины (заряд, сила тока и т. п.) измеряются в единицах СГСЭ-системы, а магнитные (магнитный момент, магнитная индукция и т. п.) — в единицах СГСМ-системы. В гауссовой системе закон Био — Савара имеет вид

$$dB = \frac{1}{c} \frac{i dl \sin \alpha}{r^2} \quad (40.5)$$

(по поводу множителя  $1/c$  см. стр. 126).

Электрический ток есть, как мы знаем, упорядоченное движение зарядов. Таким образом, магнитное поле возбуждается движущимися зарядами. Поле (40.1) создается всеми движущимися зарядами, заключенными в элементе тока  $dl$ . Чтобы найти магнитную индукцию поля, создаваемого одним движущимся зарядом, преобразуем выражение (40.1), заменив в нем силу тока  $i$  произведением плотности тока  $j$  на площадь поперечного сечения проводника  $S$ . Вектор плотности тока  $j$  и вектор  $dl$  имеют одинаковое направление. Поэтому можно написать, что

$$i dl = S j dl. \quad (40.6)$$

Если все носители заряда в проводнике одинаковы и имеют заряд  $e'$  ( $e'$  — алгебраическая величина), вектор плотности тока можно представить в виде [см. (31.4)]

$$j = e' n u, \quad (40.7)$$

где  $n$  — число носителей в единице объема,  $u$  — средняя скорость их упорядоченного движения. Заметим, что когда носители тока положительны,  $j$  и  $u$  имеют одинаковое направление. В случае отрицательных носителей  $j$  и  $u$  направлены в противоположные стороны.

Подставим в формулу (40.1) выражение (40.6) для  $i dl$ , заменив в нем  $j$  согласно (40.7) ( $k'$  полагаем равным  $\mu_0/4\pi$ ). В результате получим, что

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S dl n e' [ur]}{r^3}. \quad (40.8)$$

Произведение  $S \, dl$  дает число носителей заряда, заключенных в элементе провода длины  $dl$ . Разделив выражение (40.8) на это число, получим магнитную индукцию поля, создаваемого одним зарядом, движущимся со скоростью  $u$ .

Если заряд  $e'$  движется со скоростью  $v$ , то индукция создаваемого этим зарядом магнитного поля в точке, положение которой относительно заряда определяется радиусом-вектором  $r$ , равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e' [\mathbf{vr}]}{r^3}. \quad (40.9)$$

В гауссовой системе эта формула имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{e' [\mathbf{vr}]}{r^3}. \quad (40.10)$$

Следует иметь в виду, что электромагнитные возмущения распространяются в пространстве с конечной скоростью, равной скорости света  $c$ . Поэтому поле в данной точке пространства будет соответствовать тому состоянию (т. е. положению и скорости) заряда, которое существовало на  $\tau = r/c$  секунд раньше ( $r$  — расстояние от точки, где был на  $\tau$  секунд раньше заряд, до точки, в которой определяется  $\mathbf{B}$ ). Таким образом, имеет место запаздывание значений поля, тем большее, чем дальше отстоит данная точка поля от вызвавшего это поле заряда. Формулы (40.9) и (40.10) дают правильный результат лишь в том случае, если перемещением заряда за время  $\tau$  (которое равно  $v\tau$ ) можно пренебречь по сравнению с расстоянием  $r$  до данной точки поля, т. е. при соблюдении условия:  $v\tau \ll r$ . Разделив неравенство на  $\tau$  и приняв во внимание, что  $r/\tau$  равно  $c$ , получим условие

$$v \ll c, \quad (40.11)$$

при котором справедливы формулы (40.9) и (40.10).

## § 41. Поля прямого и кругового токов

Применим формулу (40.3) для вычисления полей простейших токов. Рассмотрим поле, создаваемое током, текущим по бесконечному прямому проводу (рис. 65). Все  $d\mathbf{B}$  в данной точке имеют одинаковое направление (в нашем случае за чертеж). Поэтому сложение векторов  $d\mathbf{B}$  можно заменить сложением их модулей. Точка,

для которой мы вычисляем магнитную индукцию, находится на расстоянии  $b$  от провода. Из рис. 65 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставим эти значения в формулу (40.3):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ib d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{b} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол  $\alpha$  для всех элементов бесконечного прямого тока изменяется в пределах от 0 до  $\pi$ . Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \mu_0 \frac{i}{2\pi b}.$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi b}. \quad (41.1)$$

В гауссовой системе эта формула имеет вид

$$B = \frac{1}{c} \frac{2i}{b}. \quad (41.2)$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей (рис. 66).

Из формулы (41.1) следует, что на расстоянии  $b = \frac{1}{2\pi}$  м от

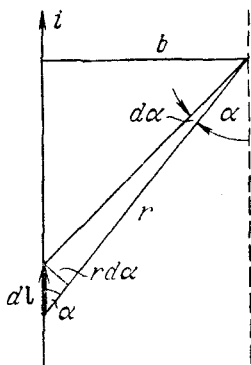


Рис. 65.

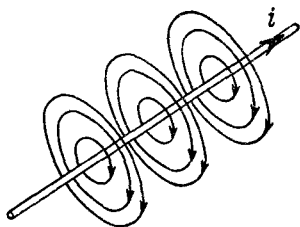


Рис. 66.

прямого провода, по которому течет ток силой 1 а, магнитная индукция численно равна магнитной постоянной  $\mu_0$ . Приняв во внимание значение (38.3) для  $\mu_0$ , найдем, что в рассматриваемом случае  $B = 4\pi \cdot 10^{-7}$  тл. Чтобы получить для того же случая значение  $B$

в гауссах, подставим в (41.2)  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек,  $i = 3 \cdot 10^9$  СГСЭ [см. (31.6)],  $b = (100/2\pi)$  см:

$$B = \frac{1}{c} \frac{2i}{b} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^9}{(100/2\pi)} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ эс.}$$

Таким образом,  $4\pi \cdot 10^{-7}$  тл эквивалентны  $4\pi \cdot 10^{-3}$  эс, откуда

$$1 \text{ тл} = 10^4 \text{ эс.} \quad (41.3)$$

Рассмотрим поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса  $R$  (круговой ток). Определим магнитную индукцию

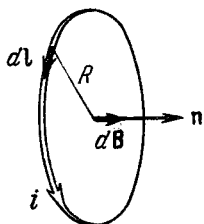


Рис. 67.

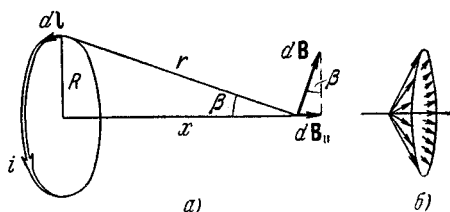


Рис. 68.

в центре кругового тока (рис. 67). Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение  $d\mathbf{B}$  сводится к сложению их модулей. По формуле (40.3)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl}{R^2}$$

( $\alpha = \pi/2$ ). Проинтегрируем это выражение по всему контуру:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R^2} 2\pi R = \mu_0 \frac{i}{2R}.$$

Итак, магнитная индукция в центре кругового тока равна

$$B = \mu_0 \frac{i}{2R}. \quad (41.4)$$

Теперь найдем  $\mathbf{B}$  на оси кругового тока, на расстоянии  $x$  от плоскости, в которой лежит контур (рис. 68). Векторы  $d\mathbf{B}$  перпендикулярны к плоскостям, проходящим



через соответствующие  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ . Следовательно, они образуют симметричный конический веер (рис. 68, б). Из соображений симметрии можно заключить, что результирующий вектор  $\mathbf{B}$  направлен вдоль оси тока. Каждый из составляющих векторов  $d\mathbf{B}$  вносит в результирующий вектор вклад  $d\mathbf{B}_{\parallel}$ , равный по модулю  $dB \sin \beta = dB \frac{R}{r}$ . Угол  $\alpha$  между  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$  прямой, поэтому

$$d\mathbf{B}_{\parallel} = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR dl}{r^3}.$$

Проинтегрировав по всему контуру и заменив  $r$  на  $\sqrt{R^2 + x^2}$ , получим

$$B = \int d\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR}{r^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (41.5)$$

При  $x = 0$  эта формула переходит, как и должно быть, в формулу (41.4) для магнитной индукции в центре кругового тока.

Стоящее в числителе соотношения (41.5) выражение  $\pi R^2 i$  равно  $p_m$  — магнитному моменту контура. На больших расстояниях от контура в знаменателе можно пренебречь  $R^2$  по сравнению с  $x^2$ . Тогда формула (41.5) принимает вид

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3},$$

аналогичный выражению (6.2) для напряженности электрического поля на оси диполя. Учитывая, что  $\mathbf{B}$  на оси кругового тока и  $p_m$  направлены вдоль положительной нормали к контуру, можно написать

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}. \quad (41.6)$$

На рис. 69 изображены линии магнитной индукции поля кругового тока. Даны лишь линии, лежащие в одной из плоскостей, проходящих через ось тока. Подобная же картина имеет место в любой из этих плоскостей.

Из рис. 70 видно, что два одинаковых соосных круговых тока создают в плоскости, относительно которой

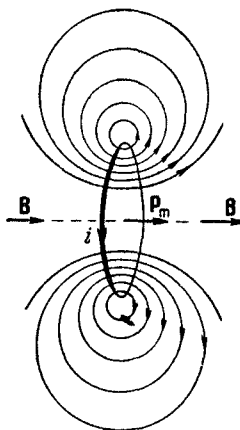


Рис. 69.

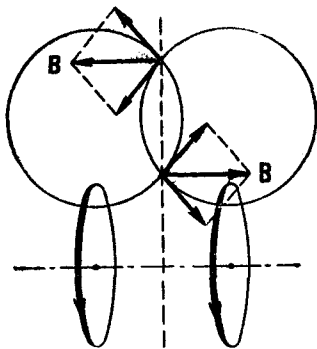


Рис. 70.

они симметричны, магнитную индукцию, направленную в каждой точке перпендикулярно к этой плоскости.

## § 42. Циркуляция вектора $\mathbf{B}$ . Поле соленоида и тороида

Возьмем контур, охватывающий прямой ток, и вычислим для него циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$ :

$$\oint \mathbf{B}_t dl.$$

Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости, перпендикулярной к току (рис. 71; ток перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Воспользовавшись известным свойством скалярного произведения векторов,  $B_t dl$  можно заменить через  $B dl_B$ , где  $dl_B$  — проекция перемещения  $dl$  на направление  $\mathbf{B}$ . Но  $dl_B$  можно представить в виде  $R d\alpha$ , где  $R$  — расстояние от прямого тока до  $dl$ ,  $d\alpha$  — угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль

контура на отрезок  $dl$ . Поэтому, учтя выражение (41.1) для  $B$ , можно написать

$$B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} R d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\alpha.$$

Таким образом, выражение для циркуляции имеет вид

$$\oint B_l dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\alpha. \quad (42.1)$$

При обходе по контуру, охватывающему ток, радиальная прямая все время поворачивается в одном

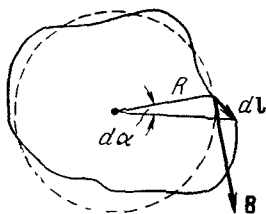


Рис. 71.

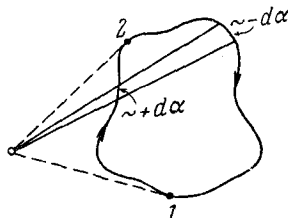


Рис. 72.

направлении, поэтому  $\oint d\alpha = 2\pi$ . Иначе обстоит дело, если ток не охватывается контуром (рис. 72). В этом случае

при обходе по контуру радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (участок 1—2), а затем в противоположном (участок 2—1), вследствие чего  $\oint d\alpha$  будет равен нулю. Учитывая этот результат, можно написать

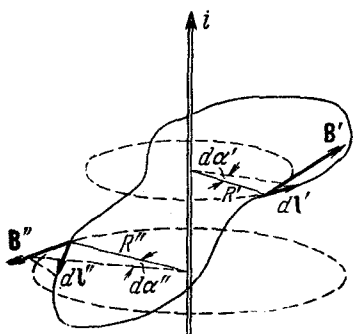


Рис. 73.

где под  $i$  следует подразумевать ток, охватываемый контуром. Если контур тока не охватывает, циркуляция вектора  $B$  равна нулю.

Случай контура произвольной формы (рис. 73) отличается от рассмотренного нами случая лишь тем, что при перемещении вдоль контура радиальная прямая не

$$\oint B_l dl = \mu_0 i, \quad (42.2)$$

где под  $i$  следует подразумевать ток, охватываемый

контуром. Если контур тока не охватывает, циркуляция вектора  $B$  равна нулю.

Случай контура произвольной формы (рис. 73) отличается от рассмотренного нами случая лишь тем, что при перемещении вдоль контура радиальная прямая не

только поворачивается вокруг тока, но и перемещается вдоль него. Все предыдущие выкладки остаются справедливыми, если под  $da$  подразумевать угол, на который поворачивается проекция радиальной прямой на перпендикулярную к току плоскость. Суммарный угол поворота этой проекции равен  $2\pi$ , если контур охватывает ток, и нулю в противном случае. Следовательно, мы снова приходим к формуле (42.2). Эта формула получена нами для случая прямого тока. Можно показать, что она справедлива и для тока, текущего по проводнику произвольной формы.

Если контур охватывает несколько токов, циркуляция  $\mathbf{B}$  равна их алгебраической сумме:

$$\oint B_l dl = \mu_0 \sum i. \quad (42.3)$$

Вычисляя сумму токов, положительным нужно считать такой ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления будет отрицательным.

Выражение (42.3) справедливо только для поля в вакууме. Для поля в веществе в формуле (42.3), кроме токов, текущих по проводам (макротоков), необходимо учитывать также молекулярные токи (см. § 44).

Воспользовавшись соотношением (31.3), можно написать

$$\oint B_l dl = \mu_0 \int_S j_n dS, \quad (42.4)$$

где  $S$  — произвольная поверхность, опирающаяся на данный контур.

В гауссовой системе формула (42.3) имеет вид

$$\oint B_l dl = \frac{4\pi}{c} \sum i. \quad (42.5)$$

Величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  являются основными силовыми характеристиками соответствующих полей. Сопоставление выражений (9.2) и (42.3) для циркуляций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  позволяет заключить, что между этими полями имеется принципиальное различие. Циркуляция напряженности электростатического поля всегда равна нулю, следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано потенциалом  $\varphi$ . Циркуляция магнитной

индукции отлична от нуля, если контур, по которому берется циркуляция, охватывает ток. Поля, обладающие таким свойством, называются вихревыми (или соленоидальными). Магнитному полю нельзя приписать потенциал, который был бы связан с магнитной индукцией соотношением, аналогичным формуле (11.7). Этот потенциал не был бы однозначным — после каждого обхода по контуру, охватывающему ток, и возвращения в первоначальную точку он получал бы приращение, равное  $\mu_0 I$ .

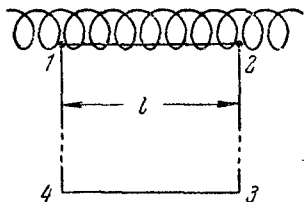


Рис. 74.

Далее, линии напряженности электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах. Как показывает опыт, линии магнитной индукции, напротив, всегда замкнуты (см. рис. 66, 69 и 75). Это указывает на то, что магнитных зарядов в природе не существует.

Применим формулу (42.3) для вычисления магнитной индукции поля бесконечно длинного соленоида. Соленоид (рис. 74) представляет собой тонкий провод, навитый плотно, виток к витку, на цилиндрический каркас. В отношении создаваемого им поля соленоид эквивалентен системе одинаковых круговых токов с общей прямой осью. Бесконечно длинный соленоид симметричен относительно любой перпендикулярной к его оси плоскости. Взятые попарно симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, магнитная индукция которого перпендикулярна к плоскости (см. рис. 70). Следовательно, в любой точке внутри и вне соленоида вектор  $\mathbf{B}$  может иметь лишь направление, параллельное оси.

Возьмем прямоугольный контур 1—2—3—4 (рис. 74). Циркуляцию  $\mathbf{B}$  по этому контуру можно представить следующим образом:

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl.$$

Из четырех интегралов, стоящих в правой части, второй и четвертый равны нулю, так как вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен к участкам контура, по которым они берутся.

Взяв участок 3—4 на большом расстоянии от соленоида (где поле заведомо должно быть очень слабым), третьим слагаемым можно пренебречь. Следовательно, можно утверждать, что

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl = Bl;$$

здесь  $B$  — магнитная индукция поля в тех точках, где располагается отрезок 1—2,  $l$  — длина этого отрезка.

Если отрезок 1—2 проходит внутри соленоида на любом расстоянии от его оси, контур охватывает суммарный ток  $nli$ , где  $n$  — число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины,  $i$  — сила тока в соленоиде. Поэтому согласно (42.3)

$$\oint B_l dl = Bl = \mu_0 ni,$$

откуда

$$B = \mu_0 ni. \quad (42.6)$$

В гауссовой системе эта формула имеет вид

$$B = \frac{4\pi}{c} ni. \quad (42.7)$$

Отметим, что полученный нами результат не зависит от того, на каком расстоянии от оси (но внутри соленоида) располагается отрезок 1—2. Если этот отрезок располагается вне соленоида, то охватываемый контуром ток равен нулю, вследствие чего

$$\oint B_l dl = Bl = 0,$$

откуда  $B = 0$ . Таким образом, вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю, внутри — всюду одинакова и имеет величину, определяемую формулой (42.6). По этой причине в учении о магнетизме бесконечно длинный соленоид играет такую же роль, как плоский конденсатор в учении об электричестве. В обоих случаях поле однородно и полностью заключено внутри конденсатора (электрическое) и внутри соленоида (магнитное).

Произведение  $ni$  называется числом ампер-витков на метр. При  $n = 1000$  витков на метр и силе тока в 1 а магнитная индукция внутри соленоида будет  $4\pi \cdot 10^{-4} \text{ тл} = 4\pi \text{ гс}$  [см. (41.3)].

Подобно тому, как оба круговых тока на рис. 70 вносят одинаковый вклад в результирующее поле, обе половины бесконечно длинного соленоида принимают равное участие в создании поля (42.6). Поэтому, если половину соленоида убрать, то у конца оставшегося «полубесконечного» соленоида магнитная индукция будет равна половине значения, получаемого из (42.6):

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i. \quad (42.8)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (42.6) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (42.8) для точек вблизи его концов.

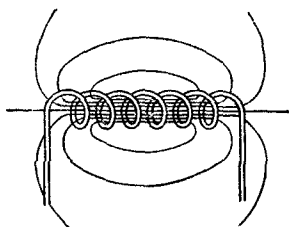


Рис. 75.

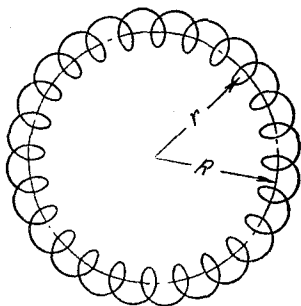


Рис. 76.

На рис. 75 показана примерная картина линий магнитной индукции для соленоида конечной длины.

Тороид представляет собой тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 76). Он эквивалентен системе одинаковых круговых токов, центры которых расположены по окружности. Возьмем контур в виде окружности радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром тороида. В силу симметрии вектор  $\mathbf{B}$  в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру. Следовательно,

$$\oint B_1 dl = B \cdot 2\pi r,$$

где  $B$  — магнитная индукция в тех точках, где проходит контур.

Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток  $2\pi Rni$  ( $R$  — радиус тороида,  $n$  — число витков на единицу его длины). В этом случае

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi Rni,$$

откуда

$$B = \mu_0 ni \frac{R}{r}. \quad (42.9)$$

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него  $B \cdot 2\pi r = 0$ . Таким образом, вне тороида магнитная индукция равна нулю.

Для тороида, радиус которого  $R$  значительно превосходит радиус витка, отношение  $R/r$  для всех точек внутри тороида мало отличается от единицы и вместо (42.9) получается такая же формула, как для бесконечно длинного соленоида:

$$B = \mu_0 ni. \quad (42.10)$$

В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений тороида. В разных сечениях поле имеет различное направление, поэтому говорить об однородности поля в пределах всего тороида можно только условно, имея в виду модуль вектора  $\mathbf{B}$ .



## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

## § 43. Магнитное поле в веществе

В предыдущей главе предполагалось, что проводники, по которым текут токи, создающие магнитное поле, находятся в вакууме. Если несущие ток проводники находятся в какой-либо среде, магнитное поле существенным образом изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле  $\mathbf{V}'$ , которое накладывается на обусловленное токами поле  $\mathbf{V}_0$ . Оба поля в сумме дают результирующее поле:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'. \quad (43.1)$$

Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под  $\mathbf{V}$  подразумевается усредненное (макроскопическое) поле (см. § 16).

Для объяснения намагничения тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю. В силу хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекул суммарный магнитный момент тела также равен нулю. Под действием поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориен-

тацию в одном направлении, вследствие чего магнетик намагничивается — его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга и возникает поле  $\mathbf{B}'$ .

Намагничение магнетика естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют вектором намагничивания и обозначают  $\mathbf{J}$ . Если магнетик намагничен неоднородно, вектор намагничивания в данной точке определяется следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m}{\Delta V}, \quad (43.2)$$

где  $\Delta V$  — физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки,  $\mathbf{p}_m$  — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме  $\Delta V$  [ср. с формулой (15.1)].

#### § 44. Описание поля в магнетиках

Найдем поток вектора  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$  через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Phi_B = \oint_S B_n dS = \oint_S (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}')_n dS = \oint_S B_{0n} dS + \oint_S B'_n dS.$$

В § 42 было установлено, что линии вектора  $\mathbf{B}_0$  (характеризующего поле, создаваемое макроскопическими токами) всегда замкнуты. То же самое справедливо и для линий вектора  $\mathbf{B}'$ . Поэтому оба интеграла, стоящие справа, равны нулю (каждая из линий  $\mathbf{B}_0$  или  $\mathbf{B}'$  пересекает замкнутую поверхность четное число раз, причем она входит внутрь поверхности столько же раз, сколько выходит наружу). Следовательно,

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = 0. \quad (44.1)$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора  $\mathbf{B}$ : *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Теперь обратимся к циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ , которая по определению равна:

$$\oint B_l dl = \oint (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}')_l dl = \oint B_{0l} dl + \oint B'_l dl.$$

В § 42 было установлено, что циркуляция вектора  $\mathbf{B}_0$ , выражаемая первым из интегралов, стоящих в правой части, пропорциональна алгебраической сумме макроскопических токов  $i$ , охватываемых контуром, по которому берется циркуляция. Аналогично циркуляция вектора  $\mathbf{B}'$  (второе слагаемое) должна быть пропорциональна сумме всех, охватываемых контуром молекулярных токов  $I_M$ . Следовательно, циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  результирующего поля пропорциональна сумме всех охватываемых контуром токов (как макроскопических  $i$ , так и молекулярных  $I_M$ ):

$$\oint B_l dl = \mu_0 \sum i + \mu_0 \sum I_M. \quad (44.2)$$

Возникает ситуация, аналогичная той, с которой мы столкнулись при рассмотрении электрического поля в диэлектриках [см. формулу (16.2)]: для того чтобы определить  $\mathbf{B}$ , нужно знать не только токи, текущие по проводам,

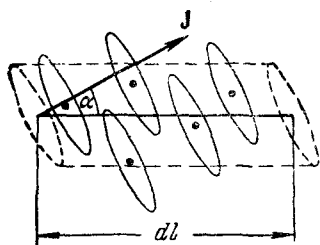


Рис. 77.

но и молекулярные токи. Путь, позволяющий обойти это затруднение, также аналогичен тому пути, которым мы воспользовались в § 16. Сказывается, можно найти такую вспомогательную величину, которая связана простым соотношением с вектором  $\mathbf{B}$  и определяется лишь макроскопическими токами.

Чтобы установить вид этой вспомогательной величины, попробуем выразить фигурирующую в (44.2) сумму молекулярных токов через вектор намагничивания магнетика  $\mathbf{J}^1$ ). В эту сумму должны войти только те молекулярные токи, которые оказываются «наинзанными» на контур, для которого вычисляется циркуляция. Как видно из рис. 77, элемент контура  $dl$ , образующий с направ-

<sup>1)</sup> В § 16 мы выразили сумму связанных зарядов через вектор поляризации диэлектрика  $\mathbf{P}$ .

лением намагничивания угол  $\alpha$ , пересекает те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косо́го цилиндра с объемом  $S_M \cos \alpha dl$  ( $S_M$  — площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Если  $n$  — число молекул в единице объема, то суммарный ток, охватываемый элементом  $dl$ , равен  $I_M n S_M \cos \alpha dl$ . Произведение  $I_M S_M$  равно магнитному моменту  $p_m$  отдельного молекулярного тока. Следовательно, выражение  $I_M S_M n$  представляет собой магнитный момент единицы объема, т. е. дает модуль вектора  $\mathbf{J}$ , а  $I_M S_M n \cos \alpha$  — проекцию  $J_l$  вектора  $\mathbf{J}$  на направление элемента  $dl$ . Таким образом, суммарный молекулярный ток, охватываемый элементом  $dl$ , равен  $J_l dl$ , а сумма молекулярных токов, охватываемых всем контуром:

$$\sum I_M = \oint J_l dl. \quad (44.3)$$

Исключив из формул (44.2) и (44.3) сумму молекулярных токов, легко получить следующее соотношение:

$$\oint \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right)_l dl = \sum i. \quad (44.4)$$

Выражение, стоящее в скобках под знаком интеграла, и есть искомая вспомогательная величина. Ее обозначают буквой  $\mathbf{H}$  и называют напряженностью магнитного поля.

Итак, напряженностью магнитного поля называется физическая величина, определяемая соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (44.5)$$

С использованием этой величины формула (44.4) может быть записана в виде

$$\oint H_l dl = \sum i. \quad (44.6)$$

Если макроскопические токи распределены в пространстве с плотностью  $\mathbf{j}$ , формула (44.6) видоизменяется следующим образом:

$$\oint H_l dl = \oint_S j_n dS \quad (44.7)$$

( $S$  — произвольная поверхность, ограниченная контуром, по которому берется циркуляция).

Формулы (44.6) и (44.7) выражают теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ : *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.*

Из сказанного выше вытекает, что напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  является аналогом электрического смещения (электрической индукции)  $\mathbf{D}$ . Первоначально предполагалось, что в природе имеются подобные электрическим зарядам магнитные массы, и учение о магнетизме развивалось по аналогии с учением об электричестве. В те времена и были введены названия: «магнитная индукция» для  $\mathbf{B}$  и «напряженность поля» для  $\mathbf{H}$ . Впоследствии выяснилось, что магнитных масс в природе не существует и что величина, названная магнитной индукцией, в действительности является аналогом не электрического смещения  $\mathbf{D}$ , а напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  (соответственно  $\mathbf{H}$  — аналогом не  $\mathbf{E}$ , а  $\mathbf{D}$ ). Однако изменять уже установившуюся терминологию не стали, тем более, что вследствие различной природы электрического и магнитного полей (электростатическое поле потенциально, магнитное — соленоидально) величины  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  обнаруживают много сходства в своем поведении (например, линии  $\mathbf{B}$ , как и линии  $\mathbf{D}$ , не претерпевают разрыва на границе двух сред).

В вакууме  $\mathbf{J} = 0$ , поэтому  $\mathbf{H}$  превращается в  $\mathbf{B}/\mu_0$  и формулы (44.6) и (44.7) переходят в формулы (42.3) и (42.4).

Из формулы (41.1) следует, что напряженность поля прямого тока в вакууме определяется выражением

$$H = \frac{i}{2\pi b}, \quad (44.8)$$

из которого видно, что напряженность магнитного поля имеет размерность, равную размерности силы тока, деленной на размерность длины. В соответствии с этим единица напряженности магнитного поля в СИ носит название ампер на метр ( $a/m$ ). Согласно (44.8) на расстоянии  $b = \frac{1}{2\pi}$  м от прямого провода, по которому течет ток силой 1 а, напряженность магнитного поля равна 1  $a/m$ . Напомним, что магнитная индукция в этом случае равна  $4\pi \cdot 10^{-7}$  тл [см. § 41].

В гауссовой системе напряженность магнитного поля определяют следующим образом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}, \quad (44.9)$$

а выражение для циркуляции имеет вид

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \sum i. \quad (44.10)$$

Как вытекает из (44.9) в вакууме  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ . В соответствии с этим единица измерения  $\mathbf{H}$  в гауссовой системе, называемая эрстедом, имеет ту же величину и размерность, что и единица магнитной индукции — гаусс. По существу эрстед и гаусс суть разные названия одной и той же единицы. Если этой единицей измеряют  $\mathbf{H}$ , ее называют эрстедом (э), если измеряют  $\mathbf{B}$ , то — гауссом.

Таким образом,  $H$  прямого тока в вакууме определяется той же формулой (41.2), которой определяется  $B$ , причем  $H$  в эрстедах численно равна  $B$  в гауссах. Согласно расчету, предшествовавшему соотношению (41.3),  $H$  на расстоянии  $\frac{1}{2\pi}$  м от прямого тока силой 1 а равна  $4\pi \cdot 10^{-3}$  э. В СИ та же напряженность равна 1 а/м. Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ 1 \text{ а/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э} \\ 1 \text{ э} = 79,6 \text{ а/м} (\approx 80 \text{ а/м}). \end{array} \right\} \quad (44.11)$$

Вектор намагничивания  $\mathbf{J}$  принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Как показывает опыт, вектор  $\mathbf{J}$  связан с вектором  $\mathbf{H}$  в той же точке магнетика соотношением

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \quad (44.12)$$

где  $\chi$  — характерная для данного магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью<sup>1)</sup>. Согласно (44.5) размерность  $\mathbf{H}$  совпадает с размерностью  $\mathbf{J}$ . Следовательно,  $\chi$  — безразмерная величина.

Подставив в формулу (44.5) выражение (44.12) для  $\mathbf{J}$ , получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi\mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (44.13)$$

<sup>1)</sup> В анизотропных средах направления векторов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$  могут не совпадать.

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (44.14)$$

называется относительной магнитной проницаемостью или просто магнитной проницаемостью<sup>1)</sup> вещества.

В отличие от диэлектрической восприимчивости  $\chi$ , которая принимает лишь положительные значения (вектор поляризации  $\mathbf{P}$  в изотропном диэлектрике всегда направлен по полю  $\mathbf{E}$ ), магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы.

Подставив (44.14) в формулу (44.13), приходим к соотношению

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}, \quad (44.15)$$

которое и является тем простым соотношением между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , о котором упоминалось выше.

Таким образом, напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор  $\mathbf{B}$ , но в  $\mu_0 \mu$  раз меньший по модулю (в анизотропных средах векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  могут не совпадать по направлению).

Соотношение (44.12), связывающее векторы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$ , имеет точно такой вид и в гауссовой системе. Подставив это выражение в формулу (44.9), получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\chi\mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{1 + 4\pi\chi}. \quad (44.16)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (44.17)$$

называется магнитной проницаемостью вещества. Введя эту величину в формулу (44.16), получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \quad (44.18)$$

Легко видеть, что  $\mu$  в гауссовой системе совпадает с  $\mu$  в СИ. Сопоставление формул (44.14) и (44.17) показывает, что значение

---

<sup>1)</sup> Иногда для упрощения формул вводят так называемую абсолютную магнитную проницаемость  $\mu_a = \mu_0 \mu$ . Однако эта величина физического смысла не имеет и мы ею пользоваться не будем.

магнитной восприимчивости в рационализованной системе превосходит в  $4\pi$  раз значение  $\chi$  в гауссовой системе:

$$\chi_{СИ} = 4\pi\chi_{ГС}. \quad (44.19)$$

Перейдем к выяснению физического смысла величин  $\mathbf{H}$  и  $\mu$ . Рассмотрим однородное магнитное поле в вакууме, которое можно задать с помощью либо вектора  $\mathbf{B}_0$ , либо вектора  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$ . Вектор  $\mathbf{H}_0$  мы назовем напряженностью внешнего поля. Внесем в это поле бесконечно длинный круглый стержень из однородного магнетика и расположим его вдоль  $\mathbf{B}_0$  (рис. 78). Под действием поля молекулярные токи установятся так, что их магнитные моменты расположатся вдоль оси стержня, вследствие чего их плоскости станут перпендикулярными к этой оси. Рассмотрим молекулярные токи, лежащие в произвольно выбранном поперечном сечении стержня. В каждой точке внутри стержня смежные молекулярные токи текут в противоположные стороны, так что их совместное действие равно нулю. Некомпенсированными будут лишь участки токов, примыкающие к поверхности стержня. Таким образом, суммарное действие молекулярных токов будет таким, какое вызвал бы макроскопический ток, текущий по поверхности стержня. Обозначим силу этого тока, приходящуюся на единицу длины стержня (линейную плотность тока), через  $I_1$ . Очевидно, что цилиндр, обтекаемый током, эквивалентен соленоиду с числом ампер-витков  $ni$ , равным линейной плотности тока  $I_1$ . Следовательно, все молекулярные токи возбуждают совместно такое поле, какое создал бы в вакууме соленоид с числом ампер-витков, равным  $I_1$ . Согласно формуле (42.6) магнитная индукция этого поля равна

$$\mathbf{B}' = \mu_0 I_1. \quad (44.20)$$

Легко видеть, что направление  $\mathbf{B}'$  совпадает с направлением  $\mathbf{B}_0$ . Вне стержня  $\mathbf{B}'$  равна нулю.

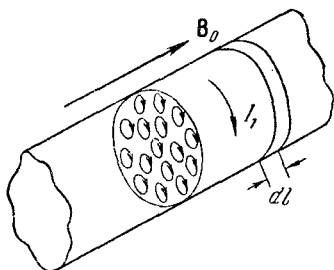


Рис. 78.



Выделим мысленно в стержне перпендикулярный к оси слой толщины  $dl$ . Молекулярные токи, заключенные в объеме этого слоя, эквивалентны круговому току силы  $I_1 dl$ . Согласно формуле (39.1) магнитный момент этого тока равен

$$dp_m = I_1 S dl,$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня. Разделив  $dp_m$  на объем слоя  $dV = Sdl$ , получим для намагничивания стержня следующее выражение:

$$J = I_1. \quad (44.21)$$

Таким образом, намагничение стержня совпадает с линейной плотностью тока.

С учетом (44.21) формула (44.20) принимает вид

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J} \quad (44.22)$$

(мы воспользовались тем, что векторы  $\mathbf{B}'$  и  $\mathbf{J}$  имеют одинаковое направление).

Складывая векторы  $\mathbf{B}'$  и  $\mathbf{B}_0$ , находим вектор магнитной индукции результирующего поля

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}.$$

Наконец, подставив это значение  $\mathbf{B}$  в формулу (44.5), получаем

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0. \quad (44.23)$$

Итак, в рассмотренном нами случае напряженность поля в магнетике совпадает с вектором магнитной индукции внешнего поля, деленным на  $\mu_0$ , т. е. оказывается равной напряженности внешнего поля.

Согласно формуле (44.15), умножив  $\mathbf{H}$  на  $\mu_0 \mu$ , мы получим индукцию  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (44.24)$$

Отсюда следует, что относительная магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике [ср. с (16.18)].

Заметим, что поскольку поле  $\mathbf{B}'$  отлично от нуля только внутри стержня, магнитное поле вне стержня остается без изменений.

Полученный нами результат бывает справедлив в тех случаях, когда однородный магнетик заполняет объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями напряженности внешнего поля<sup>1)</sup>. В противном случае напряженность поля, определяемая формулой (44.5), не совпадает с  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{V}_0/\mu_0$ .

Условно полагают, что напряженность поля в магнетике равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_\circ,$$

где  $\mathbf{H}_0$  — внешнее поле, а  $\mathbf{H}_\circ$  — так называемое размагничивающее поле, которое предполагается пропорциональным намагничению:

$$\mathbf{H}_\circ = N\mathbf{J}. \quad (44.25)$$

Коэффициент пропорциональности  $N$  называется размагничивающим фактором. Он зависит от формы магнетика. Для тела, поверхность которого не пересекается линиями напряженности внешнего поля, как мы видели,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , т. е. размагничивающий фактор равен нулю. Для тонкого диска, перпендикулярного к внешнему полю,  $N = 1$ , для шара  $N = 1/3$ .

Соответствующий расчет дает, что в случае, когда однородный магнетик, имеющий форму эллипсоида, помещается в однородное внешнее поле, магнитное поле в нем хотя и отлично от внешнего, но также однородно. То же справедливо для шара, представляющего собой частный случай эллипсоида, а также для длинного стержня и тонкого диска, которые можно считать предельными случаями эллипсоида.

## § 45. Преломление линий магнитной индукции

Выясним, что происходит на границе двух однородных изотропных магнетиков с разными  $\mu$ . Рассмотрим воображаемый цилиндр высоты  $h$ , основания которого  $S_1$  и  $S_2$  расположены по разные стороны поверхности раздела (рис. 79). Применим к этому цилиндру теорему

<sup>1)</sup> Напомним, что в случае электрического поля  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$  при условии, что однородный диэлектрик заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, т. е. поверхностями, ортогональными линиям напряженности внешнего поля.

Гаусса (44.1). Потоком  $\mathbf{B}$  через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как  $h$  мы будем стремиться к нулю. Поток через верхнее основание цилиндра равен  $B_{1n}S_1$ , где  $B_{1n}$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  в первом магнетике в непосредственной близости к поверхности раздела. Аналогично поток через нижнее основание есть  $B_{2n}S_2$ , где  $B_{2n}$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  во втором магнетике также в непосредственной близости к поверхности раздела магнетиков.

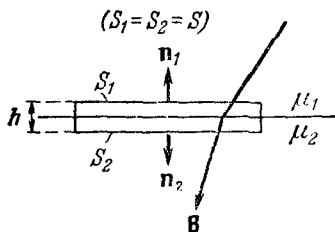


Рис. 79.

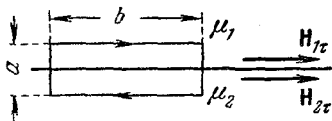


Рис. 80.

Сложив эти два потока, мы получим полный поток, который согласно теореме Гаусса должен быть равен нулю:

$$\Phi_B = B_{1n}S_1 + B_{2n}S_2 = (B_{1n} + B_{2n})S = 0.$$

Отсюда следует, что  $B_{1n} = -B_{2n}$ . Если проецировать  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  на одну и ту же нормаль, то получится, что

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (45.1)$$

Заменив согласно (44.15) составляющие  $\mathbf{B}$  соответствующими составляющими вектора  $\mathbf{H}$ , умноженными на  $\mu_0\mu$ , получим соотношение

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (45.2)$$

Теперь возьмем на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 80) и вычислим для него циркуляцию  $\mathbf{H}$ . Ширину контура  $a$  возьмем столь малой, чтобы вкладом, вносимым в циркуляцию сторонами, перпендикулярными к поверхности раздела, можно было пренебречь. Тогда для циркуляции получается выражение  $b(H_{1\tau} - H_{2\tau})$ . Поскольку контур не охватывает макро-

скопических токов, циркуляция должна быть равна нулю [см. (44.6)], откуда вытекает, что

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (45.3)$$

Заменяя согласно (44.15) составляющие  $\mathbf{H}$  соответствующими составляющими вектора  $\mathbf{B}$ , деленными на  $\mu_0\mu$ , получим соотношение

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (45.4)$$

Резюмируя, можно сказать, что при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора  $\mathbf{B}$  и нормальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  при переходе через границу раздела претерпевают разрыв. Таким образом, при переходе через границу раздела двух сред вектор  $\mathbf{B}$  ведет себя аналогично вектору  $\mathbf{D}$ , а вектор  $\mathbf{H}$  — аналогично вектору  $\mathbf{E}$  [ср. формулы (45.1) — (45.4) с формулами (17.1) — (17.4)].

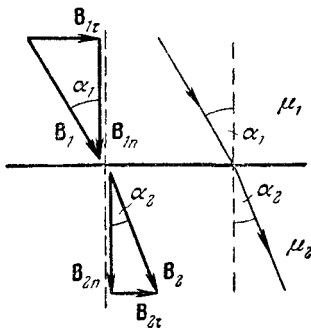


Рис. 81.

На рис. 81 показано поведение линий  $\mathbf{B}$  при пересечении границы двух магнетиков. Обозначим углы между линиями  $\mathbf{B}$  и нормалью к поверхности раздела соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Отношение тангенсов этих углов равно

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

откуда с учетом (45.1) и (45.4) получается аналогичный (17.5) закон преломления линий магнитной индукции:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (45.5)$$

При переходе в магнетик с большей  $\mu$  линии магнитной индукции отклоняются от нормали к поверхности. Легко видеть, что это приводит к сгущению линий. Сгущение линий  $\mathbf{B}$  в веществе с большой магнитной проницаемостью дает возможность формировать магнитные пучки, т. е. придавать им необходимую форму и направление. В частности, для того чтобы осуществить магнитную защиту некоторого объема, его окружают железным

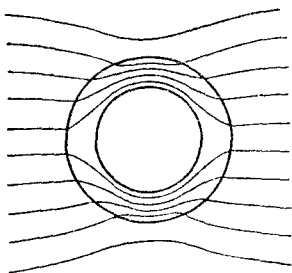


Рис. 82.

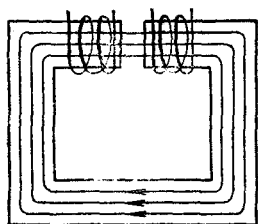


Рис. 83.

экраном. Как видно из рис. 82, сгущение линий магнитной индукции в толще экрана приводит к ослаблению поля внутри.

На рис. 83 дана схема лабораторного электромагнита. Он состоит из железного ярма, на которое насажены питаемые током катушки. Линии магнитной индукции оказываются сосредоточенными в основном внутри ярма. Лишь в узком воздушном зазоре они проходят в среде с малой  $\mu$ . Вектор  $\mathbf{B}$  пересекает границы между воздушным зазором и ярмом по нормали к поверхности раздела. Отсюда согласно (45.1) следует, что магнитная индукция в зазоре и в ярме одинакова по величине. Применим теорему о циркуляции  $\mathbf{H}$  к контуру, проходящему по оси ярма. Напряженность поля с большой точностью можно считать всюду в железе одинаковой и равной  $H_{\text{желез}} = B/\mu_0\mu_{\text{желез}}$ . В воздухе  $H_{\text{возд}} = B/\mu_0\mu_{\text{возд}}$ . Обозначим длину участка контура в железе через  $l_{\text{желез}}$ , а в зазоре — через  $l_{\text{возд}}$ . Тогда циркуляцию можно представить в виде  $H_{\text{желез}}l_{\text{желез}} + H_{\text{возд}}l_{\text{возд}}$ . Согласно (44.6) эта циркуляция должна быть равна  $Ni$ , где  $N$  — суммарное число витков катушек электромагнита,  $i$  — сила тока. Таким

образом, имеем

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{ж\text{е}л}}} l_{\text{ж\text{е}л}} + \frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{возд}}} l_{\text{возд}} = Ni,$$

откуда

$$B = \mu_0 i \frac{N}{\frac{l_{\text{возд}}}{\mu_{\text{возд}}} + \frac{l_{\text{ж\text{е}л}}}{\mu_{\text{ж\text{е}л}}}} \approx \mu_0 i \frac{N}{l_{\text{возд}} + \frac{l_{\text{ж\text{е}л}}}{\mu_{\text{ж\text{е}л}}}}$$

( $\mu_{\text{возд}}$  отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой).

Обычно  $l_{\text{возд}}$  бывает порядка  $10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ ,  $l_{\text{ж\text{е}л}}$  — порядка  $1 \text{ м}$ ,  $\mu_{\text{ж\text{е}л}}$  достигает значений порядка нескольких тысяч (см. таблицу на стр. 186). Поэтому вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь и написать, что

$$B = \mu_0 i \frac{N}{l_{\text{возд}}}. \quad (45.6)$$

Следовательно, магнитная индукция в зазоре электромагнита имеет такую величину, какую она имела бы внутри тороида без сердечника, на единицу длины которого было бы намотано число витков, равное  $N/l_{\text{возд}}$  [см. (42.10)]. Увеличивая общее число витков и уменьшая размеры воздушного зазора, можно получать поля с большим значением  $B$ . Практически с помощью электромагнитов с железным сердечником удается получать поля с  $B$  до  $\sim 1 \text{ тл}$  ( $10\,000 \text{ гс}$ ).

## ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТОКИ И ЗАРЯДЫ

### § 46. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Закон Ампера

Согласно закону, установленному Ампером, на элемент тока  $d\mathbf{l}$  действует в магнитном поле сила

$$d\mathbf{f} = ki [d\mathbf{l}\mathbf{B}], \quad (46.1)$$

( $k$  — коэффициент пропорциональности,  $i$  — сила тока,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция в том месте, где помещается элемент  $d\mathbf{l}$ ).

Величина силы (46.1) вычисляется по формуле

$$d\mathbf{f} = kiB dl \sin \alpha, \quad (46.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 84, а). Направлена сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$ .

Направление силы, действующей на ток, удобно определять с помощью так называемого правила левой руки. Если расположить левую руку так, чтобы вектор  $\mathbf{B}$  «вонзался» в ладонь, а четыре сложенные вместе пальца были направлены вдоль тока, то отставленный в сторону большой палец укажет направление силы. (рис. 84, б).

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами  $b$  (рис. 85), то каждый элемент тока  $i_2$  будет находиться в магнитном поле, индукция которого

$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi b}$  [см. формулу (41.1)]. Угол  $\alpha$  между элементами тока  $i_2$  и вектором  $\mathbf{B}_1$  прямой. Следовательно, согласно (46.2) на единицу длины тока  $i_2$  действует сила

$$f_{21} = k i_2 B_1 = k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i_1 i_2}{b}. \quad (46.3)$$

Для силы  $f_{12}$ , действующей на единицу длины тока  $i_1$ , получается аналогичное выражение. С помощью правила левой руки легко установить, что при одинаковом направлении токов они притягивают друг друга, а при различном — отталкивают.

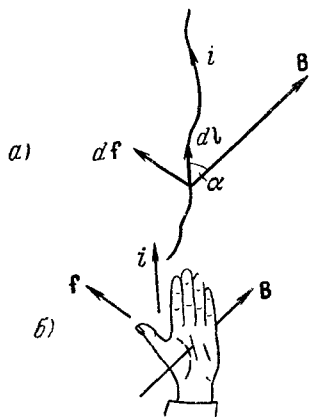


Рис. 84.

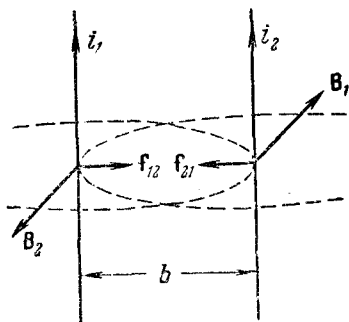


Рис. 85.

Выражение (46.3) совпадает с формулой (38.2), если положить  $k = 1$ . Следовательно, в СИ закон Ампера имеет вид

$$d\mathbf{f} = i [d\mathbf{l} \mathbf{B}]. \quad (46.4)$$

Соответственно

$$df = i B dl \sin \alpha. \quad (46.5)$$

В гауссовой системе формула (46.1) имеет вид

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{c} i [d\mathbf{l} \mathbf{B}] \quad (46.6)$$

(см. замечание на стр. 126).

В гауссовой системе магнитная индукция в вакууме совпадает с  $\mathbf{H}$ , вследствие чего в этом случае закон Ампера можно записать следующим образом:

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{c} i [d\mathbf{l} \mathbf{H}]. \quad (46.7)$$



Проводник, по которому течет ток, отличается от проводника без тока лишь тем, что в нем происходит упорядоченное движение носителей заряда. Отсюда напрашивается вывод, что сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, обусловлена действием сил на отдельные движущиеся заряды, а уже от этих зарядов действие передается проводнику, по которому они перемещаются. Этот вывод подтверждается целым рядом опытных фактов и, в частности, тем, что пучок свободно летящих заряженных частиц, например электронный пучок, отклоняется магнитным полем.

Согласно (46.4) на элемент тока  $d\mathbf{l}$  действует в магнитном поле сила

$$d\mathbf{f} = i [d\mathbf{l} \mathbf{B}]. \quad (47.1)$$

Заменив  $i d\mathbf{l}$  через  $S \mathbf{j} dl$  [см. формулу (40.6)], выражению закона Ампера можно придать вид

$$d\mathbf{f} = S dl [\mathbf{j} \mathbf{B}] = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV,$$

где  $dV$  — объем проводника, к которому приложена сила  $d\mathbf{f}$ . Разделив  $d\mathbf{f}$  на  $dV$ , получим «плотность силы», т. е. силу, действующую на единицу объема проводника:

$$\mathbf{f}_{\text{ед. об}} = [\mathbf{j} \mathbf{B}]. \quad (47.2)$$

Подставив в эту формулу выражение (40.7) для  $\mathbf{j}$ , найдем, что

$$\mathbf{f}_{\text{ед. об}} = ne' [\mathbf{u} \mathbf{B}].$$

Эта сила равна сумме сил, приложенных к носителям, заключенным в единице объема. Таких носителей  $n$ , следовательно, на один носитель действует сила, равная  $\mathbf{f}_{\text{ед. об}}/n = e' [\mathbf{u} \mathbf{B}]$ . Таким образом, можно утверждать, что на заряд  $e'$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , действует сила

$$\mathbf{f} = e' [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (47.3)$$

Силу (47.3) называют силой Лоренца или лоренцевой силой<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Часто лоренцевой силой называют сумму электрической и магнитной сил, действующих на заряд:

$$\mathbf{f} = e' \mathbf{E} + e' [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

В гауссовой системе ее выражение имеет вид

$$\mathbf{f} = \frac{e'}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (47.4)$$

причем для вакуума  $\mathbf{B}$  можно заменить на  $\mathbf{H}$ .

Модуль лоренцевой силы равен

$$f = e' v B \sin \alpha, \quad (47.5)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Следовательно, заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля, не испытывает действия силы.

Направлена сила Лоренца перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Если заряд  $e'$  положителен, направление силы совпадает с направлением вектора  $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ . В случае отрицательного  $e'$  направления векторов  $\mathbf{f}$  и  $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  противоположны (рис. 86).

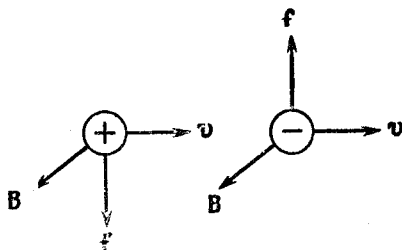


Рис. 86.

Поскольку сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, она работы над частицей не совершает.

Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

При получении выражения (47.3) для силы Лоренца из формулы (47.1) мы считали, что носители заряда в проводнике движутся со скоростью упорядоченного движения  $\mathbf{u}$ . Однако даже в отсутствие тока носители заряда находятся в хаотическом тепловом движении. Среднее (по носителям) значение вектора скорости этого движения  $\bar{\mathbf{v}}_0$  равно нулю:

$$\bar{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{n} \sum \mathbf{v}_0 = 0.$$

Поэтому и результирующая сил (47.3), действующих на носители, заключенные в элементе проводника  $\Delta l$ , при отсутствии тока также равна нулю:

$$\Delta \mathbf{f} = \sum e' [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] = e' [(\sum \mathbf{v}_0) \mathbf{B}] = 0. \quad (47.6)$$

При возникновении тока скорость носителя становится равной  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ . В этом случае

$$\Delta f = \sum e' [(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) \mathbf{B}] = \sum e' [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] + \sum e' [\mathbf{u} \mathbf{B}].$$

Первая сумма в этом выражении в соответствии с (47.6) равна нулю. Вторая сумма по существу совпадает с (47.2). Таким образом, действующая на ток амперова сила складывается из лоренцевых сил, обусловленных упорядоченным движением носителей заряда.

Сила, действующая на ток в магнитном поле, имеет значение (47.1), независимо от того, покоится проводник с током или перемещается относительно магнитного поля. В этом легко убедиться, воспользовавшись выражением (47.3) для силы Лоренца. Пусть провод, по которому течет ток, движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , а электрон, являющийся носителем заряда, имеет относительно провода скорость  $\mathbf{u}$ . Тогда электрон движется относительно поля со скоростью  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$  и на него будет действовать сила

$$\mathbf{f}_- = -e [(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{B}] = -e [\mathbf{v} \mathbf{B}] - e [\mathbf{u} \mathbf{B}],$$

а на участок провода — сила

$$d\mathbf{f}_- = -e [\mathbf{v} \mathbf{B}] dN - e [\bar{\mathbf{u}} \mathbf{B}] dN,$$

где  $dN$  — число электронов в элементе тока  $dl$ , а  $\bar{\mathbf{u}}$  — средняя скорость их движения относительно проводника.

Провод в целом нейтрален — он образован неподвижными<sup>1)</sup> положительными ионами и свободно движущимися электронами (см. т. 1, § 139, металлические кристаллы). Положительные ионы движутся вместе с проводом со скоростью  $\mathbf{v}$ , так что на каждый из них действует сила

$$\mathbf{f}_+ = e [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Число ионов в элементе тока  $dl$  такое же, как число электронов. Следовательно, на ионы, содержащиеся в элементе  $dl$ , действует сила

$$d\mathbf{f}_+ = e [\mathbf{v} \mathbf{B}] dN.$$

<sup>1)</sup> В действительности ионы не неподвижны, а колеблются около узлов кристаллической решетки. Однако это не существенно, так как их средняя скорость относительно решетки равна нулю.

Элемент провода длины  $dl$  испытывает действие силы, равной сумме сил  $df_-$  и  $df_+$ , которая, как легко видеть, имеет значение

$$df = df_- + df_+ = -e [\bar{u}\mathbf{B}] dN.$$

Полученное нами выражение эквивалентно формуле (47.1). В него не входит скорость проводника  $v$ . Таким образом, закон Ампера имеет одинаковый вид и для покоящегося и для движущегося проводника.

### § 48. Контур с током в магнитном поле

Пусть прямоугольный плоский контур с током помещается в однородном магнитном поле. Если контур ориентирован так, что вектор  $\mathbf{B}$  параллелен его плоскости (рис. 87), то стороны, имеющие длину  $b$ , не будут

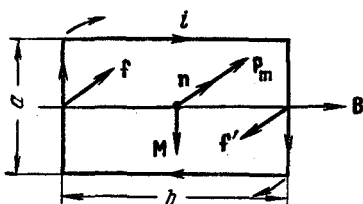


Рис. 87.

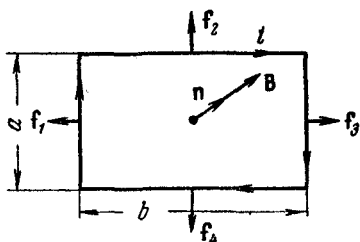


Рис. 88.

испытывать действия сил, так как для них в формуле (46.5)  $\sin \alpha = 0$ . На левый участок будет согласно закону Ампера действовать сила  $f = iBa$ , направленная за чертеж, на правый участок — такая же по величине, но противоположно направленная сила  $f'$ . Эти силы образуют пару, момент которой равен

$$M = fb = iBab.$$

Учитывая, что  $ab$  равно площади контура  $S$ , а  $iS$  дает величину магнитного момента  $p_m$ , можно написать

$$M = p_m B. \quad (48.1)$$

Эта формула совпадает по существу с формулой (39.3).

Момент  $\mathbf{M}$  стремится повернуть контур так, чтобы его магнитный момент  $p_m$  установился по направлению поля  $\mathbf{B}$ . Такая ориентация контура показана на рис. 88.

В этом случае  $f_1 = f_3 = iBa$ ,  $f_2 = f_4 = iBb$ . Направления всех сил лежат в плоскости контура. Легко видеть, что вращательный момент в этом случае не возникает. Поскольку поле однородно, равнодействующая сил равна нулю; силы лишь растягивают контур, но сместить его не могут. Заметим, что если повернуть контур на  $180^\circ$  (или изменить направление поля на обратное), то на-

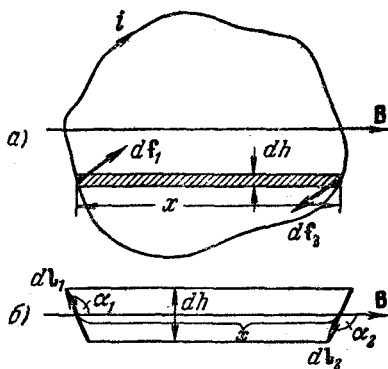


Рис. 89.

правления всех сил изменятся на противоположные, и они будут не растягивать, а сжимать контур. Покажем, что формула (48.1) справедлива и для плоского контура произвольной формы. Разобьем площадь контура на узкие параллельные направлению вектора  $B$  полоски шириной  $dh$  (рис. 89, а). На элемент контура  $dl_1$  действует сила  $df_1 = iB dl_1 \sin \alpha_1$ , направленная за чертеж. На элемент  $dl_2$  действует сила  $df_2 = iB dl_2 \sin \alpha_2$ , имеющая противоположное направление. Как видно из рис. 89, б),  $dl_1 \sin \alpha_1 = dl_2 \sin \alpha_2 = dh$  — ширине полоски. Следовательно, силы  $df_1$  и  $df_2$  одинаковы по величине и образуют пару, момент которой равен

$$dM = iB dh \cdot b,$$

где  $b$  — длина полоски. Произведение  $b dh$  дает площадь полоски  $dS$ . Таким образом,

$$dM = iB dS.$$

Беря попарно силы, приложенные к противоположащим элементам контура, и суммируя их моменты, получим результирующий момент, действующий на контур:

$$M = \int dM = iB \int dS = iSB = p_m B.$$

Итак, мы снова пришли к формуле (48.1).

При произвольной ориентации контура (рис. 90) магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  можно разложить на составляющие:  $\mathbf{B}_\perp$  — перпендикулярную и  $\mathbf{B}_\parallel$  — параллельную плоскости контура, и рассматривать действие каждой составляющей отдельно. Составляющая  $\mathbf{B}_\perp$  будет обуславливать силы, растягивающие или сжимающие контур. Составляющая  $\mathbf{B}_\parallel$ , величина которой равна  $B \sin \alpha$  ( $\alpha$  — угол между  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{B}$ ), приведет к возникновению вращательного момента, который можно вычислить по формуле (48.1):

$$M = r_m B_\parallel = r_m B \sin \alpha. \quad (48.2)$$

Принимая во внимание взаимную ориентацию векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{B}$ , формулу (48.2) можно записать в виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_m \mathbf{B}]. \quad (48.3)$$

Для вакуума в гауссовой системе эта формула имеет вид

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_m \mathbf{H}]. \quad (48.4)$$

Для того чтобы угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{B}$  увеличить на  $d\alpha$ , нужно совершить против сил, действующих на контур в поле, работу

$$dA = M d\alpha = r_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (48.5)$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возвратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над какими-либо телами. Следовательно, работа (48.5) идет на увеличение энергии  $W$ , которой обладает контур с током в магнитном поле,

$$dW = r_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя, находим, что

$$W = -r_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Если положить  $\text{const} = 0$ , формула приобретает вид

$$W = -r_m B \cos \alpha = -\mathbf{r}_m \mathbf{B}. \quad (48.6)$$

Для вакуума в гауссовой системе можно написать

$$W = -\mathbf{r}_m \mathbf{H}. \quad (48.7)$$

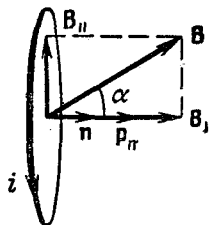


Рис. 90.

Отметим, что формула (48.6) аналогична выражению (14.4) для энергии, которой обладает диполь в электрическом поле.

Теперь рассмотрим плоский контур с током в неоднородном магнитном поле. Для простоты будем вначале считать контур круговым. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении  $x$ , совпадающем с направлением  $\mathbf{B}$  в том месте, где расположен центр контура, и что магнитный момент контура ориентирован вдоль поля (рис 91, а).

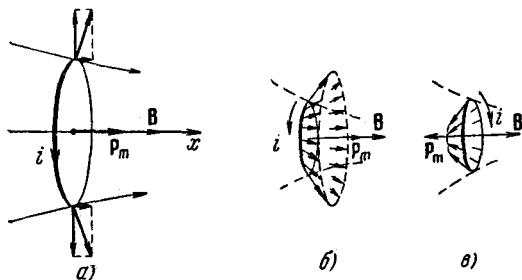


Рис. 91.

Сила  $d\mathbf{f}$ , действующая на элемент контура, перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ , т. е. к линии магнитной индукции в месте пересечения ее с  $d\mathbf{l}$ . Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура, образуют симметричный конический «веер» (рис. 91, б). Их результирующая  $\mathbf{f}$  направлена в сторону возрастания  $\mathbf{B}$  и, следовательно, стягивает контур в область более сильного поля. Очевидно, что чем сильнее изменяется поле (чем больше градиент поля  $\frac{\partial B}{\partial x}$ ), тем меньше угол раствора «веера» и тем больше, при прочих равных условиях, результирующая сила  $\mathbf{f}$ . Если изменить направление тока в контуре на обратное (при этом  $\mathbf{p}_m$  станет противоположным  $\mathbf{B}$ ), направления всех сил  $d\mathbf{f}$  и их результирующей  $\mathbf{f}$  изменятся на обратные (рис. 91, в). Следовательно, при такой взаимной ориентации векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  контур будет выталкиваться из поля.

С помощью выражения (48.6) для энергии контура в магнитном поле легко найти количественное выражение для  $\mathbf{f}$ . Если ориентация магнитного момента по отно-

шению к полю остается неизменной ( $\alpha = \text{const}$ ), то  $W$  будет зависеть только от  $x$  (через  $B$ ). Дифференцируя  $W$  по  $x$  и изменяя у результата знак, получим проекцию силы на ось  $x$

$$f_x = - \frac{\partial W}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

По предположению в других направлениях поле изменяется слабо, поэтому проекциями силы на другие оси можно пренебречь и считать, что  $f = f_x$ . Итак,

$$f = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (48.8)$$

Согласно полученной нами формуле сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, зависит от ориентации магнитного момента контура относительно направления поля. Если векторы  $p_m$  и  $B$  совпадают по направлению ( $\alpha = 0$ ), сила положительна, т. е. направлена в сторону возрастания  $B$  ( $\frac{\partial B}{\partial x}$  предполагается положительным; в противном случае знак и направление силы изменятся на противоположные, но сила по-прежнему будет втягивать контур в область сильного поля). Если  $p_m$  и  $B$  антипараллельны ( $\alpha = \pi$ ), сила отрицательна, т. е. направлена в сторону убывания  $B$ . Этот результат мы уже получили качественно с помощью рис. 91.

Разумеется, что кроме силы (48.8) на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать также вращательный момент (48.3).

#### § 49. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Допустим, что провод с током может свободно перемещаться во внешнем магнитном поле. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 92). Внешнее поле будем предполагать однородным и перпендикулярным к плоскости контура. При указанных на рисунке направлениях тока и поля сила будет направлена вправо и равна

$$f = iBl,$$



где  $l$  — длина перемещающегося участка тока. На пути  $ds$  эта сила совершит над проводником работу

$$dA = f ds = iBl ds.$$

Произведение  $l ds$  равно заштрихованной площади (рис. 92), а  $Bl ds$  — потоку магнитной индукции  $d\Phi$  через эту площадку. Поэтому можно написать, что

$$dA = i d\Phi, \quad (49.1)$$

где  $d\Phi$  — поток магнитной индукции, пересекаемый проводником при его движении.

Полученный нами результат легко обобщить на случай неоднородного поля. Для этого нужно разбить проводник на участки  $dl$  и сложить элементарные работы, совершаемые над каждым участком (в пределах каждой малой площадки  $dl ds$  магнитную индукцию можно считать постоянной).

Если вектор  $\mathbf{B}$  образует с нормалью к контуру угол  $\alpha$ , отличный от нуля, направление силы составит с направлением перемещения также угол  $\alpha$  ( $f$  перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ ) и

$$dA = f \cos \alpha ds = iB_n l ds,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  — составляющая вектора  $\mathbf{B}$  по направлению нормали к площадке  $l ds$ . Произведение  $B_n l ds$  есть  $d\Phi$  — поток, пересекаемый проводником. Таким образом и в этом случае мы приходим к формуле (49.1).

Заметим, что работа (49.1) совершается не за счет магнитного поля (как было указано в § 47, сила Лоренца работы над зарядами не совершает), а за счет источника, поддерживающего ток в контуре<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В § 56 будет показано, что при изменениях потока магнитной индукции, пронизывающего контур, в этом контуре возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Следовательно, в этом случае источник тока, кроме работы, затрачиваемой на выделение лентжоулева тепла, должен совершать дополнительную работу против э. д. с. индукции, определяемую выражением

$$dA = -\mathcal{E}_i i dt = \frac{d\Phi}{dt} i dt = i d\Phi,$$

которое совпадает с (49.1).

Найдем работу, совершаемую над замкнутым контуром с током при его перемещении в магнитном поле. Вначале предположим, что контур, перемещаясь, остается все время в одной плоскости (рис. 93; вектор  $\mathbf{B}$  направлен за чертеж). Силы, приложенные к участку контура 1—2, образуют с направлением перемещения острые углы. Следовательно, совершаемая ими работа  $A_1$  положительна. Согласно формуле (49.1) эта работа пропорциональна силе тока в контуре  $i$  и пересеченному участком 1—2 потоку магнитной индукции. Участок 1—2 пересекает при своем движении поток  $\Phi_0$  через заштрихованную поверхность и поток  $\Phi_H$ , пронизывающий контур в его конечном положении. Таким образом,

$$A_1 = i(\Phi_0 + \Phi_K).$$

Силы, действующие на участок контура 2—1, образуют с направлением перемещения тупые углы. Поэтому совершаемая ими работа  $A_2$  отрицательна. Абсолютная величина ее пропорциональна потоку, пересекаемому участком 2—1, который складывается из  $\Phi_0$  и  $\Phi_H$  — потока, пронизывающего контур в начальном положении. Следовательно,

$$A_2 = -i(\Phi_0 + \Phi_H).$$

Работа, совершаемая над всем контуром, равна

$$A = A_1 + A_2 = i(\Phi_0 + \Phi_K) - i(\Phi_0 + \Phi_H) = i(\Phi_K - \Phi_H).$$

Разность магнитного потока через контур в конце перемещения  $\Phi_K$  и потока в начале  $\Phi_H$  дает приращение потока через контур  $\Delta\Phi$ . Таким образом,

$$A = i\Delta\Phi. \quad (49.2)$$

В гауссовой системе формула для работы имеет вид

$$A = \frac{1}{c} i \Delta\Phi. \quad (49.3)$$

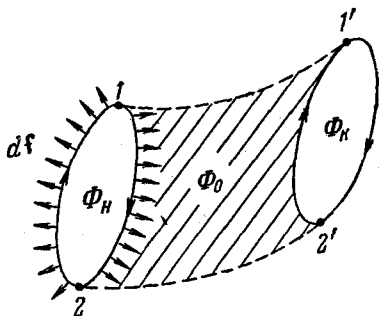


Рис. 93.

При выводе формулы (49.2) мы сделали определенные предположения о характере движения контура. Можно показать, что эта формула остается справедливой при любом движении контура в произвольном магнитном поле. В частности, при повороте контура в однородном поле из положения, в котором векторы  $\rho_m$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противоположные стороны, в положение, при котором эти векторы совпадают по направлению, силы поля совершают над контуром работу

$$A = 2iSB$$

( $\Phi_n = -BS$ , вектор  $\mathbf{B}$  и положительная нормаль имеют противоположные направления, вследствие чего  $\Phi_n$  отрицателен;  $\Phi_k = BS$ ). Учитывая, что  $iS = \rho_m$  — магнитному моменту контура, получаем

$$A = 2\rho_m B.$$

Тот же результат получается с помощью выражения (48.6) для энергии контура в магнитном поле:

$$A = W_n - W_k = \rho_m B - (-\rho_m B) = 2\rho_m B.$$

# ГЛАВА IX

## МАГНЕТИКИ

### § 50. Классификация магнетиков

Прежде чем изложить классификацию магнетиков, рассмотрим величины, с помощью которых принято характеризовать магнитные свойства разных веществ. В § 44 была введена для этой цели восприимчивость  $\chi$ , определяющая величину намагничения единицы объема вещества [см. формулу (44.12)].

Часто вместо восприимчивости единицы объема  $\chi$  пользуются отнесенной к одному киломолю вещества киломолярной (для химически простых веществ — килоатомной) восприимчивостью  $\chi_{км}$  ( $\chi_{кат}$ ) или отнесенной к единице массы удельной восприимчивостью  $\chi_{уд}$ . Между значениями этих восприимчивостей имеются соотношения:  $\chi_{км} = \chi V_{км}$ , где  $V_{км}$  — объем киломоля вещества (в  $м^3/кмоль$ ),  $\chi_{уд} = \frac{1}{\delta} \chi$ , где  $\delta$  — плотность вещества (в  $кг/м^3$ ). В то время как  $\chi$  — безразмерная величина,  $\chi_{км}$  (или  $\chi_{кат}$ ) имеет размерность  $м^3/кмоль$  (или  $м^3/кат$ ), а  $\chi_{уд}$  —  $м^3/кг$ .

Восприимчивость, отнесенная к молю (грамм-молекуле) вещества, называется молярной (для химически простых веществ — атомной). Очевидно, что  $\chi_m = \chi V_m$ , где  $V_m$  — объем моля вещества (в  $см^3/моль$ ). Между значениями  $\chi_{км}$  (в СИ) и  $\chi_m$  (в гауссовой системе) имеется соотношение

$$\chi_{км} = 4\pi \cdot 10^{-3} \chi_m. \quad (50.1)$$

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) диамагнетики, у которых  $\chi$  отрицательна и мала по абсолютной величине ( $\chi_{\text{км}} \sim 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кмоль}$ );

2) парамагнетики, у которых  $\chi$  тоже невелика, но положительна ( $\chi_{\text{км}} \sim 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кмоль}$ );

3) ферромагнетики, у которых  $\chi$  положительна и достигает очень больших значений ( $\chi_{\text{км}} \sim 10^3 \text{ м}^3/\text{кмоль}$ ). Кроме того, в отличие от диа- и парамагнетиков, для которых  $\chi$  постоянна, магнитная восприимчивость ферромагнетиков является функцией напряженности магнитного поля.

Таким образом, вектор намагничения  $\mathbf{J}$  может как совпадать по направлению с  $\mathbf{H}$  (у пара- и ферромагнетиков), так и быть направленным в противоположную сторону (у диамагнетиков). Напомним, что у диэлектриков вектор поляризации всегда направлен в ту же сторону, что и  $\mathbf{E}$ .

## § 51. Магнитомеханические явления. Магнитные моменты атомов и молекул

В главе VII мы видели, что гипотеза Ампера о молекулярных токах позволяет объяснить многие явления в магнетиках. Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Согласно теории, развитой в 1913 г. Нильсом Бором, электроны в атомах движутся по круговым орбитам. Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона (рис. 94), переносится в единицу времени заряд  $ev$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $v$  — число оборотов в секунду. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы  $i = ev$ . Поскольку заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент создаваемого электроном тока равен

$$p_m = iS = ev\pi r^2,$$

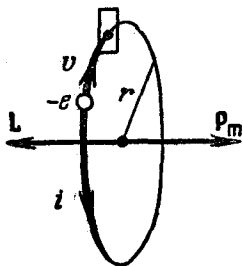


Рис. 94.

где  $r$  — радиус орбиты. Произведение  $2\pi r v$  дает скорость движения электрона  $v$ , поэтому можно написать, что

$$p_m = \frac{e v r}{2}. \quad (51.1)$$

Момент (51.1), обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называется орбитальным магнитным моментом электрона. Направление вектора  $p_m$  образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 94).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = m v r \quad (51.2)$$

( $m$  — масса электрона). Вектор  $L$  называют орбитальным механическим моментом электрона. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов  $p_m$  и  $L$  противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется гиромангнитным отношением. Для электрона оно равно

$$\frac{p_m}{L} = - \frac{e}{2m} \quad (51.3)$$

(знак «—» указывает на то, что направления моментов противоположны).

В гауссовой системе гиромангнитное отношение равно

$$\frac{p_m}{L} = - \frac{e}{2mc}.$$

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых гиромангнитных или магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Хаасом, второго — Барнеттом.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааса лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из

магнетика, то орбитальные магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты — против поля. В результате суммарный механический момент электронов  $\sum \mathbf{L}_i$  станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации отдельных моментов он был равен нулю). Момент импульса системы стержень + электроны должен остаться без изменений. Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный  $-\sum \mathbf{L}_i$ , т. е. придет во вращение. Изменение направления намагничивания приведет к изменению направления вращения стержня.

Механическую модель этого опыта можно осуществить, поставив человека на вращающийся стул и дав ему в руки вращающееся велосипедное колесо. Поворачивая велосипедное колесо вверх, человек приходит во вращение в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Поворачивая колесо вниз, человек приходит во вращение в противоположную сторону.

Опыт Эйнштейна и де Хааса осуществлялся следующим образом (рис. 95). Тонкий железный стержень подвешивался на упругой закручивающейся нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничении стержня постоянным магнитным полем получалось весьма малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса — соленоид питался переменным током, частота которого подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигала значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено гиромагнитное отношение, которое получилось равным  $-\frac{e}{m} \left( -\frac{e}{mc} \right.$

в гауссовой системе). Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил ожидаемое значение гиромагнитного отношения (51.3) в два раза.

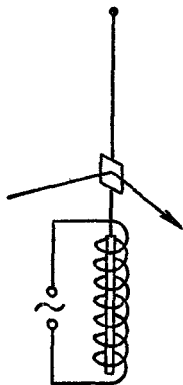


Рис. 95.

Чтобы понять опыт Барнетта, вспомним, что при попытках вовлечь гироскоп во вращение вокруг некоторого направления ось гироскопа поворачивается так, чтобы направления собственного и принудительного вращений гироскопа совпали (см. т. I, § 44). Если установить гироскоп, закрепленный в карданном подвесе, на диск центробежной машины и привести ее во вращение, то ось гироскопа установится по вертикали, причем так, что направление вращения гироскопа совпадет с направлением вращения диска. При изменении направления вращения центробежной машины ось гироскопа поворачивается на  $180^\circ$ , т. е. так, чтобы направления обоих вращений снова совпали.

Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничение. Из результатов этого опыта Барнетт также получил для гиромангнитного отношения величину, в два раза превышающую значение (51.3).

В дальнейшем выяснилось, что кроме орбитальных моментов (51.1) и (51.2) электрон обладает собственным механическим  $L_s$  и магнитным  $p_{ms}$  моментами. для которых гиромангнитное отношение равно

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = - \frac{e}{m}, \quad (51.4)$$

т. е. совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна и де Хааса и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название спин (от английского to spin — вращаться). Однако вскоре обнаружилось, что такое представление приводит к ряду противоречий, и от гипотезы о «вращающемся» электроне пришлось отказаться. В настоящее время принимается, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.



Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы.

Спин элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным величины  $\hbar$ , которая равна постоянной Планка  $h^1$ ), деленной на  $2\pi$ :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек} = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}. \quad (51.5)$$

В частности, для электрона  $L_s = \frac{1}{2} \hbar$ , в связи с чем говорят, что спин электрона равен  $1/2$ . Таким образом,  $\hbar$  представляет собой как бы естественную единицу момента импульса, подобно тому как элементарный заряд  $e$  является естественной единицей заряда.

В соответствии с (51.4) собственный магнитный момент электрона равен

$$\rho_{ms} = -\frac{e}{m} L_s = -\frac{e}{m} \frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (51.6)$$

Величину

$$\begin{aligned} \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} &= 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ джоуль/тесла} = \\ &= 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/гаусс}^2) \end{aligned} \quad (51.7)$$

называют магнетонем Бора. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Магнитный момент атома складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц — протонов и нейтронов). Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов, поэтому при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Магнитный момент молекулы также можно считать равным сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

1) Постоянную Планка называют также квантом действия.

2) Согласно формуле  $W = -\rho_m B$  размерность магнитного момента равна размерности энергии (эрг или джоуль), деленной на размерность магнитной индукции (гаусс или тесла).

Экспериментальное определение магнитных моментов атомов и молекул было осуществлено Штерном и Герлахом. В их опытах молекулярный пучок пропускался через магнитное поле с большим градиентом. Неоднородность поля достигалась за счет специальной формы полюсных наконечников электромагнита (рис. 96). Согласно формуле (48.8) на атомы или молекулы пучка должна действовать сила

$$f = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

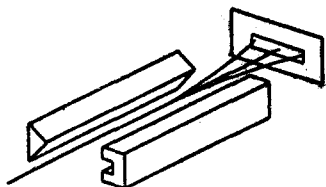


Рис. 96.

величина и знак которой зависят от угла  $\alpha$ , образуемого вектором  $p_m$  с направлением поля. При хаотическом распределении моментов молекул по направлениям в пучке имеются частицы, для которых значения  $\alpha$  изменяются

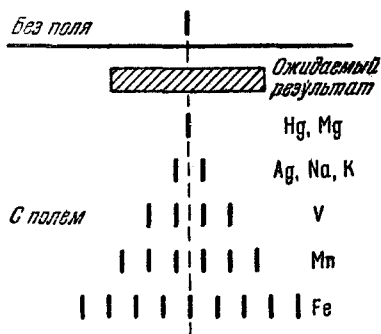


Рис. 97.

в пределах от 0 до  $\pi$ . В соответствии с этим предполагалось, что узкий молекулярный пучок после прохождения между полюсами оставит на экране сплошной растянутый след, края которого соответствуют молекулам, с ориентациями под углами  $\alpha = 0$  и  $\pi$  (рис. 97). Опыт дал неожиданные результаты. Вместо сплошного растянутого следа получались

отдельные линии, расположенные симметрично относительно следа пучка, полученного в отсутствии поля.

Опыт Штерна и Герлаха показал, что углы, под которыми магнитные моменты атомов и молекул ориентируются по отношению к магнитному полю, могут иметь лишь дискретные значения, т. е. что проекции магнитного момента на направление поля квантуются.

Число возможных значений проекции магнитного момента на направление магнитного поля для разных атомов различно. Для атомов серебра, алюминия, меди и

щелочных металлов оно равно двум, для ванадия, азота и галогенов — четырем, для кислорода — пяти, для марганца — шести, железа — девяти, кобальта — десяти и т. д.

Для магнитных моментов атомов измерения дали значения порядка нескольких магнетонов Бора. Некоторые атомы не обнаружили отклонения (см., например, след атомов ртути и магния на рис. 97), что указывает на отсутствие у них магнитного момента.

## § 52. Диамагнетизм

Электрон, движущийся по орбите, подобен волчку. Поэтому ему должны быть свойственны все особенности поведения гироскопов под действием внешних сил, в частности при соответствующих условиях должна возникать прецессия электронной орбиты. Условия, необходимые для прецессии, осуществляются, если атом находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$  (рис. 98). В этом случае на орбиту действует вращательный момент  $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$ , стремящийся установить орбитальный магнитный момент электрона  $\mathbf{p}_m$  по направлению поля (при этом механический момент  $\mathbf{L}$  установится против поля). Под действием момента  $\mathbf{M}$  векторы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{p}_m$  совершают прецессию вокруг направления вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , скорость которой легко найти (см. т. I, § 44).

За время  $dt$  вектор  $\mathbf{L}$  получает приращение  $d\mathbf{L}$ , равное

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt.$$

Вектор  $d\mathbf{L}$ , как и вектор  $\mathbf{M}$ , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{L}$ , и по модулю равен

$$|d\mathbf{L}| = p_m B \sin \alpha dt,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

За время  $dt$  плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{L}$ , повернется вокруг направления  $\mathbf{B}$  на угол

$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{L}|}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m}{L} B dt.$$

Разделив этот угол на время  $dt$ , найдем угловую скорость прецессии

$$\omega_L = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Подставив в это выражение значение (51.3) отношения магнитного и механического орбитальных моментов электрона, получим

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (52.1)$$

В гауссовой системе  $\omega_L = \frac{eH}{2mc}$ .

Частоту (52.1) называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона вокруг направления поля. Если бы расстояние  $r'$  электрона от параллельной  $\mathbf{B}$  оси, проходящей через центр орбиты, не изменялось, дополнительное движение электрона происходило по окружности радиуса  $r'$  (см. незаштрихованную окружность в нижней части рис. 98).

Ему соответствовал бы круговой ток (см. заштрихованную окружность)  $I' = e \frac{\omega_L}{2\pi}$ , магнитный момент которого

$$p'_m = I' S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2 \quad (52.2)$$

направлен, как видно из рис. 98, в сторону, противоположную  $\mathbf{B}$ . Этот момент называется индуцированным (наведенным) магнитным моментом.

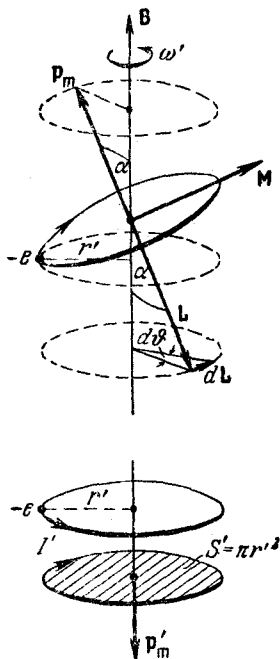


Рис. 98.

В действительности, вследствие движения электрона по орбите расстояние  $r'$  все время меняется. Поэтому в формуле (52.2) нужно брать вместо  $r'^2$  его среднее по времени значение  $\overline{r'^2}$ . Это среднее зависит от угла  $\alpha$ , характеризующего ориентацию плоскости орбиты по отношению к  $\mathbf{B}$ . В частности, для орбиты, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{B}$ ,  $r'$  постоянно и равно радиусу орбиты  $r$ . Для орбиты, плоскость которой проходит через направление  $\mathbf{B}$ ,  $r'$  изменяется по закону  $r' = r \sin \omega t$ , где  $\omega$  — угловая скорость обращения электрона по орбите (рис. 99; вектор  $\mathbf{B}$  и орбита лежат в плоскости рисунка). Следовательно,  $\overline{r'^2} = \overline{r^2 \sin^2 \omega t}$  и, поскольку среднее значение квадрата синуса есть  $1/2$ ,  $\overline{r'^2} = \frac{1}{2} r^2$ .

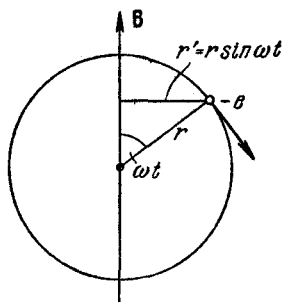


Рис. 99.

Если произвести усреднение по всем возможным значениям  $\alpha$ , считая их равновероятными, то получается

$$\overline{r'^2} = \frac{2}{3} r^2. \quad (52.3)$$

В атомах со многими электронами орбиты ориентированы всевозможными способами, поэтому каждому электрону можно приписать в среднем значение (52.3)<sup>1)</sup>.

Подставив в (52.2) значение (52.1) для  $\omega_L$  и (52.3) для  $\overline{r'^2}$  получим для среднего значения индуцированного магнитного момента одного электрона следующее выражение:

$$\overline{p'_m} = - \frac{e^2}{6m} r^2 B \quad (52.4)$$

(знак «—» отражает то, что векторы  $\overline{p'_m}$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противоположные стороны).

Мы предполагали орбиту круговой. В противном случае (например, для эллиптической орбиты) вместо  $r^2$  нужно взять  $\overline{r^2}$ , т. е. средний квадрат расстояния электрона от ядра.

<sup>1)</sup> Это строго справедливо лишь для сферически симметричной электронной оболочки атома (см. учебник по атомной физике).

Просуммировав выражение (52.4) по всем электронам, найдем индуцированный магнитный момент атома в целом:

$$p'_{m \text{ ат}} = \sum \overline{p'_m} = - \frac{e^2 B}{6m} \sum_{k=1}^Z \overline{r_k^2} \quad (52.5)$$

(число электронов в атоме равно, как известно, атомному номеру  $Z$ ).

Итак, под действием внешнего магнитного поля происходит прецессия электронных орбит с одинаковой для всех электронов угловой скоростью (52.1). Обусловленное прецессией дополнительное движение электронов приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома (52.5), направленного против поля. Ларморова прецессия возникает у всех без исключения веществ. Однако в тех случаях, когда атомы обладают сами по себе магнитным моментом, магнитное поле не только индуцирует момент (52.5), но и оказывает на магнитные моменты атомов ориентирующее действие, устанавливая их по направлению поля. Возникающий при этом положительный (т. е. направленный вдоль поля) магнитный момент бывает значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент. Поэтому результирующий момент оказывается положительным и вещество ведет себя как парамагнетик.

Диамагнетизм обнаруживают лишь те вещества, у которых атомы не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов атома равна нулю). Если для такого вещества умножить равенство (52.5) на число Авогадро  $N_A$ , получится магнитный момент килограмм-атома вещества. Разделив его на напряженность поля  $H$ , найдем килограмм-атомную магнитную восприимчивость  $\chi_{\text{кат}}$ . Относительная магнитная проницаемость диамагнетиков практически равна 1. Поэтому можно положить  $\frac{B}{H} = \mu_0$ . Таким образом,

$$\chi_{\text{кат}} = \frac{N_A p'_{m \text{ ат}}}{H} = - \frac{\mu_0 N_A e^2}{6m} \sum_{k=1}^Z \overline{r_k^2} = - 3,55 \cdot 10^{12} \sum_{k=1}^Z \overline{r_k^2}. \quad (52.6)$$

Радиусы электронных орбит имеют величину порядка  $10^{-10}$  м.

Следовательно, согласно формуле (52.6) килограмм-атомная диамагнитная восприимчивость получается порядка  $10^{-8}$ — $10^{-7}$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

### § 53. Парамагнетизм

Если магнитный момент  $p_m$  атомов отличен от нуля, вещество оказывается парамагнитным. Внешнее магнитное поле стремится установить магнитные моменты атомов вдоль  $\mathbf{B}$ , тепловое движение стремится разбросать их равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая равновесная преимущественная ориентация моментов вдоль поля тем большая, чем больше  $B$ , и тем меньшая, чем выше температура.

Кюри экспериментально установил закон, согласно которому парамагнитная килограмм-атомная восприимчивость вещества равна

$$\chi_{\text{кат}} = \frac{C}{T}, \quad (53.1)$$

где  $C$  — постоянная Кюри, зависящая от рода вещества,  $T$  — абсолютная температура.

Классическая теория парамагнетизма была развита Ланжевеном в 1905 г. Мы ограничимся изложением этой теории для случая не слишком сильных полей и не очень низких температур.

Согласно формуле (48.6) атом обладает в магнитном поле потенциальной энергией  $W = -p_m B \cos \vartheta$ , которая зависит от угла  $\vartheta$  между векторами  $p_m$  и  $\mathbf{B}$ . Поэтому равновесное распределение моментов по направлениям должно подчиняться закону Больцмана [см. т. I, формулу (109.3)]. Согласно этому закону вероятность того, что магнитный момент атома будет образовывать с направлением вектора  $\mathbf{B}$  угол, заключенный в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ , пропорциональна

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{\frac{p_m B \cos \vartheta}{kT}}.$$

Введя обозначение

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (53.2)$$

выражение, определяющее вероятность, можно записать в виде  $e^{a \cos \vartheta}$ .

Будем изображать направления магнитных моментов атомов с помощью точек на сфере единичного радиуса. Если бы поле не оказывало на магнитные моменты ориентирующего действия, они были бы распределены по направлениям хаотически. В этом случае плотность точек на сфере постоянна и равна  $\frac{n}{4\pi}$ , где  $n$  — количество рассматриваемых атомов, которое мы возьмем равным числу атомов в единице объема. Поэтому число атомов, моменты которых образуют с направлением  $\mathbf{B}$  углы, заключенные в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ ; было бы равно (рис. 100)

$$dn'_\vartheta = n \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta \quad (53.3)$$

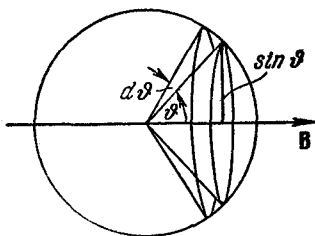


Рис. 100.

[ср. с формулой (100.4) I тома].

В действительности, магнитное поле оказывает на моменты ориентирующее действие, в результате чего направления с меньшими  $\vartheta$  становятся преобладающими. Вероятность различных ориентаций, как мы видели, пропорциональна  $e^{a \cos \vartheta}$ . Следовательно, чтобы получить распределение моментов по направлениям при наличии магнитного поля, нужно выражение (53.3) умножить на этот множитель:

$$dn_\vartheta = A e^{a \cos \vartheta} \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta \quad (53.4)$$

( $A$  — неизвестный пока коэффициент пропорциональности).

Магнитный момент атома имеет величину порядка одного магнетона Бора, т. е.  $\sim 10^{-23}$  дж/тл [см. (51.7)]. При достигаемых обычно полях магнитная индукция бывает порядка 1 тл ( $10^4$  гс). Следовательно,  $\rho_m B$  имеет порядок  $10^{-23}$  дж. Величина  $kT$  при комнатной температуре равна примерно  $4 \cdot 10^{-21}$  дж. Таким образом,  $a = \frac{\rho_m B}{kT} \ll 1$  и  $e^{a \cos \vartheta}$  можно заменить приближенно через  $1 + a \cos \vartheta$ . В этом приближении выражение (53.4) принимает вид:

$$dn_\vartheta = A (1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta.$$



Константу  $A$  можно найти, воспользовавшись тем, что полное число молекул, имеющих все возможные ориентации, характеризуемые значениями  $\vartheta$  от  $0$  до  $\pi$ , должно быть равно  $n$ :

$$n = \int_0^{\pi} dn_{\vartheta} = \frac{1}{2} nA \int_0^{\pi} (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = nA.$$

Отсюда  $A = 1$ , так что

$$dn_{\vartheta} = \frac{1}{2} n (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Магнитные моменты атомов распределяются симметрично относительно направления поля. Поэтому результирующий магнитный момент совпадает по направлению с  $\mathbf{B}$ . Следовательно, каждый атом вносит в результирующий момент вклад, равный  $p_m \cos \vartheta$ . Таким образом, для магнитного момента единицы объема (т. е. для вектора намагниченности) можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} p_m \cos \vartheta dn_{\vartheta} = \frac{1}{2} np_m \int_0^{\pi} (1 + a \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} np_m \frac{2a}{3} = \frac{np_m a}{3}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо  $a$  его значение (53.2), получаем

$$J = \frac{np_m^2 B}{3kT}.$$

Наконец, разделив  $J$  на  $H$ , найдем восприимчивость

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT} \quad (53.5)$$

(для парамагнетиков также можно положить  $\frac{B}{H} = \mu_0$ ).

Взяв вместо  $n$  число Авогадро  $N_A$ , получим выражение для килограмм-атомной восприимчивости

$$\chi_{\text{кат}} = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT}. \quad (53.6)$$

Легко видеть, что мы пришли к закону Кюри. Сопоставление формул (53.1) и (53.6) дает для постоянной Кюри следующее выражение:

$$C = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3k}. \quad (53.7)$$

Напомним, что формула (53.6) получена в предположении, что  $p_m B \ll kT$ . В очень сильных полях и при низких температурах наблюдаются отступления от пропорциональности между намагничением парамагнетика  $J$  и напряженностью поля  $H$ , в частности, может наступить состояние магнитного насыщения, при котором все  $p_m$  выстраиваются по полю, и дальнейшее увеличение  $H$  не приводит к возрастанию  $J$ .

Значения  $\chi_{\text{кат}}$ , рассчитанные по формуле (53.6), в ряде случаев хорошо согласуются со значениями, получаемыми из опыта.

Квантовая теория парамагнетизма учитывает то обстоятельство, что возможны лишь дискретные ориентации магнитного момента атома относительно поля. Она приводит к выражению для  $\chi_{\text{кат}}$ , аналогичному (53.6).

## § 54. Ферромагнетизм

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагничением даже в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу — они получили название ферромагнетиков. К их числу принадлежат железо, никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами (например,  $MnAlSi$ ,  $CuTe$  и т. д.). В последнее время большую роль стали играть ферромагнитные полупроводники (см. § 72), называемые ферритами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами — их намагничение в огромное (до  $10^{10}$ ) число раз превосходит намагничение диа- и парамагнетиков, принадлежащих к категории слабомагнитных веществ.

Намагничение слабомагнитных веществ изменяется с напряженностью поля линейно. Намагничение

ферромагнетиков зависит от  $H$  сложным образом. На рис. 101 дана кривая намагничения ферромагнетика, магнитный момент которого первоначально был равен нулю (она называется основной или нулевой кривой намагничения). Уже в полях порядка нескольких эрстед ( $\sim 100$  а/м) намагничение  $J$  достигает насыщения. Основная кривая намагничения на диаграмме  $B-H$  приведена на рис. 102 (кривая 0—1). Напомним

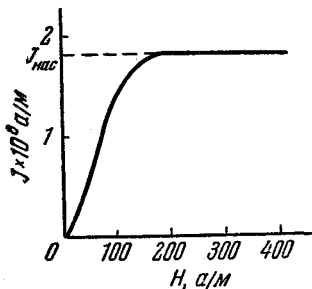


Рис. 101.

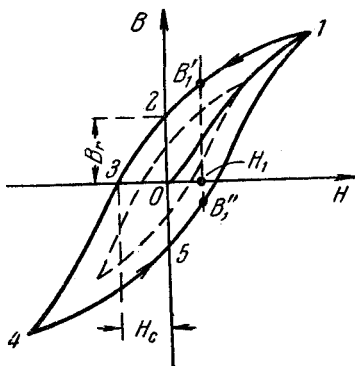


Рис. 102.

что  $B = \mu_0 (H + J)$ . Поэтому по достижении насыщения  $B$  продолжает расти с  $H$  по линейному закону:  $B = \mu_0 H + \text{const}$ , где  $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$ .

Кривая намагничения железа была впервые получена и подробно исследована русским ученым А. Г. Столетовым. Разработанный им баллистический метод измерения магнитной индукции находит широкое применение до настоящего времени (см. § 57).

Кроме нелинейной зависимости между  $H$  и  $J$  (или  $H$  и  $B$ ) для ферромагнетиков характерно также наличие гистерезиса. Если довести намагничение до насыщения (точка 1 на рис. 102) и затем уменьшать напряженность магнитного поля, то намагничение следует не первоначальной кривой 0—1, а изменяется в соответствии с кривой 1—2. В результате, когда напряженность внешнего поля станет равной нулю (точка 2), намагничение не исчезает и характеризуется величиной  $B_r$ , которая называется остаточной индукцией. На-

магничение имеет при этом значение  $J_r$ , называемое остаточным намагничением.

Намагничение обращается в нуль (точка 3) лишь под действием поля  $H_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничение. Напряженность  $H_c$  называется коэрцитивной силой.

Существование остаточного намагничения делает возможным изготовление постоянных магнитов, т. е. тел, которые без затраты энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Очевидно, что постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен.

При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция изменяется в соответствии с кривой 1—2—3—4—5—1 (рис. 102), которая называется петлей гистерезиса (аналогичная петля получается и на диаграмме  $J-H$ ). Если максимальные значения  $H$  таковы, что намагничение достигает насыщения, получается так называемая максимальная петля гистерезиса (сплошная петля на рис. 102). Если при амплитудных значениях  $H$  насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (пунктирная петля на рисунке). Частных циклов может существовать бесконечное множество, все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

Гистерезис приводит к тому, что намагничение ферромагнетика не является однозначной функцией  $H$ ; оно в сильной мере зависит также от предшествующей истории образца — от того, в каких полях он побывал прежде. Так, например, в поле напряженности  $H_1$  (рис. 102) индукция может иметь любое значение в пределах от  $B_1'$  до  $B_1''$ .

Из всего сказанного о ферромагнетиках видно, что они очень похожи по своим свойствам на сегнетоэлектрики (см. § 19).

В связи с неоднозначностью зависимости  $B$  от  $H$  понятие магнитной проницаемости применяется лишь к основной кривой намагничения. Относительная магнитная проницаемость ферромагнетиков  $\mu$  (а следовательно и магнитная восприимчивость  $\chi$ ) является функцией напряженности поля. На рис. 103, а изображена

основная кривая намагничивания. Проведем из начала координат прямую линию, проходящую через произвольную точку кривой. Тангенс угла наклона этой прямой пропорционален отношению  $B/H$ , т. е. относительной магнитной проницаемости  $\mu$  для соответствующего значения напряженности поля. При увеличении  $H$  от нуля угол наклона (а значит и  $\mu$ ) сначала растет. В точке 2 он достигает максимума (прямая  $0-2$  является касательной к кривой), а затем убывает. На рис. 103, б дан график зависимости  $\mu$  от  $H$ . Из рисунка видно, что максимальное значение проницаемости достигается несколько раньше, чем насыщение. При неограниченном возрастании  $H$  проницаемость асимптотически приближается к единице. Это следует из того, что  $J$  в выражении  $\mu = 1 + J/H$  не может превысить значение  $J_{\text{нас}}$ .

Величины  $B_r$  (или  $J_r$ ),  $H_c$  и  $\mu_{\text{max}}$  являются основными характеристиками ферромагнетика. Если коэрцитивная сила  $H_c$  велика, ферромагнетик называется жестким. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой  $H_c$  (и соответственно узкой петлей гистерезиса) называется мягким. В зависимости от назначения берутся ферромагнетики с той или иной характеристикой. Так, для постоянных магнитов употребляются жесткие ферромагнетики, а для сердечников трансформаторов — мягкие. В таблице приведены характеристики некоторых типичных ферромагнетиков.

Вещество	Состав	$\mu_{\text{max}}$	$B_r$ в тл	$H_c$ в а/м
Железо	99,9% Fe	5 000	—	80
Супермал- лой	79% Ni, 5% Mo, 16% Fe	800 000	—	0,3
Алнико	10% Al, 19% Ni, 18% Co, 53% Fe	—	0,9	52 000
Магнико	14% Ni, 24% Co, 8% Al, 3% Cu, 51% Fe	—	1,25	46 000
Колумакс	13% Ni, 24% Co, 8% Al, 3% Cu, 0,7% Ti, остальное Fe	—	1,3	59 000

Ферромагнетики при намагничении деформируются. Это явление называется магнитострикцией. От-

носительное изменение линейных размеров образца при магнитоупругости невелико — в полях порядка  $10^5$  а/м ( $\sim 10^3$  э) оно составляет  $10^{-5}$ — $10^{-6}$ . Знак эффекта зависит от природы ферромагнетика, ориентации кристаллографических осей по отношению к направлению магнитного поля и от напряженности поля. У некоторых ферромагнетиков при переходе от слабых полей к сильным знак магнитоупругости изменяется на обратный.

Теория ферромагнетизма была создана Я. И. Френкелем и В. Гейзенбергом в 1928 г. Из опытов по изучению магнитомеханических явлений (см. § 51) следует, что ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы<sup>1)</sup>, которые заставляют магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания, которые называются также доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. Направления этих моментов для разных доменов различны (рис. 104), так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент всего тела равен нулю. Домены имеют размеры порядка  $10^{-4}$ — $10^{-3}$  см.

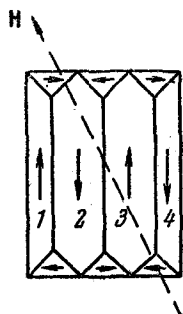


Рис. 104.

Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничивания оказывается различным. Вначале, при

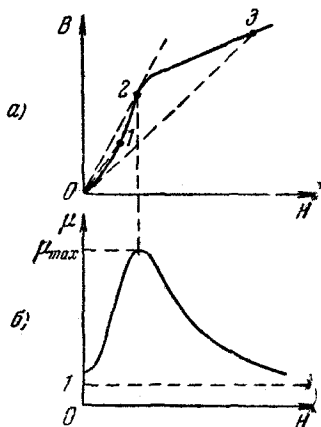


Рис. 103.

<sup>1)</sup> Эти силы называются обменными. Их объяснение дается только квантовой механикой.

слабых полях, наблюдается смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют с  $\mathbf{H}$  меньший угол, за счет доменов, у которых угол  $\vartheta$  между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{H}$  больше. Например, домены 1 и 3 (рис. 104) увеличиваются за счет доменов 2 и 4. С увеличением напряженности поля этот процесс идет все дальше и дальше, пока домены с меньшими  $\vartheta$  (которые обладают в магнитном поле меньшей энергией) не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены. На следующей стадии имеет место поворот магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения их строгой параллельности друг другу. Эти процессы (исключая небольшие смещения границ между доменами в очень слабых полях) являются необратимыми, что и служит причиной гистерезиса.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура  $T_c$ , при которой области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется точкой Кюри. Для железа она равна  $768^\circ\text{C}$ , для никеля  $365^\circ\text{C}$ . При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри — Вейсса

$$\chi_{\text{кат}} = \frac{C}{T - T_c} \quad (54.1)$$

[ср. с формулой (53.1)].

При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри в нем снова возникают домены.

В точке Кюри происходит фазовый переход второго рода (см. т. I, § 147). При температуре, равной  $T_c$ , наблюдается аномалия в поведении ряда физических свойств, в частности теплоемкости, ферромагнетика.

В некоторых случаях обменные силы приводят к возникновению так называемых антиферромагнетиков (хром, марганец и др.). Существование антиферромагнетиков было предсказано Л. Д. Ландау в 1933 г. В антиферромагнетиках собственные магнитные моменты электронов самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу. Такая ориентация охватывает по-

парно соседние атомы. В результате антиферромагнетики обладают крайне малой магнитной восприимчивостью и ведут себя как очень слабые парамагнетики. Для антиферромагнетиков также существует температура  $T_N$ , при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает. Эта температура называется антиферромагнитной точкой Кюри или точкой Нееля. У некоторых антиферромагнетиков (например, у эрбия, диспрозия, сплавов марганца и меди) таких температур две (верхняя и нижняя точки Нееля), причем антиферромагнитные свойства наблюдаются только при промежуточных температурах. Выше верхней точки вещество ведет себя как парамагнетик, а при температурах, меньших нижней точки Нееля, становится ферромагнетиком.



## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## § 55. Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток индукционным.

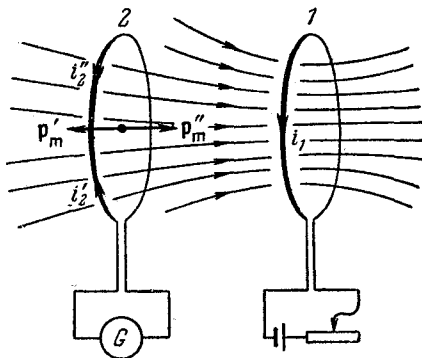


Рис. 105.

Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение потока магнитной индукции  $\Phi$ , и определяется лишь скоростью изменения  $\Phi$ , т. е. значением  $d\Phi/dt$ . При изменении знака  $d\Phi/dt$  меняется также направление тока. Поясним сказанное следующим примером. На рис. 105 изображен контур 1,

силу тока в котором  $i_1$  можно менять с помощью реостата. Ток  $i_1$  создает магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток  $i_1$ , поток магнитной индукции  $\Phi$  через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока  $i_2$ , регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока  $i_1$  обусловит убывание потока магнитной индукции через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток  $i_2$  можно вызвать также, приближая контур 2 к первому контуру, или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока будут противоположными. Наконец, электромагнитную индукцию можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы менялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Заполнение всего пространства, в котором поле отличается от нуля, однородным магнетиком приводит, при прочих равных условиях, к увеличению индукционного тока в  $\mu$  раз. Этим подтверждается то, что индукционный ток обусловлен изменением не потока вектора  $\mathbf{H}$ , а потока магнитной индукции.

Ленц установил правило, с помощью которого можно найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Если, например, изменение  $\Phi$  вызвано перемещением контура, то возникает индукционный ток такого направления, что сила, действующая на него во внешнем поле, противится движению контура. При приближении контура 2 к первому контуру возникает ток  $i_2'$  (рис. 105), магнитный момент которого направлен против внешнего поля (угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{p}_m'$  и  $\mathbf{B}$  равен  $\pi$ ). Следовательно, согласно формуле (48.8) на контур 2 будет действовать сила, отталкивающая его от первого контура. При удалении контура 2 от первого контура возникает ток  $i_2''$ , момент которого  $\mathbf{p}_m''$  совпадает по направлению с  $\mathbf{B}$  ( $\alpha = 0$ ), так что сила, действующая на контур 2, имеет направление к первому контуру.

Пусть контур 2 неподвижен, и ток индуцируется в нем путем изменения тока  $i_1$  в первом контуре. В этом

случае индуцируется ток  $i_2$  такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока, приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении  $i_1$ , т. е. возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникнет ток  $i_2$ , создающий поток, направленный влево. При уменьшении  $i_1$  возникает ток  $i_2$ , собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

## § 56. Электродвижущая сила индукции

Для создания тока в цепи необходимо наличие э. д. с. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока  $\Phi$  в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$ .

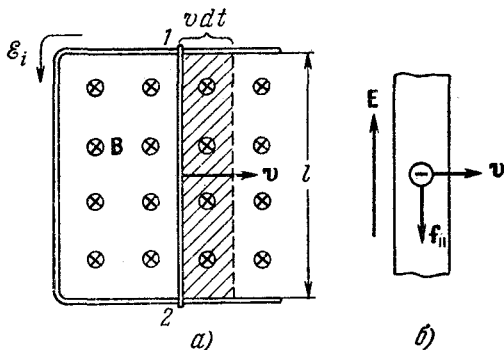


Рис. 106.

Чтобы выяснить связь между  $\mathcal{E}_i$  и скоростью изменения  $\Phi$ , рассмотрим следующий пример. Возьмем контур, участок которого 1—2 длины  $l$  может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура (рис. 106, а). Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура (это поле изображено на рисунке кружками с крестиками — вектор  $B$  направлен от нас за чертеж). Приведем подвиж-

ную часть контура в движение со скоростью  $v$ . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители заряда в проводнике — электроны (рис. 106, б). В результате на каждый электрон начнет действовать сила Лоренца  $f_{\parallel}$ , равная по модулю [см. (47.5)]

$$f_{\parallel} = evB \quad (56.1)$$

(индекс « $\parallel$ » указывает на то, что сила направлена вдоль провода).

Действие этой силы эквивалентно действию электрической силы, обусловленной полем напряженности

$$E = vB,$$

имеющим направление, указанное на рис. 106, б. Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает величину э. д. с., индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint E_l dl = El = vBl = B \frac{lv dt}{dt} = B \frac{dS}{dt}, \quad (56.2)$$

где  $dS = lv dt$  — приращение площади контура за время  $dt$  (это приращение равно заштрихованной площади на рис. 106, а). При вычислении циркуляции мы учли, что  $E_l$  отлична от нуля лишь на участке длины  $l$ , причем на этом участке всюду  $E_l = E$ .

Произведение  $B dS$  дает  $d\Phi$  — приращение потока магнитной индукции через контур. Следовательно, мы пришли к выводу, что э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i$ , возникающая в замкнутом контуре, равна скорости изменения во времени потока магнитной индукции  $\Phi$ , пронизывающего контур. Это равенство принято записывать в виде

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.3)$$

Знак « $-$ » в формуле (56.3) означает, что направление  $\mathcal{E}_i$  и направление  $d\Phi$ <sup>1)</sup> связаны правилом левого винта. Положительному приращению потока, имеющего направление за чертеж (рис. 106), соответствует изображенное на рисунке направление  $\mathcal{E}_i$ , которое связано с

<sup>1)</sup> Поток  $\Phi$  и его приращение  $d\Phi$  — скалярные величины. Поэтому об их направлении можно говорить лишь в том смысле, какой вкладывается, например, в понятие направления тока [см. замечания к формуле (7.5)].

направлением за чертой правилом левого винта. Если бы проводник 1—2 перемещался не вправо, а влево, поток через контур уменьшался бы и  $\mathcal{E}_i$  имела бы направление, противоположное изображенному на рисунке.

На рис. 107 показано направление  $\mathcal{E}_i$  для различных направлений вектора  $\mathbf{B}$  и разной зависимости  $B$  от времени.

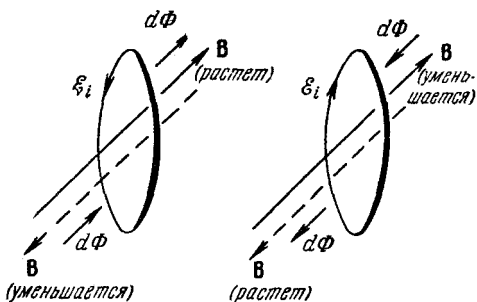


Рис. 107.

Единицей потока магнитной индукции в СИ служит вебер (вб), который представляет собой поток через поверхность в  $1 \text{ м}^2$ , пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с  $B$ , равной 1 тесла. При скорости изменения потока, равной  $1 \text{ вб/сек}$ , в контуре индуцируется э. д. с., равная 1 в

В гауссовой системе формула (56.3) имеет вид

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.4)$$

Единицей  $\Phi$  в этой системе является максвелл (мкс), равный потоку через поверхность в  $1 \text{ см}^2$  при  $B = 1 \text{ гс}$ . Между единицами потока в СИ и гауссовой системе имеется следующее соотношение:

$$1 \text{ вб} = 1 \text{ тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ мкс}. \quad (56.5)$$

По формуле (56.4)  $\mathcal{E}_i$  получается в СГСЭ-единицах потенциала. Чтобы получить  $\mathcal{E}_i$  в вольтах, нужно умножить полученный результат на 300. Поскольку  $300/c = 10^{-8}$ ,

$$\mathcal{E}_i (\text{в}) = - 10^{-8} \frac{d\Phi (\text{мкс})}{dt (\text{сек})}. \quad (56.6)$$

В рассмотренном нами выше примере роль сторонних сил, поддерживающих ток в контуре, играют силы

Лоренца. Работа этих сил над единичным положительным зарядом, равная по определению э. д. с. (см. § 32), оказывается отличной от нуля. Это обстоятельство находится в кажущемся противоречии с высказанным в § 47 утверждением о том, что сила Лоренца работы над зарядом совершать не может. Дело в том, что сила (56.1) представляет собой не всю лоренцеву силу, действующую на электрон, а лишь параллельную проводу составляющую силы, обусловленную скоростью  $v$  (рис. 108). Под действием этой составляющей электрон приходит в движение вдоль провода со скоростью  $u$ , в результате чего возникает перпендикулярная к проводу составляющая лоренцевой силы ( $f_{\perp}^1$ ), модуль которой равен

$$f_{\perp} = euB \quad (56.7)$$

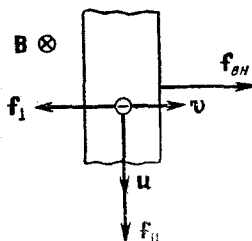


Рис. 108.

(см. рис. 108).

Таким, образом, полная лоренцева сила, действующая на электрон, равна

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{f}_{\parallel} + \mathbf{f}_{\perp},$$

а работа этой силы над электроном за время  $dt$

$$dA = f_{\parallel} u dt - f_{\perp} v dt$$

(направления векторов  $f_{\parallel}$  и  $u$  одинаковы, а векторов  $f_{\perp}$  и  $v$  противоположны; см. рис. 108). Учтя, что  $f_{\parallel} = evB$ ,  $f_{\perp} = euB$ , легко видеть, что работа полной силы Лоренца действительно, как и полагается, равна нулю.

Сила  $f_{\perp}$  направлена противоположно скорости провода  $v$ . Поэтому для того, чтобы участок провода 1—2 перемещался, как показано на рис. 108, с постоянной скоростью  $v$ , к нему нужно приложить внешнюю силу  $f_{вн}$ , уравновешивающую сумму сил  $f_{\perp}$ , приложенных ко всем электронам, содержащимся в проводе 1—2. За счет работы этой силы и будет возникать энергия,

<sup>1)</sup> Эта составляющая не вносит вклада в циркуляцию, так как ее проекция на направление провода равна нулю.

выделяемая в контуре индуцированным током. Действительно, модуль силы  $f_{\text{вн}}$  можно представить в виде

$$f_{\text{вн}} = j_{\perp} nV = euBnV = euBnlS_{\text{пр}},$$

где  $n$  — число свободных электронов в единице объема,  $V = lS_{\text{пр}}$  — объем провода на участке 1—2,  $S_{\text{пр}}$  — площадь поперечного сечения провода.

Работа силы  $f_{\text{вн}}$  за время  $dt$  равна

$$dA_{\text{вн}} = f_{\text{вн}} v dt = euBnlS_{\text{пр}} v dt. \quad (56.8)$$

Энергия, выделяемая током в контуре за время  $dt$ , определяется следующим выражением [см. формулу (37.2)]:

$$dQ = \mathcal{E}_i l dt = \mathcal{E}_{ij} S_{\text{пр}} dt,$$

где  $j$  — плотность тока. В соответствии с формулой (31.4) плотность тока равна  $j = enu$ , согласно (56.2) э. д. с. индукции можно представить в виде  $\mathcal{E}_i = vBl$ . Подставив эти значения  $j$  и  $\mathcal{E}_i$  в выражение для  $dQ$ , придем к формуле

$$dQ = vBlenuS_{\text{пр}} dt,$$

совпадающей с формулой (56.8) для  $dA_{\text{вн}}$ . Таким образом, мы показали, что  $dQ = dA_{\text{вн}}$ .

Рассмотренное нами объяснение возникновения э. д. с. индукции относится к случаю, когда магнитное поле постоянно, а изменяется геометрия контура. Но магнитный поток через контур может изменяться также за счет изменения  $\mathbf{B}$ . В этом случае объяснение возникновения э. д. с. оказывается в принципе другим. Изменяющееся со временем магнитное поле  $\mathbf{B}$  порождает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$  (подробнее об этом говорится в § 103). Под действием поля  $\mathbf{E}$  приходят в движение носители тока в проводнике — возникает индуцированный ток. Связь между э. д. с. индукции и изменениями магнитного потока и в этом случае описывается формулой (56.3).

Пусть контур, в котором индуцируется э. д. с., состоит не из одного витка, а из  $N$  одинаковых витков, т. е. представляет собой соленоид (или тороид). Поскольку витки соленоида соединяются последовательно,

$\mathcal{E}_i$  будет равна сумме э. д. с., индуцируемых в каждом из витков в отдельности,

$$\mathcal{E}_i = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \sum \Phi \right).$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (56.9)$$

называют потокосцеплением или полным магнитным потоком. Ее измеряют в тех же единицах, что и  $\Phi$ . Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков,

$$\Psi = N\Phi. \quad (56.10)$$

Воспользовавшись потокосцеплением, выражение для э. д. с., индуцируемой в соленоиде, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (56.11)$$

**Пример.** Катушка, имеющая  $N$  витков, вращается в однородном магнитном поле с постоянной скоростью  $\omega$  (рис. 109). Найдем индуцируемую в ней э. д. с. Поток через один виток  $\Phi = B_n S = BS \cos \alpha$ , где  $S$  — площадь витка,  $\alpha$  — угол между нормалью к плоскости витка и направлением  $B$ . Полный поток  $\Psi = N\Phi = NBS \cos \alpha$ . Угол  $\alpha$  меняется со временем по закону  $\alpha = \omega t$ . Следовательно,

$$\Psi = NBS \cos \omega t = \Psi_m \cos \omega t,$$

где через  $\Psi_m$  обозначено амплитудное значение полного потока. По формуле (56.11)

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = \Psi_m \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (56.12)$$

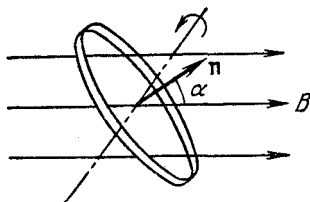


Рис. 109.

Таким образом, в катушке индуцируется переменная э. д. с., изменяющаяся со временем по гармоническому закону.

## § 57. Методы измерения магнитной индукции

Пусть полный поток, сцепленный с некоторым замкнутым контуром, изменяется от значения  $\Psi_1$  до  $\Psi_2$ . Найдем заряд  $q$ , который протекает при этом через каждое сечение контура. Мгновенное значение силы тока



в контуре будет равно

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt},$$

откуда

$$dq = i dt = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = - \frac{1}{R} d\Psi$$

(знак «—» означает, что направление, в котором переносится  $dq$ , и направление  $d\Psi$  связаны правилом левого винта).

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд

$$q = \int dq = - \frac{1}{R} \int_1^2 d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (57.1)$$

Соотношение (57.1) лежит в основе разработанного первоначально А. Г. Столетовым баллистического способа измерения магнитной индукции, который заключается в следующем. Поместим в интересующую нас

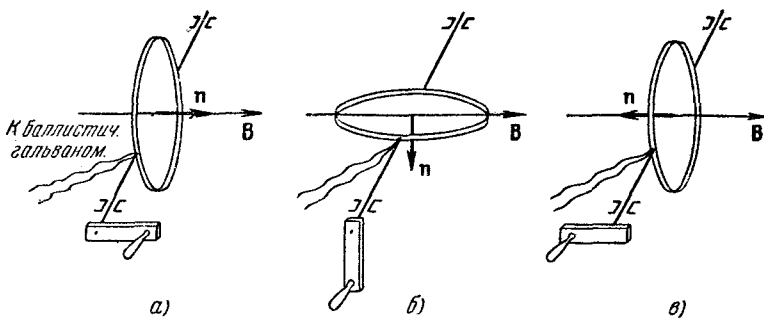


Рис. 110.

точку поля небольшую катушку, имеющую  $N$  витков. Если катушку расположить так, чтобы вектор  $\mathbf{B}$  оказался перпендикулярным к плоскости витков (рис. 110, а), то полный магнитный поток будет равен

$$\Psi_1 = NBS,$$

где  $S$  — площадь одного витка, которая должна быть настолько малой, чтобы  $\mathbf{B}$  в ее пределах можно было считать одной и той же.

Если повернуть катушку на  $90^\circ$  (рис. 110, б), поток через нее обратится в нуль ( $\mathbf{n}$  перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ ), т. е. изменяется на  $NBS$ . При повороте на  $180^\circ$  (рис. 110, в) изменение полного потока через катушку составит  $2NBS$ , так как значение потока станет равным  $\Psi_2 = -NBS$  ( $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}$  направлены в противоположные стороны). Если поворот катушки осуществить достаточно быстро, в контуре будет иметь место кратковременный импульс тока, при котором протекает заряд, равный согласно (57.1)

$$q = \frac{1}{R} 2NBS \quad (57.2)$$

(при повороте катушки на  $90^\circ$  формула будет такой же, но без двойки).

Заряд, протекающий по контуру при кратковременном импульсе тока, можно измерить с помощью так называемого баллистического гальванометра, который представляет собой гальванометр с большим периодом собственных колебаний. Измерив  $q$  и зная  $R$ ,  $N$  и  $S$ , можно по формуле (57.2) найти  $B$ . Под  $R$  в этом случае подразумевается полное сопротивление цепи, включающее сопротивление катушки, подводных проводов и гальванометра.

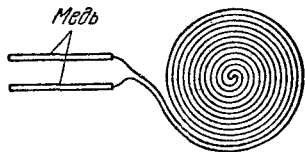


Рис. 111.

Если  $q$  в формуле (57.2) выразить в кулонах,  $R$  — в омах, а  $S$  — в кв. метрах, то  $B$  получится в тесла.

Вместо того чтобы поворачивать катушку, можно включать (либо выключать) исследуемое магнитное поле, или изменять его направление на обратное. Так, в частности, поступал А. Г. Столетов при исследовании кривой намагничивания железа.

Для измерения  $B$  используют также то обстоятельство, что электрическое сопротивление висмута под действием магнитного поля сильно возрастает — примерно на 5% на каждую десятую долю тесла (на каждую 1000 гс)<sup>1)</sup>. Поэтому, помещая предварительно

<sup>1)</sup> У других металлов электрическое сопротивление в магнитном поле также возрастает, но в гораздо меньшей степени. У меди, например, увеличение сопротивления примерно в  $10^4$  раз меньше, чем у висмута.

проградуированную висмутовую спираль (рис. 111) в магнитное поле и измеряя относительное изменение ее сопротивления, можно определить магнитную индукцию поля.

## § 58. Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае они называются токами Фуко или вихревыми токами. Поскольку электрическое сопротивление массивного проводника мало, вихревые токи могут достигать очень большой силы.

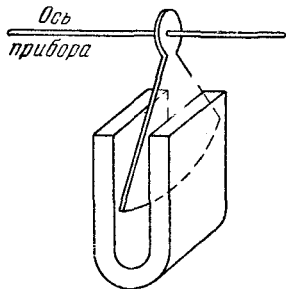


Рис. 112.

Токи Фуко подчиняются правилу Ленца — они выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которой они вызваны. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим поль-

зуются для успокоения (демпфирования) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 112), которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают вихревые токи, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и отсутствует, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуще-

ствляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

В многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание вихревыми токами сердечников трансформаторов, эти сердечники набираются из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

Вихревые токи, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется скин-эффектом (от английского skin — кожа) или поверхностным эффектом. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют проводники в виде трубок.

## § 59. Явление самоиндукции

Электрический ток  $i$ , текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток  $\Psi$ . При изменениях  $i$  будет изменяться также  $\Psi$  и, следовательно, в контуре будет индуцироваться э. д. с. Это явление называется самоиндукцией.

В соответствии с законом Био — Савара магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что ток в контуре  $i$  и создаваемый им полный магнитный поток через контур  $\Psi$  друг другу пропорциональны:

$$\Psi = Li. \quad (59.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура<sup>1)</sup>.

Линейная зависимость  $\Psi$  от  $i$  имеет место лишь в том случае, если относительная магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которой окружен контур, не зависит от напряженности поля  $H$ , т. е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае  $\mu$  является сложной функцией (см. рис. 103) от  $i$  (через  $H$ ), и, поскольку  $B = \mu_0 \mu H$ , зависимость  $\Psi$  от  $i$  также будет довольно сложной. Однако соотношения (59.1) распространяют и на этот случай, считая индуктивность  $L$  функцией от  $i$ . При неизменной силе тока  $i$  полный поток  $\Psi$  может изменяться за счет изменений формы и размеров контура.

Из сказанного следует, что индуктивность  $L$  зависит от геометрии контура (т. е. его формы и размеров) и от магнитных свойств (от  $\mu$ ) окружающей контур среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность  $L$  будет постоянной величиной.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем в 1 а возникает полный поток  $\Psi$ , равный 1 вб. Эту единицу называют генри (гн).

Выражение, определяющее индуктивность  $L$ , имеет в гауссовой системе единиц вид

$$L = \frac{\Psi}{(i/c)} = c \frac{\Psi}{i}. \quad (59.2)$$

Чтобы найти размерность величины (59.2), воспользуемся тем, что в гауссовой системе  $B$  имеет размерность, равную согласно (40.5) размерности силы тока  $i$ , деленной на размерность  $c$  и на размерность длины (последнюю мы будем обозначать символом  $[l]$ ). Следовательно,

$$[L] = [c] \frac{[\Psi]}{[i]} = [c] \frac{[B] [S]}{[i]} = [c] \frac{[B] [l]^2}{[i]} = [l].$$

Таким образом, в гауссовой системе индуктивность имеет размерность длины. В соответствии с этим единицу индуктивности в этой системе называют сантиметром. Индуктивностью в 1 см обладает такой контур, с которым при силе тока в 1 СГСМ-единицу (т. е. 10 а) сцеплен поток, равный 1 мкс ( $10^{-8}$  вб).

<sup>1)</sup> Устаревшее название этой величины — коэффициент самоиндукции.

Между единицами  $L$  в СИ и в гауссовой системе имеется следующее соотношение:

$$1 \text{ гн} = \frac{1 \text{ вб}}{1 \text{ а}} = \frac{10^8 \text{ мкс}}{0,1 \text{ сГСМ}} = 10^9 \text{ см.} \quad (59.3)$$

Вычислим индуктивность соленоида. Возьмем соленоид такой длины, чтобы его можно было практически считать бесконечным. При протекании по нему тока  $i$  внутри соленоида возбуждается однородное поле, магнитная индукция которого согласно формулам (42.6) и (44.24) равна  $B = \mu_0 n i$ . Поток через каждый из витков будет  $\Phi = BS$ , а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом, равен

$$\Psi = N\Phi = n l B S = \mu_0 n^2 l S i, \quad (59.4)$$

где  $l$  — длина соленоида (которая предполагается очень большой),  $S$  — площадь поперечного сечения,  $n$  — число витков на единицу длины (произведение  $n l$  дает полное число витков  $N$ ).

Сопоставляя (59.4) с (59.1), получаем для индуктивности очень длинного соленоида следующее выражение:

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V, \quad (59.5)$$

где  $V = l S$  — объем соленоида. Заменяя в (59.5)  $n$  через  $N/l$ , получим

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S, \quad (59.6)$$

В гауссовой системе формула для индуктивности соленоида имеет следующий вид:

$$L = 4\pi \mu n^2 l S. \quad (59.7)$$

В соответствии с (59.6) размерность  $\mu_0$  равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины (напомним, что относительная магнитная проницаемость  $\mu$  — безразмерная величина). Следовательно, в СИ  $\mu_0$  измеряется в генри на метр [см. (38.3)].

При изменениях силы тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , равная [см. формулу (56.11)]

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt} = - \left( L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \right). \quad (59.8)$$

Если  $L$  при изменениях силы тока остается постоянной (что, как уже отмечалось, возможно лишь при

отсутствии ферромагнетиков), выражение для  $\mathcal{E}_s$  имеет вид

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (59.9)$$

В гауссовой системе

$$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{di}{dt}. \quad (59.10)$$

Соотношение (59.9) дает возможность определить индуктивность  $L$  как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого э. д. с. самоиндукции. Однако такое определение правильно лишь в случае, когда  $L = \text{const}$ . В присутствии ферромагнетиков  $L$  недеформируемого контура будет функцией от  $i$  (через  $H$ ); следовательно,  $\frac{dL}{dt}$  можно записать как  $\frac{dL}{di} \frac{di}{dt}$ . Произведя такую подстановку в формуле (59.8), получим

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + i \frac{dL}{di}\right) \frac{di}{dt}, \quad (59.11)$$

откуда видно, что при наличии ферромагнетиков коэффициент пропорциональности между  $\frac{di}{dt}$  и  $\mathcal{E}_s$  отнюдь не равен  $L$ .

В случае, когда  $L = \text{const}$ , изменение силы тока со скоростью  $1 \text{ а/сек}$  в проводнике с  $L = 1 \text{ гн}$  приводит согласно (59.9) к возникновению  $\mathcal{E}_s = 1 \text{ в}$ .

## § 60. Ток при замыкании и размыкании цепи

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения тока при размыкании цепи. Пусть в цепь с не зависящей от  $i$  индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  включен источник

тока, имеющий э. д. с.  $\mathcal{E}$  (рис. 113). Под действием этой э. д. с. в цепи будет течь постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (60.1)$$

(сопротивление источника тока считаем пренебрежимо малым).

В момент времени  $t = 0$  отключим источник тока замкнув одновременно цепь накоротко переключателем  $\Pi$ . Как только сила тока в цепи станет убывать, возникнет э. д. с. самоиндукции. Следовательно, после отключения источника э. д. с. сила тока в цепи будет в соответствии с законом Ома удовлетворять уравнению

$$iR = \mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}.$$

Перепишем это выражение так:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0. \quad (60.2)$$

Уравнение (60.2) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Его легко проинтегрировать, разделив переменные, т. е. записав в виде

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

откуда

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln \text{const}$$

(имея в виду дальнейшие преобразования, мы постоянную интегрирования написали в виде  $\ln \text{const}$ ).

Потенцирование этого соотношения дает

$$i = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (60.3)$$

Выражение (60.3) является общим решением уравнения (60.2). Значение  $\text{const}$  найдем из начальных условий. При  $t = 0$  сила тока имела значение (60.1). Следовательно,  $\text{const} = I_0$ . Подставив это значение в (60.3), получим

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (60.4)$$

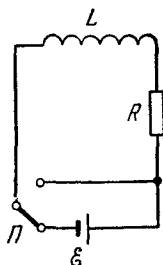
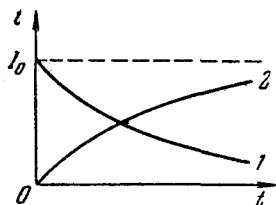


Рис. 113.



Итак, после отключения источника э. д. с. сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (60.4). График убывания  $i$  дан на рис. 114 (кривая 1). Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной



$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (60.5)$$

которую называют постоянной времени цепи. Используя обозначение (60.5), формуле (60.4) можно придать вид

Рис. 114.

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (60.6)$$

В соответствии с этой формулой  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз. Из соотношения (60.5) видно, что чем больше индуктивность цепи  $L$  и меньше ее сопротивление  $R$ , тем больше постоянная времени  $\tau$  и тем медленнее спадает ток в цепи.

Теперь рассмотрим случай замыкания цепи. После подключения к источнику тока, до тех пор, пока сила тока не примет установившегося значения (60.1), в цепи кроме э. д. с.  $\mathcal{E}$  будет действовать э. д. с. самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома можно написать, что

$$iR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt}.$$

Преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (60.7)$$

Мы пришли к линейному неоднородному уравнению, которое отличается от уравнения (60.2) лишь тем, что в правой части вместо нуля в нем стоит постоянная величина  $\mathcal{E}/L$ . Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид (60.3). Легко убедиться в том, что  $i = I_0 = \mathcal{E}/R$  представляет собой частное решение урав-

нения (60.7). Следовательно, общее решение уравнения (60.7) можно написать следующим образом:

$$i = I_0 + \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В начальный момент сила тока  $i$  равна нулю. Отсюда для  $\text{const}$  получается значение  $\text{const} = -I_0$ . Таким образом,

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (60.8)$$

Функция (60.8) описывает нарастание тока в цепи после подключения к ней источника э. д. с. График этой функции дан на рис. 114 (кривая 2).

Мы предполагали индуктивность  $L$  постоянной. Если цепь содержит катушку с железным сердечником,  $\mathcal{E}_s$  будет определяться формулой (59.8). В этом случае за счет слагаемого  $i \frac{dL}{dt}$  э. д. с. самоиндукции может достигать очень больших значений. При этом сила тока может значительно превзойти  $I_0$ .

### § 61. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 115. Сначала замкнем соленоид  $L$  на батарею  $\mathcal{E}$ ; в нем установится ток  $i$ , который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если, отключив соленоид от батареи, замкнуть его через сопротивление  $R$ , то в образовавшейся цепи будет некоторое время течь постепенно убывающий ток. Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , равна

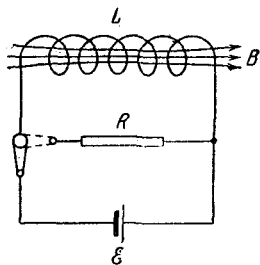


Рис. 115.

$$\begin{aligned} dA &= \mathcal{E}_s i dt = \\ &= - \frac{d\Psi}{dt} i dt = - i d\Psi. \quad (61.1) \end{aligned}$$

Если индуктивность соленоида не зависит от  $i$  ( $L = \text{const}$ ), то  $d\Psi = L di$  и выражение (61.1) принимает следующий вид:

$$dA = - L i di. \quad (61.2)$$

Проинтегрировав это выражение по  $i$  в пределах от первоначального значения  $i$  до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = - \int_i^0 Li \, di = \frac{Li^2}{2}. \quad (61.3)$$

Работа (61.3) идет на приращение внутренней энергии проводников, т. е. на их нагревание. Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (61.3). Таким образом, мы приходим к выводу, что проводник с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $i$ , обладает энергией

$$W = \frac{Li^2}{2}, \quad (61.4)$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле [ср. эту формулу с выражением (29.1) для энергии заряженного конденсатора].

В гауссовой системе выражение для энергии контура с током имеет вид

$$W = \frac{1}{c^2} \frac{Li^2}{2}. \quad (61.5)$$

Заметим, что выражение (61.3) можно трактовать как ту работу, которую необходимо совершить против э. д. с. самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до  $i$ , и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (61.4). В самом деле, работа, совершаемая против э. д. с. самоиндукции,

$$A' = \int_0^i (-\mathcal{E}_s) i \, dt.$$

Произведя преобразования, подобные тем, которые привели нас к выражению (61.2), получим

$$A' = \int_0^i Li \, di = \frac{Li^2}{2}, \quad (61.6)$$

что совпадает с (61.3). Работа (61.6) совершается при установлении тока за счет источника э. д. с. и идет целиком на создание сцепленного с контуром магнитного поля. Выражение (61.6) не учитывает той работы, которую источник э. д. с. затрачивает в процессе установления тока на нагревание проводников<sup>1)</sup>.

Выразим энергию магнитного поля (61.4) через величины, характеризующие само поле. В случае бесконечного (практически очень длинного) соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad H = ni,$$

откуда

$$i = \frac{H}{n}.$$

Подставляя эти значения  $L$  и  $i$  в (61.4) и производя преобразования, получим

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (61.7)$$

Как было показано в § 42, магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия (61.7) заключена в пределах соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью  $w$ , которую можно получить, разделив  $W$  на  $V$ . Произведя это деление, получим

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (61.8)$$

---

<sup>1)</sup> Она равна

$$A'' = \int_0^i Ri^2 \, dt.$$

Воспользовавшись соотношением (44.15), формулу для плотности энергии магнитного поля можно записать следующим образом:

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (61.9)$$

Полученное нами выражение для плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный выражению (30.2) для плотности энергии электрического поля, с тем лишь отличием, что электрические величины в нем заменены соответствующими магнитными.

В гауссовой системе формулы для плотности энергии магнитного поля выглядят следующим образом:

$$\omega = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (61.10)$$

Если магнитное поле неоднородно, плотность энергии больше там, где больше  $H$  и  $\mu$ . Чтобы найти энергию магнитного поля, заключенную в некотором объеме  $V$ , нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\mu_0\mu H^2}{2} dV. \quad (61.11)$$

## § 62. Взаимная индукция

Возьмем два контура 1 и 2, расположенные друг относительно друга не очень далеко (рис. 116). Если в

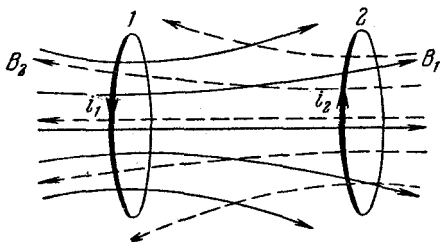


Рис. 116.

первом контуре течет ток силы  $i_1$ , он создает через другой контур пропорциональный  $i_1$  полный поток

$$\Psi_2 = L_{21}i_1 \quad (62.1)$$

(поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями).

При изменениях тока  $i_1$  во втором контуре индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{i_2} = - L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (62.2)$$

Аналогично, при протекании во втором контуре тока силы  $i_2$  возникает связанный с первым контуром поток

$$\Psi_1 = L_{12} i_2 \quad (62.3)$$

(поле, создающее этот поток, изображено пунктирными линиями).

При изменениях тока  $i_2$  в контуре 1 индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{i_1} = - L_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (62.4)$$

Контурь 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения э. д. с. в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью (или коэффициентом взаимной индукции) контуров. Позже мы покажем, что эти коэффициенты всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (62.5)$$

Взаимная индуктивность  $L_{12}$  зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряется  $L_{12}$  в тех же единицах, что и индуктивность  $L$ .

Вычислим энергию магнитного поля, создаваемого обоими контурами. Если ток течет только в одном из контуров, например в первом, энергия магнитного поля согласно (61.4) равна

$$W_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2}, \quad (62.6)$$

а плотность энергии —

$$w_1 = \frac{\mu_0 \mu H_1^2}{2},$$

где  $H_1$  — напряженность поля, создаваемого током  $i_1$ .

Аналогично, если ток течет только во втором контуре, энергия поля равна

$$W_2 = \frac{L_2 i_2^2}{2}, \quad (62.7)$$

а ее плотность

$$w_2 = \frac{\mu_0 \mu H_2^2}{2},$$

где  $H_2$  — напряженность поля, создаваемого током  $i_2$ .

В случае, когда ток в обоих контурах одновременно отличен от нуля, напряженность поля в любой точке будет согласно принципу суперпозиции равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2,$$

так что, вообще говоря,

$$H^2 \neq H_1^2 + H_2^2.$$

Отсюда следует, что

$$w \neq w_1 + w_2,$$

и полная совместная энергия контуров  $W$  не равна сумме энергий (62.6) и (62.7).

Чтобы найти энергию  $W$ , вычислим работу, которую должны совершить источники тока, включенные в оба контура, для того, чтобы в контурах возникли токи силы  $i_1$  и  $i_2$  и было создано соответствующее суммарное поле. Пусть вначале сила тока в обоих контурах равна нулю. Для того чтобы создать в первом контуре ток силы  $i_1$ , источник тока, включенный в контур, должен совершить против э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_{s1}$  работу, величина которой согласно (61.6) равна

$$A'_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2},$$

где  $L_1$  — индуктивность первого контура.

Теперь, поддерживая силу тока  $i_1$  неизменной, станем увеличивать силу тока во втором контуре от 0 до  $i_2$ . При этом источник тока, включенный во второй контур, должен совершить работу

$$A'_2 = \frac{L_2 i_2^2}{2},$$

где  $L_2$  — индуктивность второго контура.

Однако дело не исчерпывается только этим. При изменениях тока  $i_2$  в первом контуре будет индуцироваться э. д. с. (62.4). Для того чтобы появление этой э. д. с. не вызвало изменения силы тока в контуре, источник тока, включенный в первый контур, должен совершить против э. д. с. индукции работу

$$A'_{12} = \int (-\mathcal{E}_{i1}) i_1 dt.$$

Подставляя сюда выражение (62.4) для  $\mathcal{E}_{i1}$  и учитывая, что сила тока  $i_1$  постоянна, получим

$$A'_{12} = i_1 \int_0^t L_{12} \frac{di_2}{dt} dt = i_1 \int_0^{i_2} L_{12} di_2 = L_{12} i_1 i_2.$$

Таким образом, полная работа, которая совершается источниками тока, действующими в обоих контурах, при установлении значений силы тока  $i_1$  и  $i_2$  равна

$$A' = A'_1 + A'_2 + A'_{12} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2. \quad (62.8)$$

Проведя такие же рассуждения для случая, когда вначале устанавливается во втором контуре ток силы  $i_2$ , а затем в первом контуре ток силы  $i_1$ , получим для работы следующее выражение:

$$A' = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{21} i_2 i_1 \quad (62.9)$$

(в этом случае, чтобы поддерживать неизменной силу тока  $i_2$ , нужно совершать работу против э. д. с. индукции (62.2), которая пропорциональна  $L_{21}$ ).

Поскольку работа не может зависеть от того, в какой последовательности создаются токи — сначала  $i_1$ , а затем  $i_2$ , или наоборот, — выражения (62.8) и (62.9) должны быть равны друг другу. Отсюда следует справедливость соотношения (62.5).

Вычисленная нами работа идет на создание энергии  $\mathcal{W}$  магнитного поля. Поэтому можно написать, что

$$\mathcal{W} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2. \quad (62.10)$$



Первое слагаемое в этой формуле дает энергию тока  $i_1$ , второе — энергию тока  $i_2$ , слагаемое  $L_{12}i_1i_2$  называется взаимной энергией токов  $i_1$  и  $i_2$ .

Найдем энергию  $W$  в предположении, что токи  $i_1$  и  $i_2$  одновременно увеличиваются от нуля до заданных значений. В этом случае в первом контуре индуцируется э. д. с., равная  $\mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1}$ , где  $\mathcal{E}_{s1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$  — э. д. с. самоиндукции, а  $\mathcal{E}_{i1}$  — э. д. с., определяемая формулой (62.4). Во втором контуре действует  $\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2}$ . Работа, совершаемая против этих э. д. с., идет на создание энергии токов. Поэтому можно написать, что

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t [-(\mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1})] i_1 dt + \int_0^t [-(\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2})] i_2 dt = \\ &= \int_0^t \left( L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 dt + \int_0^t \left( L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \right) i_2 dt. \end{aligned}$$

Используя соотношение (62.5), это выражение можно преобразовать к виду

$$W = \int_0^t L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^t L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} dt + \int_0^t L_{12} \left( i_1 \frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} i_2 \right) dt.$$

Первые два интеграла дают соответственно  $\frac{L_1 i_1^2}{2}$  и  $\frac{L_2 i_2^2}{2}$ . Третий интеграл можно записать следующим образом:

$$\int_0^t L_{12} \frac{d(i_1 i_2)}{dt} dt = L_{12} i_1 i_2.$$

Итак, мы снова приходим к выражению (62.10).

Формуле для энергии токов можно придать симметричный вид

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + \frac{L_{12} i_1 i_2}{2} + \frac{L_{21} i_2 i_1}{2}.$$

Для энергии  $N$  связанных друг с другом контуров получается аналогичное выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N L_{ik} i_i i_k, \quad (62.11)$$

где  $L_{ik} = L_{ki}$  — взаимная индуктивность  $i$ -го и  $k$ -го контуров, а  $L_{ii} = L_i$  — индуктивность  $i$ -го контура.

В заключение найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник (рис. 117). Поскольку линии магнитной индукции сосредоточиваются внутри сердечника [см. текст, следующий за формулой (45.5)], можно считать, что возбуждаемое любой из обмоток магнитное поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность (напомним, что густота линий магнитной индукции пропорциональна  $B$ ). Если первая обмотка имеет  $N_1$  витков и по ней течет ток силы  $i_1$ , то согласно теореме о циркуляции [см. (44.6)] можно написать, что

$$Hl = N_1 i_1, \quad (62.12)$$

где  $l$  — длина сердечника.

Поток магнитной индукции через поперечное сечение сердечника  $\Phi = BS = \mu_0 \mu HS$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника. Подставив сюда значение  $H$  из (62.12) и умножив получившееся выражение на  $N_2$ , получим полный поток, сцепленный со второй обмоткой

$$\Psi_2 = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2 i_1.$$

Сопоставляя это выражение с (62.1), находим, что

$$L_{21} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2. \quad (62.13)$$

Проведя вычисление потока  $\Psi_1$ , связанного с первой обмоткой, в предположении, что по второй обмотке течет ток силы  $i_2$ , можно прийти для  $L_{12}$  к такому же точно выражению.

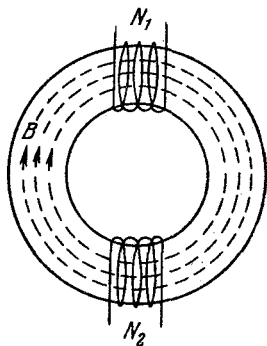


Рис. 117.

### § 63. Работа перемagnetичения ферромагнетика

При изменениях тока в цепи против э. д. с. самоиндукции совершается работа

$$dA' = (-\mathcal{E}_s) i dt = \frac{d\Psi}{dt} i dt = i d\Psi. \quad (63.1)$$

Если индуктивность цепи  $L$  остается постоянной (что возможно только при отсутствии ферромагнетиков), эта работа полностью идет на создание энергии магнитного поля:  $dA' = dW^1$ ). Иначе, как мы сейчас выясним, обстоит дело при наличии ферромагнетиков.

Выразим (63.1) через величины, характеризующие магнитное поле. С этой целью рассмотрим очень длинный соленоид. В этом случае  $H = ni$ ,  $\Psi = n l B S$ . Следовательно, можно написать

$$i = \frac{H}{n}, \quad d\Psi = n l S dB.$$

Подставив эти выражения в (63.1), получим

$$dA' = H dB \cdot V, \quad (63.2)$$

где  $V = lS$  — объем соленоида, т. е. объем поля.

Выясним, можно ли выражение (63.2) отождествить с приращением энергии магнитного поля. Напомним, что энергия — функция состояния. Поэтому сумма ее приращений не зависит от пути, по которому совершается переход из одного состояния в другое, и, в частности, сумма приращений энергии для кругового процесса равна нулю:

$$\oint dW = 0$$

(иначе говоря,  $dW$  является полным дифференциалом).

Если заполнить соленоид ферромагнетиком, то связь между  $B$  и  $H$  будет иметь вид, изображенный на рис. 118. При обходе по петле гистерезиса (т. е. при одном цикле перемagnetичения) интеграл

$$\oint H dB$$

<sup>1)</sup> В этом случае (63.1) переходит в  $dA' = Li di$  [см. (61.6)].

будет равен площади  $S_{\text{п}}$ , охватываемой петлей. Таким образом, интеграл от выражения (63.2), т. е.

$$\oint dA', \quad (63.3)$$

отличен от нуля. Отсюда мы заключаем, что при наличии ферромагнетиков работа (63.2) не может быть приравнена приращению энергии магнитного поля.

В расчете на единицу объема ферромагнетика работа (63.3) равна

$$\oint H dB = S_{\text{п}}. \quad (63.4)$$

По завершении цикла перемагничивания  $H$  и  $B$ , а значит и магнитная энергия будут иметь первоначальную величину. Следовательно, работа (63.4) идет не на создание энергии магнитного поля. Как показывает опыт, она идет на увеличение внутренней энергии ферромагнетика, т. е. на его нагревание.

Итак, при совершении одного цикла перемагничивания ферромагнетика затрачивается в расчете на единицу объема работа (63.4), численно равная площади петли гистерезиса. Эта работа идет на нагревание ферромагнетика.

В гауссовой системе работа перемагничивания ферромагнетика в расчете на единицу объема определяется выражением

$$\frac{1}{4\pi} \oint H dB = \frac{1}{4\pi} S_{\text{п}}, \quad (63.5)$$

т. е. численно равна площади петли гистерезиса, деленной на  $4\pi$ .

В отсутствие ферромагнетиков  $B$  является однозначной функцией  $H$  ( $B = \mu_0 \mu H$ , где  $\mu = \text{const}$ ). Поэтому (63.2) представляет собой полный дифференциал

$$dA' = \mu_0 \mu H dH \cdot V.$$

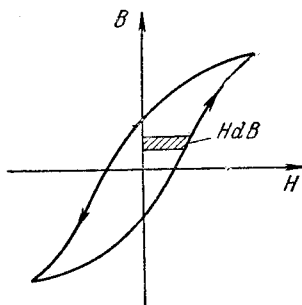


Рис. 118.

Интегрирование от 0 до  $H$  дает

$$W = \int dA' = V \mu_0 \mu \int_0^H H dH = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

что в расчете на единицу объема совпадает с (61.8). Таким образом, в отсутствие ферромагнетиков работа (63.2), как уже отмечалось, идет на создание энергии магнитного поля, т. е.

$$d\omega = H dB \quad (63.6)$$

представляет собой приращение плотности энергии магнитного поля.

В гауссовой системе

$$d\omega = \frac{1}{4\pi} H dB. \quad (63.7)$$

## ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

### § 64. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Представим себе заряд  $e'$ , влетающий в однородное магнитное поле со скоростью  $v$ , перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ . Под действием силы Лоренца заряд приобретает постоянное по величине нормальное ускорение

$$\omega_n = \frac{f}{m} = \frac{e'}{m} vB \quad (64.1)$$

(угол между  $v$  и  $\mathbf{B}$  прямой).

Если скорость изменяется только по направлению, движение с постоянным по величине нормальным ускорением представляет собой равномерное движение по окружности (см. т. I, § 20), радиус которой определяется условием  $\omega_n = v^2/R$ . Подставляя сюда значение (64.1) для  $\omega_n$  и решая получившееся уравнение относительно  $R$ , получаем

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \quad (64.2)$$

Итак, в случае, когда вектор  $v$  перпендикулярен к  $\mathbf{B}$ , заряженная частица движется по окружности, радиус которой зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы  $e'$  к ее массе  $m$ . Отношение  $e'/m$  называется удельным зарядом.

Найдем время  $T$ , которое затрачивает частица на один оборот. Для этого разделим длину окружности  $2\pi R$  на скорость частицы  $v$ . В результате получим

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \quad (64.3)$$

Период обращения частицы по окружности оказы-  
вается не зависящим от ее скорости, он определяется  
только удельным зарядом частицы и магнитной индук-  
цией поля. На рис. 119 показаны траектории движения  
в однородном магнитном поле двух частиц с одинако-  
вым удельным зарядом, но различными скоростями  $v_1$   
и  $v_2$ . Если частицы выходят одновременно из точки  $O$ ,

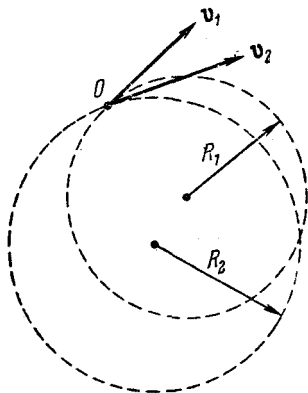


Рис. 119.

то, совершив за одинаковое  
время полный оборот, они  
снова встретятся в точке  $O$ .

Выясним характер дви-  
жения заряженной частицы

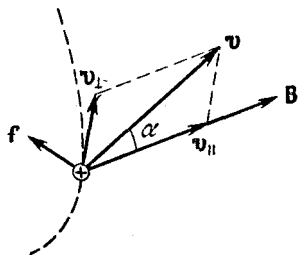


Рис. 120.

в случае, когда ее скорость образует с направлением од-  
нородного магнитного поля угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$ .  
Разложим вектор  $v$  на две составляющие:  $v_{\perp}$  — перпен-  
дикулярную к  $B$  и  $v_{\parallel}$  — параллельную  $B$  (рис. 120).  
Легко видеть, что

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Сила Лоренца равна

$$f = e' v B \sin \alpha = e' v_{\perp} B$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной к  $B$ . Создаваемое этой силой ускорение является для  $v_{\perp}$  нормальным. Составляющая силы Лоренца в направлении  $B$  равна нулю; поэтому повлиять на величину  $v_{\parallel}$  эта сила не может. Таким образом, движение частицы можно пред-  
ставить как наложение двух движений: 1) перемеще-  
ния вдоль направления  $B$  с постоянной скоростью

$v_{\parallel} = v \cos \alpha$  и 2) равномерного вращения в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{B}$ . Радиус окружности, по которой происходит вращение, определяется формулой (64.2) с заменой  $v$  на  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Траектория движения представляет собой спираль, ось которой совпадает с направлением  $\mathbf{B}$  (рис. 121). Шаг спирали  $l$  можно найти, умножив  $v_{\parallel}$  на определяемый формулой (64.3) период обращения  $T$ :

$$l = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v \cos \alpha. \quad (64.4)$$

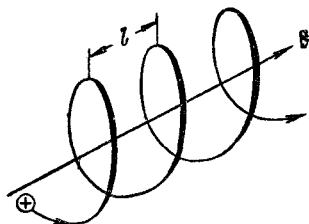


Рис. 121.

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен, спираль закручивается против часовой стрелки. Спираль, по которой движется отрицательно заряженная частица, закручивается по часовой стрелке (предполагается, что мы смотрим на спираль вдоль направления  $\mathbf{B}$ ; частица при этом летит от нас, если  $\alpha < \pi/2$ , и на нас, если  $\alpha > \pi/2$ ).

## § 65. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями

Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц (например, электронов), попадающий в точке  $O$

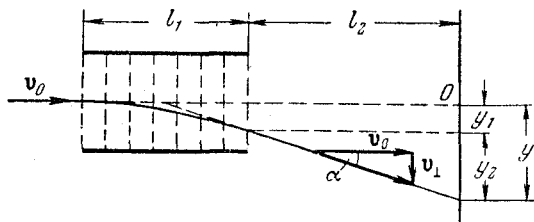


Рис. 122.

на перпендикулярный к нему экран (рис. 122). Определим смещение следа пучка, вызываемое перпендикулярным к пучку однородным электрическим полем, действующим на пути длиной  $l_1$ . Пусть первоначально



скорость частиц равна  $v_0$ . Войдя в область поля, каждая частица будет двигаться с постоянным по величине и направлению, перпендикулярным к  $v_0$  ускорением  $w_{\perp} = \frac{e'}{m} E$  ( $e'/m$  — удельный заряд частицы). Движение под действием поля продолжается время  $t = l_1/v_0$ . За это время частицы сместятся на расстояние

$$y_1 = \frac{1}{2} w_{\perp} t^2 = \frac{1}{2} \frac{e'}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2} \quad (65.1)$$

и приобретут перпендикулярную к  $v_0$  составляющую скорости

$$v_{\perp} = w_{\perp} t = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0}.$$

В дальнейшем частицы летят прямолинейно в направлении, которое образует с вектором  $v_0$  угол  $\alpha$ , определяемый условием

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (65.2)$$

В результате в дополнение к смещению (65.1) пучок приобретет смещение

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{e'}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

где  $l_2$  — расстояние от границы поля до экрана.

Таким образом, смещение следа пучка относительно точки  $O$  равно

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (65.3)$$

Последнее выражение можно с учетом (65.2) записать в виде

$$y = \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right),$$

откуда вытекает, что частицы, покинув поле, летят так, как если бы они вылетели из центра конденсатора, создающего поле, под углом  $\alpha$ , который определяется формулой (65.2).

Теперь предположим, что на имеющем протяженность  $l_1$  пути частиц включается перпендикулярное к их скорости  $v_0$  однородное магнитное поле (рис. 123; поле перпендикулярно к плоскости рисунка, область поля обведена пунктирной окружностью). Под действием поля

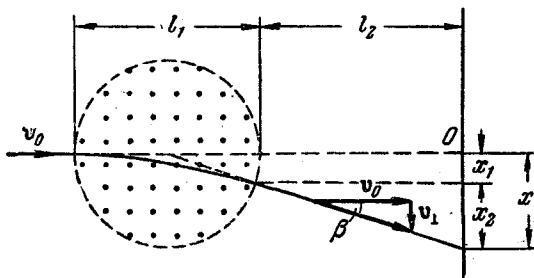


Рис. 123.

каждая частица получит постоянное по величине ускорение  $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} v_0 B$ . Ограничиваясь случаем, когда отклонение пучка полем невелико, можно считать, что ускорение  $\omega_{\perp}$  также постоянно по направлению и перпендикулярно к  $v_0$ . Тогда для расчета смещения можно использовать полученные нами формулы, заменив в них ускорение  $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} E$  значением  $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} v_0 B$ . В результате для смещения, которое мы теперь обозначим буквой  $x$ , получим

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (65.4)$$

Угол, на который отклонится пучок магнитным полем, определится выражением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0}. \quad (65.5)$$

С учетом (65.5) формулу (65.4) можно записать следующим образом:

$$x = \operatorname{tg} \beta \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right).$$

Следовательно, при малых отклонениях частицы, покинув магнитное поле, летят так, как если бы они вылетели из центра поля под углом  $\beta$ , величина которого определяется выражением (65.5).

Отметим, что как отклонение (65.3) электрическим полем, так и отклонение (65.4) магнитным полем пропорционально удельному заряду частиц и напряженности (или индукции) соответствующего поля. Оба отклонения зависят также от  $v_0$ . Частицы с одинаковыми  $e'/m$

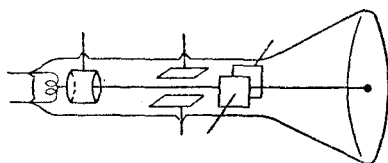


Рис. 124.

и  $v_0$  получают в каждом из полей одинаковое отклонение и, следовательно, попадают в одну и ту же точку экрана.

Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электроннолучевых трубках.

Внутри трубки с электрическим отклонением (рис. 124) кроме так называемого электронного прожектора, создающего узкий пучок быстрых электронов (электронный луч), помещаются две пары взаимно перпендикулярных пластин. Подавая напряжение на любую пару пластин, можно вызвать пропорциональное ему смещение электронного луча в направлении, перпендикулярном к данным пластинам. Экран трубки покрывают флуоресцирующим составом. Поэтому в месте попадания на экран электронного луча возникает ярко светящееся пятно.

Электроннолучевые трубки применяются в осциллографах — приборах, позволяющих наблюдать и фотографировать быстротекающие процессы. На одну пару отклоняющих пластин подают напряжение, изменяющееся линейно со временем, на другую пару — исследуемое напряжение. Вследствие ничтожной инерционности электронного пучка его отклонение будет без запаздывания следовать за изменениями напряжений на отклоняющих пластинах, причем луч вычертит на экране осциллографа график зависимости исследуемого напряжения от времени. Многие неэлектрические величины могут быть с помощью соответствующих устройств (датчиков) преобразованы в электрические напряжения (или токи).

Поэтому с помощью осциллографов исследуют самые различные по природе процессы.

Электроннолучевая трубка является неотъемлемой частью телевизионных устройств. В телевидении чаще применяются трубки с магнитным управлением электронным лучом. У таких трубок вместо отклоняющих пластин имеются две расположенные снаружи взаимно перпендикулярные системы катушек, каждая из которых создает перпендикулярное к лучу магнитное поле. Изменяя ток в катушках, вызывают перемещение светового пятна, создаваемого лучом на экране.

## § 66. Определение заряда и массы электрона

Измерение удельного заряда электрона, т. е. отношения  $e/m$ , было впервые осуществлено Томсоном в 1897 г. с помощью разрядной трубки, изображенной на рис. 125. Выходящий из отверстия в аноде  $A$  электронный пучок (катодные лучи; см. § 89) проходил между пластинами плоского конденсатора и попадал на флуоресцирующий экран, создавая на нем светящееся пятно. Подавая напряжение на пластины конденсатора, можно было воздействовать на пучок однородным электрическим полем.

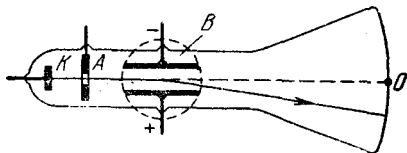


Рис. 125.

Трубка помещалась между полюсами электромагнита, с помощью которого можно было создавать на том же участке пути электронов перпендикулярное к электрическому однородное магнитное поле (область этого поля обведена на рис. 125 пунктирным кружком). При выключенных полях пучок попадал на экран в точке  $O$ . Каждое из полей в отдельности вызывало смещение пучка в вертикальном направлении. Величины смещений определяются полученными в предыдущем параграфе выражениями (65.3) и (65.4).

Включив магнитное поле и измерив вызванное им смещение следа пучка

$$x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (66.1)$$

Томсон включал также электрическое поле и подбирал его величину и направление так, чтобы пучок снова попадал в точку  $O$ . В этом случае электрическое и магнитное поля действовали на электроны пучка одновременно с одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами, т. е. выполнялось условие

$$eE = ev_0B. \quad (66.2)$$

Решая совместно уравнения (66.1) и (66.2), Томсон вычислял  $e/m$  и  $v_0$ <sup>1)</sup>.

Буш применил для определения удельного заряда электронов метод магнитной фокусировки. Суть этого метода заключается в следующем. Предположим, что в однородном магнитном поле вылетает из некоторой точки слегка расходящийся симметричный относительно направления поля пучок электронов, имеющих одинаковую по величине скорость  $v$ . Направления, по которым вылетают электроны, образуют с направлением  $\mathbf{B}$  небольшие углы  $\alpha$ . Как было выяснено в § 64, электроны движутся в этом случае по спиральным траекториям, совершая за одинаковое время [см. формулу (64.3)]

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

полный оборот и смещаясь вдоль направления поля на расстояние  $l$ , равное

$$l = v \cos \alpha T. \quad (66.3)$$

Вследствие малости углов  $\alpha$  расстояния (66.3) для разных электронов будут практически одинаковыми и равными  $vT$  (для малых углов  $\cos \alpha \approx 1$ ). Следовательно, расходящийся пучок сфокусируется в точке, отстоящей от точки вылета электронов на расстоянии

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \quad (66.4)$$

В опыте Буша электроны, испущенные раскаленным катодом  $K$  (рис. 126), ускоряются, проходя разность потенциалов  $U$ , приложенную между катодом и анодом  $A$ .

<sup>1)</sup> С равным успехом можно было измерять отклонение пучка электрическим полем и затем компенсировать действие электрического поля магнитным.

В результате они приобретают скорость  $v$ , величина которой может быть найдена из условия

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (66.5)$$

Вылетев затем из отверстия в аноде, электроны образуют узкий пучок, направленный вдоль оси эвакуированной трубки, вставленной внутрь соленоида. На входе в соленоид помещается конденсатор, на который подается переменное напряжение. Поле, создаваемое конденсатором, отклоняет электроны пучка от оси прибора на

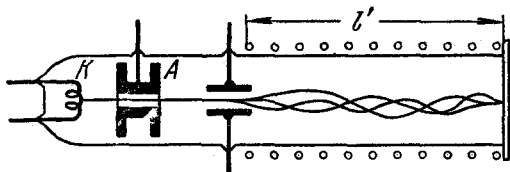


Рис. 126.

небольшие изменяющиеся со временем углы  $\alpha$ . В результате происходит «завихрение» пучка — электроны начинают двигаться по различным спиральным траекториям. На выходе из соленоида ставится флуоресцирующий экран. Если подобрать магнитную индукцию  $B$  так, чтобы расстояние  $l'$  от конденсатора до экрана удовлетворяло условию

$$l' = nl \quad (66.6)$$

(где  $l$  — шаг спирали, а  $n$  — целое число), то точка пересечения траекторий электронов попадет на экран — электронный пучок окажется сфокусированным в этой точке и возбудит на экране резкое светящееся пятно. Если условие (66.6) не соблюдается, светящееся пятно на экране будет размытым. Решая совместно уравнения (66.4), (66.5) и (66.6), можно найти  $e/m$  и  $v$ .

Наиболее точное значение удельного заряда электрона, установленное с учетом результатов, полученных разными методами, равно

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ к/кг} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ/г}. \quad (66.7)$$

Величина (66.7) дает отношение заряда электрона к его массе покоя  $m_0$ . Как вытекает из теории относительности, масса любого тела зависит от его скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (66.8)$$

В этой формуле  $m$  — масса тела, движущегося со скоростью  $v$ ,  $c$  — скорость света в пустоте, а  $m_0$  — масса тела в том случае, когда оно покоится, называемая массой покоя.

В опытах Томсона скорость электронов составляла примерно 0,1  $c$ , что приводило к отклонению  $m$  от  $m_0$  на 0,5%. В последующих опытах скорость электронов достигала очень больших значений. Во всех случаях было обнаружено уменьшение измеряемых значений  $e/m$  с ростом  $v$ , происшедшее в точном соответствии с формулой (66.8).

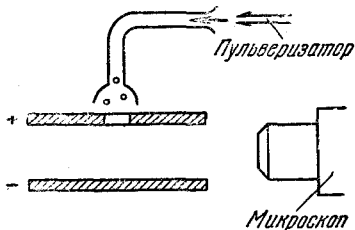


Рис. 127.

Заряд электрона был определен с большой точностью Милликенем в 1909 г. В закрытое пространство между горизонтально расположенными пластинами конденсатора (рис. 127) Милликен вводил мельчайшие капельки масла. При разбрызгивании капельки электризовались и их можно было устанавливать неподвижно, подбирая величину и знак напряжения на конденсаторе. Равновесие наступало при условии

$$P' = e'E; \quad (66.9)$$

здесь  $P'$  — результирующая силы тяжести и архимедовой силы, равная  $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g$ , где  $\rho$  — плотность капельки,  $r$  — ее радиус,  $\rho_0$  — плотность воздуха.

Зная  $r$  и  $E$ , можно было найти  $e'$ . Для определения радиуса измерялась скорость равномерного падения капельки в отсутствие поля. Как известно из механики

[см. т. I, формулу (60.2)], эта скорость равна

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}. \quad (66.10)$$

Измерив  $v_0$  и зная  $\rho$ ,  $\rho_0$  и вязкость воздуха  $\eta$ , можно по формуле (66.10) вычислить  $r$ . Движение капельки наблюдалось с помощью микроскопа. Для измерения  $v_0$  определялось время, за которое капелька проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа.

Точно зафиксировать равновесие капельки очень трудно. Поэтому вместо поля, отвечающего условию (66.9), включалось такое поле, под действием которого капелька начинала двигаться с небольшой скоростью вверх. Установившаяся скорость подъема  $v_E$  определяется из условия, что сила  $P'$  и сила трения  $6\pi\eta rv$  в сумме уравновешивают силу  $e'E$ :

$$P' + 6\pi\eta rv_E = e'E.$$

Выразив  $P'$  через  $\rho$ ,  $\rho_0$  и  $r$ , подставив значение  $r$  из (66.10) и решив уравнение относительно  $e'$ , получим

$$e' = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3}{(\rho - \rho_0)g}} \sqrt{v_0} \frac{v_0 + v_E}{E} {}^1).$$

Следовательно, измерив скорость свободного падения капельки  $v_0$  и скорость ее подъема  $v_E$  в известном электрическом поле  $E$ , можно было найти заряд капельки  $e'$ .

Измерив скорость  $v_E$ , Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами рентгеновскими лучами. Отдельные ионы, прилипая к капельке, изменяли ее заряд, в результате чего скорость  $v_E$  изменялась.

Как показали измерения Милликена, изменения заряда капельки  $\Delta e'$  и сам заряд  $e'$  каждый раз получались целыми кратными одной и той же величине  $e$ . Тем самым была экспериментально доказана дискретность электрического заряда, т. е. тот факт, что всякий заряд складывается из элементарных зарядов одинаковой

---

<sup>1)</sup> В эту формулу Милликен вносил поправку, учитывающую, что размеры капелек были сравнимы с длиной свободного пробега молекул воздуха.



величины. Значение элементарного заряда, установленное с учетом измерений Милликена и данных, полученных другими методами, равно

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ к} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ.} \quad (66.11)$$

Таковую же величину имеет заряд электрона. Для массы покоя электрона с учетом (66.7) и (66.11) получается значение

$$m_0 = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ г.} \quad (66.12)$$

Таким образом, масса электрона приблизительно в 1840 раз меньше массы самого легкого из атомов — атома водорода (см. т. I, § 92).

### § 67. Определение удельного заряда положительных ионов. Масс-спектрографы

Описанные в предыдущем параграфе методы определения  $e'/m$  пригодны в том случае, если все частицы в пучке имеют одинаковую скорость. Все образующие пучок электроны разгоняются одинаковой разностью потенциалов, приложенной между катодом, из которого они вылетают, и анодом; поэтому разброс значений скоростей электронов в пучке очень мал. Если бы это было не так, электронный пучок давал бы на экране сильно размытое пятно, и измерения были бы невозможны.

Положительные ионы образуются за счет ионизации молекул газа, например, при газовом разряде (см. § 84). Возникая в разных местах, ионы проходят неодинаковую разность потенциалов, вследствие чего их скорости бывают различными. Таким образом, методы, которыми был определен удельный заряд электронов, к ионам неприменимы. В 1907 г. Томсоном был разработан «метод парабол», который позволил обойти отмеченное затруднение.

В опыте Томсона тонкий пучок положительных ионов проходил через область, в которой на него одновременно воздействовали параллельные друг другу электрическое и магнитное поля (рис. 128). Оба поля были однородными и образовывали с первоначальным направлением пучка прямой угол. Они вызывали отклонения ионов: магнитное — в направлении оси  $x$ , электрическое —

вдоль оси  $y$ . Согласно формулам (65.4) и (65.3) эти отклонения были равны

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \\ y &= \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (67.1)$$

где  $v$  — скорость данного иона с удельным зарядом  $e'/m$ ,  $l_1$  — протяженность области, в которой поля действуют на пучок,  $l_2$  — расстояние от границы этой области до фотопластинки, регистрировавшей попадавшие на нее ионы.

Величины (67.1) представляют собой координаты точки, в которой попадает на пластинку ион, имеющий данное значение  $e'/m$  и величину скорости  $v$ . Ионы с одинаковым удельным зарядом, но различными скоростями попадали в разные точки пластинки.

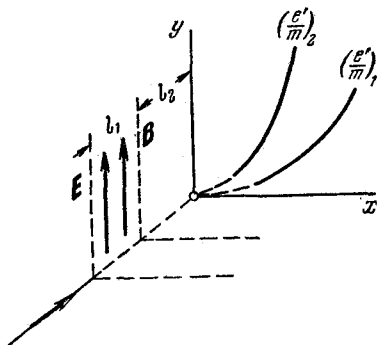


Рис. 128.

Исключив из формул (67.1) скорость  $v$ , получим уравнение кривой, вдоль которой располагались следы ионов с одним и тем же значением  $e'/m$ . Возведя первое из уравнений (67.1) в квадрат и разделив затем его на второе, после преобразований получим

$$y = \left[ \frac{E}{l_1 B^2 (0,5l_1 + l_2)} \right] \frac{m}{e'} x^2. \quad (67.2)$$

Таким образом, ионы с одинаковыми  $e'/m$  и различными  $v$  оставляли на пластинке след в виде параболы. Ионы с различными  $e'/m$  располагались вдоль разных парабол. Зная параметры прибора (т. е.  $E$ ,  $B$ ,  $l_1$  и  $l_2$ ) и измеряя смещения  $y$  и  $x$ , можно было по формуле (67.2) находить удельный заряд ионов, соответствующих каждой параболе. При изменении направления одного из полей соответствующая координата изменяла знак на обратный, так что получались параболы, симметричные прежним. Деля пополам расстояние между

соответствующими точками симметричных парабол, можно было находить  $x$  и  $y$ . След, оставляемый на пластинке пучком при выключенных полях, давал начало координат. На рис. 129 показаны первые параболы, полученные Томсоном.

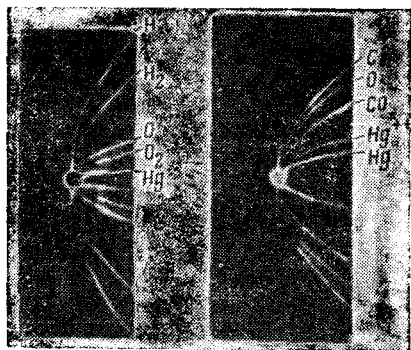


Рис. 129.

Произведя опыт с химически чистым неоном, Томсон обнаружил, что этот газ давал две параболы, соответствовавшие атомным весам 20 и 22. Попытки объяснить этот результат привели к предположению о том, что существуют две химически неразличимые разновид-

ности атомов неона (по современной терминологии — два изотопа неона). Доказательство этого предположения было дано Астоном, усовершенствовавшим метод определения удельного заряда ионов.

Прибор Астона, названный им масс-спектрографом, имел следующее устройство (рис. 130). Пучок

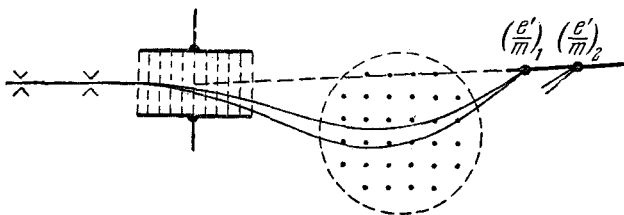


Рис. 130.

ионов, выделенный системой щелей, пропускался последовательно через электрическое и магнитное поля, направленные так, что они вызывали отклонения ионов в противоположных направлениях. При прохождении электрического поля ионы с данным  $e'/m$  отклонялись

тем сильнее, чем меньше была их скорость. Поэтому из электрического поля ионы выходили в виде расходящегося пучка. В магнитном поле траектории ионов также искривлялись тем сильнее, чем меньше была их скорость. В результате после выхода из магнитного поля ионы образовывали пучок, сходящийся в одной точке.

Ионы с другими значениями удельного заряда фокусировались в других точках (на рис. 130 показаны

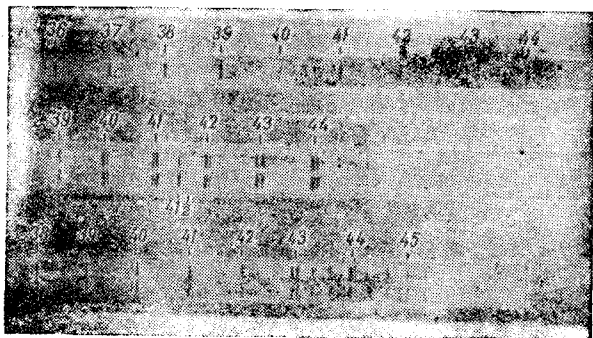


Рис. 131.

траектории ионов лишь для одного значения  $e'/m$ ). Соответствующий расчет дает, что точки, в которых сходятся пучки, образованные ионами с различными  $e'/m$ , лежат приблизительно на одной прямой. Располагая вдоль этой прямой фотопластинку, Астон получал на ней ряд штрихов, каждый из которых соответствовал определенному значению  $e'/m$ . Сходство получавшегося на пластинке изображения с фотографией оптического линейчатого спектра послужило причиной того, что Астон назвал его масс-спектрограммой, а свой прибор — масс-спектрографом. На рис. 131 приведены полученные Астоном масс-спектрограммы (против штрихов указаны массовые числа ионов).

Бейнбридж создал прибор другого типа. В масс-спектрографе Бейнбриджа (рис. 132) пучок ионов проходит сначала через так называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы

с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному действию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, каждое из которых отклоняет ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при условии, что  $e'E = e'vB$ . Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их

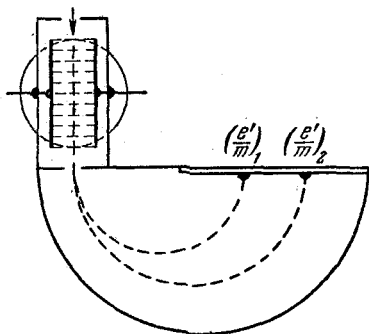


Рис. 132.

массы и заряда, имеют одинаковую величину, равную  $v = E/B$ .

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией  $B'$ . В этом случае ионы движутся по окружностям, радиусы которых согласно (64.2) зависят от  $e'/m$ :

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}$$

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных  $2R$ . Следовательно, ионы каждого сорта (определяемого значением  $e'/m$ ) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ , по найденным значениям  $e'/m$  можно определить массы ионов.

В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

## § 68. Циклотрон

Независимость периода обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости [см. формулу (64.3)] положена в основу ускорителя заряженных частиц, называемого циклотроном. Этот прибор состоит из двух электродов в виде половинок круглой невысокой коробки (рис. 133), получивших название дуантов. Дуанты заключены в откачиваемый корпус, который помещается между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно к плоскости дуантов. На дуанты подается переменное напряжение, снимаемое с полюсов генератора высокой частоты.

Введем в зазор между дуантами в тот момент, когда напряжение достигнет наибольшей величины, положительно заряженную частицу. Частица будет подхвачена электрическим полем и втянута внутрь отрицательного электрода. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, следовательно, частица в нем будет находиться под воздействием только магнитного поля. Как было выяснено в § 64, в этом случае происходит движение заряженной частицы по окружности, радиус которой пропорционален скорости частицы [см. формулу (64.2)]. Подберем частоту изменения напряжения между дуантами так, чтобы к моменту, когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, разность потенциалов между ними изменила знак и достигла амплитудного значения. Тогда частица будет снова ускорена и влетит во второй дуант

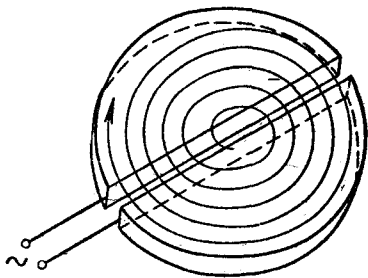


Рис. 133.

с энергией в два раза большей, чем та, с которой она двигалась в первом дуанте. Обладая большей скоростью, частица будет двигаться во втором дуанте по окружности большего радиуса ( $R \sim v$ ), но время, за которое она пройдет половину окружности, останется прежним (оно не зависит от  $v$ ). Поэтому к моменту, когда частица влетит в зазор между дуантами, напряжение между ними снова изменит знак и станет максимальным по величине.

Таким образом, если частоту изменения напряжения сделать равной периоду обращения частицы, определяемому формулой (64.3), то частица будет двигаться по кривой, близкой к спирали, получая при каждом прохождении через зазор между дуантами дополнительную порцию энергии, равную  $e'U$  ( $e'$  — заряд частицы,  $U$  — напряжение, вырабатываемое генератором). Располагая источником переменного напряжения сравнительно небольшой величины ( $\sim 10^5$  в), можно с помощью циклотрона ускорить протоны до энергий порядка 25 Мэв. При более высоких энергиях начинает сказываться зависимость массы протонов от скорости — период обращения увеличивается [согласно (64.3) он пропорционален  $m$ ] и синхронизм между движением частиц и изменениями ускоряющего поля оказывается нарушенным.

Чтобы избежать нарушения синхронизма и получить частицы больших энергий, делают изменяющейся либо частоту напряжения, питающего дуанты, либо индукцию магнитного поля. Прибор, в котором в процессе ускорения каждой порции частиц соответствующим образом уменьшается частота ускоряющего напряжения, называется фазотроном (либо синхроциклотроном). Ускоритель, в котором частота не меняется, а индукция магнитного поля изменяется так, чтобы отношение  $m/V$  оставалось постоянным, называют синхротроном (ускорители этого типа применяются исключительно для ускорения электронов).

В ускорителе, названном синхрофазотроном<sup>1)</sup>, изменяются и частота ускоряющего напряжения, и магнитное поле. Ускоряемые частицы движутся в синхрофазотроне не по спирали, а по круговой траектории постоянного радиуса. По мере увеличения скорости и массы

<sup>1)</sup> Синхрофазотрон называют также протонным синхротроном.

частиц индукция магнитного поля растет так, что определяемый формулой (64.2) радиус остается все время постоянным. При этом период обращения меняется как из-за возрастания массы частиц, так и вследствие увеличения  $B$ . Для того, чтобы ускоряющее напряжение было синхронно с движением частиц, частота этого напряжения делается изменяющейся по соответствующему закону. Дуантов в синхрофазотроне нет, ускорение частиц происходит на отдельных участках траектории с помощью электрического поля, создаваемого генераторами напряжения меняющейся частоты.

Самый мощный в настоящее время (в 1969 г.) ускоритель элементарных частиц — протонный синхротрон — запущен в 1967 г. в СССР в Институте физики высоких энергий (г. Серпухов под Москвой). Он ускоряет протоны до энергии в  $76 \text{ Гэв}$  ( $76 \cdot 10^9 \text{ эв}$ ). Скорость протонов, обладающих такой энергией, отличается от скорости света в пустоте менее чем на  $0,01\%$  ( $v = 0,99992 c$ ).



## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ. И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

### § 69. Природа носителей тока в металлах

Для выяснения природы носителей тока в металлах был поставлен ряд опытов. Прежде всего отметим опыт Рикке, осуществленный в 1901 г. Рикке взял три цилиндра — два медных и один алюминиевый — с тщательно отшлифованными торцами. Цилиндры были взвешены и затем сложены вместе в последовательности: медь — алюминий — медь. Через такой составной проводник пропускался непрерывно ток одного и того же направления в течение года. За все время через цилиндры прошел заряд, равный  $3,5 \cdot 10^6$  к. Взвешивание показало, что пропускание тока не оказало на вес цилиндров никакого влияния. При исследовании соприкасавшихся торцов под микроскопом также не было обнаружено проникновения одного металла в другой. Результаты опыта Рикке свидетельствовали о том, что перенос заряда в металлах осуществляется не атомами, а какими-то частицами, входящими в состав всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. Томсоном электроны.

Чтобы отождествить носители тока в металлах с электронами, нужно было определить знак и величину удельного заряда носителей. Опыты, поставленные с этой целью, основывались на следующих рассуждениях. Если в металле имеются легко перемещающиеся заряженные частицы, то при торможении металлического проводника эти частицы должны некоторое время продолжать двигаться по инерции, в результате чего в проводнике воз-

никнет импульс тока и будет перенесен некоторый заряд. Пусть проводник движется вначале со скоростью  $v_0$  (рис. 134). Начнем тормозить его с ускорением  $w$ . Продолжая двигаться по инерции, носители заряда приобретут относительно проводника ускорение  $-w$ . Такое же ускорение можно сообщить носителям в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле напряженности  $E = -\frac{mw}{e'}$ ,

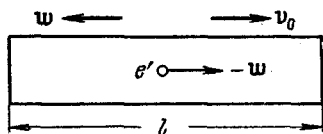


Рис. 134.

т. е. приложить к концам проводника разность потенциалов  $U = lE = -\frac{mwl}{e'}$

( $l$  — длина проводника,  $m$  — масса, а  $e'$  — заряд носителя). В этом случае по проводнику потечет ток силы  $i = \frac{U}{R}$ , где  $R$  — сопротивление проводника. Следовательно, за время  $dt$  через каждое сечение проводника пройдет заряд

$$dq = i dt = -\frac{mwl}{e'R} dt = -\frac{ml}{e'R} dv.$$

За все время торможения пройдет заряд

$$q = \int_0^t dq = -\int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{m}{e'} \frac{lv_0}{R}. \quad (69.1)$$

Величины  $q$ ,  $l$ ,  $v_0$  и  $R$  поддаются измерению. Таким образом, затормозив проводник и измерив проходящий при этом в цепи заряд, можно найти удельный заряд носителей. Направление импульса тока даст знак носителей.

Первый опыт с ускоренно движущимися проводниками был поставлен в 1913 г. Мандельштамом и Папалекси. Они приводили катушку с проводом в быстрые крутильные колебания вокруг ее оси. К концам катушки подключался телефон, в котором был слышен звук, обусловленный импульсами тока.

Количественный результат был получен Толменом и Стюартом в 1916 г. Катушка из провода длиной 500 м приводилась во вращение, при котором линейная скорость витков составляла 300 м/сек. Затем катушка резко

тормозилась и с помощью баллистического гальванометра измерялся заряд, протекавший в цепи за время торможения. Вычисленное по формуле (69.1) значение удельного заряда носителей получалось очень близким к  $e/m$  для электронов. Таким образом, было экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются электроны.

Ток в металлах можно вызвать весьма малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что носители тока — электроны перемещаются по металлу практически свободно. К тому же выводу приводят и результаты опыта Толмена и Стюарта.

Существование свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов металла отщепляются слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся «коллективной собственностью» всего куска металла. Если от каждого атома отщепится по одному электрону, то концентрация свободных электронов (т. е. их число  $n$  в единице объема) будет равна количеству атомов в единице объема. Произведем оценку  $n$ . Число атомов в единице объема равно  $\frac{\delta}{\mu} N_A$ , где  $\delta$  — плотность металла,  $\mu$  — масса килограмм-атома,  $N_A$  — число Авогадро. Для металлов значения  $\delta/\mu$  заключены в пределах от 20 кмоль/м<sup>3</sup> (для калия) до 200 кмоль/м<sup>3</sup> (для бериллия). Следовательно, для концентрации свободных электронов (или, как их еще называют, электронов проводимости) получаются значения порядка

$$n = 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3} (10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}). \quad (69.2)$$

## § 70. Элементарная классическая теория металлов

Исходя из представлений о свободных электронах, Друде разработал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем. Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь  $\lambda$ . Правда, в отличие от молекул газа, пробег которых определяется соударениями молекул друг с другом, элект-

троны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой. Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, оценку средней скорости теплового движения электронов можно произвести по формуле [см. т. I, формулу (106.12)]

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (70.1)$$

Для комнатной температуры ( $\sim 300^\circ \text{K}$ ) вычисление по этой формуле приводит к следующему значению:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/сек.}$$

При включении поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью (70.1), накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью  $\bar{u}$ . Величину этой скорости легко оценить, исходя из формулы, связывающей плотность тока  $j$  с числом  $n$  носителей в единице объема, их зарядом  $e$  и средней скоростью  $\bar{u}$ :

$$j = ne\bar{u}. \quad (70.2)$$

Предельная допустимая техническими нормами плотность тока для медных проводов составляет около  $10 \text{ а/мм}^2 = 10^7 \text{ а/м}^2$ . Взяв для  $n$  значение  $10^{23} \text{ см}^{-3} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ , получим

$$\bar{u} = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/сек.}$$

Таким образом, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения зарядов ( $\bar{u}$ ) в  $10^8$  раз меньше средней скорости теплового движения ( $\bar{v}$ ). Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости  $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$  всегда можно заменить модулем скорости теплового движения  $|\mathbf{v}|$ .

Найдем вызванное полем изменение среднего значения кинетической энергии электронов. Средний квадрат результирующей скорости равен

$$\overline{(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2} = \overline{\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}^2} = \overline{\mathbf{v}^2} + 2\overline{\mathbf{v}\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}^2}).$$

Но среднее значение  $\mathbf{v}$  равно нулю (см. § 31). Поэтому

$$\overline{(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2} = \overline{v^2} + \overline{u^2}.$$

Следовательно, упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов  $\epsilon_k$  в среднем на

$$\overline{\Delta\epsilon_k} = \frac{m\overline{u^2}}{2}. \quad (70.3)$$

**Закон Ома.** Друде считал, что сразу после очередного соударения электрона с ионом кристаллической решетки скорость упорядоченного движения электрона равна нулю. Предположим, что напряженность поля не изменяется. Тогда под действием поля электрон получит постоянное ускорение, равное  $eE/m$ , и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигнет в среднем значения

$$\bar{u}_{\max} = \frac{eE}{m} \tau, \quad (70.4)$$

где  $\tau$  — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Друде не учитывал распределения электронов по скоростям и приписывал всем электронам одинаковое значение скорости  $v$ . В этом приближении

$$\tau = \frac{\lambda}{v},$$

где  $\lambda$  — среднее значение длины свободного пробега,  $v$  — скорость теплового движения электронов (мы воспользовались тем, что  $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$  практически равен  $|\mathbf{v}|$ ).

Подставим это значение  $\tau$  в формулу (70.4):

$$\bar{u}_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv}. \quad (70.5)$$

1) Если две случайные величины  $a$  и  $b$  независимы друг от друга (что справедливо для скоростей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$ ), то среднее значение их произведения равно произведению средних значений

$$\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Скорость  $u$  и изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее (за пробег) значение равно половине максимального:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \bar{u}_{\max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Подставив это выражение в формулу (70.2), получим

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Плотность тока оказалась пропорциональной напряженности поля. Следовательно, мы получили закон Ома. Согласно (33.4) коэффициент пропорциональности между  $j$  и  $E$  представляет собой проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (70.6)$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами, помещающимися в узлах кристаллической решетки металла.

**Закон Джоуля — Ленца.** К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, средняя величина которой согласно формулам (70.3) и (70.5) равна

$$\overline{\Delta e_k} = \frac{m\bar{u}_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2} E^2. \quad (70.7)$$

Столкнувшись с ионом, электрон по предположению полностью теряет приобретенную им за время пробега скорость, т. е. передает энергию (70.7) кристаллической решетке. Эта энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании. Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем  $1/\tau = v/\lambda$  соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (70.7). Следовательно, в единице объема за единицу времени должно выделяться тепло

$$\omega = n \frac{1}{\tau} \overline{\Delta e_k} = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2,$$

где  $n$  — число электронов проводимости в единице объема.

Величина  $\omega$  есть не что иное, как удельная мощность тока (см. § 34). Множитель при  $E^2$  совпадает со значением (70.6) для  $\sigma$ . Таким образом, мы пришли к выражению (34.5) закона Джоуля — Ленца.

**Закон Видемана — Франца.** Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман и Франц установили в 1853 г. эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$  для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре. Так, например, при комнатной температуре это отношение равно для алюминия  $5,8 \cdot 10^{-6}$ , для меди  $6,4 \cdot 10^{-6}$  и для свинца  $7,0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{дж} \cdot \text{ом}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$ .

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а электронами. Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности можно заимствовать выражение кинетической теории газов [см. т. I, формулу (113.6)]

$$\kappa = \frac{1}{3} n m \bar{v} c_V$$

(через  $nm$  обозначена плотность газа, вместо  $\bar{v}$  взято  $v$ ).

Удельная теплоемкость одноатомного газа равна  $c_V = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$ . Подставляя это значение в выражение для  $\kappa$ , получим

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v \lambda.$$

Разделим  $\kappa$  на выражение (70.6) для  $\sigma$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{k m v^2}{e^2}.$$

Произведя замену  $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT$ , приходим к соотношению

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T,$$

которое выражает закон Видемана — Франца.

Подставив  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  дж/град и  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  к, получим

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8} T.$$

При  $T = 300^\circ \text{K}$  для отношения  $\kappa/\sigma$  получается значение  $6,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{дж} \cdot \text{ом}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$ , очень хорошо согласующееся с экспериментальными данными (см. приведенные выше значения для Al, Cu и Pb). Однако, как выяснилось впоследствии, столь хорошее совпадение оказалось случайным, ибо когда Лоренц уточнил расчеты, учтя распределение электронов по скоростям, для отношения  $\kappa/\sigma$  получилось значение  $2 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T$ , которое хуже согласуется с данными опыта<sup>1)</sup>.

Итак, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Вместе с тем эта теория встретила с весьма существенными затруднениями. Из них основными являются два. Из формулы (70.6) вытекает, что сопротивление металлов (т. е. величина, обратная  $\sigma$ ) должно возрастать как корень квадратный из  $T$ . В самом деле, для предположений о зависимости от температуры величин  $n$  и  $\lambda$  нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из  $T$ . Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени  $T$  (см. § 33), т. е. быстрее, чем  $\sqrt{T}$ .

Второе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной

<sup>1)</sup> Согласно квантовой теории

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k}{e} \right)^2 T = 2,45 \cdot 10^{-8} T.$$



теплоемкостью, равной  $\frac{3}{2}R$ . Добавляя эту величину к теплоемкости решетки, составляющей  $3R$  (см. т. I, § 141), мы получим для килограмм-атомной теплоемкости металла значение  $\frac{9}{2}R$ . Таким образом, согласно классической электронной теории килограмм-атомная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости неметаллических кристаллов. Объяснение такого несоответствия смогла дать лишь квантовая теория металлов.

Несмотря на неспособность классической теории дать объяснение ряда явлений, она сохранила значение и до настоящего времени, потому что в случае малых концентраций свободных электронов (что имеет место в полупроводниках) она дает вполне удовлетворительные результаты. Вместе с тем по сравнению с квантовой теорией классическая обладает значительной простотой и наглядностью.

## § 71. Основы квантовой теории металлов

В классической теории металлов считалось само собой разумеющимся, что электроны проводимости могут обладать любыми значениями энергии. Согласно квантовой теории энергия электронов в любом кристаллическом теле (в частности, в металле) так же, как и энергия электронов в атоме, квантуется. Это означает, что она может принимать лишь дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, называемые уровнями энергии. Дозволенные уровни энергии в кристалле группируются в зоны.

Чтобы понять происхождение зон, рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл. Пусть первоначально имеется  $N$  изолированных атомов какого-либо вещества. Каждый электрон любого атома обладает одним из разрешенных значений энергии, т. е. занимает один из дозволенных энергетических уровней. В основном, невозбужденном состоянии атома суммарная энергия электронов имеет минимальное возможное значение. Поэтому, казалось бы, все электроны должны находиться на самом низком уровне. Однако электроны

подчиняются принципу запрета Паули, который гласит, что в любой квантовой системе (атоме, молекуле, кристалле и т. д.) на каждом энергетическом уровне<sup>1)</sup> может находиться не более двух электронов, причем собственные моменты (спины) электронов, занимающих одновременно один и тот же уровень, должны иметь противоположные направления<sup>2)</sup>. Следовательно, на самом низком уровне атома может разместиться только два электрона, остальные заполняют попарно более высокие уровни. На рис. 135 показано размещение электронов по уровням в основном состоянии атома, имеющего 5 электронов. Схема уровней изображена условно, без соблюдения масштаба. Электроны обозначены кружками со стрелкой. Разные направления стрелок соответствуют противоположным направлениям спинов.

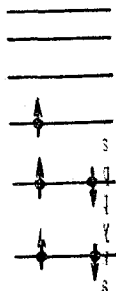


Рис. 135.

Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. Вместо одного одинакового для всех  $N$  атомов уровня возникают  $N$  очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома расщепляется в кристалле на  $N$  густо расположенных уровней, образующих полосу или зону.

Величина расщепления для разных уровней не одинакова. Уровни, заполненные в атоме более близкими к ядру (внутренними) электронами, возмущаются меньше, чем уровни, заполненные внешними электронами.

<sup>1)</sup> Может случиться, что одно и то же значение энергии будет соответствовать нескольким квантовым состояниям. Это явление называется вырождением, а число различных состояний с одинаковой энергией — кратностью вырождения  $g$ . В этом случае на каждом энергетическом уровне может находиться не более  $2g$  электронов.

<sup>2)</sup> Принципу Паули подчиняются не только электроны, но и все другие частицы с полуцелым спином [см. § 51, текст, следующий за формулой (51.4)].

На рис. 136 показано расщепление различных уровней как функция расстояния  $r$  между атомами. Отмеченные на рисунке значения  $r_1$  и  $r_2$  соответствуют расстояниям между атомами в двух различных кристаллах. Из схемы видно, что возникающее в кристалле расщепление уровней, занятых внутренними электронами, очень мало. Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии атома.

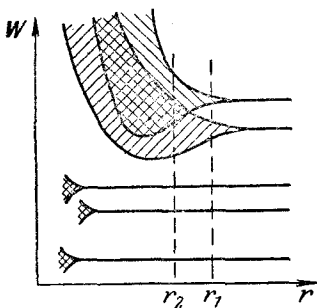


Рис. 136.

При достаточно малых расстояниях между атомами может произойти перекрытие зон, соответствующих двум соседним уровням атома (см. пунктирную прямую, отвечающую расстоянию  $r_2$  между атомами). Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляются оба уровня атома.

Взаимодействующие атомы представляют собой единую квантовую систему, в пределах которой действует принцип запрета Паули. Следовательно,  $2N$  электронов, которые заполняли какой-то уровень в изолированных атомах, разместятся в кристалле попарно (с противоположными спинами) на  $N$  уровнях соответствующей полосы.

Нижние, образованные слабо расщепленными уровнями зоны заполняются электронами, каждый из которых не утрачивает и в кристалле прочной связи со своим атомом. Эти зоны и заполняющие их электроны в дальнейшем интересовать нас не будут.

Дозволенные значения энергии валентных электронов в кристалле объединяются в зоны, разделенные промежутками, в которых разрешенных значений энергии нет. Эти промежутки называются запрещенными зонами. Ширина разрешенных и запрещенных зон не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются

уровни в зоне. Ширина разрешенных зон имеет величину порядка нескольких электронвольт. Следовательно, если кристалл содержит  $10^{23}$  атомов, расстояние между соседними уровнями в зоне составляет  $\sim 10^{-23}$  эв.

При абсолютном нуле энергия кристалла должна быть минимальной. Поэтому валентные электроны заполняют попарно нижние уровни разрешенной зоны, возникшей из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома (мы будем называть ее валентной зоной). Более высокие разрешенные зоны будут от электронов свободны. В зависимости



Рис. 137.

от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая, изображенные на рис. 137. В случае а) электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ( $\sim 10^{-23} \div 10^{-22}$  эв) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия теплового движения ( $kT$ ) составляет при  $1^\circ\text{K}$  величину порядка  $10^{-4}$  эв (при комнатной температуре  $\sim 1/40$  эв). Следовательно, при температурах, отличных от  $0^\circ\text{K}$ , часть электронов переводится на более высокие уровни. Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою металл.

Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее называют также зоной проводимости) может произойти, если на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон; или имеет место перекрывание зон (см. рис. 136, расстояние  $r_2$ ). В первом случае  $N$  электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Во втором случае число уровней в зоне проводимости будет больше  $N$ , так что, даже если количество электронов проводимости равно  $2N$ , они не смогут занять все уровни зоны.

В случаях б) и в) уровни валентной зоны полностью заняты электронами — зона заполнена. Для того чтобы увеличить энергию электрона, необходимо сообщить ему количество энергии, не меньшее, чем ширина запрещенной зоны  $\Delta W$ . Электрическое поле (во всяком случае, такой напряженности, при которой не происходит электрический пробой кристалла) сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях электрические свойства кристалла определяются шириной запрещенной зоны  $\Delta W$ . Если  $\Delta W$  невелико (порядка нескольких десятых электронвольта), энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на ее освобожденные верхние уровни. Такое вещество называется электронным полупроводником.

Если ширина запрещенной зоны  $\Delta W$  велика (порядка нескольких электронвольт), тепловое движение не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается изолятором.

Таким образом, квантовая теория объясняет с единой точки зрения существование хороших проводников (металлов), полупроводников и изоляторов.

Рассмотрим распределение электронов по уровням зоны проводимости в металле. При абсолютном нуле на каждом из  $N/2$  нижних уровней будет находиться по два электрона, остальные уровни будут свободны. Такое распределение показано на рис. 138 сплошной линией. По оси ординат отложено число электронов на данном уровне.

не [смысл обозначения  $2f(W)$  станет ясен в дальнейшем]. В качестве индекса для обозначения уровня использована его энергия  $W$ . Собственно, в соответствии с тем, что уровни энергии дискретны, распределение изображается слева от  $W_{\max}$  совокупностью точек с ординатой 2, а справа от  $W_{\max}$  — точками с ординатой 0. Но так как расстояния между уровнями очень малы, эти точки располагаются весьма густо и образуют сплошную линию.

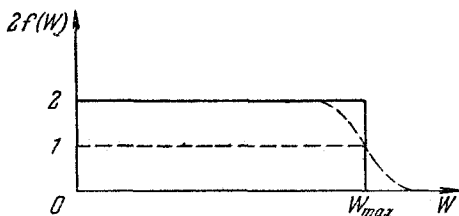


Рис. 138.

Для верхнего заполненного при абсолютном нуле уровня квантовая теория дает значение

$$W_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  дж·сек,  $m$  — масса электрона,  $n$  — число свободных электронов в единице объема. Принимая  $n = 10^{29}$  м<sup>-3</sup>, получим

$$W_{\max} = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}} (3 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{29})^{2/3} \approx 1,25 \cdot 10^{-18} \text{ дж} \approx 8 \text{ эв.}$$

Если бы уровни зоны распределялись по оси энергии с постоянной плотностью (т. е. число уровней  $dz$ , приходящееся на интервал энергий  $dW$ , не зависело от  $W$ ), среднее значение энергии электронов было бы равно половине максимального. В действительности, плотность уровней пропорциональна  $\sqrt{W}$ , т. е.  $dz \sim \sqrt{W} dW$ . Вычисления дают для средней энергии электронов при абсолютном нуле значение  $\bar{W} = \frac{3}{5} W_{\max}$ . Следовательно, даже при 0° К электроны проводимости в металле обладают огромной кинетической энергией, равной в среднем примерно 5 эв. Чтобы сообщить классическому электронному

газу такую энергию, его нужно нагреть до температуры порядка четырехсот тысяч градусов Кельвина. Столь же быстро движутся и валентные электроны в изоляторах. Однако они находятся в таких условиях, что электрическое поле не может изменить их состояние и вызвать преобладание движения в одном направлении.

Выясним, какова вероятность нахождения электронов на различных уровнях при температурах, отличных от  $0^\circ\text{K}$ . В классической физике распределение частиц по состояниям с различной энергией характеризуется функцией Больцмана:

$$f_B(W) = Ae^{-\frac{W}{kT}}, \quad (71.1)$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности [ср. т. I, формула (109.6)]. Эта функция определяет вероятность того, что частица будет находиться в состоянии с энергией  $W$ .

Распределение (71.1) было получено в предположении, что в каждом состоянии с данной энергией может находиться неограниченное количество частиц<sup>1)</sup>. Функция распределения, учитывающая принцип запрета Паули, была найдена Ферми. Она имеет вид

$$f(W) = \frac{1}{e^{(W-W_F)/kT} + 1}. \quad (71.2)$$

Здесь  $W$  — энергия данного уровня,  $W_F$  — параметр системы, называемый уровнем Ферми.

Функция (71.2) дает вероятность заполнения электронами данного уровня. Легко убедиться в том, что сплошная кривая на рис. 138 с точностью до множителя 2 совпадает с графиком функции (71.2) для  $T = 0$ . В самом деле, в этом случае

$$f(W) = 1, \text{ если } W < W_F$$

и

$$f(W) = 0, \text{ если } W > W_F.$$

Таким образом, при  $0^\circ\text{K}$  уровень Ферми совпадает с верхним заполненным электронами уровнем  $W_{\text{max}}$ .

Для  $W = W_F$  функция (71.2) при любой температуре имеет значение, равное  $1/2$ . Следовательно, уровень Фер-

<sup>1)</sup> При  $T = 0$  функция (71.1) обращается в нуль при всех значениях энергии, кроме  $W = 0$ . Это означает, что все частицы должны находиться на нулевом уровне.

ми совпадает с тем энергетическим уровнем, вероятность заполнения которого равна половине (на таком уровне в среднем находится один электрон). Значение  $W_F$  можно найти из условия

$$\sum_k 2f(W_k) = N, \quad (71.3)$$

где  $N$  — полное число валентных электронов в кристалле. Каждое слагаемое представляет собой среднее число электронов на  $k$ -м уровне. Суммирование производится по всем уровням валентной зоны и остальных лежащих над ней зон.

Уровни в пределах разрешенных зон лежат очень густо. Поэтому сумму (71.3) можно заменить интегралом. Всем уровням, лежащим в пределах небольшого интервала энергий  $dW$ , можно приписать одинаковую занятость  $2f(W)$ . Если плотность уровней равна  $g(W)$ , число их в интервале  $dW$  составит  $g(W)dW$ . На долю этих уровней придется в среднем  $dN_W = 2f(W)g(W)dW$  электронов. А полное число электронов на всех уровнях должно быть равно

$$\int_0^{\infty} dN_W = \int_0^{\infty} 2f(W)g(W)dW = \int_0^{\infty} \frac{2g(W)dW}{e^{(W-W_F)/kT} + 1} = N. \quad (71.4)$$

Зная вид  $g(W)$ , можно вычислить интеграл (71.4) (для интервалов энергий, соответствующих запрещенным зонам,  $g(W)$  следует положить равной нулю). Получившееся выражение будет содержать  $W_F$  и  $T$ . Следовательно, для данного  $N$  можно найти  $W_F$  как функцию  $T$ . Выражение (71.4) представляет собой по существу условие нормировки функции  $f(W)$  [см. т. I, § 106, текст, предшествующий формуле (106.7)].

Вычисления, проведенные для металлов, показывают, что  $W_F$  слабо зависит от температуры, так что значения уровня Ферми при не слишком высоких температурах (если  $kT \ll W_{F0}$ ) мало отличаются от значения  $W_{F0}$  при абсолютном нуле.

При температурах, отличных от  $0^\circ\text{K}$ , распределение, описываемое функцией (71.2), имеет вид, показанный на рис. 138 пунктирной кривой. Ордината кривой характеризует среднюю по времени занятость уровня; поэтому, например, ордината, равная 0,25, означает, что



$\frac{1}{4}$  времени уровень занят одним электроном (или  $\frac{1}{8}$  — двумя), а остальное время пустует.

В области больших энергий (т. е. при  $W - W_F \gg kT$ , что выполняется в области «хвоста» кривой распределения) единицей в знаменателе можно пренебречь. Тогда функция (71.2) принимает вид

$$f(W) \approx e^{-\frac{W-W_F}{kT}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{W}{kT}}, \quad (71.5)$$

т. е. переходит в функцию (71.1) распределения Больцмана.

Распределение электронов по уровням можно сделать очень наглядным, изобразив, как это сделано на рис. 139, кривую распределения Ферми совместно со схемой энергетических зон.

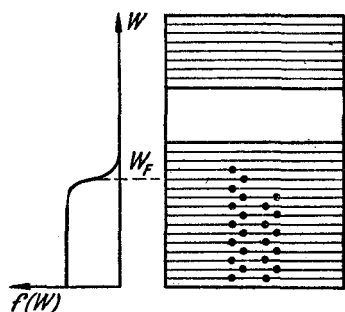


Рис. 139.

Чем выше температура, тем более полого идет ниспадающий участок кривой. Однако заметное отличие распределения при температуре  $T$  от распределения при  $0^\circ \text{K}$  наблюдается лишь в области порядка  $kT$ . Следовательно, тепловое движение влияет на кинетическую энергию лишь небольшой части всех электронов.

Поэтому средняя энергия электронов слабо зависит от температуры. Этим объясняется тот факт, что электроны проводимости не вносят заметного вклада в теплоемкость металла. Таким образом, квантовая теория устраняет одно из основных затруднений, которого не могла преодолеть классическая теория.

Для зависимости электропроводности металла от температуры квантовая теория также дает хорошо согласующиеся с опытом результаты.

## § 72. Полупроводники

Полупроводники обязаны своим названием тому обстоятельству, что по величине электропроводности они занимают промежуточное положение между металлами и изоляторами. Однако характерным для них яв-

ляется не величина проводимости, а то, что их проводимость растет с повышением температуры (напомним, что у металлов она уменьшается). Полупроводниками являются вещества, у которых валентная зона полностью заполнена электронами (см. рис. 137, б), а ширина запрещенной зоны невелика (у собственных полупроводников не более 1 эв).

Различают собственную и примесную проводимости полупроводников.

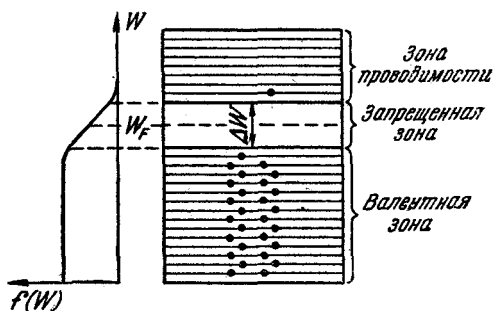


Рис. 140.

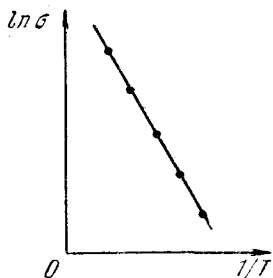
**Собственная проводимость.** Собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока — электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях. Такие свободные от электронов места на уровнях заполненной при абсолютном нуле валентной зоны называют дырками.

Распределение электронов по уровням валентной зоны и зоны проводимости определяется функцией Ферми (71.2). Вычисления по формуле (71.4) показывают, что уровень Ферми лежит точно посередине запрещенной зоны (рис. 140). Следовательно, для электронов, перешедших в зону проводимости, величина  $W - W_F$  мало отличается от половины ширины запрещенной зоны. Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения. Поэтому вероятность их заполнения

электронами можно найти по формуле (71.5). Полагая в этой формуле  $W - W_F = \Delta W/2$ , получим

$$f(W) \approx e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}. \quad (72.1)$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, будет пропорционально вероятности (72.1). Эти электроны, а также, как мы увидим ниже, образовавшиеся в таком же числе дырки, являются носителями тока. Поскольку проводимость пропорциональна числу носителей, она также должна быть пропорциональна выражению (72.1). Следовательно, электропроводность полупроводников быстро растет с температурой, изменяясь по закону



$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}, \quad (72.2)$$

Рис. 141.

где  $\Delta W$  — ширина запрещенной зоны.

Если на графике откладывать зависимость  $\ln \sigma$  от  $1/T$ , то для полупроводников получается прямая линия, изображенная на рис. 141. По наклону этой прямой можно определить ширину запрещенной зоны  $\Delta W$ .

Типичными полупроводниками являются элементы IV группы периодической системы Менделеева — германий и кремний. Они образуют решетку, в которой каждый атом связан ковалентными (парно-электронными) связями (см. т. I, § 139) с четырьмя равноотстоящими от него соседними атомами. Условно такое взаимное расположение атомов можно представить в виде плоской структуры, изображенной на рис. 142. Кружки со знаком «+» обозначают положительно заряженные атомные остатки (т. е. ту часть атома, которая остается после удаления валентных электронов), кружки со знаком «—» — валентные электроны, двойные линии — ковалентные связи.

При достаточно высокой температуре тепловое движение может разорвать отдельные пары, освободив один электрон (такой случай показан на рис. 142).

Покинутое электроном место перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд  $+e$  — образуется дырка. На это место может перескочить электрон одной из соседних пар. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся электрон.

Если свободный электрон встретится с дыркой, они рекомбинируют (соединяются). Это означает, что электрон нейтрализует избыточный положительный заряд, имеющийся в окрестности дырки, и теряет свободу передвижения до тех пор, пока снова не получит от кристаллической решетки энергию, достаточную для своего высвобождения. Рекомбинация приводит к одновременному исчезновению свободного электрона и дырки. На схеме уровней (рис. 140) процессу рекомбинации соответствует переход электрона из зоны проводимости на один из свободных уровней валентной зоны.

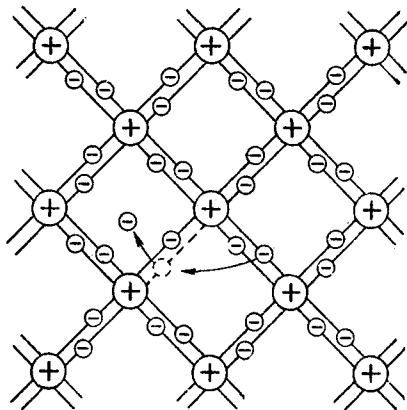


Рис. 142.

Итак, в полупроводнике идут одновременно два процесса: рождение попарно свободных электронов и дырок и рекомбинация, приводящая к попарному исчезновению электронов и дырок. Вероятность первого процесса быстро растет с температурой. Вероятность рекомбинации пропорциональна как числу свободных электронов, так и числу дырок. Следовательно, каждой температуре соответствует определенная равновесная концентрация электронов и дырок, величина которой изменяется с температурой по такому же закону, как и  $\sigma$  [см. формулу (72.2)].

В отсутствие внешнего электрического поля электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок — в направлении поля. Оба движения —

и дырок, и электронов — приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, собственная электропроводность обуславливается как бы носителями заряда двух знаков — отрицательными электронами и положительными дырками.

Собственная проводимость наблюдается во всех без исключения полупроводниках при достаточно высокой температуре.

**Примесная проводимость.** Этот вид проводимости возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов.

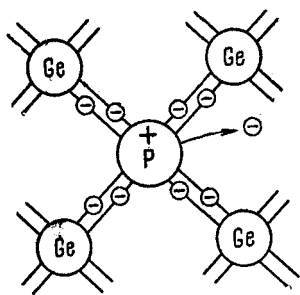


Рис. 143.

На рис. 143 условно изображена решетка германия с примесью 5-валентных атомов фосфора. Для образования ковалентных связей с соседями атому фосфора достаточно четырех электронов. Следовательно, пятый валентный электрон оказывается как бы лишним и легко отщепляется от атома за счет энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон. В отличие от рассмотренного раньше случая образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентных связей, т. е. образованием дырки. Хотя в окрестности атома примеси возникает избыточный положительный заряд, но он связан с этим атомом и перемещаться по решетке не может. Благодаря этому заряду атом примеси может захватить приближившийся к нему электрон, но связь захваченного электрона с атомом будет непрочной и легко нарушается вновь за счет тепловых колебаний решетки.

Таким образом, в полупроводнике с 5-валентной примесью имеется только один вид носителей тока — электроны. Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником *n*-типа (от слова *negativ* — отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются **донорами**.

Таким образом, в полупроводнике с 5-валентной примесью имеется только один вид носителей тока — электроны. Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником *n*-типа (от слова *negativ* — отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются **донорами**.

Примеси искажают поле решетки, что приводит к возникновению на энергетической схеме так называемых локальных уровней, расположенных в запрещенной зоне кристалла (рис. 144). Любой уровень валентной зоны или зоны проводимости может быть занят электроном, находящимся в любом месте кристалла.

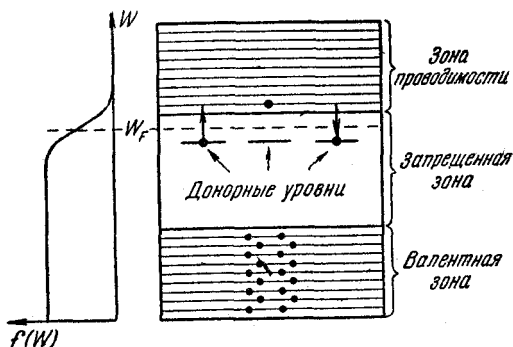


Рис. 144.

Энергию, соответствующую локальному уровню, электрон может иметь, лишь находясь вблизи атома примеси, вызвавшего появление этого уровня. Следовательно, электрон, занимающий примесный уровень, локализован вблизи атома примеси.

Если донорные уровни расположены недалеко от потолка валентной зоны<sup>1)</sup>, они не могут существенно повлиять на электрические свойства кристалла. Иначе обстоит дело, когда расстояние таких уровней от дна зоны проводимости гораздо меньше, чем ширина запрещенной зоны. В этом случае энергия теплового движения даже при обычных температурах оказывается достаточной для того, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости. На рис. 143 этому процессу соответствует отщепление пятого валентного электрона от атома примеси. Захвату свободного электрона атомом примеси соответствует на рис. 144

<sup>1)</sup> Это значит, что пятый валентный электрон прочно связан со своим атомом.

переход электрона из зоны проводимости на один из донорных уровней.

Уровень Ферми в полупроводнике *n*-типа лежит между донорными уровнями и дном зоны проводимости, при невысоких температурах — приблизительно посредине между ними (рис. 144).

На рис. 145 условно изображена решетка кремния с примесью 3-валентных атомов бора. Трех валентных электронов атома бора недостаточно для образования

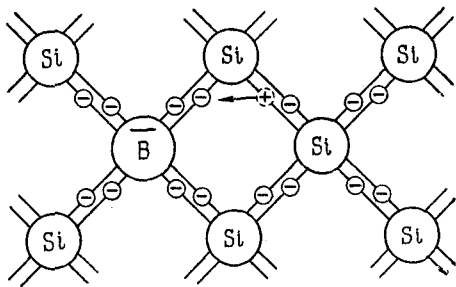


Рис. 145.

связей со всеми четырьмя соседями. Поэтому одна из связей окажется не укомплектованной и будет представлять собой место, способное захватить электрон. При переходе на это место электрона одной из соседних пар возникнет дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникнет избыточный отрицательный заряд, но он будет связан с данным атомом и не может стать носителем тока. Таким образом, в полупроводнике с 3-валентной примесью возникают носители тока только одного вида — дырки. Проводимость в этом случае называется дырочной, а о полупроводнике говорят, что он принадлежит к *p*-типу (от слова *positiv* — положительный). Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются акцепторными.

На схеме уровней (рис. 146) акцептору соответствует расположенный в запретной зоне недалеко от ее дна локальный уровень. Образованию дырки отвечает переход электрона из валентной зоны на акцепторный уровень. Обратный переход соответствует разрыву одной из четырех ковалентных связей атома примеси с его соседями и

рекомбинации образовавшегося при этом электрона и дырки.

Уровень Ферми в полупроводнике  $p$ -типа лежит между потолком валентной зоны и акцепторными уровнями, при невысоких температурах — приблизительно посредине между ними.

С повышением температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или

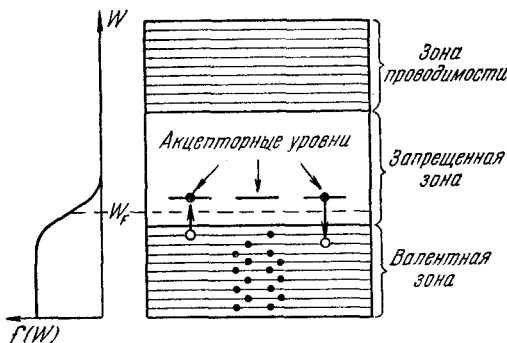


Рис. 146.

заполняются электронами все акцепторные уровни. Вместе с тем по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводника будет складываться из примесной и собственной проводимости. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких — собственная проводимость.

### § 73. Эффект Холла

Холл обнаружил в 1880 г. следующее явление: если металлическую пластинку, вдоль которой течет постоянный электрический ток, поместить в перпендикулярное к ней магнитное поле, то между параллельными току и полю гранями (рис. 147) возникает разность потенциалов



$U_H = \varphi_1 - \varphi_2$ . Величина ее определяется выражением

$$U_H = RbjB, \quad (73.1)$$

где  $b$  — ширина пластинки,  $j$  — плотность тока,  $B$  — магнитная индукция поля,  $R$  — разный для различных металлов коэффициент пропорциональности, получивший

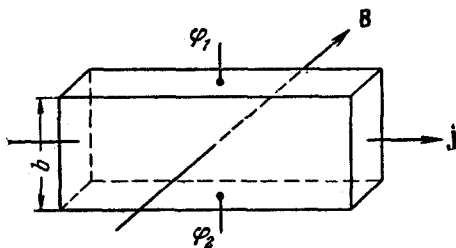


Рис. 147.

название постоянной Холла. Само явление называют эффектом Холла или гальваномагнитным явлением.

Эффект Холла очень просто объясняется электронной теорией. В отсутствие магнитного поля ток в пластинке

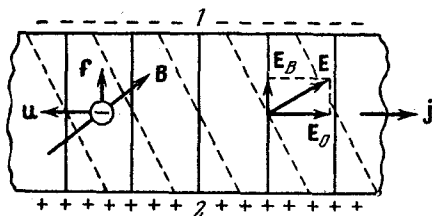


Рис. 148.

обусловливается электрическим полем  $E_0$  (рис. 148). Эквипотенциальные поверхности этого поля образуют систему перпендикулярных к вектору  $E_0$  плоскостей, изображенных на рисунке сплошными прямыми линиями. Потенциал во всех точках каждой поверхности, а следовательно, и в точках 1 и 2 одинаков. Носители тока — электроны — имеют отрицательный заряд, поэтому скорость их упорядоченного движения  $u$  направлена противоположно вектору плотности тока  $j$ .

При включении магнитного поля каждый носитель оказывается под действием силы Лоренца, направленной вдоль стороны  $b$  пластинки (рис. 147) и равной по модулю

$$f = euB. \quad (73.2)$$

В результате у электронов появляется составляющая движения в направлении к верхней (на рисунке) грани пластинки. У этой грани образуется избыток отрицательных, соответственно у нижней грани — избыток положительных зарядов. Следовательно, возникает дополнительное поперечное электрическое поле  $E_B$ . Когда напряженность этого поля достигает такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу (73.2), установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Соответствующее значение  $E_B$  определяется из условия:  $eE_B = euB$ , откуда

$$E_B = uB. \quad (73.3)$$

Поле  $E_B$  складывается с полем  $E_0$  в результирующее поле  $E$ . Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны в каждой точке к вектору напряженности поля. Следовательно, они повернутся и займут положения, изображенные на рис. 148 пунктиром. Точки 1 и 2, которые прежде лежали на одной и той же эквипотенциальной поверхности, теперь будут иметь разные потенциалы. Чтобы найти напряжение, возникающее между этими точками, нужно умножить  $E_B$  на расстояние между ними  $b$ . Выражая, кроме того, в (73.3)  $u$  через  $j$ ,  $n$  и  $e$  в соответствии с формулой  $j = neu$  [см. (70.2)], получим

$$U_H = bE_B = \frac{1}{ne} bjB. \quad (73.4)$$

Последнее выражение совпадает с (73.1), если положить

$$R = \frac{1}{ne}. \quad (73.5)$$

Таким образом, измерив постоянную Холла, можно найти концентрацию носителей тока (т. е. их число в единице объема).

Важной характеристикой вещества является подвижность в нем носителей тока, под которой подразумевается

средняя скорость, приобретаемая носителем в поле, напряженность которого равна единице. Если в поле напряженности  $E$  носители приобретают скорость  $u$ , то подвижность их  $u_0$  равна

$$u_0 = \frac{u}{E}. \quad (73.6)$$

В СИ скорость измеряется в метрах в секунду, напряженность электрического поля в вольтах на метр. Следовательно, единицей подвижности будет  $1 \text{ м}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ .

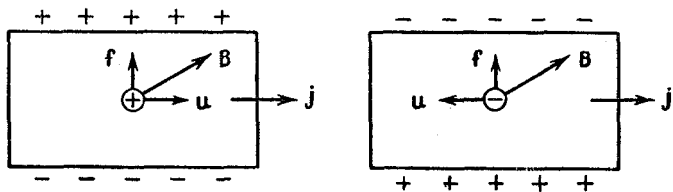


Рис. 149.

Подвижность можно связать с проводимостью  $\sigma$  и концентрацией носителей  $n$ . Для этого разделим соотношение  $j = neu$  на напряженность поля  $E$ . Учтя, что отношение  $j$  к  $E$  дает  $\sigma$ , а  $u$ , деленное на  $E$ , есть подвижность, получим

$$\sigma = neu_0. \quad (73.7)$$

Определив постоянную Холла  $R$  и проводимость  $\sigma$ , можно по формулам (73.5) и (73.7) найти концентрацию и подвижность носителей тока в соответствующем образце.

Явление Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к  $n$ - или  $p$ -типу. На рис. 149 сопоставлен эффект Холла для образцов с положительными и отрицательными носителями. Направление силы Лоренца изменяется на противоположное как при изменении направления движения заряда, так и при изменении его знака. Следовательно, при одинаковом направлении тока сила Лоренца, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление. Поэтому в случае положительных

носителей потенциал верхней (на рисунке) грани выше, чем нижней, а в случае отрицательных носителей — ниже. Таким образом, определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока.

Любопытно, что у некоторых металлов знак  $U_H$  соответствует положительным носителям тока. Это объясняется особым перекрыванием зон, при котором часть электронов переходит с верхних уровней валентной зоны на нижние уровни другой зоны. В результате возникают в равном количестве как свободные электроны, так и дырки. Проводимость такого металла имеет смешанный (электронно-дырочный) характер. Аномальный (для металлов) знак эффекта Холла обусловлен тем, что дырки обладают большей подвижностью, чем электроны.

## § 74. Работа выхода

Металлы не приобретают сами по себе положительного заряда. Значит, электроны проводимости не могут самопроизвольно покидать металл в заметном количестве. Это объясняется тем, что металл представляет для электронов потенциальную яму. Покинуть металл удастся только тем электронам, энергия которых оказывается достаточной для преодоления потенциального барьера, имеющегося на поверхности. Силы, обуславливающие этот барьер, имеют следующее происхождение. Случайное удаление электрона от наружного слоя положительных ионов решетки приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Кулоновское взаимодействие с этим зарядом заставляет электрон, скорость которого не очень велика, вернуться обратно. Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от нее на несколько межатомных расстояний и затем поворачивают обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Это облако образует совместно с наружным слоем ионов двойной электрический слой (рис. 150; кружки — ионы, черные точки — электроны). Силы, действующие на электрон в таком слое, направлены внутрь металла. Работа, совершаемая против этих сил при переводе электрона из металла наружу, идет на увеличение потенциальной энергии электрона  $W_p$ .

Таким образом, потенциальная энергия валентных электронов <sup>1)</sup> внутри металла меньше, чем вне металла, на величину, равную глубине потенциальной ямы  $W_{p0}$  (рис. 151). Скачок потенциальной энергии происходит на длине порядка нескольких межатомных расстояний ( $\sim 10^{-9}$  м), поэтому стенки ямы можно считать вертикальными.

Потенциальная энергия электрона связана с потенциалом точки, в которой находится электрон, соотноше-

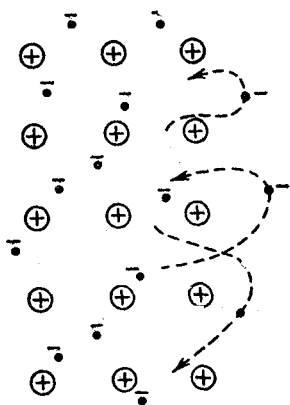


Рис. 150.

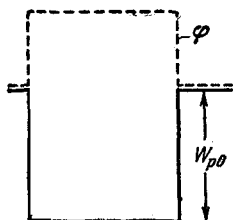


Рис. 151.

нием  $W_p = -e\phi$  [см. формулу (10.5)]. Поскольку заряд электрона отрицателен, потенциал точки и потенциальная энергия электрона имеют разные знаки. Отсюда следует, что потенциал внутри металла больше, чем потенциал в непосредственной близости к его поверхности (мы будем для краткости говорить просто «на поверхности»), на величину  $W_{p0}/e$ .

Сообщение металлу избыточного положительного заряда увеличивает потенциал как на поверхности, так и внутри металла. Потенциальная энергия электрона соответственно уменьшается (рис. 152, а). На рис. 152, б даны кривые  $W_p$  и  $\phi$  для случая, когда металл заряжен отрицательно <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Потенциальная яма для электронов, заполняющих уровни нижних зон (т. е. прочно связанных со своими атомами), имеет большую глубину. Все рассуждения этого параграфа относятся к валентным электронам.

<sup>2)</sup> В последнем случае высота потенциального барьера немного понижается (соответственно уменьшается работа выхода). Это явление называется эффектом Шоттки.

Полная энергия электронов в металле складывается из потенциальной и кинетической энергий. Как было выяснено в § 71, значения кинетической энергии электронов проводимости заключены при абсолютном нуле в пределах от 0 до совпадающей с уровнем Ферми  $W_{\max}$ . На

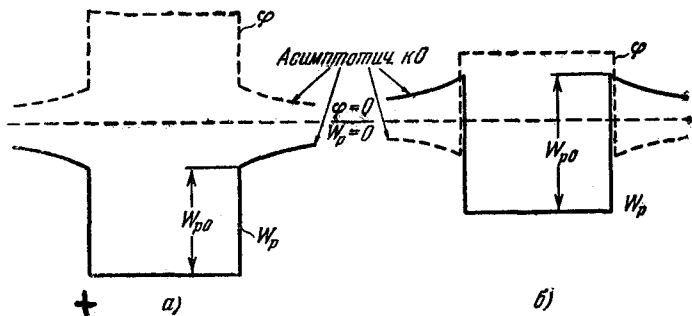


Рис. 152.

рис. 153 энергетические уровни зоны проводимости вписаны в потенциальную яму (пунктиром изображены незанятые при  $0^\circ\text{K}$  уровни): Для удаления за пределы металла разным электронам нужно сообщить неодинаковую энергию. Так, электрону, находящемуся на самом нижнем уровне зоны проводимости, необходимо сообщить энергию  $W_{p0}$ ; для электрона, находящегося на уровне Ферми, достаточна энергия  $W_{p0} - W_{\max} = W_{p0} - W_F$

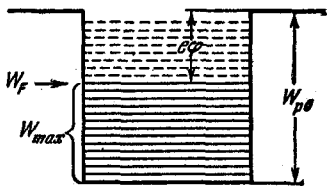


Рис. 153.

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется работой выхода. Работу выхода принято обозначать через  $e\phi$ , где  $\phi$  — величина, имеющая размерность потенциала и называемая потенциалом выхода.

В соответствии со сказанным выше работа выхода электрона из металла определяется выражением <sup>1)</sup>

$$e\phi = W_{p0} - W_F. \quad (74.1)$$

<sup>1)</sup> Величину (74.1) иногда называют эффективной работой выхода, а  $W_{p0}$  — полной работой выхода.

Мы пришли к этому выражению в предположении, что температура металла равна  $0^{\circ}\text{K}$ . При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми, т. е. распространяют определение (74.1) на любые температуры. Это же определение применяется и для полупроводников.

Работа выхода электрона из металла немного зависит от температуры. Это вызвано тем, что, как отмечалось в § 71, изменяется с температурой уровень Ферми  $W_F$ . Кроме того, из-за обусловленного тепловым расширением изменения средних расстояний между атомами слегка изменяется глубина потенциальной ямы  $W_{po}$ .

Величина работы выхода очень чувствительна к состоянию поверхности металла, в частности к ее чистоте. Подобрав надлежащим образом покрытие поверхности, можно сильно снизить работу выхода. Так, например, нанесение на поверхность вольфрама слоя окисла щелочноземельного металла (Ca, Sr, Ba) снижает работу выхода с 4,5 эв (для чистого W) до 1,5—2 эв.

## § 75. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы

Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами. Нас в этом параграфе будут интересовать только металлы.

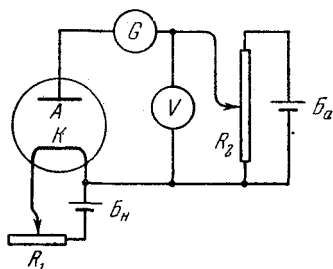


Рис. 154.

Явление термоэлектронной эмиссии объясняется тем, что вследствие распределения по энергиям имеется некоторое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, имеющийся на границе металла. При

повышении температуры количество таких электронов резко возрастает и делается вполне заметным.

Исследование термоэлектронной эмиссии удобно производить с помощью схемы, изображенной на рис. 154.

Основным элементом схемы является двухэлектродная лампа, называемая также вакуумным диодом. Она представляет собой хорошо откачанный металлический или стеклянный баллон, внутри которого имеются два электрода — катод  $K$  и анод  $A$ . Конструктивно электроды могут быть выполнены разными способами. В простейшем случае катод имеет форму тонкой прямой нити, анод — коаксиального с ней цилиндра (рис. 155).

Катод нагревается током, создаваемым батареей накала  $B_H$ . Температуру накала можно менять, регулируя с помощью реостата  $R_1$  силу тока накала. На электроды

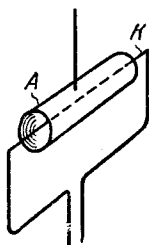


Рис. 155.

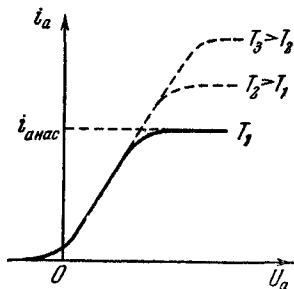


Рис. 156.

подается напряжение от анодной батареи  $B_A$ . Величину анодного напряжения  $U_a$  можно изменять с помощью потенциометра  $R_2$  и измерять вольтметром  $V$  ( $U_a$  считается положительным, если потенциал анода выше потенциала катода). Гальванометр  $G$  предназначен для измерения силы анодного тока  $i_a$ .

Если установить постоянный накал катода и снять зависимость силы анодного тока  $i_a$  от анодного напряжения  $U_a$ , то получается кривая, изображенная на рис. 156 (различные кривые соответствуют разным температурам катода). Эта кривая называется вольт-амперной характеристикой.

При  $U_a = 0$  вылетевшие из катода электроны образуют вокруг него отрицательный пространственный заряд — электронное облако. Это облако отталкивает вылетающие из катода электроны и большую часть их возвращает обратно. Все же небольшому числу электронов удается долететь до анода, в результате чего в анодной



цепи будет течь слабый ток. Чтобы полностью прекратить попадание на анод электронов, т. е. сделать  $i_a$  равным нулю, необходимо приложить между катодом и анодом некоторое отрицательное напряжение. Следовательно, вольт-амперная характеристика диода начинается не в нуле, а немного левее начала координат.

При малых положительных значениях  $U_a$  сила анодного тока изменяется пропорционально  $U_a^{3/2}$ . Теоретически эта зависимость была получена Ленгмюром и Богуславским и называется законом трех вторых.

По мере роста  $U_a$  все большее число электронов отсасывается электрическим полем к аноду и, наконец, при определенном значении  $U_a$  электронное облако полностью рассасывается и все вылетевшие из катода электроны получают возможность достигнуть анода. Дальнейший рост  $U_a$  не может увеличить силу анодного тока — ток достигает насыщения.

Очевидно, что именно ток насыщения характеризует термоэлектронную эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает  $N$  электронов, то плотность тока насыщения (сила тока насыщения, отнесенная к единице поверхности катода) будет равна  $j_{\text{нас}} = Ne$ . Таким образом, измеряя плотность тока насыщения при различной силе тока накала, можно найти количество электронов, вылетающих с единицы поверхности при разных температурах.

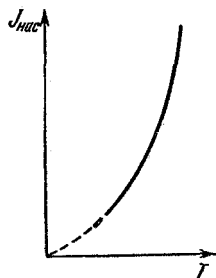


Рис. 157.

На рис. 156 изображены вольт-амперные характеристики для нескольких температур. При малых  $U_a$  они совпадают. Зависимость плотности тока насыщения от температуры показана на рис. 157. Квантовая теория приводит к следующей формуле:

$$j_{\text{нас}} = AT^2 e^{-\frac{e\phi}{kT}}, \quad (75.1)$$

где  $e\phi$  — работа выхода,  $A$  — не зависящая от рода металла константа, теоретическое значение которой равно  $1,20 \cdot 10^6 \text{ а/м}^2 \cdot \text{град}^2$  ( $120 \text{ а/см}^2 \cdot \text{град}^2$ ). Экспериментальные значения  $A$  получаются примерно в два раза мень-

шими, чем теоретическое. Ход  $j_{\text{нас}}$  с температурой формула передает вполне удовлетворительно.

Формула (75.1) называется формулой Ричардсона — Дэшмана или просто формулой Ричардсона<sup>1)</sup>.

Как следует из (75.1), уменьшение  $e\phi$  резко повышает эмиссию (легко убедиться в том, что при  $1160^\circ\text{K}$ , т. е. при  $kT = 0,10 \text{ эв}$ , уменьшение  $e\phi$  от 3 до 1 эв приводит к возрастанию  $j_{\text{нас}}$  почти в  $5 \cdot 10^8$  раз). Поэтому при изготовлении электронных ламп применяются специальные покрытия и способы обработки катодов, приводящие к снижению работы выхода. Современные так называемые оксидные катоды, изготавливаемые из никеля, покрытого окисью бария или стронция, имеют работу выхода порядка 1,0—1,2 эв.

В предыдущем параграфе отмечалось, что внешнее поле уменьшает высоту потенциального барьера и тем самым снижает работу выхода (эффект Шоттки). Это приводит к тому, что и после достижения насыщения сила тока в диоде немного растет с увеличением  $U_a$ . Следовательно, соответствующий участок вольт-амперной характеристики не горизонтален (как изображено на рис. 156), а идет под небольшим углом к оси  $U_a$ .

Диод пропускает ток только в том случае, когда потенциал анода выше, чем катода. При отрицательном напряжении ток в анодной цепи отсутствует. Это свойство диода позволяет использовать его для выпрямления переменного тока. Диод, предназначенный для этой цели, называют также кенотроном. На рис. 158 показан график тока, текущего через кенотрон, если на него подается переменное напряжение, изменяющееся со временем по гармоническому закону. В этом случае ток в цепи течет лишь в течение половины периода, в связи с чем такой способ выпрямления тока называется однополупериодным. Используя одновременно два кенотрона

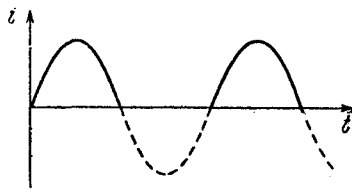


Рис. 158.

<sup>1)</sup> Ричардсон вывел классическую формулу для термоэлектронной эмиссии, которая отличается от (75.1) лишь тем, что вместо  $T^2$  в нее входит  $\sqrt{T}$ . Формула (75.1) была получена Дэшменом.

или двойной диод, собранный в одном баллоне, можно осуществить двухполупериодное выпрямление. Соответствующая схема изображена на рис. 159. Первичная обмотка трансформатора питается переменным током. Вторичных обмоток две. Меньшая служит для накала катода. Большая обмотка имеет средний вывод, который через нагрузку  $R$  соединен с катодом. Концы обмотки идут к анодам. Одну половину периода под более высоким потенциалом, чем катод, находится один анод, вторую половину — другой. В результате через нагрузку течет ток, изображенный графически на рис. 160. Такой пульсирующий ток можно сгладить.

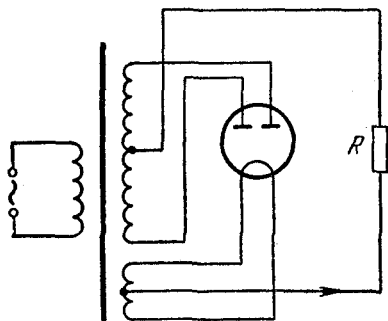


Рис. 159.

Если между катодом и анодом поместить третий электрод в виде сетки, получится трехэлектродная лампа — триод (рис. 161; цепь накала на схеме опущена). Сетка может быть выполнена, например, в виде спирали, обвивающей

каждый из электродов. Если сообщить сетке небольшой положительный потенциал по отношению к катоду (в этом случае напряжение  $U_c$  между сеткой и катодом мы будем считать положительным), электроны будут быстрее отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на сетку (в результате чего возникнет небольшой сеточный ток  $i_c$ ), но основная часть пролетит сквозь сет-

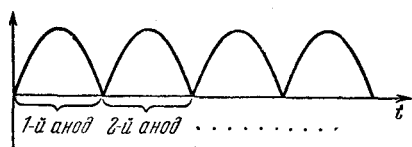


Рис. 160.

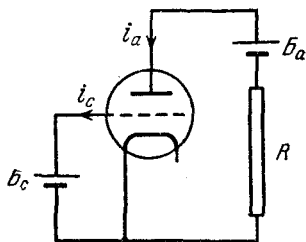


Рис. 161.

щейся вокруг катода. Если сообщить сетке небольшой положительный потенциал по отношению к катоду (в этом случае напряжение  $U_c$  между сеткой и катодом мы будем считать положительным), электроны будут быстрее отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на сетку (в результате чего возникнет небольшой сеточный ток  $i_c$ ), но основная часть пролетит сквозь сет-

ку и достигнет анода. Из-за близости сетки к катоду небольшие изменения напряжения между сеткой и катодом оказывают большое влияние на силу анодного тока.

Отрицательное сеточное напряжение  $U_c$  уменьшает анодный ток и при достаточно большом отрицательном напряжении  $U_c$  ток прекращается полностью — лампа оказывается запертой. Если построить зависимость анодного тока  $i_a$  от сеточного напряжения  $U_c$  при постоянном анодном напряжении  $U_a$ , получается кривая,

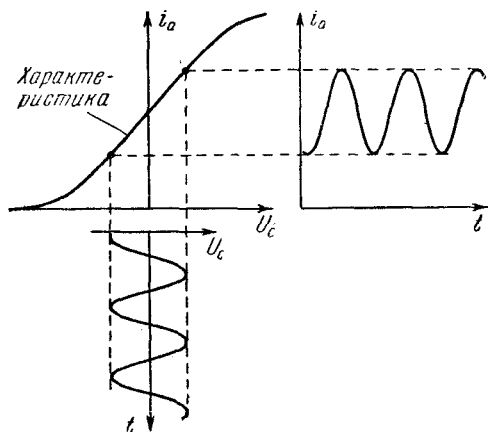


Рис. 162.

изображенная на рис. 162. Совокупность таких кривых, построенных для разных значений  $U_a$ , образует семейство сеточных характеристик триода. Величина

$$S = \frac{di_a}{dU_c} \quad (75.2)$$

называется крутизной характеристики.

Значительная часть характеристики прямолинейна. Подавая на сетку небольшое синусоидальное напряжение  $U_c$ , можно получить большие синусоидальные изменения анодного тока. При этом с сопротивления  $R$  может быть снято переменное напряжение с гораздо большей амплитудой, чем амплитуда  $U_c$ . На этом основано действие триода как усилителя. Кроме того, триод может быть использован для преобразования (изменения формы) и генерирования (возбуждения) переменных токов и напряжений.

Для улучшения характеристик электронной лампы в нее вводятся дополнительные электроды — сетки. Четырехэлектродная лампа называется тетродом, пятиэлектродная — пентодом и т. д. Широкое применение получили также лампы, в которых в одном баллоне совмещены две системы электродов. Каждая такая лампа выполняет функции двух ламп.

### § 76. Контактная разность потенциалов

Если привести два разных металла в соприкосновение, между ними возникнет разность потенциалов, которая называется контактной. При этом в окружающем металлы пространстве появляется электрическое поле. На рис. 163 изображены эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности (пунктирные) этого поля; поверхность каждого из металлов является эквипотенциальной.

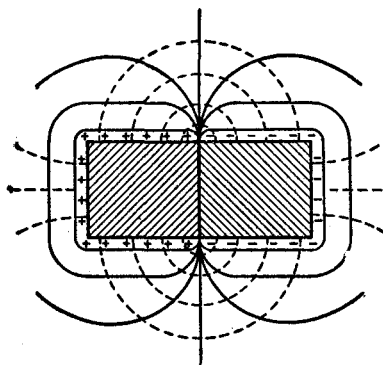


Рис. 163.

Контактная разность потенциалов вызывается тем, что при соприкосновении металлов часть электронов из одного металла переходит в другой. В верхней части рис. 164 изображены два металла — слева до приведения их в соприкосновение, справа — после. В нижней части рисунка дан график потенциальной энергии электрона. Уровень Ферми в первом металле лежит по предположению выше, чем во втором. Естественно, что при возникновении контакта между металлами электроны с самых высоких уровней в первом металле станут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. В результате потенциал первого металла возрастет, а второго — уменьшится. Соответственно потенциальная энергия электрона в первом металле уменьшится, а во втором увеличится (напомним, что потенциал металла и потенциальная энергия электрона в нем имеют разные знаки; см. рис. 152).

В верхней части рис. 164 изображены два металла — слева до приведения их в соприкосновение, справа — после. В нижней части рисунка дан график потенциальной энергии электрона. Уровень Ферми в первом металле лежит по предположению выше, чем во втором. Естественно, что при возникновении контакта между металлами электроны с самых высоких уровней в первом металле станут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. В результате потенциал первого металла возрастет, а второго — уменьшится. Соответственно потенциальная энергия электрона в первом металле уменьшится, а во втором увеличится (напомним, что потенциал металла и потенциальная энергия электрона в нем имеют разные знаки; см. рис. 152).

В статистической физике доказывается, что условием равновесия между соприкасающимися металлами (а также между полупроводниками или металлом и полупроводником) является равенство полных энергий, соответствующих уровням Ферми (рис. 164; в этом случае уровни Ферми располагаются на одинаковой высоте). При

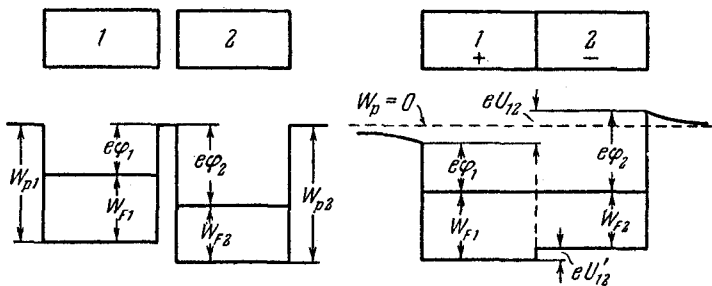


Рис. 164.

соблюдении такого условия потенциальная энергия электрона в непосредственной близости к поверхности первого металла будет на  $(e\varphi_2 - e\varphi_1)$  меньше, чем вблизи второго металла. Следовательно, потенциал на поверхности первого металла будет на

$$U_{12} = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (76.1)$$

выше, чем на поверхности второго. Величина  $U_{12}$  и есть контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами.

Как видно из формулы (76.1), контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами равна разности работ выхода для второго и первого металлов, деленной на элементарный заряд, или просто разности потенциалов выхода для второго и первого металлов.

Разность потенциалов (76.1) устанавливается между точками, лежащими вне металлов в непосредственной близости к их поверхности. Поэтому ее называют внешней контактной разностью потенциалов. Чаще же говорят просто о контактной разности потенциалов, подразумевая под ней внешнюю. Между внутренними точками металлов также имеется разность

потенциалов, которая называется внутренней. Как видно из рис. 164, потенциальная энергия электрона в первом металле меньше, чем во втором, на  $W_{F1} - W_{F2}$ . Соответственно потенциал внутри первого металла выше, чем внутри второго на величину

$$U'_{12} = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e}. \quad (76.2)$$

Выражение (76.2) дает внутреннюю контактную разность потенциалов. На такую величину убывает потенциал при переходе из первого металла во второй.

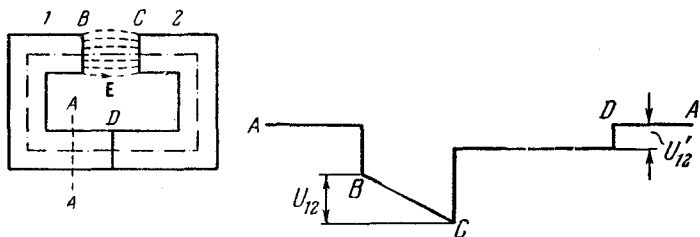


Рис. 165.

На рис. 165 изображены два соприкасающихся металла 1 и 2 и рядом — изменение потенциала вдоль контура, обозначенного штрихпунктирной линией. В зазоре  $B - C$  возникает электрическое поле, линии напряженности которого показаны пунктиром.

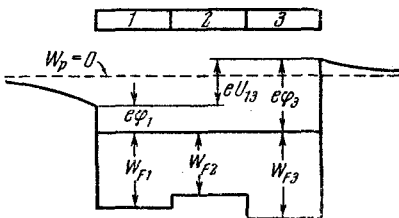


Рис. 166.

На рис. 166 дан ход потенциальной энергии электрона вдоль трех различных соприкасающихся друг с другом металлов 1, 2, 3. Из рисунка видно, что устанавливающаяся между металлами 1 и 3 разность потенциалов

оказывается в этом случае точно такой, как и при их непосредственном соприкосновении<sup>1)</sup>. То же самое справедливо при любом числе промежуточных звеньев: раз-

<sup>1)</sup> Сами потенциалы при этом могут измениться. В частности, может случиться, что оба крайние металла будут иметь потенциал одного знака.

ность потенциалов между концами цепи определяется разностью работ выхода для металлов, образующих крайние звенья цепи.

Внешняя контактная разность потенциалов колеблется для различных пар металлов от нескольких десятых вольт до нескольких вольт.

Контактная разность потенциалов возникает и на границе между металлом и полупроводником, а также на границе между двумя полупроводниками.

В заключение отметим, что в замкнутой цепи, составленной из любого числа разнородных металлов или полупроводников (рис. 167), сумма скачков потенциала равна нулю. Следовательно, если все спаи поддерживать при одинаковой температуре, э. д. с. в цепи возникнуть не может. Возникновение тока в такой цепи противоречило бы второму началу термодинамики. Действительно, так как протекание тока в металлах и полупроводниках не сопровождается химическими изменениями, ток совершал бы работу за счет тепла, получаемого от окружающей среды.

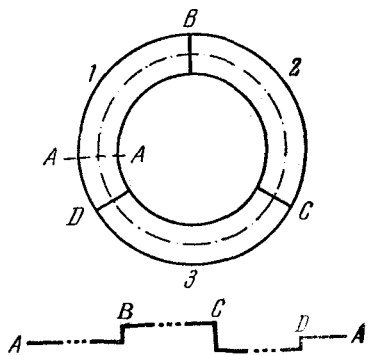


Рис. 167.

Никаких побочных процессов (например, передачи части полученного тепла другим телам) при этом не происходило бы. Таким образом был бы осуществлен перпетуум мобиле второго рода.

## § 77. Термоэлектрические явления

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах (а также и в полупроводниках) существует определенная взаимосвязь, которая обуславливает ряд явлений, называемых термоэлектрическими: явление Зеебека, явление Пельтье и явление Томсона.

**Явление Зеебека.** Зеебек обнаружил в 1821 г., что если спаи 1 и 2 двух разнородных металлов, образующих замкнутую цепь (рис. 168), поддерживать при различных температурах, то в цепи течет ток. Изменение



знака у разности температур спаев сопровождается изменением направления тока.

Термоэлектродвижущая сила (сокращенно термо-э. д. с.) обусловлена двумя причинами. Как отмечалось в § 71, уровень Ферми зависит от температуры<sup>1)</sup>. Поэтому скачок потенциала при переходе из одного металла в другой [внутренняя контактная разность потенциалов, см. формулу (76.2)] для спаев, находящихся при разных температурах, неодинаков и сумма скачков потенциала для всей цепи отлична от нуля. Одного этого было бы достаточно для возникновения действующей в указанном на рис. 168 стрел-

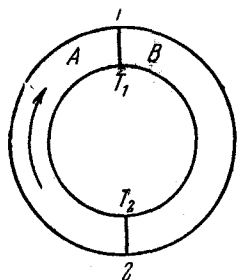


Рис. 168.

кой направлению э. д. с., равной

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{конт}} &= U'_{AB}(T_1) + U'_{BA}(T_2) = \\ &= \frac{1}{e} \{ [W_{FA}(T_1) - W_{FB}(T_1)] + [W_{FB}(T_2) - W_{FA}(T_2)] \} = \\ &= \frac{1}{e} \{ [W_{FB}(T_2) - W_{FB}(T_1)] - [W_{FA}(T_2) - W_{FA}(T_1)] \}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{конт}} = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{1}{e} \frac{dW_{FB}}{dT} \right) dT - \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{1}{e} \frac{dW_{FA}}{dT} \right) dT. \quad (77.1)$$

Чтобы понять вторую причину возникновения термо-э. д. с., рассмотрим однородный металлический проводник, вдоль которого имеется градиент температуры (рис. 169). В этом случае концентрация электронов с более высокой энергией ( $W > W_F$ ) у нагретого конца будет больше, чем у холодного; концентрация электронов с более низкой энергией ( $W < W_F$ ) будет, наобо-

<sup>1)</sup> Для металлов при невысоких температурах (когда  $kT \ll W_{F0}$ ) эта зависимость имеет вид

$$W_F = W_{F0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{W_{F0}} \right)^2 \right],$$

где  $W_{F0}$  — уровень Ферми при 0° К.

рот, у нагретого конца меньше. Вдоль проводника возникает градиент концентрации электронов с данным значением энергии, что повлечет за собой диффузию более быстрых электронов к холодному концу, а более медленных — к теплому.

Диффузионный поток быстрых электронов будет больше, чем поток медленных электронов. Поэтому вблизи холодного конца образуется избыток электронов, а вблизи горячего — их недостаток. В результате внутри проводника возникнет электрическое поле, направленное навстречу градиенту температуры. Оно будет уменьшать поток быстрых и увеличивать поток медленных электронов. Когда оба потока выравняются в каждом сечении, наступит равновесное состояние. При этом на каждом участке проводника длиной  $dx$  будет происходить изменение потенциала  $d\phi$ , соответствующее изменению температуры  $dT$  на том же участке. Введем обозначение

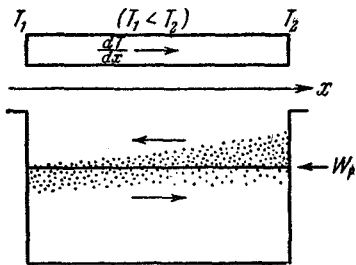


Рис. 169.

$$\beta = \frac{d\phi}{dT}. \quad (77.2)$$

В общем случае потенциал вдоль проводника может изменяться по разным причинам. Под  $d\phi$  в (77.2) подразумевается только та часть изменения потенциала, которая вызвана градиентом температуры.

Между концами проводника, находящимися при температурах  $T_1$  и  $T_2$ , появляется разность потенциалов

$$\Delta\phi_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta dT. \quad (77.3)$$

Величина  $\beta$  невелика — порядка  $10^{-4}$  в/град. Поэтому обнаружить разность потенциалов (77.3) бывает трудно.

Описанный процесс возникновения разности потенциалов на концах неравномерно нагретого проводника имеет место и в полупроводниках. Если носителями тока являются электроны, потенциал нагретого конца, как мы

видели, оказывается выше, чем потенциал холодного. Значит, у полупроводников  $n$ -типа  $d\phi$  и  $dT$  имеют одинаковые знаки и, следовательно,  $\beta > 0$ . В случае дырочной проводимости дырки, диффундируя в большем числе к холодному концу, создают вблизи него избыточный положительный заряд. Таким образом, у полупроводника  $p$ -типа потенциал холодного конца будет выше, чем потенциал нагретого, и  $\beta < 0$ <sup>1)</sup>.

Вернемся снова к рис. 168. За счет неодинаковости  $\beta$  для участков  $A$  и  $B$  возникнет в направлении, указанном стрелкой, э. д. с., равная

$$\mathcal{E}_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta_A dT + \int_{T_2}^{T_1} \beta_B dT = \int_{T_1}^{T_2} \beta_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_B dT \quad (77.4)$$

(при определении пределов интегрирования надо иметь в виду, что э. д. с. действует в направлении убывания потенциала).

Термоэлектродвижущая сила  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  складывается из суммы скачков потенциала (77.1) в контактах (спаях) и суммы изменений потенциала (77.4), вызванных диффузией носителей тока. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \mathcal{E}_{\text{конт}} + \mathcal{E}_{\text{диффуз}}$$

Подставив сюда выражения (77.1) и (77.4) и произведя несложные преобразования, находим

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \left( \beta_A - \frac{1}{e} \frac{dW_{FA}}{dT} \right) dT - \int_{T_1}^{T_2} \left( \beta_B - \frac{1}{e} \frac{dW_{FB}}{dT} \right) dT.$$

Величина

$$\alpha = \beta - \frac{1}{e} \frac{dW_F}{dT} \quad (77.5)$$

является характеристикой металла или полупроводника и называется коэффициентом термо-э. д. с.

<sup>1)</sup> Такой же знак  $\beta$  имеют металлы, у которых знак холловской разности потенциалов соответствует положительным носителям (см. последний абзац § 73).

Воспользовавшись обозначением (77.5) выражение для термо-э. д. с. можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_B dT. \quad (77.6)$$

Если  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  в пределах интервала  $T_1 \div T_2$  мало изменяются с температурой, можно написать

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha_{AB} (T_1 - T_2), \quad (77.7)$$

где через  $\alpha_{AB}$  обозначена разность  $\alpha_A - \alpha_B$ . Величину  $\alpha_{AB}$  называют удельной термо-э. д. с. данной пары металлов или полупроводников. Для большинства пар металлов  $\alpha_{AB}$  имеет порядок  $10^{-5} \div 10^{-4}$  в/град; для полупроводников она может оказаться гораздо больше (до  $1,5 \cdot 10^{-3}$  в/град). Это объясняется тем, что у полупроводников с разным типом проводимости  $\alpha$  имеет разные знаки<sup>1)</sup>, вследствие чего  $|\alpha_{AB}| = |\alpha_A| + |\alpha_B|$ .

В отдельных случаях удельная термо-э. д. с. слабо зависит от температуры. Однако, как правило, с увеличением разности температур спаев  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  изменяется не по линейному закону, а довольно сложным образом, вплоть до того, что может менять знак. Так, например, если один спай пары железо — медь поддерживать при  $0^\circ\text{C}$ , то при температуре второго спае, равной примерно  $540^\circ\text{C}$ , термо-э. д. с. обращается в нуль; при более низкой температуре спае  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  имеет один знак, при более высокой — другой.

Явление Зеебека используется для измерения температур. Соответствующее устройство называется термопарой. Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре (например, при  $0^\circ\text{C}$ ), другой помещают в тот объем, температуру которого хотят измерить. О величине температуры можно судить по силе возникающего термо-тока, измеряемой гальванометром. Более точный результат получается, если измерять возникающую термо-э. д. с. по методу компенсации.

<sup>1)</sup> При повышении температуры уровни Ферми примесных полупроводников смещаются по направлению к середине запрещенной зоны, т. е. для полупроводников разных типов в противоположные стороны. Величина (77.2) для полупроводников с разным типом проводимости также имеет разные знаки.

С помощью термопар можно измерять с точностью порядка сотых долей градуса как низкие, так и высокие температуры.

В качестве источников тока термопары из металлов и их сплавов не используются вследствие весьма низкого к. п. д. (не более 0,5%). Термопары из полупроводниковых материалов обладают гораздо большим к. п. д. (до 7%). Они уже нашли применение в качестве небольших генераторов тока для бытовых целей. Энергии такого генератора, надеваемого в виде абажура на стекло керосиновой лампы, хватает для питания радиоприемника.

**Явление Пельтье.** Это явление, открытое Пельтье в 1834 г., заключается в том, что при протекании тока через цепь, составленную из разнородных металлов или полупроводников, в одних спаях происходит выделение, а в других — поглощение тепла. Таким образом, явление Пельтье оказывается обратным явлению Зеебека. Количество выделившегося тепла определяется выражением

$$Q_{AB} = P_{AB} \cdot q = P_{AB}it, \quad (77.8)$$

где  $q$  — заряд, прошедший через спай,  $P_{AB}$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пельтье (ток течет от звена  $A$  к звену  $B$ ).

В отличие от тепла Джоуля-Ленца тепло Пельтье пропорционально не квадрату, а первой степени силы тока. При перемене направления тока  $Q$  изменяет знак, т. е. вместо выделения тепла наблюдается поглощение такого же количества тепла (при том же  $q$ ). Следовательно,

$$P_{AB} = - P_{BA}.$$

Между коэффициентом Пельтье и коэффициентом термо-э. д. с. имеется вытекающее из законов термодинамики соотношение

$$P_{AB} = \alpha_{AB}T. \quad (77.9)$$

Явление Пельтье имеет следующее объяснение. Носители тока (электроны или дырки) по разные стороны от спая имеют различную среднюю энергию (имеется в виду полная энергия — кинетическая плюс потенциальная). Если носители, пройдя через спай, попадают в область с меньшей энергией, они отдают избыток энер-

гии кристаллической решетке, в результате чего спай нагревается. На другом спае носители переходят в область с большей энергией; недостающую энергию они заимствуют у решетки, что приводит к охлаждению спаю.

Иначе обстоит дело в контакте двух полупроводников с различными типами проводимости. В этом случае на одном спае электроны и дырки движутся навстречу друг другу. Встретившись, они рекомбинируют: электрон, находившийся в зоне проводимости  $n$ -полупроводника, попав в  $p$ -полупроводник, занимает в валентной зоне место дырки. При этом высвобождается энергия, которая требуется для образования свободного электрона в  $n$ -полупроводнике и дырки в  $p$ -полупроводнике, а также кинетическая энергия электрона и дырки. Эта энергия сообщается кристаллической решетке и идет на нагревание спаю. На другом спае протекающий ток отсасывает электроны и дырки от границы между полупроводниками. Убыль носителей тока в пограничной области восполняется за счет попарного рождения электронов и дырок (при этом электрон из валентной зоны  $p$ -полупроводника переходит в зону проводимости  $n$ -полупроводника). На образование пары затрачивается энергия, которая заимствуется у решетки — спай охлаждается.

А. Ф. Иоффе выдвинул идею использования явления Пельтье для создания холодильных установок. Созданы опытные образцы небольших бытовых холодильников, рабочим элементом которых является батарея из чередующихся полупроводников  $n$ - и  $p$ -типа. Спаи одного вида (соответствующие, например, переходу от  $n$  к  $p$ ), введены в охлаждаемую область, другого вида (соответствующие переходу от  $p$  к  $n$ ) выведены наружу. При надлежащем направлении тока внутренние спаи поглощают тепло, понижая температуру окружающего их пространства, наружные спаи отдают тепло внешней среде.

Заманчиво также применить явление Пельтье для электрического обогрева помещений. В этом случае спай, поглощающий тепло, следует вывести наружу, а спай, выделяющий тепло, поместить внутри обогреваемого помещения. Пропуская ток в соответствующем направлении, можно, как показывают расчеты, получить выделение на внутреннем спае количества тепла, почти в два раза превышающего затраты энергии на создание тока

(остальная энергия черпается из внешней среды). Такая система обогрева имеет еще и то преимущество, что в случае необходимости (например, в жаркую погоду) ее можно без переделок использовать для понижения температуры помещения — для этого нужно лишь изменить направление тока на обратное.

**Явление Томсона.** На основании термодинамических соображений Томсон предсказал в 1856 г., что тепло, аналогичное теплу Пельтье, должно выделяться (или поглощаться) при прохождении тока по однородному проводнику, вдоль которого имеется градиент температуры. Этот эффект был впоследствии обнаружен экспериментально и получил название явления Томсона.

Удельная мощность, выделяющаяся в проводнике вследствие явления Томсона, равна

$$\omega = \tau \frac{dT}{dx} j, \quad (77.10)$$

где  $\frac{dT}{dx}$  — градиент температуры в данном месте,  $j$  — плотность тока,  $\tau$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Томсона. Этот коэффициент связан с коэффициентом термо-э. д. с. и коэффициентом Пельтье определенными соотношениями, вытекающими из термодинамики.

Явление Томсона объясняется по аналогии с явлением Пельтье. Пусть ток течет в направлении возрастания температуры. Если носители тока — электроны, они при своем движении будут переходить из мест с более высокой температурой (и, следовательно, большей средней энергией электронов) в места с более низкой температурой (и меньшей средней энергией). Избыток своей энергии электроны отдадут решетке, что приведет к выделению тепла. Если носителями тока служат дырки, эффект, как легко видеть, будет иметь обратный знак.

## § 78. Полупроводниковые диоды и триоды

Выпрямление токов и усиление напряжений можно осуществить с помощью полупроводниковых устройств, называемых полупроводниковыми (или кристаллическими) диодами и триодами. Полупроводниковые триоды называют также транзисторами.

Полупроводниковые устройства можно подразделить на две группы: устройства с точечными контактами и устройства с плоскостными контактами. Мы ограничимся рассмотрением плоскостных диодов и транзисторов.

Основным элементом плоскостных устройств является так называемый  $p-n$ -переход. Он представляет собой тонкий слой на границе между двумя областями одного и того же кристалла, отличающимися типом примесной проводимости. Для изготовления такого перехода берут, например, монокристалл из очень чистого германия с электронным механизмом проводимости (обусловленным ничтожными остатками примесей). В вырезанную из кристалла тонкую пластинку впаивают с одной стороны кусочек индия. Во время этой операции, которая осуществляется в вакууме или в атмосфере инертного газа, атомы индия диффундируют в германий на некоторую глубину. В той области, в которую проникают атомы индия, проводимость германия становится дырочной. На границе этой области возникает  $p-n$ -переход.

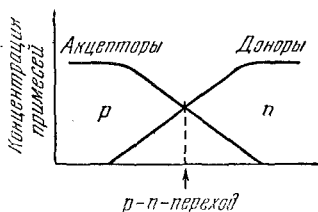
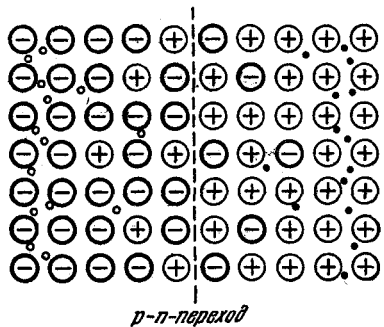


Рис. 170.

На рис. 170 показан ход концентрации примесей в направлении, перпендикулярном к граничному слою. В  $p$ -области основными носителями тока являются дырки, образовавшиеся в результате захвата электронов атомами примеси (акцепторы при этом становятся отрицательными ионами); кроме того, в этой области имеется небольшое число неосновных носителей — электронов, возникающих вследствие перевода тепловым движением электронов из валентной зоны непосредственно в зону проводимости (этот процесс немного увеличивает и число дырок). В  $n$ -области основные носители тока — электроны, отданные донорами в зону проводимости (доноры при этом превращаются в положительные ионы); происходящий за счет теплового движения переход электронов из валентной зоны в зону проводимости приводит к образованию небольшого числа дырок — неосновных носителей для этой области.



Диффундируя во встречных направлениях через пограничный слой, дырки и электроны рекомбинируют друг с другом. Поэтому  $p-n$ -переход оказывается сильно обедненным носителями тока и приобретает большое сопротивление. Одновременно на границе между обла-



*p-n-переход*

Рис. 171.

стями возникает двойной электрический слой, образованный отрицательными ионами акцепторной примеси, заряд которых теперь не компенсируется дырками, и положительными ионами донорной примеси, заряд которых теперь не компенсируется электронами (рис. 171; кружки — ионы, черные точки — электроны, белые точки — дырки). Электрическое поле в этом слое направлено

так, что противодействует дальнейшему переходу через слой основных носителей. Равновесие достигается при такой высоте потенциального барьера, при которой

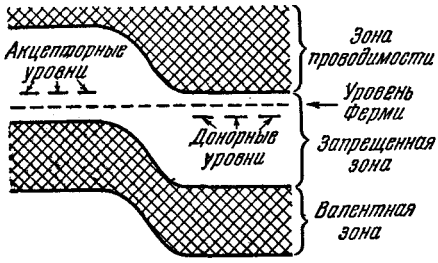


Рис. 172.

уровни Ферми обеих областей располагаются на одинаковой высоте (рис. 172). Изгибание энергетических зон в области перехода вызвано тем, что потенциал  $p$ -области в состоянии равновесия ниже, чем потенциал  $n$ -области; соответственно потенциальная энергия электрона в  $p$ -области больше, чем в  $n$ -области. Нижняя граница

валентной зоны дает ход потенциальной энергии электрона  $W_{p\bar{d}}$  в направлении, перпендикулярном к переходу (см. сплошную кривую на рис. 173, а). Поскольку заряд дырок противоположен заряду электронов, их потенциальная энергия  $W_{p\bar{d}}$  больше там, где меньше  $W_{p\bar{d}}$ , и наоборот (см. пунктирную кривую на рис. 173, а).

Равновесие между  $p$ - и  $n$ -областями является подвижным. Некоторому количеству основных носителей удается преодолеть потенциальный барьер, вследствие чего через переход течет небольшой ток  $i_{осн}$  (рис. 173, а).

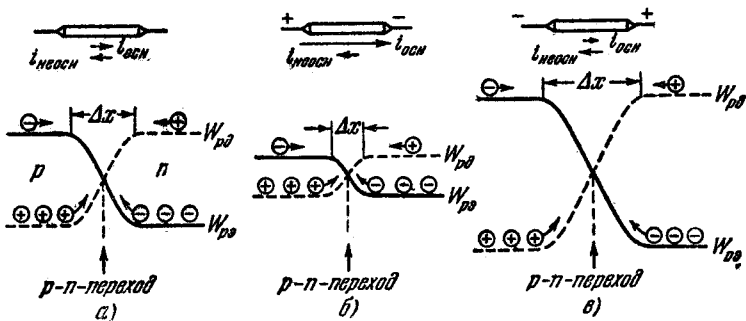


Рис. 173.

Этот ток компенсируется обусловленным неосновными носителями встречным током  $i_{неосн}$ . Неосновных носителей очень мало, но они легко проникают через границу областей, «скатываясь» с потенциального барьера. Величина  $i_{неосн}$  определяется числом рождающихся ежесекундно неосновных носителей и от высоты потенциального барьера почти не зависит. Величина  $i_{осн}$ , напротив, сильно зависит от высоты барьера. Равновесие устанавливается как раз при такой высоте потенциального барьера, при которой оба тока  $i_{осн}$  и  $i_{неосн}$  компенсируют друг друга.

Подадим на кристалл внешнее напряжение такого направления, чтобы «+» был подключен к  $p$ -области, а «-» был подключен к  $n$ -области<sup>1)</sup> (такое напряжение

<sup>1)</sup> Включение внешнего напряжения нарушает равновесие, так что уровни Ферми обеих областей смещаются друг относительно друга. При прямом напряжении  $W_F$  в  $p$ -области располагается ниже, чем в  $n$ -области.

называется прямым). Это приведет к возрастанию потенциала (т. е. увеличению  $W_{pд}$  и уменьшению  $W_{pэ}$ )  $p$ -области и понижению потенциала (т. е. уменьшению  $W_{pд}$  и увеличению  $W_{pэ}$ )  $n$ -области (рис. 173, б). В результате высота потенциального барьера уменьшится и ток  $i_{осн}$  возрастет. Ток же  $i_{неосн}$  останется практически без изменений (он, как отмечалось, от высоты барьера почти не зависит). Следовательно, результирующий ток станет отличен от нуля. Понижение потенциального барьера пропорционально приложенному напряжению (оно равно  $eU$ ). При уменьшении высоты барьера ток основных носителей, а следовательно и результирующий ток, быстро нарастает. Таким образом, в направлении от  $p$ -области к  $n$ -области  $p-n$ -переход пропускает ток, сила которого быстро нарастает при увеличении приложенного напряжения. Это направление называется прямым (или пропускным, или проходным).

Возникающее в кристалле при прямом напряжении электрическое поле «поджимает» основные носители к границе между областями, вследствие чего ширина переходного слоя, обедненного носителями, сокращается<sup>1)</sup>. Соответственно уменьшается и сопротивление перехода, причем тем сильнее, чем больше напряжение. Таким образом, вольт-амперная характеристика в пропускной области не является прямой (рис. 174).

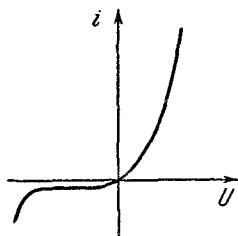


Рис. 174.

Теперь приложим к кристаллу напряжение такого направления чтобы «+» был подключен к  $n$ -области, а «-» был подключен к  $p$ -области (такое напряжение называется обратным). Обратное напряжение приводит к повышению потенциального барьера и соответственному уменьшению тока основных носителей  $i_{осн}$  (рис. 173, в). Возникающий при этом результирующий ток (называемый обратным) довольно быстро достигает насыщения (т. е. перестает зависеть от  $U$ , рис. 174) и становится равным  $i_{неосн}$ . Таким образом, в направлении

<sup>1)</sup> Уменьшение ширины переходного слоя можно объяснить тем, что при заданном  $d\phi/dx$  меньшее изменение потенциала  $\Delta\phi$  осуществляется на меньшей длине  $\Delta x$ .

от  $n$ -области к  $p$ -области (которое называется обратным или запиорным)  $p-n$ -переход пропускает слабый ток, целиком обусловленный неосновными носителями. Лишь при очень большом обратном напряжении сила тока начинает резко возрастать, что обусловлено электрическим пробоем перехода. Каждый  $p-n$ -переход характеризуется своим предельным значением обратного напряжения, которое он способен выдержать без разрушения.

Поле, возникающее в кристалле при наложении обратного напряжения, «оттягивает» основные носители от границы между областями, что приводит к возрастанию ширины переходного слоя, обедненного носителями. Соответственно увеличивается и сопротивление перехода. Следовательно,  $p-n$ -переход обладает в обратном направлении гораздо большим сопротивлением, чем в прямом.

Из сказанного вытекает, что  $p-n$ -переход может быть использован для выпрямления переменного тока. На рис. 175 показан график тока, текущего через переход, в том случае, если приложенное напряжение изменяется по гармоническому закону. В этом случае ширина слоя, обедненного носителями, и сопротивление перехода пульсируют, изменяясь в такт с изменениями напряжения.

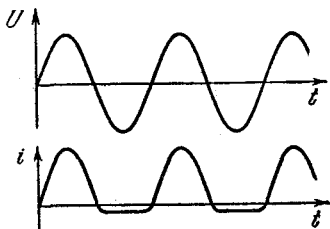


Рис. 175.

Германиевые выпрямители могут выдерживать обратное напряжение до 1000 в. При напряжении в 1 в плотность тока в прямом направлении достигает  $100 \text{ а/см}^2$ , в обратном — не больше нескольких микроампер. Еще более высокое обратное напряжение допускают кремниевые выпрямители. Они также выдерживают более высокую рабочую температуру (до  $180^\circ \text{С}$  вместо примерно  $100^\circ \text{С}$  для германия). Гораздо худшими параметрами обладают широко распространенные селеновые выпрямители. Допустимое обратное напряжение составляет для них не более 50 в, наибольшая плотность прямого тока до  $50 \text{ ма/см}^2$ . Соединяя последовательно  $N$  выпрямительных элементов (селеновых шайб), можно получить выпрямитель, выдерживающий  $N$ -кратное обратное напряжение.

Полупроводниковый триод, или транзистор, представляет собой кристалл с двумя  $p-n$ -переходами. В зависимости от порядка, в котором чередуются области с разными типами проводимости, различают  $p-n-p$ - и  $n-p-n$ -транзисторы<sup>1)</sup>. Средняя часть транзистора (обладающая в зависимости от типа транзистора  $n$ - или  $p$ -проводимостью) называется его базой. Прилегающие к базе с обеих сторон области с иным, чем у нее, типом проводимости образуют эмиттер и коллектор.

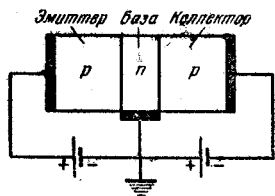


Рис. 176.

Рассмотрим кратко принцип работы транзистора типа  $p-n-p$  (рис. 176). Для его изготовления берут пластинку из очень чистого германия с электронной проводимостью и с обеих сторон вплавляют в нее индий. Концентрация носителей в эмиттере и коллекторе, т. е. в дырочной области, должна быть больше, чем концентрация носителей в пределах базы, т. е. в электронной области. На рис. 177, а даны кривые потенциальной энергии — электронов (сплошная линия) и дырок (пунктирная линия).

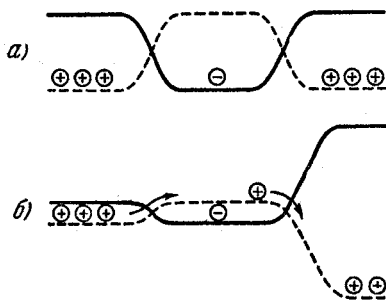


Рис. 177.

На переход эмиттер — база подается напряжение в проходном направлении (рис. 176), а на переход база — коллектор подается большее напряжение в запиорном направлении. Это приводит к понижению потенциального барьера на первом переходе и повышению барьера на втором (рис. 177, б). Протекание тока в цепи эмиттера сопровождается проникновением дырок в область базы (встречный поток электронов мал вследствие того, что их концентрация невелика). Проникнув в базу, дырки диффундируют по направле-

<sup>1)</sup> Бывают и более сложные транзисторы, например типа  $p-n-p-n$  и др.

нию к коллектору. Если толщина базы небольшая, почти все дырки, не успев рекомбинировать, будут достигать коллектора. В нем они подхватываются полем и увеличивают ток, текущий в запиорном направлении в цепи коллектора.

Всякое изменение тока в цепи эмиттера приводит к изменению количества дырок, проникающих в коллектор, и, следовательно, к почти такому же изменению тока в цепи коллектора. Очевидно, что изменение тока в цепи коллектора не превосходит изменения тока в цепи эмиттера<sup>1)</sup>, так что, казалось бы, описанное устройство бесполезно. Однако надо учесть, что переход имеет в запиорном направлении гораздо большее сопротивление, чем в проходном. Поэтому при одинаковых изменениях токов изменения напряжения в цепи коллектора будут во много раз больше, чем в цепи эмиттера. Следовательно, транзистор усиливает напряжения и мощности. Снимаемая с прибора повышенная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора.

Германиевые транзисторы дают усиление (по напряжению и по мощности), достигающее 10 000.

---

<sup>1)</sup> В транзисторе типа  $p-n-p-n$  удается получить и усиление по току.

## ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ

## § 79. Диссоциация молекул в растворах

Прохождение тока через металлы и электронные полупроводники не сопровождается какими-либо химическими превращениями. Такие вещества называются проводниками первого рода. Вещества, в которых при прохождении тока происходят химические превращения, называются проводниками второго рода или электролитами. К их числу принадлежат растворы солей, щелочей или кислот в воде и некоторых других жидкостях, а также расплавы солей, являющихся в твердом состоянии ионными кристаллами.

Носителями тока в электролитах служат ионы, на которые диссоциируют (расщепляются) в растворе молекулы растворенного вещества. Чтобы выяснить, каким образом происходит диссоциация, рассмотрим полярную молекулу, например  $\text{NaCl}$ . При объединении атомов  $\text{Na}$  и  $\text{Cl}$  в молекулу происходит перераспределение электронов — валентный электрон  $\text{Na}$  оказывается как бы включенным в оболочку атома  $\text{Cl}$ , для полной застройки которой не хватает как раз одного электрона. В результате атом  $\text{Na}$  превращается в положительный ион, атом  $\text{Cl}$  — в отрицательный. Оба иона удерживаются в молекуле силами электростатического (кулоновского) взаимодействия. Аналогично любая другая полярная молекула состоит из двух или большего числа ионов.

В растворе каждая молекула растворенного вещества находится в окружении молекул растворителя. Если молекулы растворителя являются также полярными, они будут испытывать вблизи молекулы растворенного ве-

щества ориентирующее действие создаваемого ею электрического поля. Поэтому молекулы растворителя повернутся к положительно заряженной части молекулы растворенного вещества своими отрицательными «концами», а к отрицательно заряженной части — положительными «концами» (рис. 178; сплошным контуром обведена молекула растворенного вещества, пунктирными контурами — молекулы растворителя). При таком расположении молекул растворителя создаваемое ими поле ослабляет связь между разноименными ионами молекулы растворенного вещества, вследствие чего эта связь может оказаться разорванной за счет энергии теплового движения. В этом случае молекула разделяется на два или большее количество ионов разных знаков (диссоциирует).

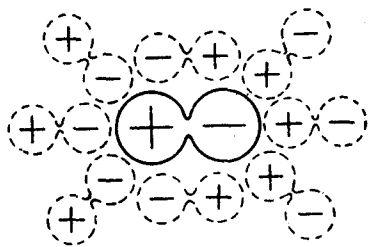


Рис. 178.

Напряженность поля, создаваемого диполем, пропорциональна величине его электрического момента [см. формулу (6.5)]. Поэтому связь между ионами в молекуле растворенного вещества ослабляется тем сильнее, чем больше дипольный момент окружающих ее молекул, т. е. чем больше диэлектрическая проницаемость жидкости, взятой в качестве растворителя. Из всех жидкостей самой большой диэлектрической проницаемостью обладает вода ( $\epsilon = 81$ ). В соответствии с этим диссоциация молекул в водных растворах бывает особенно велика.

Образовавшиеся ионы начинают странствовать по раствору. Если ионы разных знаков сблизятся на достаточно малое расстояние, они могут объединиться снова в молекулу. Этот процесс, противоположный процессу диссоциации, называется рекомбинацией (или молизацией) ионов. В растворе идут одновременно оба процесса — диссоциация все новых и новых молекул и рекомбинация ионов в молекулы. Когда количество молекул, диссоциирующих в единицу времени, станет равным количеству молекул, возникающих за то же время вследствие рекомбинации, установится равновесное состояние. Этому состоянию соответствует определенная



степень диссоциации, которую принято характеризовать коэффициентом диссоциации  $\alpha$ , показывающим, какая часть молекул растворенного вещества находится в диссоциированном состоянии. Если количество молекул растворенного вещества, содержащихся в единице объема раствора, равно  $n$ , то  $n' = \alpha n$  молекул будут находиться в растворе в виде ионов и  $n'' = (1 - \alpha)n$  — в виде недиссоциированных молекул.

Для каждой молекулы растворенного вещества, еще не распавшейся на ионы, существует определенная вероятность того, что она диссоциирует в течение одной секунды. Следовательно, количество диссоциирующих за единицу времени в единице объема молекул  $\Delta n'$  должно быть пропорционально  $n''$  — числу еще не распавшихся на ионы молекул:

$$\Delta n' = k' n'' = k' (1 - \alpha) n. \quad (79.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $k'$  зависит от природы растворителя и растворенного вещества. Для растворителей с большим значением  $\epsilon$  коэффициент  $k'$  больше. Кроме того, он возрастает при повышении температуры.

Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. И то, и другое число равно количеству диссоциировавших молекул  $n'$ . Поэтому количество молекул, возникающих в единице объема за единицу времени вследствие рекомбинации, пропорционально  $n'^2$ ;

$$\Delta n'' = k'' n'^2 = k'' \alpha^2 n^2. \quad (79.2)$$

Для состояния равновесия  $\Delta n' = \Delta n''$ , поэтому [см. выражения (79,1) и (79,2)]

$$k' (1 - \alpha) n = k'' \alpha^2 n^2,$$

откуда

$$\alpha^2 + \frac{k'}{k'' n} \alpha - \frac{k'}{k'' n} = 0.$$

Из двух решений этого уравнения

$$\alpha = -\frac{k'}{2k'' n} \pm \sqrt{\frac{k'^2}{4k''^2 n^2} + \frac{k'}{k'' n}}$$

решение со знаком «—» перед корнем нужно отбросить, так как  $\alpha$  не может быть отрицательным. Другое решение легко привести к виду

$$\alpha = \frac{k'}{2k''n} \left( \sqrt{1 + \frac{4k''n}{k'}} - 1 \right). \quad (79.3)$$

Эта формула является приближенной. Коэффициенты  $k'$  и  $k''$  можно считать постоянными лишь в том случае, если каждая молекула растворенного вещества имеет своими соседями только молекулы растворителя, что выполняется при небольших относительных концентрациях раствора. При больших концентрациях окружение каждой молекулы состоит как из молекул растворителя, так и из молекул растворенного вещества, вследствие чего изменяется вероятность диссоциации. Изменяется также вероятность рекомбинации при встрече ионов различных знаков.

При малых  $n$  (когда  $\frac{4k''n}{k'} \ll 1$ ) функцию (79.3) можно приближенно представить следующим образом:

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \left( 1 + \frac{2k''n}{k'} - 1 \right) = 1. \quad (79.4)$$

Следовательно, в сильно разбавленных растворах практически все молекулы растворенного вещества оказываются диссоциированными. Это объясняется тем, что при малых  $n$  ионы почти не сталкиваются друг с другом; поэтому рекомбинация не происходит и с течением времени все молекулы распадаются на ионы.

При больших  $n$  (когда единицей можно пренебречь по сравнению с  $\sqrt{\frac{4k''n}{k'}}$ , а тем более по сравнению с  $\frac{4k''n}{k'}$ ) выражение (79.3) принимает вид

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \sqrt{\frac{4k''n}{k'}} = \sqrt{\frac{k'}{k''n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В этом случае коэффициент диссоциации  $\alpha$  очень мал (по условию  $\frac{4k''n}{k'} \gg 1$ , а следовательно  $\frac{k'}{k''n} \ll 1$ ) и убывает с ростом концентрации пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

При невысоких температурах ионы бывают окружены облепившими их молекулами растворителя (рис. 179; аналогичная картина наблюдается для отрицательного иона). Это явление называется сольватацией (в случае водных растворов — гидратацией) ионов, а само образование из иона и удерживаемой его силовым полем оболочки из молекул растворителя называют сольватом. Более интенсивное тепловое движение нарушает связь между ионом и молекулами, образующими оболочку сольвата. Поэтому при повышении температуры размеры сольвата становятся все меньше и в конце концов при достаточно большой температуре сольватная оболочка полностью исчезает.

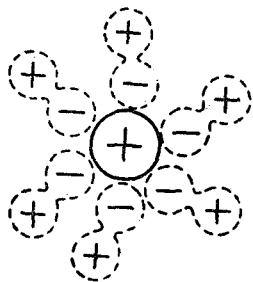


Рис. 179.

## § 80. Электролиз

Если в электролит ввести твердые проводящие пластинки (электроды) и подать на них напряжение, ионы приходят в движение и возникает электрический ток (рис. 180). Положительно заряженные ионы движутся к отрицательному электроду (катоде), вследствие чего их называют катионами. Отрицательные ионы движутся к положительному электроду (аноду) и носят название анионов.

Достигнув соответствующего электрода, ионы отдают ему избыточные или получают недостающие электроны и превращаются в нейтральные атомы или молекулы. В зависимости от химической природы электролита и электродов нейтрализовавшиеся ионы либо выделяются на электродах, либо вступают в реакцию с электродами или растворителем. Химические реакции, в которые вступают нейтрализовавшиеся ионы, называют вторичными. Продукты вторичных реакций выделяются на электродах или переходят в раствор.

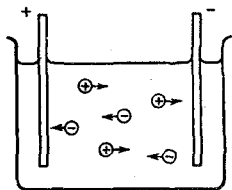


Рис. 180.

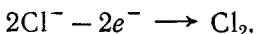
Таким образом, прохождение тока через электролит сопровождается выделением на электродах составных частей электролита. Это явление получило название электролиза.

Рассмотрим несколько примеров.

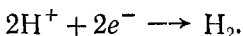
1. Возьмем в качестве электролита водный раствор соляной кислоты. Молекула  $\text{HCl}$  диссоциирует в растворе на положительно заряженный ион водорода  $\text{H}^+$  и отрицательно заряженный ион хлора  $\text{Cl}^-$ :



Подойдя к аноду, ионы хлора отдают ему избыточные электроны и превращаются в нейтральные атомы хлора, которые сразу же объединяются попарно в молекулы:

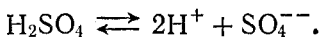


Атомы водорода, нейтрализовавшись на катоде, объединяются попарно в молекулы  $\text{H}_2$ :

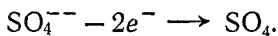
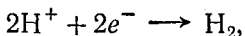


Следовательно, в процессе электролиза расходуется растворенное вещество, а на электродах выделяются газообразные хлор и водород. Вторичных реакций в этом случае не происходит.

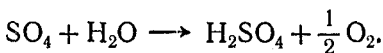
2. Электролит — раствор серной кислоты в воде. Молекула  $\text{H}_2\text{SO}_4$  диссоциирует в растворе на два положительных однозарядных иона водорода и двухзарядный отрицательный ион  $\text{SO}_4^{--}$ :



На электродах протекают следующие процессы:



Водород выделяется в виде пузырьков на катоде. Нейтральная же группировка атомов  $\text{SO}_4$  химически очень активна и вступает во вторичную реакцию. Если электроды изготовлены, например, из платины или никеля,  $\text{SO}_4$  реагирует с водой:

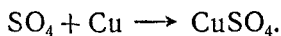


Молекула серной кислоты поступает в раствор, кислород выделяется в виде пузырьков на аноде. В итоге происходит разложение воды с выделением ее составных частей. Вторичная реакция в этом случае протекает с растворителем.

3. Медные электроды погружены в водный раствор медного купороса. Диссоциация протекает по схеме



Нейтрализовавшиеся атомы меди отлагаются в виде твердого осадка на катоде. Нейтральная группировка  $\text{SO}_4$  предпочтительнее вступает в реакцию с медью, чем с водой. Поэтому вторичная реакция идет с материалом анода:



Образовавшаяся молекула поступает в раствор. Таким образом, в ходе электролиза происходит растворение анода и отложение меди на катоде, электролит же в конечном счете не изменяется.

### § 81. Законы Фарадея

Законы электролиза были установлены экспериментально Фарадеем в 1836 г. Эти законы очень просты. Первый из них утверждает, что *количество выделившегося на электроде вещества пропорционально заряду, прошедшему через электролит*:

$$m = Kq = K \int_0^t i dt; \quad (81.1)$$

здесь  $m$  — масса выделившегося вещества,  $K$  — коэффициент, зависящий от природы вещества и называемый его электрохимическим эквивалентом. При  $q = 1$  масса  $m$  численно равна  $K$ . Следовательно, электрохимический эквивалент представляет собой массу вещества, выделяющегося на электроде при прохождении через электролит заряда, равного единице.

Второй закон Фарадея связывает электрохимический эквивалент  $K$  вещества с его химическим эквивалентом  $A/z$  ( $A$  — атомный вес,  $z$  — валентность данного веще-

ства)<sup>1)</sup>. Этот закон гласит, что *электрохимические эквиваленты всех веществ пропорциональны их химическим эквивалентам*. Коэффициент пропорциональности пишут в виде  $1/F$ . Величину  $F$  называют числом Фарадея. Выражение второго закона Фарадея теперь выглядит следующим образом:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{z}. \quad (81.2)$$

Подставив выражение (81.2) в формулу (81.1), мы объединим оба закона. В результате получается

$$m = \frac{A}{z} \frac{q}{F}. \quad (81.3)$$

При  $q$ , численно равном  $F$ , масса  $m$  численно совпадает с  $A/z$ . Таким образом, для выделения на электроде килограмм-эквивалента или грамм-эквивалента любого вещества требуется пропустить через электролит одно и то же количество электричества, численно равное  $F$ . Опытным путем установлено, что

$$F = 96,497 \cdot 10^6 \frac{\text{кулон}}{\text{килограмм-эквивалент}} \\ \left( \text{приблизительно } 96,5 \cdot 10^6 \frac{\kappa}{\text{кг-экв}} \right) \quad (81.4)$$

или

$$F = 96497 \frac{\text{кулон}}{\text{грамм-эквивалент}}.$$

<sup>1)</sup> Химическим эквивалентом элемента называется безразмерная величина, численно равная массе данного элемента, выраженной в граммах (или в килограммах), которая замещает в химических соединениях 1,0078 г (соответственно кг) водорода.

Валентностью  $z$  элемента называется число атомов водорода, которое замещается в химических соединениях одним атомом данного элемента.

Для одновалентного элемента химический эквивалент равен его атомному весу. Для  $z$ -валентного элемента химический эквивалент равен  $A/z$ .

Количество элемента, масса которого, выраженная в граммах, численно равна химическому эквиваленту, называется грамм-эквивалентом. Количество вещества, масса которого равна  $A/z$  килограммов, называется килограмм-эквивалентом.

Понятие химического эквивалента, а также грамм-эквивалента и килограмм-эквивалента может быть распространено также на те группировки атомов, которые выделяются при электролизе на электродах.

Законы Фарадея сыграли большую роль в установлении атомной (т. е. дискретной) природы электричества. Килограмм-эквивалент любого вещества содержит  $N' = N_A/z$  атомов ( $N_A$  — число Авогадро). Следовательно,  $N_A/z$  ионов переносят заряд, равный  $F$ . На долю каждого иона приходится заряд

$$e' = \frac{F}{N'} = \frac{F}{N_A} z.$$

Таким образом, заряд иона оказывается целым кратным зарядом

$$e = \frac{F}{N_A}, \quad (81.5)$$

который, очевидно, представляет собой элементарный заряд.

Предоставляем читателю убедиться в том, что подстановка в (81.5) значения (81.4) для  $F$  и  $N_A = 6,02 \times 10^{26}$  киломоль<sup>-1</sup> приводит к величине элементарного заряда (66.11).

Соотношение (81.5) было использовано для определения числа Авогадро. При этом было взято значение  $F$ , найденное из опытов по электролизу, и значение  $e$ , полученное Милликенем (см. § 66).

## § 82. Электролитическая проводимость

При включении электрического поля на хаотическое тепловое движение ионов накладывается упорядоченное движение — положительных ионов в направлении поля, отрицательных — против направления поля. Размеры ионов (а тем более сольватов) гораздо больше размеров электрона, поэтому окружающие ион молекулы оказывают на него непрерывно воздействие (напомним, что движение электронов в металлах в промежутках между соударениями с ионами решетки можно было считать свободным). Это воздействие приводит к тому, что ион, подобно шарикку в вязкой среде, испытывает при своем движении сопротивление, пропорциональное скорости. Следовательно, каждому значению напряженности поля  $E$  соответствует свое значение скорости установившегося равномерного движения ионов  $u$ , определяемое условием

$$e'E = ku,$$

где  $e'$  — заряд иона,  $k$  — коэффициент пропорциональности между скоростью иона и силой сопротивления среды движению иона.

Таким образом, под действием поля напряженности  $E$  ион будет двигаться (в направлении поля или против поля) с постоянной скоростью

$$u = \frac{e'}{k} E. \quad (82.1)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (73.6), мы видим, что отношение  $e'/k$  есть не что иное, как подвижность иона  $u_0$ . Ионы разных знаков могут иметь разный по величине заряд  $e'$ , кроме того, и коэффициент  $k$  для них будет различен. Поэтому ионы разных знаков обладают различной подвижностью  $u_0$ .

Подвижность иона зависит от его природы и свойств растворителя. С повышением температуры подвижность растет. Это происходит за счет того, что уменьшается вязкость среды, в которой движется ион, но в еще большей степени это бывает вызвано тем, что при повышении температуры уменьшаются размеры сольватной оболочки, окружающей ион.

Подвижность ионов в электролитах очень мала. При комнатной температуре для водных растворов она составляет примерно  $10^{-8} - 10^{-7} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}}$  ( $10^{-4} - 10^{-3} \frac{\text{см/сек}}{\text{в/см}}$ ). Подвижность электронов в металлах приблизительно на четыре порядка больше ( $\sim 10^{-4} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}}$ ).

Движение ионов создает электрический ток, плотность которого равна

$$j = (n^+ e^+ u_0^+ + n^- e^- u_0^-) E,$$

где  $n^+$  — число положительных ионов в единице объема,  $e^+$  — заряд, а  $u_0^+$  — подвижность положительных ионов,  $n^-$ ,  $e^-$  и  $u_0^-$  — аналогичные величины для отрицательных ионов [ср. с формулой (31.4)].

Величина, стоящая в скобках, не зависит от  $E$ . Следовательно, плотность тока в электролитах пропорциональна напряженности поля. Это означает, что для электролитов справедлив закон Ома.

Если молекулы диссоциируют на два иона, то  $e^+ = e^- = e'$  и  $n^+ = n^- = n' = \alpha n$  (числу диссоциировавших



молекул). В этом случае

$$j = ane'(u_0^+ + u_0^-)E. \quad (82.2)$$

Выражение (82.2) справедливо лишь на некотором удалении от электродов. В непосредственной близости от электродов ток создается ионами только одного знака: анионами вблизи анода и катионами вблизи катода.

Согласно формуле (82.2) проводимость электролита определяется следующим выражением:

$$\sigma = ane'(u_0^+ + u_0^-).$$

Умножим и разделим это выражение на  $N' = \frac{N_A}{z}$  — число молекул в килограмм-эквиваленте растворенного вещества:

$$\sigma = \alpha \frac{n}{N'} (e'N') (u_0^+ + u_0^-).$$

Произведение  $e'N'$  равно числу Фарадея  $F$ . Отношение  $n/N'$  дает количество килограмм-эквивалентов растворенного вещества в единице объема раствора; его называют эквивалентной концентрацией растворенного вещества. Обозначим эту концентрацию буквой  $\eta$ , тогда выражению для проводимости электролита можно придать следующий вид:

$$\sigma = \alpha \eta F (u_0^+ + u_0^-). \quad (82.3)$$

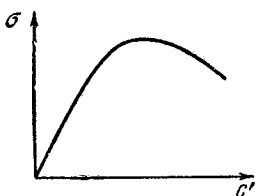


Рис. 181.

При повышении температуры коэффициент диссоциации  $\alpha$  и подвижность ионов увеличиваются. Поэтому проводимость электролитов  $\sigma$  возрастает с температурой. Зависимость проводимости от концентрации оказывается довольно сложной. Это вызвано тем, что  $\sigma$  зависит от  $\eta$  и непосредственно, и через  $\alpha$ . При малых концентрациях, когда  $\alpha \approx 1$  [см. формулу (79.4)],  $\sigma$  растет пропорционально  $\eta$ . В дальнейшем с увеличением  $\eta$  начинает убывать коэффициент диссоциации  $\alpha$ ; поэтому рост проводимости замедляется, а затем она даже начинает убывать. На рис. 181 показана зависимость проводимости  $\sigma$  водного раствора серной кислоты от относительной концентрации  $c'$  раствора.

Электролиз находит самые разнообразные технические применения. Охарактеризуем вкратце некоторые из них.

**1. Гальванопластика.** В 1837 г. Б. С. Якоби применил электролиз для изготовления металлических слепков с рельефных моделей. Модель из воска или какого-либо другого пластического материала покрывается для создания проводящего слоя графитовым порошком и затем включается в качестве катода при электролизе. Электролитом служит раствор соли, содержащей металл, из которого хотят получить слепок. Металл отлагается на катоде в виде слоя, точно отражающего рельеф модели. Полученный слепок легко отделяется от катода. Таким способом иногда изготавливаются типографские клише.

**2. Гальваностегия.** С помощью электролиза наносят на поверхность металлических изделий тонкий слой другого металла. Это делается с декоративными целями (золочение, серебрение, платинирование), а также для создания антикоррозионных покрытий (никелирование, хромирование, кадмирование и т. п.).

**3. Электрометаллургия.** Путем электролиза расплавленных руд получают алюминий, натрий, магний, бериллий и некоторые другие металлы. Например, сырьем для получения алюминия служат обычно бокситы — минералы, содержащие глинозем ( $Al_2O_3$ ). В качестве электродов применяются угольные пластины. Руда поддерживается в расплавленном состоянии за счет тепла, выделяемого при прохождении тока.

Электролиз применяют также для рафинирования (т. е. очистки) металлов. Для этого пластина из очищаемого металла включается в качестве анода соответствующей электролитической ванны. Электролитом служит раствор соли очищаемого металла. При надлежащем выборе напряжения выделяться на катоде будет только данный металл, а примеси выпадут в виде осадка. Таким путем получают, например, очень чистую медь, которая называется электролитической.

**4. Электролитическая полировка.** Количество вещества, осаждающегося на электроде или переходящего с электрода в раствор, пропорционально плотности тока. У выступов, как мы знаем, напряженность поля  $E$  больше, следовательно, в этих местах больше и плотность

тока; во впадинах плотность тока, напротив, бывает меньше. Поэтому, если изделие с шероховатой поверхностью сделать анодом соответствующим образом выбранной электролитической ванны, то с выступов будет переходить в раствор больше металла, чем из впадин, и шероховатости будут сглаживаться. На этом принципе основывается электрополировка металлов.

**5. Получение тяжелой воды.** Тяжелой водой ( $D_2O$ ) называется вода, в которой атомы водорода замещены атомами дейтерия ( $D$ ) — изотопа водорода с атомным весом 2. Тяжелая вода присутствует в небольшом количестве в обычной воде. Ионы  $D^+$  обладают меньшей подвижностью, чем ионы  $H^+$ . Поэтому в выделяющемся при электролизе газе тяжелый водород присутствует в относительно меньшем количестве, чем в исходной воде; в электролите же концентрация тяжелой воды повышается. Если производить электролиз достаточно долго, можно получить воду с высоким содержанием молекул  $D_2O$ .

**6. Электролитические конденсаторы.** Если в раствор борной щелочи (смеси борной кислоты и аммиака) погрузить алюминиевые электроды и приложить к ним напряжение, то анод быстро покрывается очень тонким непроводящим слоем окислов алюминия, и ток прекращается. Изолирующий слой поддерживается за счет электролиза и при изменении полярности исчезает. Таким образом, анод и электролит оказываются разделенными тончайшим слоем изолятора и образуют конденсатор весьма большой емкости (емкость конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками).

В «сухих» электролитических конденсаторах электролит изготавливают в виде густой пасты и пропитывают им бумажную прокладку, помещаемую между обкладками. Подобные конденсаторы при небольших размерах обладают емкостью порядка сотен микрофарад. При их включении необходимо строго соблюдать обозначенную полярность. Если электрод с образовавшимся на нем слоем окисла подключить к минусу цепи (т. е. в обратном направлении), то изолирующий слой исчезнет и сила тока резко возрастет, что приведет к разрушению конденсатора. Каждый такой конденсатор бывает рассчитан на определенное предельное напряжение, при превышении которого изолирующий слой пробивается и конденсатор выходит из строя.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

## § 84. Виды газового разряда

Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом. В металлах, полупроводниках и электролитах носители тока существуют всегда, независимо от процессов, связанных с прохождением тока; электрическое поле лишь обуславливает упорядоченное движение имеющихся зарядов. Газы в нормальном состоянии являются изоляторами, носители тока в них отсутствуют. Лишь при соблюдении специальных условий в газах могут появиться носители зарядов (ионы, электроны) и возникает электрический разряд.

Носители тока в газах могут возникать в результате внешних воздействий, не связанных с наличием электрического поля. В этом случае говорят о несамостоятельной проводимости газа. Несамостоятельный разряд может быть вызван нагреванием газа до высокой температуры (термическая ионизация), воздействием ультрафиолетовых или рентгеновских лучей, а также воздействием излучения радиоактивных веществ.

Если носители тока возникают в результате тех процессов в газе, которые обусловлены приложенным к газу электрическим полем, проводимость называется самостоятельной.

Характер газового разряда зависит от множества факторов: от химической природы газа и электродов, от температуры и давления газа, от формы, размеров и взаимного расположения электродов, от напряжения,

плотности и мощности тока и т. п. Поэтому газовый разряд может принимать весьма разнообразные формы. В частности, он может сопровождаться свечением и звуковыми эффектами — шипением, шорохами и треском.

## § 85. Несамостоятельный газовый разряд

Пусть газ, находящийся между плоскими параллельными электродами (рис. 182), подвергается непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизирующего агента (например, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к тому, что от

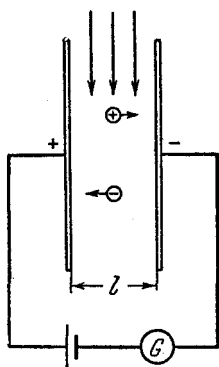


Рис. 182.

некоторых молекул газа<sup>1)</sup> отщепляется один или несколько электронов, в результате чего эти молекулы превращаются в положительно заряженные ионы. При не очень низких давлениях отщепившиеся электроны обычно захватываются нейтральными молекулами, которые таким образом становятся отрицательно заряженными ионами. Число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за секунду в единице объема, обозначим через  $\Delta n_i$ .

Наряду с процессом ионизации в газе будет происходить рекомбинация ионов (т. е. нейтрализация разноименных ионов при встрече или воссоединение положительного иона и электрона в нейтральную молекулу). Количество рекомбинирующих за секунду в единице объема пар ионов  $\Delta n_r$ , как и в случае электролитов [см. формулу (79.2)], пропорционально квадрату числа имеющих в единице объема пар ионов  $n$ :

$$\Delta n_r = rn^2 \quad (85.1)$$

( $r$  — коэффициент пропорциональности).

В состоянии равновесия  $\Delta n_i$  должно быть равно  $\Delta n_r$ , т. е.

$$\Delta n_i = rn^2 \quad (85.2)$$

<sup>1)</sup> Атомы мы также будем считать молекулами (одноатомными).

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (85.3)$$

Под действием космического излучения и следов радиоактивных веществ, имеющих в земной коре, в атмосферном воздухе возникает ежесекундно в среднем несколько пар ионов в  $1 \text{ см}^3$ . Для воздуха коэффициент  $r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Равновесная концентрация ионов составляет примерно  $10^3 \text{ см}^{-3}$ . Эта концентрация недостаточна для того, чтобы обусловить заметную проводимость. Чистый сухой воздух, как известно, является очень хорошим изолятором.

Если подать напряжение на электроды, то убыль ионов будет происходить не только вследствие рекомбинации, но и за счет отсасывания ионов полем к электродам. Пусть из единицы объема отсасывается ежесекундно  $\Delta n_j$  пар ионов. Если заряд каждого иона  $e'$ , то нейтрализация на электродах одной пары ионов сопровождается переносом по цепи заряда, равного  $e'$ . Каждую секунду электродов достигают  $\Delta n_j S l$  пар ионов ( $S$  — площадь электродов,  $l$  — расстояние между ними;  $S l$  равно объему межэлектродного пространства). Следовательно, сила тока в цепи равна:

$$I = e' \Delta n_j S l;$$

отсюда

$$\Delta n_j = \frac{I}{e' l S} = \frac{j}{e' l}, \quad (85.4)$$

где  $j$  — плотность тока.

При наличии тока условие равновесия должно быть записано следующим образом:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Подставив сюда выражения (85.1) и (85.4) для  $\Delta n_r$  и  $\Delta n_j$ , получим соотношение

$$\Delta n_i = r n^2 + \frac{j}{e' l}. \quad (85.5)$$

Вместе с тем для плотности тока может быть написано выражение, аналогичное выражению (82.2) для электролитов:

$$j = e' n (u_0^+ + u_0^-) E, \quad (85.6)$$

где  $u_0^+$  и  $u_0^-$  — подвижности положительных и отрицательных ионов. В этом выражении  $n$  является, как это следует из соотношения (85.5), функцией  $j$ , т. е. в конечном счете функцией  $E$ .

Исключив  $n$  из выражений (85.5) и (85.6) и решив получающееся квадратное уравнение, можно найти для  $j$  следующую формулу:

$$j = \frac{e' (u_0^+ + u_0^-)^2}{2rl} E^2 \left( \sqrt{1 + \frac{4\Delta n_i r l^2}{(u_0^+ + u_0^-)^2 E^2}} - 1 \right) \quad (85.7)$$

(второе решение отрицательно и должно быть отброшено как не имеющее физического смысла).

Рассмотрим случаи слабых и сильных полей.

1. В случае слабых полей плотность тока будет очень мала и слагаемым  $j/e'l$  в соотношении (85.5) можно пренебречь по сравнению с  $rn^2$  (это означает, что убыль ионов из межэлектродного пространства происходит в основном за счет рекомбинации<sup>1)</sup>). Тогда (85.5) переходит в (85.2) и для равновесной концентрации ионов получается выражение (85.3). Подставляя это значение  $n$  в (85.6), получаем

$$j = e' \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (u_0^+ + u_0^-) E \quad (85.8)$$

(эта формула получается из (85.7), если пренебречь единицей по сравнению с  $\frac{4\Delta n_i r l^2}{(u_0^+ + u_0^-)^2 E^2}$ ).

Множитель при  $E$  в формуле (85.8) не зависит от напряженности поля. Следовательно, в случае слабых полей несамостоятельный газовый разряд подчиняется закону Ома.

Подвижность ионов в газах гораздо больше, чем в электролитах — она имеет величину порядка  $10^{-4} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}}$

( $1 \frac{\text{см/сек}}{\text{в/см}}$ ). Некоторые ионы, называемые ионами Ланжевена, обладают в 100—1000 раз меньшей подвижностью. Они представляют собой обычный ион, соединившийся с пылинкой, капелькой воды и т. п.

<sup>1)</sup> Такое же соотношение между количеством рекомбинирующих и количеством отсасываемых полем ионов имеет место у электролитов.

При равновесной концентрации  $n = 10^9 \text{ м}^{-3} = 10^3 \text{ см}^{-3}$  и напряженности поля  $E = 1 \text{ в/м}$  плотность тока согласно формуле (85.6) составит

$$j = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 (10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 1 \sim 10^{-14} \text{ а/м}^2 = 10^{-18} \text{ а/см}^2$$

(ионы мы считали однозарядными).

2. В случае сильных полей слагаемым  $rn^2$  в формуле (85.5) можно пренебречь по сравнению с  $j/e'l$ . Это означает, что практически все возникающие ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. При этом условии соотношение (85.5) принимает вид

$$\Delta n_i = \frac{j}{e'l},$$

откуда

$$j = e' \Delta n_i \cdot l \quad (85.9)$$

(это выражение можно получить из (85.7), преобразовав корень по формуле  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ , справедливой при малых  $x$ ).

Плотность тока (85.9) создается всеми ионами, порождаемыми ионизатором в заключенном между электродами столбе газа с единичным поперечным сечением. Следовательно, эта плотность тока является наибольшей при данной интенсивности ионизатора и величине межэлектродного промежутка  $l$ . Ее называют плотностью тока насыщения  $j_{\text{нас}}$ .

Вычислим  $j_{\text{нас}}$  при следующих условиях:  $\Delta n_i = 10^7 \text{ м}^{-3} = 10 \text{ см}^{-3}$  (напомним, что в атмосферном воздухе при обычных условиях возникает каждую секунду в каждом кубическом сантиметре несколько пар ионов),  $l = 0,1 \text{ м}$  (10 см). По формуле (85.9)

$$j_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 10^{-1} \sim 10^{-13} \text{ а/м}^2 = 10^{-17} \text{ а/см}^2.$$

Этот расчет показывает, что проводимость воздуха в обычных условиях ничтожно мала.

График функции (85.7) изображен на рис. 183 (сплошная кривая). При достаточно больших значениях напряженности поля ток начинает резко возрастать (см. пунктирный участок кривой). Это объясняется тем, что



порождаемые внешним ионизатором электроны<sup>1)</sup> за время свободного пробега успевают приобрести энергию, достаточную для того, чтобы, столкнувшись с молекулой, вызвать ее ионизацию (ионизация ударом). Возникшие при этом свободные электроны, разогнавшись, в свою очередь вызывают ионизацию. Таким образом, происходит лавинообразное размножение первичных ионов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока. Однако процесс не утрачивает характера самостоятельного разряда, так как после прекращения действия внешнего ионизатора разряд продолжается только до тех пор, пока все электроны (первичные и вторичные) не достигнут анода (задняя граница пространства, в котором имеются ионизирующие частицы — электроны, перемещается к аноду). Для того чтобы разряд стал самостоятельным, необходимо наличие двух встречных лавин ионов, что возможно только в том случае, когда ионизацию ударом способны вызвать носители обоих знаков.

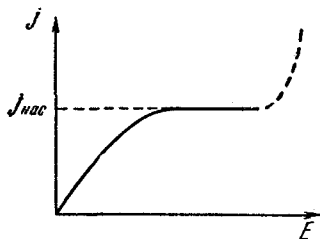


Рис. 183.

Весьма важно, что несамостоятельные разрядные токи, усиленные за счет размножения носителей, пропорциональны числу первичных ионов, создаваемых внешним ионизатором. Это свойство разряда используется в пропорциональных счетчиках (см. следующий параграф).

## § 86. Ионизационные камеры и счетчики

Действие ионизационных камер и счетчиков — приборов, применяемых для обнаружения и счета ядерных частиц, а также для измерения интенсивности рентгеновского и гамма-излучения, основано на использовании несамостоятельного газового разряда.

Принципиальная схема ионизационной камеры и счетчика одинакова (рис. 184). Отличаются они лишь режи-

<sup>1)</sup> Вследствие большой длины свободного пробега электроны раньше приобретают способность вызывать ионизацию, чем газовые ионы.

мом работы и конструктивными особенностями. Счетчик (рис. 184, б) состоит из цилиндрического корпуса, по оси которого укреплен на изоляторах электрод в виде тонкой нити (анод). Вторым электродом (катодом) служит корпус счетчика. Иногда счетчик заключают в оболочку из стекла. Для впуска ионизирующих частиц в торце счетчика делается окошко из алюминиевой фольги или из слюды. Некоторые частицы, а также рентгеновское и гамма-излучение проникают в счетчик или ионизационную камеру непосредственно через их стенки.

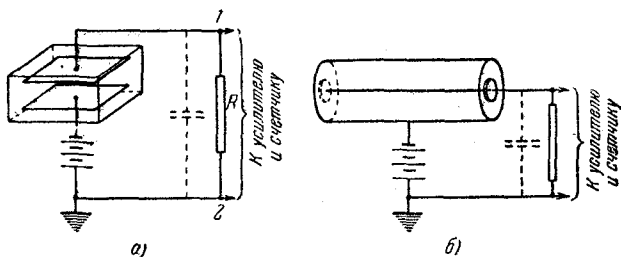


Рис. 184.

Ионизационная камера (рис. 184, а) может иметь электроды разной формы. В частности, они могут быть такими же, как у счетчика, либо иметь форму плоских параллельных пластин и т. п.

Предположим, что в пространство между электродами влетает быстрая заряженная частица (например,  $\alpha$ - или  $\beta$ -частица), которая создает  $N_0$  пар первичных ионов (электронов и положительных ионов). Возникшие ионы увлекаются полем к электродам, вследствие чего через сопротивление  $R$  проходит некоторый заряд  $q$ , который мы будем называть импульсом тока. На рис. 185 приведена зависимость импульса тока  $q$  от напряжения  $U$  между электродами для двух различных количеств первичных ионов  $N_0$ , отличающихся по величине в три раза ( $N_{02} = 3N_{01}$ ). На графике можно выделить шесть обозначенных римскими цифрами различных областей. Области I и II были подробно рассмотрены в предыдущем параграфе. В частности, область II есть область тока насыщения — все созданные ионизатором ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать.

Естественно, что при этом условии импульс тока не зависит от напряжения.

Начиная со значения напряжения  $U_p$  поле достигает такой величины, что электроны получают возможность ионизировать молекулы ударом. Поэтому количество электронов и положительных ионов лавинообразно нарастает. В результате на каждый из электродов попадает  $AN_0$  ионов. Величина  $A$  называется коэффициентом газового усиления. В области III этот коэффициент не зависит от количества первичных ионов  $N_0$

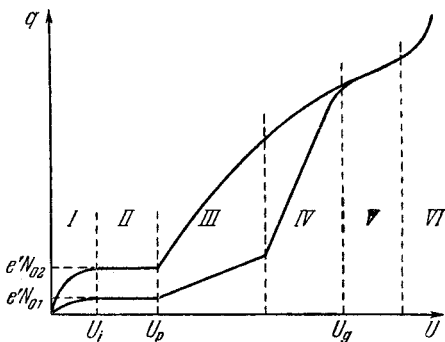


Рис. 185.

(но зависит от напряжения). Поэтому, если поддерживать напряжение постоянным, импульс тока будет пропорционален количеству первичных ионов, образованных ионизатором. Область III называется областью пропорциональности, а напряжение  $U_p$  — порогом пропорциональной области. Коэффициент газового усиления изменяется в этой области от 1 в начале до  $10^3 \div 10^4$  в конце (рис. 185 выполнен без соблюдения масштаба по оси  $q$ ; выдержано лишь соотношение 1:3 между ординатами кривых в областях II и III).

В области IV, называемой областью частичной пропорциональности, коэффициент газового усиления  $A$  все сильнее зависит от  $N_0$ , в связи с чем различие в импульсах тока, порожденных различным количеством первичных ионов, все больше сглаживается.

При напряжениях, соответствующих области V (ее называют областью Гейгера, а напряжение  $U_g$  — порогом этой области), процесс приобретает характер

самостоятельного разряда. Первичные ионы лишь создают первоначальный толчок для его возникновения. Величина импульса тока в этой области совершенно не зависит от количества первичных ионов.

В области VI напряжение столь велико, что разряд, возникнув, больше не прекращается. Поэтому ее называют областью непрерывного разряда.

**Ионизационная камера.** Ионизационной камерой называется прибор, работающий без газового усиления, т. е. при напряжениях, соответствующих области II. Существуют два типа ионизационных камер. Камеры одного типа применяются для регистрации импульсов, создаваемых отдельными частицами (импульсные камеры). Влетевшая в камеру частица создает в ней некоторое число ионов, в результате чего через сопротивление  $R$  начинает течь ток  $i$ . Это приводит к тому, что потенциал точки 1 (см. рис. 184, а) повышается и становится равным  $iR$  (первоначально потенциал этой точки был такой же, как и заземленной точки 2). Этот потенциал поступает на усилитель и после усиления приводит в действие счетное устройство. После того, как все попавшие на внутренний электрод заряды пройдут через сопротивление  $R$ , ток прекратится и потенциал точки 1 снова станет равным нулю. Характер работы камеры зависит от длительности импульса тока, вызванного одной частицей.

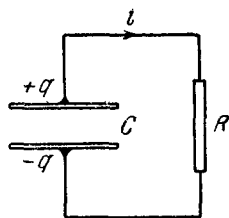


Рис. 186.

Чтобы выяснить, от чего зависит продолжительность импульса, рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора  $C$  и сопротивления  $R$  (рис. 186). Если сообщить обкладкам конденсатора разноименные заряды величины  $q_0$ , через сопротивление  $R$  потечет ток, вследствие чего величина зарядов  $q$  на обкладках конденсатора будет убывать. Мгновенное значение напряжения, приложенного к сопротивлению, равно  $U = q/C$ . Следовательно, сила тока

$$i = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}. \quad (86.1)$$

Убыль заряда на обкладках  $-dq$  равна  $idt$ . Таким образом,  $i$  в уравнении (86.1) можно заменить через

—  $\frac{dq}{dt}$ . В результате получается следующее дифференциальное уравнение:

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Согласно (86.1)  $\frac{dq}{q} = \frac{di}{i}$ . Поэтому можно написать

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln i = -\frac{1}{RC} t + \ln i_0, \quad (86.2)$$

где через  $\ln i_0$  обозначена постоянная интегрирования. Наконец, пропотенцировав (86.2), получим

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (86.3)$$

При  $t = 0$  получается  $i = i_0$ . Таким образом,  $i_0$  представляет собой начальное значение силы тока.

Из выражения (86.3) следует, что за время

$$\tau = RC \quad (86.4)$$

сила тока уменьшается в  $e$  раз. В соответствии с этим величина (86.4) носит название постоянной времени цепи. Чем больше эта величина, тем медленнее спадает ток в цепи.

Схема ионизационной камеры, (рис. 184, а) сходна со схемой, изображенной на рис. 186. Роль  $C$  играет межэлектродная емкость, показанная на рисунке пунктиром. Чем больше сопротивление  $R$ , тем сильнее будет повышаться напряжение точки  $I$  при данной силе тока и тем, следовательно, легче обнаружить импульс. Поэтому сопротивление  $R$  стремятся сделать как можно больше. Вместе с тем для того, чтобы камера могла отдельно регистрировать импульсы тока, порождаемые быстро следующими друг за другом частицами, постоян-

ная времени должна быть невелика. Поэтому при выборе величины  $R$  для импульсных камер приходится идти на компромисс. Обычно берут  $R$  порядка  $10^8$  ом. Тогда при  $C = 10^{-11}$  ф постоянная времени составит  $10^{-3}$  сек.

Другим типом ионизационных камер являются так называемые интегрирующие камеры. В них берут  $R$  порядка  $10^{15}$  ом. При  $C = 10^{-11}$  ф постоянная времени будет равна  $10^4$  сек. В этом случае импульсы тока, порождаемые отдельными ионизирующими частицами, сливаются и по сопротивлению течет постоянный ток, величина которого характеризует суммарный заряд ионов, возникающих в камере в единицу времени.

Таким образом, ионизационные камеры обоих типов различаются лишь величиной постоянной времени  $RC$ .

**Пропорциональные счетчики.** Импульсы, вызываемые отдельными частицами, могут быть значительно усилены (до  $10^3 \div 10^4$  раз), если напряжение между электродами попадает в область III (рис. 185). Прибор, работающий в таком режиме, называется пропорциональным счетчиком. Внутренний электрод счетчика делается в виде нити диаметром в несколько сотых миллиметра. Этот электрод служит анодом. Напряженность поля между электродами изменяется по закону  $\frac{1}{r}$

[см. формулу (8.8)]; поэтому вблизи нити она достигает особенно больших значений. При достаточно большом напряжении между электродами электроны, возникающие вблизи нити, приобретают под действием поля энергию, достаточную для того, чтобы вызвать ионизацию молекул ударом. В результате происходит «размножение» ионов. Размеры объема, в пределах которого происходит размножение, увеличиваются с ростом напряжения. В соответствии с этим растет и коэффициент газового усиления:

Количество первичных ионов зависит от природы и энергии частицы, вызвавшей импульс. Поэтому по величине импульсов на выходе пропорционального счетчика можно различить частицы разной природы, а также произвести сортировку частиц одной и той же природы по их энергиям.

Пропорциональные счетчики могут применяться и для счета нейтронов. В этом случае счетчик наполняют

газообразным трехфтористым бором ( $\text{BF}_3$ ). Нейтроны вступают в ядерную реакцию с изотопом бора с массовым числом 10 ( $\text{B}^{10}$ ), причем возникают  $\alpha$ -частицы, которые и вызывают первичную ионизацию.

**Счетчики Гейгера — Мюллера.** Еще большего усиления импульса (до  $10^8$ ) можно достигнуть, заставив работать счетчик в области Гейгера (область V на рис. 185). Счетчик, работающий в этом режиме, называется счетчиком Гейгера — Мюллера (сокращенно счетчиком Гейгера). Как уже отмечалось, разряд в этой области переходит в самостоятельный, первичные ионы, создаваемые ионизирующей частицей, лишь «запускают» разряд. Поэтому величина импульса не зависит от первоначальной ионизации. Для того, чтобы получать от отдельных частиц отдельные импульсы, необходимо возникший разряд быстро прервать (погасить). Это достигается либо с помощью внешнего сопротивления  $R$  (в несамогасящихся счетчиках), либо за счет процессов, возникающих в самом счетчике. В последнем случае счетчик называется самогасящимся.

Гашение разряда с помощью внешнего сопротивления объясняется тем, что при протекании по сопротивлению разрядного тока на нем возникает большое падение напряжения. В результате на межэлектродный промежуток приходится только часть приложенного напряжения, которая оказывается недостаточной для поддержания разряда.

Прекращение разряда в самогасящихся счетчиках обусловлено следующими причинами. Электроны обладают гораздо большей (примерно в 1000 раз) подвижностью, чем положительные ионы. Поэтому за то время, за которое электроны достигают нити, положительные ионы почти не сдвигаются со своих мест. Эти ионы создают положительный пространственный заряд, ослабляющий поле вблизи нити, и разряд прекращается. Гашению разряда в этом случае препятствуют дополнительные процессы, которых мы не будем рассматривать. Для их подавления к газу, заполняющему счетчик (обычно аргону), добавляется примесь многоатомного органического газа (например, паров спирта). Такой счетчик разделяет импульсы от частиц, следующих друг за другом с интервалами порядка  $10^{-4}$  сек.

## § 87. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде

Носители тока — электроны и ионы — могут возникать при самостоятельном разряде за счет различных процессов, некоторые из которых мы рассмотрим прежде, чем перейти к описанию отдельных видов разряда.

**Столкновения электронов с молекулами.** Столкновения электронов (а также ионов) с молекулами могут иметь упругий и неупругий характер. Молекула, как и атом, может находиться в дискретных энергетических состояниях. Состояние с наименьшей энергией называется основным. Для того чтобы перевести молекулу из основного в различные возбужденные состояния, требуются определенные значения энергии  $W_1$ ,  $W_2$  и т. д. Сообщив молекуле достаточно большую энергию  $W_i$ , можно вызвать ее ионизацию.

Перейдя в возбужденное состояние, молекула обычно пребывает в нем всего лишь  $10^{-8}$  сек, после чего переходит снова в основное состояние, излучая избыток энергии в виде кванта света — фотона. В некоторых так называемых метастабильных состояниях молекула может находиться значительно дольше — примерно  $10^{-3}$  сек.

При соударении частиц должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Поэтому на передачу энергии при ударе накладываются определенные ограничения — не вся энергия, которой обладает ударяющая частица, может быть передана другой частице.

Если при столкновении молекуле не может быть сообщена энергия, достаточная для ее возбуждения, суммарная кинетическая энергия частиц остается без изменений и удар будет упругим. Пусть частица массы  $m_1$ , имеющая скорость  $v_{10}$ , ударяется о неподвижную ( $v_{20} = 0$ ) частицу массы  $m_2$ . При центральном ударе должны выполняться условия

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$
$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частиц после удара.



Решая эту систему уравнений относительно неизвестных  $v_1$  и  $v_2$  (см. т. I, § 30), получим

$$v_2 = \frac{2v_{10}m_1}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, для энергии, которая передается при упругом ударе второй частице, получается выражение

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \cdot \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если  $m_1 \ll m_2$ , это выражение можно приближенно записать следующим образом:

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \cdot \frac{4m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4m_1}{m_2}, \quad (87.1)$$

где  $W_{10}$  — энергия ударяющейся частицы перед ударом.

Из формулы (87.1) следует, что легкая частица (электрон), ударяясь упруго о тяжелую частицу (молекулу), сообщает ей лишь малую долю своего запаса энергии ( $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ ). Легкая частица «отскакивает» от тяжелой, подобно мячу от стенки, с практически не изменяющейся по величине скоростью. Как показывает соответствующий расчет, при нецентральной ударе доля переданной энергии оказывается еще меньше.

При достаточно большой энергии ударяющей частицы (электрона или иона) молекула может быть возбуждена или ионизирована. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц не сохраняется — часть энергии затрачивается на возбуждение или ионизацию, т. е. на увеличение внутренней энергии соударяющихся частиц. Такие соударения называются неупругими столкновениями первого рода.

Молекула, находящаяся в возбужденном состоянии, при столкновении с другой частицей (электроном, ионом или нейтральной молекулой) может перейти в основное состояние, не излучая избыток энергии, а передав его электрону. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц после удара будет больше, чем до удара. Такие соударения называются неупругими столкновениями второго рода. Переход молекул из метастабильного состояния в основное возможен только за счет столкновений второго рода.

При неупругом столкновении первого рода уравнения сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 v_{10}^2}{2} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}}, \\ m_1 v_{10} &= m_1 v_1 + m_2 v_2, \end{aligned} \right\} \quad (87.2)$$

где  $\Delta W_{\text{вн}}$  — увеличение внутренней энергии молекулы, соответствующее ее переходу в возбужденное состояние.

Исключив  $v_1$  из уравнений (87.2), можно получить

$$\Delta W_{\text{вн}} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (87.3)$$

При одной и той же скорости ударяющейся частицы ( $v_{10}$ ) приращение внутренней энергии молекулы  $\Delta W_{\text{вн}}$  зависит от скорости  $v_2$ , с которой молекула движется после удара. Чтобы найти наибольшее возможное значение  $\Delta W_{\text{вн}}$ , продифференцируем функцию (87.3) по  $v_2$  и приравняем получившееся выражение нулю:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{вн}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

Отсюда  $v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$ . Подставляя найденное значение  $v_2$  в формулу (87.3), находим, что

$$\Delta W_{\text{вн max}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \quad (87.4)$$

Если ударяющая частица значительно легче ударяемой ( $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ ), множитель при  $\frac{m_1 v_{10}^2}{2}$  в выражении (87.4) близок к единице. Таким образом, при ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (молекулу) почти вся энергия ударяющей частицы может быть затрачена на возбуждение или ионизацию<sup>1)</sup> молекулы.

Однако даже если энергия ударяющей частицы — электрона — достаточно велика, соударение не обязательно приводит к возбуждению или ионизации

<sup>1)</sup> В случае ионизации уравнения (87.2) усложняются, так как после соударения будет не две частицы, а три. Однако заключение о возможности затраты почти всей энергии электрона на ионизацию остается справедливым.

молекулы. Имеется определенная вероятность обоих этих процессов, которая зависит от скорости, т. е. энергии электрона. На рис. 187 показан примерный ход этих вероятностей. Чем быстрее летит электрон, тем меньший промежуток времени взаимодействует он с молекулой, пролетая вблизи нее. Поэтому обе вероятности быстро достигают максимума, а затем с увеличением энергии электрона убывают. Как видно из рисунка, электрон,

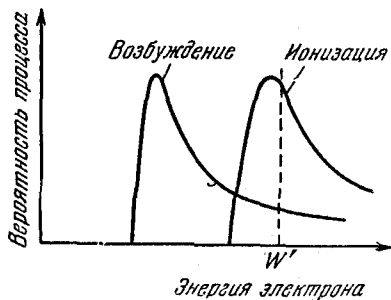


Рис. 187.

имеющий, например, энергию  $W'$ , с большей вероятностью будет вызывать ионизацию молекулы, чем ее возбуждение.

**Вторичная электронная эмиссия.** Вторичной электронной эмиссией называется испускание электронов поверхностью твердого или жидкого тела при бомбардировке ее электронами или ионами.

Отношение числа вторич-

ных электронов  $N_2$  к числу  $N_1$  частиц, вызвавших эмиссию, называется коэффициентом вторичной эмиссии

$$\delta = \frac{N_2}{N_1}. \quad (87.5)$$

Коэффициент вторичной эмиссии зависит от природы поверхности и бомбардирующих ее частиц, а также от энергии этих частиц. Скорость вторичных электронов невелика и от энергии первичных частиц не зависит.

В случае бомбардировки поверхности металлов электронами коэффициент вторичной эмиссии достигает максимума при энергии первичных электронов порядка нескольких сотен электронвольт (от 200 до 800 эв для различных металлов). Наибольшие значения коэффициента  $\delta_{\max}$  заключены в пределах от 0,5 (для бериллия) до 1,8 (для платины). Для полупроводников  $\delta_{\max}$  может достигать гораздо больших значений (порядка 10). Таким образом, вторичную эмиссию от соответствующим образом подобранной поверхности можно использовать для «умножения» количества электронов в пучке. В электронных умножителях, предложенных впервые Л. А. Кубец-

ким, вторичные электроны, испущенные каждым из последовательно расположенных электродов, ускоряются электрическим полем и бомбардируют следующий электрод. С помощью таких приборов достигается усиление электронных пучков в сотни раз.

**Автоэлектронная эмиссия.** Если вблизи поверхности металла создать электрическое поле очень большой напряженности ( $\sim 10^6$  в/см), наблюдается испускание электронов, называемое автоэлектронной (или холодной) эмиссией. Это явление иногда называют также вырыванием электронов электрическим полем. Автоэлектронная эмиссия была объяснена квантовой теорией. При наличии сильного поля препятствующий выходу электронов потенциальный барьер на поверхности металла выглядит так, как показано на рис. 188.

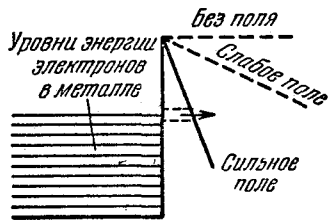


Рис. 188.

Согласно квантовой механике имеется отличная от нуля вероятность того, что элементарная частица пройдет через потенциальный барьер даже в том случае, когда ее энергия меньше, чем высота барьера. Частица как бы проходит через туннель в барьере, в связи с чем это явление называют туннельным эффектом. Вероятность туннельного эффекта растет с уменьшением ширины барьера. Поэтому автоэлектронная эмиссия наблюдается лишь в очень сильных полях.

**Фотоионизация.** Электромагнитное излучение («свет») состоит из элементарных частиц — фотонов. Энергия фотона равна  $h\nu$ , где  $h$  — постоянная Планка,  $\nu$  — частота излучения. Фотон может быть поглощен молекулой (см. сноску на стр. 306), причем его энергия идет на возбуждение или ионизацию. В этом случае ионизация молекулы называется фотоионизацией. Непосредственную (прямую) фотоионизацию способно вызвать ультрафиолетовое излучение. Видимое излучение (обладающее меньшей частотой) может обусловить так называемую ступенчатую фотоионизацию. Энергия фотона видимого света недостаточна для отщепления электрона от молекулы. Однако ее хватает для того, чтобы

перевести молекулу в одно из возбужденных состояний. Для ионизации молекулы, находящейся в возбужденном состоянии, требуется меньше энергии, чем для ионизации молекулы в нормальном состоянии. Поэтому ионизация молекулы, возбужденной фотоном, может быть достигнута за счет ее соударения с другой молекулой.

В газовом разряде возможно возникновение коротковолнового излучения, способного вызвать прямую фотоионизацию. Достаточно быстрый электрон может при ударе не только ионизировать молекулу, но и перевести образовавшийся ион в возбужденное состояние. Переход иона в основное состояние сопровождается испусканием излучения меньшей длины волны (т. е. большей частоты), чем у излучения нейтральной молекулы. Энергия фотонов такого излучения достаточна для непосредственной фотоионизации.

Кроме перечисленных процессов, в некоторых видах самостоятельного газового разряда играет большую роль явление термоэлектронной эмиссии, рассмотренное в § 75. Имеет место также фотоэлектронная эмиссия (или внешний фотоэффект), заключающаяся в испускании электронов поверхностью металла или полупроводника при освещении ее светом с достаточно малой длиной волны. Однако роли фотоэлектронной эмиссии в различных видах самостоятельного разряда мы касаться не будем.

## § 88. Газоразрядная плазма

При некоторых видах самостоятельного разряда степень ионизации газа бывает очень большой. Газ в сильно ионизированном состоянии при условии, что суммарный заряд электронов и ионов в каждом элементарном объеме равен (или почти равен) нулю, называется плазмой<sup>1)</sup>.

Плазма представляет собой особое состояние вещества. В таком состоянии находится вещество в недрах Солнца и других звезд, обладающих температурой в десятки миллионов градусов. Плазма, возникающая вслед-

---

<sup>1)</sup> Плазму определяют как сильно ионизированную квазинейтральную (т. е. почти нейтральную) среду, в которой хаотическое движение частиц преобладает над их направленным перемещением под действием внешнего электрического поля.

стве высокой температуры вещества, называется высокотемпературной (или изотермической). Плазма, возникающая при газовом разряде, называется газоразрядной.

Для того чтобы плазма находилась в стационарном состоянии, необходимо наличие процессов, восполняющих убыль ионов в результате рекомбинации. В высокотемпературной плазме это осуществляется за счет термической ионизации, в газоразрядной плазме — за счет ударной ионизации электронами, ускоренными электрическим полем. Особую разновидность плазмы представляет собой ионосфера (один из слоев атмосферы). Высокая степень ионизации молекул ( $\sim 1\%$ ) поддерживается в этом случае за счет фотоионизации, обусловленной коротковолновым излучением Солнца.

Электроны в газоразрядной плазме принимают участие в двух движениях — в хаотическом движении с некоторой средней скоростью  $\bar{v}$  и в упорядоченном движении в направлении, противоположном  $E$ , со средней скоростью  $\bar{u}$  (гораздо меньшей, чем  $\bar{v}$ ). Условия в плазме таковы, что электрическое поле не только обуславливает упорядоченное движение электронов, но и увеличивает скорость  $\bar{v}$  их хаотического движения.

Пусть в момент включения поля в газе имеется некоторое число электронов, средняя скорость которых соответствует температуре газа  $T_r$  ( $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT_r$ ). За время между двумя последовательными соударениями с молекулами газа электрон проходит в среднем путь  $\lambda$  (рис. 189; траектория электрона слегка искривлена под действием силы  $-eE$ ). При этом поле совершает над ним работу

$$A = eEl_f, \quad (88.1)$$

где  $l_f$  — проекция перемещения электрона на направление силы.

Вследствие соударений с молекулами направление движения электрона все время изменяется случайным

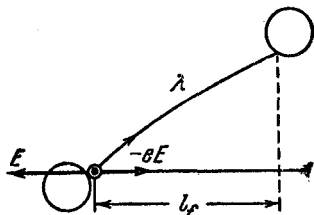


Рис. 189.

образом. Поэтому работа (88.1) для отдельных участков траектории имеет разную величину и разный знак. На одних участках поле увеличивает энергию электрона, на других — уменьшает. Если бы упорядоченное движение электронов отсутствовало, среднее значение  $l_f$ , а следовательно и работы (88.1) было равно нулю. Однако наличие упорядоченного движения приводит к тому, что среднее значение работы  $A$  отлично от нуля и притом положительно. Оно равно

$$\bar{A} = eE\bar{u}\tau = eE\bar{u}\frac{\lambda}{\bar{v}}, \quad (88.2)$$

где  $\tau$  — средняя продолжительность свободного пробега электрона ( $\bar{u} \ll \bar{v}$ ).

Следовательно, поле в среднем увеличивает энергию электрона. Правда, электрон, столкнувшись с молекулой, передает ей часть своей энергии. Но, как мы выяснили в предыдущем параграфе, доля  $\delta$  переданной при упругом ударе энергии очень мала — она в среднем равна  $\delta = 2m/M$ , где  $m$  — масса электрона, а  $M$  — масса молекулы<sup>1)</sup>.

В разреженном газе ( $\lambda$  обратно пропорциональна давлению) и при достаточно большой напряженности поля  $E$  работа (88.2) может превосходить энергию  $\delta \frac{m\bar{v}^2}{2}$ , передаваемую в среднем молекуле при каждом столкновении. Поэтому энергия хаотического движения электрона будет расти. В конце концов она достигнет значения, достаточного для того, чтобы возбудить или ионизировать молекулу. Начиная с этого момента часть соударений перестает быть упругой и сопровождается большой потерей энергии. Поэтому средняя доля передаваемой энергии  $\delta$  увеличивается.

Таким образом, энергию, необходимую для ионизации, электроны приобретают не за один свободный пробег, а постепенно накапливают ее на протяжении ряда пробегов. Ионизация приводит к возникновению большого количества электронов и положительных ионов — появляется плазма.

<sup>1)</sup> Согласно формуле (87.1) при центральном ударе  $\delta = 4m/M$ . В случае, когда электрон и молекула лишь слегка «задевают» друг друга,  $\delta \approx 0$ .

Энергия электронов плазмы определяется условием, что средняя величина работы, совершаемой полем над электроном за один свободный пробег, равна средней величине энергии, отдаваемой электроном при соударении с молекулой:

$$eE\bar{u} \frac{\lambda}{\bar{v}} = \delta \frac{m\bar{v}^2}{2}$$

(в этом соотношении  $\delta$  есть сложная функция скорости  $\bar{v}$ ).

Опыт показывает, что для электронов в газоразрядной плазме имеет место максвелловское распределение по скоростям. Вследствие слабого взаимодействия электронов с молекулами ( $\delta$  при упругом ударе очень мало, а относительное количество неупругих соударений незначительно) средняя скорость хаотического движения электронов оказывается во много раз больше скорости, соответствующей температуре газа  $T_r$ . Если ввести температуру электронов  $T_e$ , определив ее из соотношения

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT_e,$$

то для  $T_e$  получается значение порядка нескольких десятков тысяч градусов. Отличие  $T_r$  и  $T_e$  свидетельствует о том, что между электронами и молекулами в газоразрядной плазме нет термодинамического равновесия<sup>1)</sup>.

Концентрация носителей тока в плазме очень велика. Поэтому плазма обладает хорошей электропроводностью. Подвижность электронов, как уже отмечалось, примерно на три порядка больше, чем у ионов, вследствие чего ток в плазме создается в основном электронами.

## § 89. Тлеющий разряд

Самостоятельный разряд принимает разнообразные формы в зависимости от давления газа, конфигурации электродов и параметров внешней цепи. Физические явления, которыми сопровождается разряд, очень сложны. Мы ограничимся кратким рассмотрением основных видов самостоятельного разряда, опуская ряд деталей.

<sup>1)</sup> В высокотемпературной плазме средняя энергия молекул, электронов и ионов одинакова. Этим объясняется ее другое название — изотермическая.



Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке длиной около 0,5 м, с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 190). На электроды подается напряжение порядка 1000 в. При атмосферном давлении ток через трубку не течет. Если понижать давление в трубке, то примерно при 40 мм рт. ст. возникает разряд в виде светящегося извилистого тонкого шнура, соединяющего

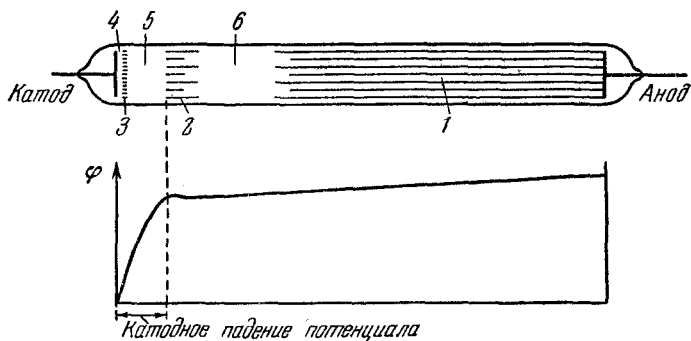


Рис. 190.

анод с катодом. По мере понижения давления шнур утолщается и приблизительно при 5 мм рт. ст. заполняет все сечение трубки — устанавливается тлеющий разряд. Его основные части показаны на рис. 190. Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый катодной светящейся пленкой 3. Между катодом и светящейся пленкой находится астоново темное пространство 4. По другую сторону светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый круковым темным пространством 5. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют тлеющим свечением 2. Все перечисленные выше слои образуют катодную часть тлеющего разряда.

С тлеющим свечением граничит темный промежуток — фарадеево темное пространство 6. Граница между ними размыта. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом: ее называют положи-

тельным столбом 1. При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При давлении порядка 1 мм рт. ст. положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых изогнутых слоев — страт.

Измерения, проведенные с помощью зондов (тоненьких проволочек, впаянных в разных точках вдоль трубки), а также другими методами, показали, что потенциал изменяется вдоль трубки неравномерно (см. график на рис. 190). Почти все падение потенциала приходится на первые три участка разряда по круковому темное пространство включительно (катодное падение потенциала). В области тлеющего свечения потенциал не изменяется — здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растет. Такое распределение потенциала вызвано образованием в области крукова темного пространства положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Основные процессы, необходимые для поддержания тлеющего разряда, происходят в его катодной части. Остальные части разряда не существенны, они могут даже отсутствовать (при малом расстоянии между электродами или при низком давлении). Основных процессов два. Это — вторичная электронная эмиссия из катода, обусловленная бомбардировкой его положительными ионами, и ударная ионизация электронами молекул газа.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. Вторичные электроны вылетают из катода с небольшой скоростью. В астоновом темном пространстве они ускоряются электрическим полем. Приобретая достаточную энергию, электроны начинают возбуждать молекулы газа, в результате чего возникает катодная светящаяся пленка. Электроны, пролетевшие без столкновений в область крукова темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают (см. рис. 187). Таким образом, интенсивность свечения газа уменьшается, но зато в круковом темном пространстве образуется много

электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость. Поэтому в круковом темном пространстве создается положительный пространственный заряд, что приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие при ионизации в круковом темном пространстве, вместе с первоначальными электронами проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов и суммарным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала — поле не ускоряет электроны и ионы. Благодаря высокой концентрации электронов и ионов в области тлеющего свечения идет интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево темное пространство электроны и положительные ионы проникают за счет диффузии (на границе между этими областями поле отсутствует, но зато имеется большой градиент концентрации электронов и ионов). Вследствие меньшей концентрации заряженных частиц вероятность рекомбинации в фарадеевом темном пространстве сильно падает. Поэтому фарадеево пространство и является темным.

В фарадеевом темном пространстве уже имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны постепенно накапливают энергию, так что в конце концов возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано переходом возбужденных молекул в основное состояние. Молекулы разных газов испускают при этом излучение разной длины волны. Поэтому свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет. Это обстоятельство используется в газосветных трубках для изготовления светящихся надписей и реклам. Эти надписи представляют собой не что иное, как положительный столб тлеющего разряда. Нео-

новые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое и т. д.

Если постепенно уменьшать расстояние между электродами, катодная часть разряда остается без изменений, длина же положительного столба уменьшается, пока этот столб не исчезает совсем. В дальнейшем исчезает фарадеево темное пространство и начинает сокращаться длина тлеющего свечения, причем положение границы этого свечения с кружковым темным пространством остается неизменным. Когда расстояние анода до этой границы делается очень малым, разряд прекращается.

В сигнальных неоновых лампах (рис. 191) электроды сближены так, что положительный столб в них отсутствует и излучение света обусловлено тлеющим свечением. Путем специальной обработки поверхностей электродов напряжение зажигания разряда можно снизить примерно до 50 в. Эти лампы применяются для сигнализации о наличии напряжения в данной сети.

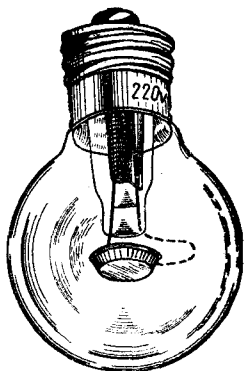


Рис. 191.

При понижении давления катодная часть разряда занимает все большую долю межэлектродного пространства. При достаточно низком давлении кружково темное пространство распространяется почти на весь сосуд. Свечение газа в этом случае перестает быть заметным, зато стенки трубки начинают светиться зеленоватым свечением. Большинство электронов, выбитых из катода и ускоренных катодным падением потенциала, долетает без столкновений с молекулами газа до стенок трубки и, ударяясь о них, вызывает свечение. По историческим причинам поток электронов, испускаемый катодом газоразрядной трубки при очень низких давлениях, получил название катодных лучей. Свечение, вызываемое бомбардировкой быстрыми электронами, называется катодolumинесценцией.

Если в катоде газоразрядной трубки сделать узкий канал, часть положительных ионов проникает в пространство за катодом и образует резко ограниченный пучок

ионов, называемый канальовыми (или положительными) лучами. Такой способ получения пучка положительных ионов не утратил практического значения до наших дней.

## § 90. Дуговой разряд

В 1802 г. В. В. Петров обнаружил, что при разведении первоначально соприкасавшихся угольных электродов, подключенных к большой гальванической батарее, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем открытое В. В. Петровым явление было названо вольтовой (или электрической) дугой.

Сила тока в дуге может достигать огромных значений (тысячи и десятки тысяч ампер) при напряжении в несколько десятков вольт.

Дуговой разряд может протекать как при низком (порядка нескольких миллиметров ртутного столба), так и при высоком (до 1000 ат) давлении. Основными процессами являются термоэлектронная эмиссия с раскаленной поверхности катода и термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа. Почти все межэлектродное пространство заполнено высокотемпературной плазмой. Она служит проводником, по которому электроны, испущенные катодом, достигают анода.

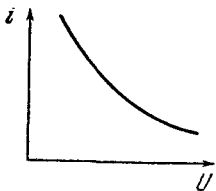


Рис. 192.

Температура плазмы составляет около  $6000^{\circ}\text{K}$ . В дуге сверхвысокого давления (до 1000 ат) температура плазмы может достигать  $10\,000^{\circ}\text{K}$  (напомним, что температура поверхности Солнца равна  $5800^{\circ}\text{K}$ ). Вследствие бомбардировки положительными ионами катод раскаляется примерно до  $3500^{\circ}\text{K}$ . Анод, бомбардируемый мощным потоком электронов, разогревается еще больше. Это приводит к тому, что анод интенсивно испаряется и на его поверхности образуется углубление — кратер. Кратер является самым ярким местом дуги.

Дуговой разряд обладает падающей вольт-амперной характеристикой (рис. 192). Это объясняется тем, что при увеличении силы тока возрастают термоэлектронная

эмиссия с катода и степень ионизации газоразрядного промежутка.

Кроме описанной выше термоэлектронной дуги (т. е. разряда, обусловленного термоэлектронной эмиссией с раскаленной поверхности катода) бывает дуга с холодным катодом. В качестве катода в этом случае служит обычно жидкая ртуть, налитая в баллон, из которого удален воздух. Разряд происходит в парах ртути. Электроны вылетают из катода за счет автоэлектронной эмиссии. Необходимое для этого сильное поле у поверхности катода создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами. Электроны испускаются не всей поверхностью катода, а небольшим ярко светящимся и непрерывно перемещающимся катодным пятном. Температура газа в этом случае невелика. Ионизация молекул в плазме происходит, как и при тлеющем разряде, за счет электронных ударов.

Дуговой разряд находит разнообразные применения. В 1882 г. русский инженер Н. Н. Бенардос предложил использовать электрическую дугу для сварки металлов. В 1888 г. Н. Г. Славянов усовершенствовал электросварку, заменив угольные электроды металлическими.

Электрическая дуга применяется в качестве мощного источника света. В дуговых лампах сверхвысокого давления (лампах СВД) разряд происходит между вольфрамовыми электродами в атмосфере паров ртути при давлении до 100 ат или в инертном газе (неоне, аргоне, криптоне или ксеноне) при давлении до 20 ат. Лампа такого типа изображена на рис. 193. Боковой электрод служит для зажигания лампы от источника высокого напряжения. В связи с тем, что лампа СВД сильно разогревается, ее баллон изготавливается из кварца (размягчающегося при более высокой температуре, чем стекло). Ртутная лампа в холодном состоянии содержит аргон при небольшом давлении (порядка нескольких миллиметров ртутного столба) и капельку ртути. Первоначально дуговой разряд возникает в аргоне. Когда

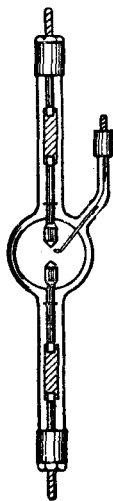


Рис. 193.

лампа нагревается, ртуть испаряется и в дальнейшем разряд идет в парах ртути.

Дуга, горящая в парах ртути, испускает мощный поток ультрафиолетового излучения. Ртутные лампы с баллоном из кварца (кварц пропускает ультрафиолетовые лучи; обычное стекло их поглощает) применяются в качестве источников ультрафиолетовых лучей в медицине и в научных исследованиях. В лампах дневного света стенки разрядной трубки покрываются специально подобранными веществами (люминофорами), которые под действием ультрафиолетового излучения паров ртути начинают светиться в свою очередь, но уже излучением, близким по спектральному составу к дневному свету. Такие источники света в несколько раз экономичнее, чем лампы накаливания.

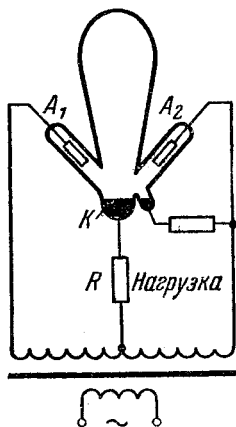


Рис. 194.

Дуговой разряд в парах ртути при низком давлении с ртутным катодом используется в ртутных выпрямителях. На рис. 194 дана схема двухполупериодного ртутного выпрямителя. Ток течет к катоду  $K$  от того из анодов  $A_1$  или  $A_2$ , который в данный момент находится

под положительным потенциалом по отношению к катоду. В результате через нагрузку  $R$  течет ток одного направления. Ртутный электрод в боковом отростке служит для зажигания разряда. Чтобы включить выпрямитель, колбу наклоняют до тех пор, пока ртуть катода и отростка не соединится. При возвращении колбы в вертикальное положение в месте разрыва ртути возникает дуга, после чего разряд переходит на один из анодов.

На дуговом разряде основано действие приборов, называемых газотроном и тиратроном. Газотрон представляет собой диод с калящимся катодом, заполненный парами ртути или аргоном при невысоком давлении. Электроны, испущенные катодом вследствие термоэлектронной эмиссии, ионизируют молекулы газа, что приводит к образованию газоразрядной плазмы (эти процессы типичны для дугового разряда). Хорошая проводимость

плазмы препятствует образованию вблизи катода электронного облака (как это имеет место в вакуумном диоде). Поэтому при небольшом напряжении между электродами (15—20 в) газотрон пропускает сильные токи (порядка 10 а). Так как ток течет через газотрон лишь при положительном (по отношению к катоду) напряжении на аноде, его используют для выпрямления тока. На рис. 195 приведена схема<sup>1)</sup> однополупериодного выпрямителя на газотроне (на схеме  $R$  — нагрузка, в которой используется выпрямленный ток). Собрав схему, изображенную на рис. 195, на двух газотронах можно осуществить двухполупериодное выпрямление.

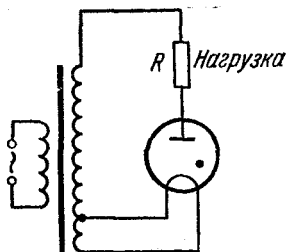


Рис. 195.

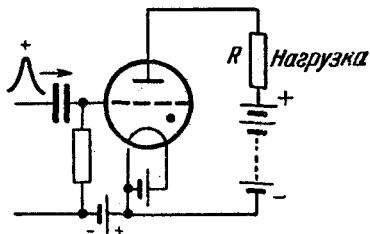


Рис. 196.

Тиратрон отличается от газотрона наличием третьего электрода — сетки. Этот прибор используется в качестве быстродействующего включателя тока. Соответствующая схема изображена на рис. 196. В нормальном состоянии сетка имеет по отношению к катоду отрицательный потенциал. Поэтому электроны, вылетевшие из катода, возвращаются полем обратно, и ток через тиратрон не течет. При подаче на сетку хотя бы кратковременного положительного импульса в тиратроне возникает дуговой разряд и начинает течь сильный ток. Образовавшаяся плазма, обладая высокой проводимостью, экранирует сетку<sup>2)</sup>, вследствие чего изменения потенциала на сетке не могут в дальнейшем воздействовать на разряд. Включение тока с помощью тиратрона осуществляется весьма быстро (за время порядка

<sup>1)</sup> На схемах газонаполненные лампы отличают от аналогичных вакуумных ламп точкой.

<sup>2)</sup> Экранировка достигается тем, что вблизи сетки накапливаются ионы.



$10^{-7}$  сек). Таким образом, тиратрон является безынерционным включателем тока и поэтому широко применяется в автоматике и телемеханике. Для прекращения тока нужно на короткое время ( $\sim 10^{-5}$  сек) снять анодное напряжение. За это время плазма исчезает в результате рекомбинации, и снова устанавливается состояние, которое было до зажигания.

## § 91. Искровой и коронный разряды

Искровой разряд возникает, когда напряженность электрического поля достигает пробивного для данного газа значения  $E_{\text{пр}}$ . Величина  $E_{\text{пр}}$  зависит от давления газа; для воздуха при атмосферном давлении она составляет около 30 000 в/см. С увеличением давления  $E_{\text{пр}}$  возрастает. Согласно экспериментальному закону Пашена отношение пробивной напряженности поля к давлению приблизительно постоянно:

$$\frac{E_{\text{пр}}}{p} \approx \text{const.} \quad (91.1)$$

Искровой разряд сопровождается возникновением ярко светящегося извилистого, разветвленного канала, по которому проходит кратковременный импульс тока большой силы. Примером может служить молния; длина ее бывает до 10 км, диаметр канала — до 40 см, сила тока может достигать 100 000 и более ампер, продолжительность импульса составляет около  $10^{-4}$  сек. Каждая молния состоит из нескольких (до 50) импульсов, следующих по одному и тому же каналу; их общая длительность может достигать нескольких секунд.

Температура газа в искровом канале бывает очень высокой — до  $10\,000^\circ\text{К}$ . Быстрый сильный нагрев газа приводит к резкому повышению давления и возникновению ударных и звуковых волн. Поэтому искровой разряд сопровождается звуковыми явлениями — от слабого треска при искре малой мощности до раскатов грома, раздающихся вслед за молнией.

Возникновению искры предшествует образование в газе сильно ионизированного канала, называемого стримером. Этот канал получается путем перекрытия отдельных электронных лавин, возникающих на пути искры. Родоначальником каждой лавины служит

электрон, образующийся путем фотоионизации. Схема развития стримера показана на рис. 197. Напряженность поля такова, что электрон, вылетевший за счет какого-либо процесса из катода, приобретает на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации. Поэтому происходит размножение электронов — возникает лавина (образующиеся при этом положительные ионы не играют существенной роли вследствие гораздо меньшей подвижности; они лишь обуславливают пространственный заряд, вызывающий перераспределение потенциала). Излучение, испускаемое атомом, у которого при ионизации был вырван один из

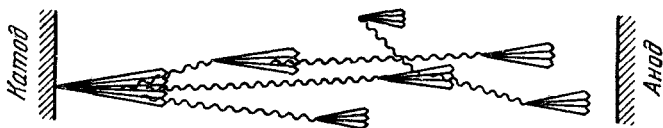


Рис. 197.

внутренних электронов (это излучение показано на схеме волнистыми линиями), вызывает фотоионизацию молекул, причем образовавшиеся электроны порождают все новые лавины. После перекрывания лавин образуется хорошо проводящий канал — стример, по которому устремляется от катода к аноду мощный поток электронов — происходит пробой.

Есть взять электроды такой формы, при которой поле в межэлектродном пространстве приблизительно однородно (например, в виде шаров достаточно большого диаметра), то искра будет возникать при вполне определенном напряжении  $U_{пр}$ , величина которого зависит от расстояния между шарами  $l$  ( $E_{пр} = U_{пр}/l$ ). На этом основан искровой вольтметр, с помощью которого обычно измеряется высокое напряжение (порядка  $10^3 - 10^5$  в). При измерениях определяется наибольшее расстояние  $l_{max}$ , при котором возникает искра. Умножив затем  $E_{пр}$  на  $l_{max}$ , получают значение измеряемого напряжения.

Высокая температура и давление газа в искре обуславливают сильное механическое воздействие на электроды. Это явление лежит в основе разработанного

Б. Р. и Н. И. Лазаренко метода электроискровой обработки металлов.

Если один из электродов (или оба) имеет очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие), вначале возникает так называемый коронный разряд. При дальнейшем увеличении напряжения этот разряд переходит в искровой или дуговой. При коронном разряде ионизация и возбуждение молекул происходят не во всем межэлектродном пространстве, а лишь вблизи электрода с малым радиусом кривизны, где напряженность поля достигает значений, равных или превышающих  $E_{пр}$ . В этой части разряда газ светится. Свечение имеет вид короны, окружающей электрод, чем и вызвано название этого вида разряда. Коронный разряд с острия имеет вид светящейся кисти, в связи с чем его иногда называют кистевым разрядом. В зависимости от знака коронирующего электрода говорят о положительной или отрицательной короне. Между коронирующим слоем и некоронирующим электродом лежит внешняя область короны. Режим пробоя ( $E \geq E_{пр}$ ) существует только в пределах коронирующего слоя. Поэтому можно сказать, что коронный разряд представляет собой неполный пробой газового промежутка.

В случае отрицательной короны явления на катоде сходны с явлениями на катоде тлеющего разряда. Ускоренные сильным полем положительные ионы выбивают из катода электроны, которые вызывают ионизацию и возбуждение молекул в коронирующем слое. Во внешней области короны поле недостаточно для того, чтобы сообщить электронам энергию, необходимую для ионизации. Поэтому проникшие в эту область электроны дрейфуют под действием поля к аноду. Часть электронов захватывается молекулами, вследствие чего образуются отрицательные ионы. Таким образом, ток во внешней области обуславливается только отрицательными носителями — электронами и отрицательными ионами. В этой области разряд имеет несамостоятельный характер.

В положительной короне электронные лавины зарождаются у внешней границы короны и устремляются к коронирующему электроду — аноду. Образование электронов, порождающих лавины, обусловлено фото-

ионизацией, вызванной излучением коронирующего слоя. Носителями тока во внешней области короны служат положительные ионы, которые дрейфуют под действием поля к катоду.

Если оба электрода имеют большую кривизну (два коронирующих электрода), вблизи каждого из них протекают процессы, присущие коронирующему электроду данного знака. Оба коронирующие слоя разделяются внешней областью, в которой движутся встречные потоки положительных и отрицательных носителей тока. Такая корона называется двухполярной.

Упомянутый в § 86 при рассмотрении счетчиков самостоятельный газовый разряд представляет собой коронный разряд.

Толщина коронирующего слоя и сила разрядного тока растут с увеличением напряжения. При небольшом напряжении размеры короны малы и ее свечение незаметно. Такая микроскопическая корона возникает вблизи острия, с которого стекает электрический ветер (см. § 21).

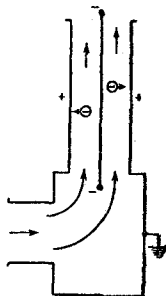


Рис. 198.

Корона, появляющаяся под действием атмосферного электричества на верхушках корабельных мачт, деревьев и т. п., получила в старину название огня святого Эльма.

В высоковольтных устройствах, в частности в линиях высоковольтных передач, коронный разряд приводит к вредным утечкам тока. Поэтому приходится принимать меры для его устранения. С этой целью провода высоковольтных линий берут достаточно большого диаметра, тем большего, чем выше напряжение линии.

Полезное применение в технике коронный разряд нашел в электрофильтрах. Очищаемый газ движется в трубе, по оси которой расположен отрицательный коронирующий электрод (рис. 198). Отрицательные ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней области короны, оседают на загрязняющих газ частицах или капельках и увлекаются вместе с ними к внешнему некоронирующему электроду. Достигнув этого электрода, частицы нейтрализуются и оседают на нем. Впоследствии при ударах по трубе осадок, образованный уловленными частицами, осыпается в сборник.

## ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

## § 92. Квазистационарные токи

Закон Ома (35.2) и вытекающие из него правила Кирхгофа (36.1) и (36.2) были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с огромной скоростью, равной скорости света  $c$ . Если за время  $\tau = l/c$ , необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются квазистационарными. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности запишется следующим образом:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где  $T$  — период изменений.

При размерах цепи порядка 3 м  $\tau = 10^{-8}$  сек. Таким образом, вплоть до  $T$  порядка  $10^{-6}$  сек (что соответствует частоте  $10^6$  гц) токи в такой цепи можно считать квазистационарными. Ток промышленной, частоты ( $\nu = 50$  гц) квазистационарен для цепей длиной до  $\sim 100$  км.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома. Следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.

Пусть к зажимам сопротивления  $R$  (рис. 199, *a*), не обладающего индуктивностью и емкостью<sup>1)</sup> (такое сопротивление называется активным), приложено напряжение, изменяющееся по закону

$$U = U_m \cos \omega t \quad (92.1)$$

( $U_m$  — амплитудное значение напряжения). При выполнении условия квазистационарности ток через сопротивление определяется законом Ома

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t. \quad (92.2)$$

Таким образом, между амплитудными значениями силы тока и напряжения имеется соотношение

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (92.3)$$

Соотношения между переменными токами и напряжениями делаются особенно наглядными, если изображать их (как и гармонические колебания) с помощью векторов (см. т. I, § 68).

Выберем произвольное направление, которое назовем осью токов (рис. 199, *b*). Отложим вдоль этого направления вектор тока длиной  $I_m$ . Поскольку напряжение и ток в рассматриваемом случае изменяются синфазно, вектор напряжения также будет направлен вдоль оси токов; длина его равна  $RI_m$ . Совокупность векторов напряжений или токов образует векторную диаграмму данной цепи.

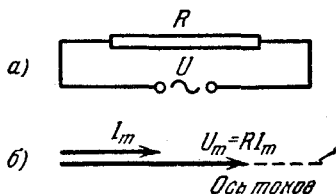


Рис. 199.

### § 93. Переменный ток, текущий через индуктивность

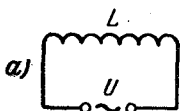
Подадим переменное напряжение (92.1) на концы индуктивности  $L$  (например, катушки) с пренебрежимо малым сопротивлением и емкостью (рис. 220, *a*). В индуктивности начнет течь переменный ток, вследствие

<sup>1)</sup> Всякий проводник (например, прямолинейный отрезок провода) обладает некоторой емкостью и индуктивностью. Поэтому «чистые» активное сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$  являются абстракциями.

чего возникнет э. д. с. самоиндукции [см. формулу (59.9)]

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$$

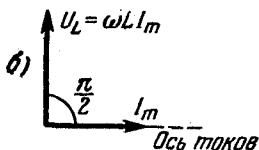
(полагаем, что  $L$  не зависит от  $i$ ). Уравнение (35.1) закона Ома запишется следующим образом ( $R = 0$ , разность потенциалов равна  $U$ ,  $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s$ ):



$$U_m \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = 0,$$

откуда

$$L \frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (93.1)$$



В рассматриваемом случае все внешнее напряжение приложено к индуктивности  $L$ . Следовательно, величина

$$U_L = L \frac{di}{dt} \quad (93.2)$$

Рис. 200.

есть не что иное, как падение напряжения на индуктивности.

Перепишем уравнение (93.1) в виде

$$di = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt.$$

Интегрирование дает

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + \text{const.}$$

Постоянной составляющей тока, очевидно, нет; поэтому  $\text{const} = 0$ . Таким образом,

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (93.3)$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (93.4)$$

Сопоставляя соотношения (92.3) и (93.4), мы видим, что роль сопротивления в данном случае играет величина

$$X_L = \omega L, \quad (93.5)$$

которую называют реактивным индуктивным сопротивлением или просто индуктивным сопротивлением. Если  $L$  взять в генри, а  $\omega$  — в  $\text{сек}^{-1}$ , то  $X_L$  будет выражено в омах.

Как видно из (93.5), величина индуктивного сопротивления растет с частотой  $\omega$ . Постоянному току ( $\omega = 0$ ) индуктивность не оказывает сопротивления. Заменяя в (93.1)  $U_m$  через  $\omega LI_m$ , получим для падения напряжения на индуктивности следующее выражение:

$$U_L = \omega LI_m \cos \omega t. \quad (93.6)$$

Из сравнения выражений (93.3) и (93.6) вытекает, что падение напряжения на индуктивности опережает по фазе ток, текущий через индуктивность, на  $\pi/2$ . Если направить, как и на рис. 199, ось токов горизонтально, получается векторная диаграмма, изображенная на рис. 200, б.

Сдвиг по фазе между током и напряжением на индуктивности легко понять, если учесть, что производная косинуса имеет наибольшее значение в тот момент, когда косинус равен нулю, причем максимум производной достигается на  $1/4$  периода раньше, чем максимум самого косинуса (рис. 201).

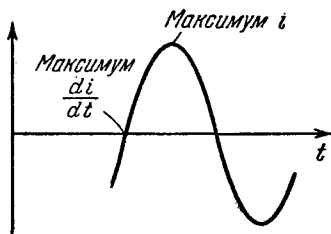


Рис. 201.

## § 94. Переменный ток, текущий через емкость

Пусть напряжение (92.1) подано на емкость  $C$  (рис. 202, а). Индуктивностью цепи и сопротивлением подводящих проводов будем пренебрегать. Емкость непрерывно перезаряжается, вследствие чего в цепи течет переменный ток. Поскольку сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало, напряжение на конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$  можно считать равным внешнему напряжению  $U$ :

$$U_C = \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \quad (94.1)$$



Производная от  $q$  по  $t$  даст силу тока в цепи  $i$ . Умножим выражение (94.1) на  $C$  и продифференцируем по  $t$ , заменив  $\dot{q}$  через  $i$ :

$$i = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (94.2)$$

где

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\left( \frac{1}{\omega C} \right)}. \quad (94.3)$$

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (94.4)$$

называется реактивным емкостным сопротивлением или просто емкостным сопротивлением. Если  $C$  взять в фарадах, а  $\omega$  в  $\text{сек}^{-1}$ , то  $X_C$  будет выражено в омах.

Для постоянного тока ( $\omega = 0$ )  $X_C = \infty$  — постоянный

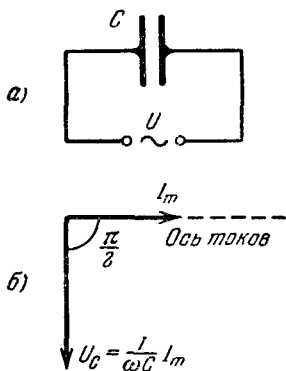


Рис. 202.

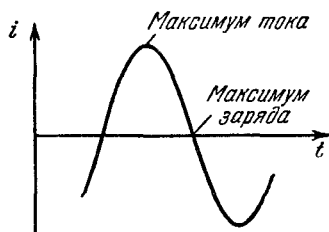


Рис. 203.

ток через конденсатор течь не может. Переменный ток ( $\omega \neq 0$ ) может течь через конденсатор, причем оказываемое току сопротивление будет тем меньше, чем больше частота тока  $\omega$  и емкость конденсатора  $C$ .

Заменив в выражении (94.1)  $U_m$  через  $\frac{1}{\omega C} I_m$ , для падения напряжения на емкости получим

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (94.5)$$

Сравнив (94.2) и (94.5), находим, что падение напряжения на емкости отстает по фазе от текущего через емкость тока на  $\pi/2$  (см. векторную диаграмму на

рис. 202, б). Причина отставания заключена в том, что до тех пор, пока ток течет в одном и том же направлении, заряд на обкладках конденсатора растет. Сила тока проходит через максимум и начинает убывать (рис. 203), а заряд (а следовательно, и  $U_C$ ) все еще продолжает расти, достигая максимума в тот момент, когда  $i$  обращается в нуль. Вслед затем ток изменяет направление и начинается убывание зарядов на обкладках.

### § 95. Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление

Рассмотрим цепь, составленную из активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 204, а). Подадим на концы этой цепи напряжение (92.1) частоты  $\omega$ . В цепи возникнет переменный ток той же частоты, амплитуда  $I_m$  и фаза которого, очевидно, определяются параметрами цепи  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Этот ток вызовет

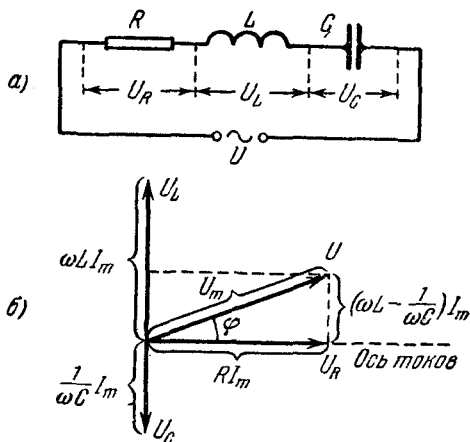


Рис. 204.

на активном сопротивлении падение напряжения  $U_R$ , амплитуда которого равна  $RI_m$ , а фаза совпадает с фазой тока (см. рис. 199, б). Поэтому на векторной диаграмме (рис. 204, б) вектор, изображающий  $U_R$ , нужно отложить по оси токов. Падение напряжения на индуктивности  $U_L$  (с амплитудой  $\omega LI_m$ ) опережает ток по

фазе на  $\pi/2$  (см. рис. 200, б); поэтому вектор, изображающий  $U_L$ , должен быть повернут относительно оси токов на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Наконец, падение напряжения на емкости  $U_C$  (имеющее амплитуду  $\frac{1}{\omega C} I_m$ ) отстает от тока по фазе на  $\pi/2$  (см. рис. 202, б); следовательно, вектор, изображающий  $U_C$ , должен быть повернут относительно оси токов на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке.

Падения напряжений  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению  $U$ . Поэтому, сложив векторы, изображающие  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$ , мы получим вектор, изображающий  $U$  (его длина равна  $U_m$ ). Этот вектор образует с осью токов угол  $\varphi$ , тангенс которого, как видно из рис. 204, б, равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (95.1)$$

Угол  $\varphi$  дает разность фаз между напряжением  $U$  и силой тока  $i$ . Из прямоугольного треугольника, гипотенуза которого  $U_m$ , следует, что

$$(RI_m)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

откуда

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (95.2)$$

Итак, если напряжение на зажимах цепи изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в цепи течет ток

$$i = I_m \cos (\omega t - \varphi), \quad (95.3)$$

где  $\varphi$  и  $I_m$  определяются формулами (95.1) и (95.2).

Величина

$$Z \gg \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (95.4)$$

называется полным сопротивлением цепи. Величина

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (95.5)$$

называется реактивным сопротивлением. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (95.6)$$

Ток отстает от напряжения ( $\varphi > 0$ ) или опережает его ( $\varphi < 0$ ) в зависимости от соотношения между  $X_L$  и  $X_C$ . При  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  ток отстает от напряжения, при  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  ток опережает напряжение. Если  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , изменения тока и напряжения происходят синфазно ( $\varphi = 0$ ). При удовлетворяющей этому условию частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (95.7)$$

полное сопротивление цепи  $Z$  имеет наименьшее, возможное при данных  $R$ ,  $L$  и  $C$ , значение, равное  $R$ . Соответственно сила тока достигает наибольшего (возможного при данном  $U_m$ ) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи. Падения напряжения на емкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется резонансом напряжений, а частота (95.7) — резонансной частотой. Векторная диаграмма для случая резонанса напряжений показана на рис. 205.

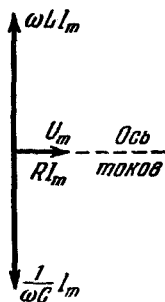


Рис. 205.

Подставив в выражения для амплитуды напряжения на индуктивности ( $U_L = \omega L I_m$ ) и емкости ( $U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$ ) значение резонансной частоты (95.7), получим

$$U_{L\text{рез}} = U_{C\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m.$$

Если  $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$ , напряжение на индуктивности и на емкости превышает напряжение, приложенное к цепи. Явление резонанса напряжений характерно тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным (ток и напряжение изменяются синфазно) и имеет

наименьшую возможную при данных параметрах цепи величину.

Если емкость в цепи отсутствует, приложенное напряжение равно сумме падений напряжения на сопротивлении и индуктивности:  $U = U_R + U_L$ . Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 206. В этом случае, как видно из рисунка,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Формулы (95.1) и (95.2) совпадают с полученными нами выражениями, если положить в них  $\frac{1}{\omega C} = 0$ , т. е.

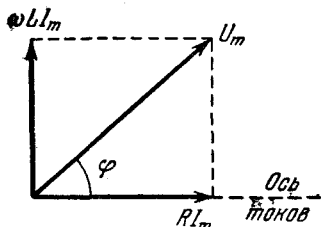


Рис. 206.

$C = \infty$ . Таким образом, отсутствие емкости в цепи означает  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ , как казалось бы на первый взгляд. Это можно пояснить следующим образом. Постепенный переход от цепи, содержащей емкость, к цепи без емкости можно осуществить, сближая обкладки конденсатора до их полного

соприкосновения. При этом зазор между обкладками  $d$  стремится к нулю, а величина емкости стремится к бесконечности [см. формулу (25.2)].

## § 96. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока [ср. с формулой (37.2)]:

$$P(t) = U(t) i(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

выражению для мгновенной мощности можно придать вид

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \quad (96.1)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение  $P(t)$ , которое мы обозначим просто  $P$ . Так как среднее значение  $\cos(2\omega t - \varphi)$  равно нулю,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (96.2)$$

Таким образом, мгновенная мощность (96.1) колеблется около среднего значения (96.2) с частотой  $2\omega$ , в два раза превышающей частоту тока (рис. 207).

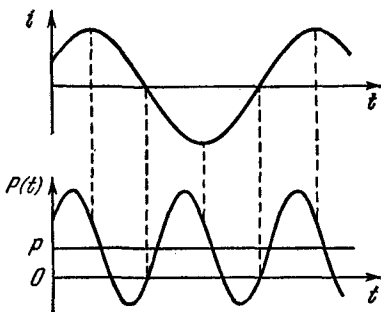


Рис. 207.

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность (96.2) выделяется в активном сопротивлении в виде тепла. В соответствии с формулой (95.1)

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (96.3)$$

Подставив это значение  $\cos \varphi$  в формулу (96.2) и учитывая, что  $\frac{U_m}{Z} = I_m$  [см. формулу (95.2)], получим

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \quad (96.4)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (96.5)$$

Величина (96.5) называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (96.6)$$

называется действующим значением напряжения.

С использованием действующих значений формуле (96.2) для средней мощности можно придать вид

$$P = UI \cos \varphi. \quad (96.7)$$

В выражение для мощности входит множитель  $\cos \varphi$ , который называют коэффициентом мощности.

Если реактивное сопротивление  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  равно нулю (это будет, в частности, при  $X_L = X_C = 0$ ), то согласно (96.3)  $\cos \varphi = 1$  и  $P = UI$ . При чисто реактивном сопротивлении цепи ( $R = 0$ )  $\cos \varphi = 0$ , поэтому и средняя мощность, выделяемая в цепи, равна нулю. В этом случае одну четверть периода тока энергия поступает из внешней сети в цепь, а следующую четверть периода возвращается обратно (мгновенная мощность изменяется с частотой  $2\omega$ ). Таким образом, при  $\cos \varphi = 0$  ни при какой силе тока невозможно получить в цепи среднюю мощность, отличную от нуля. В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно больше. При малом  $\cos \varphi$  для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы. При этом возрастают потери в подводящих проводах и приходится увеличивать их сечение.

## § 97. Символический метод

Расчеты цепей переменного тока значительно упрощаются, если применять так называемый символический метод. Этот метод основывается на том, что, как известно

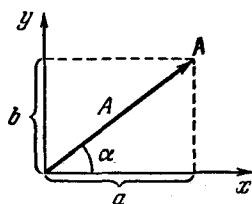


Рис. 208.

из курса математики, каждому вектору  $A$ , расположенному в координатной плоскости (рис. 208), можно сопоставить комплексное число

$$\hat{A} = a + bj = Ae^{j\alpha}, \quad (97.1)$$

где  $a$  и  $b$  — проекции вектора на координатные оси (начало вектора предполагается совмещенным с началом координат),  $A$  — модуль комплексного числа (совпадающий с модулем вектора),  $\alpha$  — аргумент комплекс-

ного числа (совпадающий с углом между вектором и осью  $x$ ),  $j$  — мнимая единица<sup>1)</sup>.

Между величинами  $a, b, A$  и  $\alpha$  имеются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (97.2)$$

При сложении комплексных чисел складываются отдельно их вещественные и мнимые части:

$$\hat{A} = \sum \hat{A}_k = \sum a_k + j \sum b_k.$$

Легко видеть, что  $\hat{A}$  соответствует сумме векторов, изображаемых комплексными числами  $\hat{A}_k$  (рис. 209).

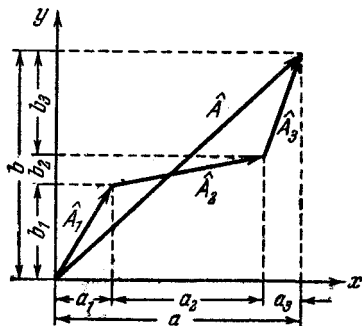


Рис. 209.

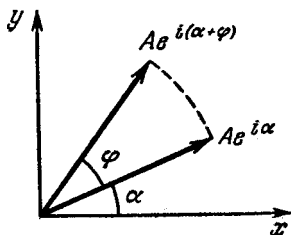


Рис. 210.

Из правила перемножения двух комплексных чисел

$$Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$$

вытекает, что умножение комплексной величины  $\hat{A} = Ae^{j\alpha}$ , изображающей вектор  $\mathbf{A}$  (рис. 210), на

<sup>1)</sup> В отличие от принятого в математике обозначения  $i$ , в электротехнике  $\sqrt{-1}$  обозначают буквой  $j$ . Использование этого обозначения, а также обозначение углов и фаз буквой  $\varphi$  не сможет вызвать недоразумений, так как в главах XV и XVI мы не будем прибегать к понятиям плотности тока и потенциала.

В электротехнике для обозначения комплексных величин вместо «крышечки» (например,  $\hat{U}$ ) применяется точка ( $\dot{U}$ ). Мы не можем воспользоваться таким обозначением, поскольку точка над символом величины в физике всегда означает производную по времени.



комплексное число  $e^{j\varphi}$  равнозначно повороту вектора  $A$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то  $e^{j\varphi} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$ . Таким образом, умножение на  $j$  равнозначно повороту вектора на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Аналогично умножение на  $1/j = -j$  равнозначно повороту вектора на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке.

Чтобы продемонстрировать преимущества символического метода, произведем с его помощью вычисление падений напряжения на индуктивности и емкости. Формула (93.2) запишется в символическом виде следующим образом:

$$\hat{U}_L = L \frac{d\hat{i}}{dt}.$$

Если через индуктивность течет ток

$$\hat{i} = I_m e^{j\omega t}, \quad (97.3)$$

то

$$\hat{U}_L = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j\omega t}) = j\omega L I_m e^{j\omega t} = j\omega L \hat{i}. \quad (97.4)$$

Таким образом, для того чтобы получить вектор напряжения  $U_L$ , нужно вектор силы тока умножить на  $\omega L$  и повернуть против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ . Это согласуется с рис. 200, б.

Согласно (94.1)  $U_C = q/C$ . Заряд на конденсаторе можно записать в виде

$$q = \int i dt.$$

Подставив это выражение в формулу для  $U_C$  и перейдя к символической записи, получим

$$\hat{U}_C = \frac{1}{C} \int \hat{i} dt.$$

Если в цепи течет ток (97.3),

$$\hat{U}_C = \frac{1}{C} \int I_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t} = -j \frac{1}{\omega C} \hat{i} \quad (97.5)$$

(постоянная составляющая напряжения предполагается отсутствующей; поэтому постоянная интегрирования при-

нята равной нулю). Полученный результат согласуется с рис. 202, б.

Падение напряжения на активном сопротивлении, очевидно, равно

$$\hat{U}_R = R\hat{i}. \quad (97.6)$$

В случае цепи, изображенной на рис. 204, а, сумма величин (97.4), (97.5) и (97.6) даст внешнее напряжение  $\hat{U}$ :

$$R\hat{i} + j\omega L\hat{i} - j\frac{1}{\omega C}\hat{i} = \hat{U}.$$

Вынеся  $\hat{i}$  за скобки, получим

$$\hat{i}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \hat{U}. \quad (97.7)$$

Величина

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX \quad (97.8)$$

называется комплексным сопротивлением. В соответствии с формулами (97.2) его модуль равен полному сопротивлению (95.4), а аргумент определяется формулой (95.1), т. е. равен  $\varphi$  — сдвигу фаз между напряжением и током. Следовательно,

$$\hat{Z} = Ze^{j\varphi}. \quad (97.9)$$

С введением комплексного сопротивления формула (97.7) принимает вид

$$\hat{i}\hat{Z} = \hat{U}, \quad (97.10)$$

совпадающий с выражением закона Ома для постоянного тока.

Из соотношения

$$\hat{U} = \hat{i}\hat{Z} = \hat{i}Ze^{j\varphi}$$

вытекает, что вектор напряжения  $\hat{U}$  можно получить, умножив вектор силы тока  $\hat{i}$  на  $Z$  и повернув против часовой стрелки на угол  $\varphi$ . Это согласуется с рис. 204, б.

Представим себе последовательную цепь, отдельные участки которой характеризуются комплексными сопро-

тивлениями  $\hat{Z}_k$  (рис. 211). Согласно (97.10) падение напряжения на каждом из участков равно

$$\hat{U}_k = \hat{i} \hat{Z}_k.$$

Сумма всех  $\hat{U}_k$  должна быть равна напряжению  $\hat{U}$ , приложенному к цепи:

$$\hat{U} = \sum \hat{i} \hat{Z}_k = \hat{i} \sum \hat{Z}_k = \hat{i} \hat{Z}.$$

Таким образом, комплексное сопротивление  $\hat{Z}$  последовательной цепи равно сумме комплексных сопротивлений отдельных ее участков:

$$\hat{Z} = \sum \hat{Z}_k. \quad (97.11)$$

При параллельном соединении элементов цепи, каждый из которых характеризуется комплексным сопротивлением  $\hat{Z}_k$  (рис. 212), полный ток равен

$$\hat{i} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}},$$

где  $\hat{U}$  — приложенное напряжение,  $\hat{Z}$  — комплексное сопротивление цепи. Вместе с тем ток  $\hat{i}$  должен быть

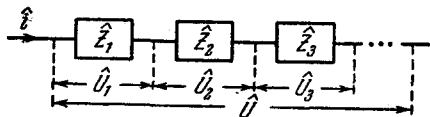


Рис. 211.

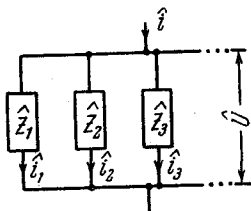


Рис. 212.

равен сумме токов  $\hat{i}_k$ , текущих по отдельным элементам цепи и определяемых выражением  $\hat{i}_k = \hat{U} / \hat{Z}_k$ ,

$$\hat{i} = \sum \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_k}.$$

Приравняв оба выражения для  $\hat{i}$ , получим формулу для вычисления комплексного сопротивления параллельной цепи

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \sum \frac{1}{\hat{Z}_k}. \quad (97.12)$$

Правила Кирхгофа в комплексной форме записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum \hat{i}_k &= 0, \\ \sum \hat{Z}_k \hat{i}_k &= \sum \hat{\mathcal{E}}_k, \end{aligned} \right\} \quad (97.13)$$

где  $\hat{\mathcal{E}}_k = \mathcal{E}_{mk} e^{j(\omega t + \alpha_k)}$  есть  $k$ -я э. д. с., действующая в данном контуре.

Все полученные в настоящем параграфе формулы остаются справедливыми, если вместо амплитудных взять действующие значения токов, напряжений и э. д. с.

## § 98. Резонанс токов

Рассмотрим цепь, образованную включенными параллельно индуктивностью и емкостью (рис. 213). Предположим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. В этом случае согласно формулам (97.4) и (97.5)

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}_1 &= j\omega C \hat{U}; \\ \hat{i}_2 &= \frac{\hat{U}}{j\omega L} = -j \frac{\hat{U}}{\omega L} \end{aligned} \right\} \quad (98.1)$$

$(\hat{U}_C = \hat{U}_L = \hat{U}).$

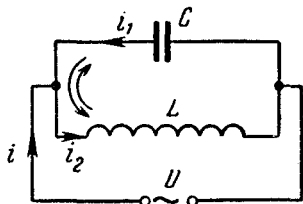


Рис. 213.

Из выражений (98.1) следует, что токи  $i_1$  и  $i_2$  находятся в противофазе (ток в индуктивности отстает от  $U$  на  $\pi/2$ , ток в емкости опережает  $U$  на  $\pi/2$ ). Ток в подводящих проводах  $\hat{i}$  равен сумме токов  $\hat{i}_1$  и  $\hat{i}_2$ :

$$\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 = j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \hat{U}.$$

При условии, что

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (98.2)$$

ток  $\hat{i}$  в подводящих проводах будет отсутствовать, хотя токи  $\hat{i}_1$  и  $\hat{i}_2$  в отдельных цепях могут быть очень велики. Это явление называется резонансом токов. Для резонансной частоты из условия (98.2) получается такое же значение, как и при резонансе напряжений [см. формулу (95.7)].

При резонансе токи  $\hat{i}_1$  и  $\hat{i}_2$  одинаковы по амплитуде и, как уже отмечалось, противоположны по фазе. Следовательно, в контуре, образованном индуктивностью и емкостью, циркулирует ток, непрерывно перезаряжая обкладки конденсатора.

Соотношение между токами  $\hat{i}_1$  и  $\hat{i}_2$  можно изобразить наглядно с помощью векторной диаграммы. На диаграмме напряжений (см. рис. 204, б) векторы  $\hat{U}$  откладывались относительно оси токов. При построении диаграммы токов векторы  $\hat{i}$  нужно откладывать относительно оси напряжений. Выберем в качестве этой оси

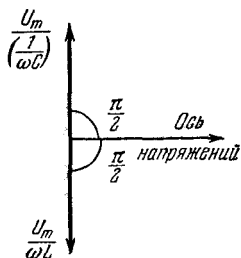


Рис. 214.

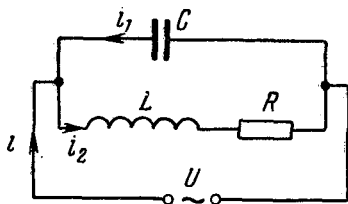


Рис. 215.

ось  $x$  (рис. 214). Ток в индуктивности отстает от напряжения на  $\pi/2$  и потому изображается вектором, повернутым относительно оси напряжений по часовой стрелке на угол  $\pi/2$ . Ток в емкости опережает напряжение на  $\pi/2$ , соответственно он повернут относительно оси напряжений против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ . При резонансе длины векторов обоих токов одинаковы, результирующий ток равен нулю.

Практически индуктивность (например, катушка) всегда обладает некоторым активным сопротивлением  $R^1$  (на рис. 215 это сопротивление и сама индуктивность изображены отдельно). Следовательно, отставание тока от напряжения будет меньше  $\pi/2$  — оно определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

<sup>1)</sup> Это относится также и к конденсатору; однако активное сопротивление в цепи конденсатора может быть сделано значительно меньше, чем в цепи индуктивности.

В этом случае векторы  $\hat{i}_1$  и  $\hat{i}_2$  не коллинеарны и сумма их не может быть равной нулю (рис. 216, а). Комплексные сопротивления обеих ветвей равны (см. рис. 215)

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad \hat{Z}_2 = R + j\omega L.$$

Сопротивление всей цепи будем вычислять по формуле (97.12)

$$\frac{1}{\hat{Z}} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}{R + j\omega L},$$

откуда

$$\hat{Z} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}.$$

Умножив числитель и знаменатель на величину, комплексно сопряженную знаменателю, получим

$$\hat{Z} = \frac{R + j[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}. \quad (98.3)$$

Модуль  $\hat{Z}$  даст полное сопротивление параллельной цепи, а отношение реактивной и активной составляющих  $\hat{Z}$  — тангенс угла  $\varphi$ , определяющего сдвиг фаз между напряжением и током.

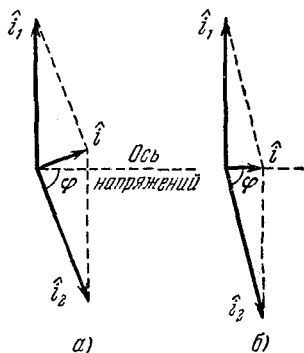


Рис. 216.

Можно показать, что максимум полного сопротивления  $Z$  (т. е. резонанс токов) достигается при условии, что реактивная составляющая  $\hat{Z}$  обращается в нуль и,

следовательно, полное сопротивление становится чисто активным (рис. 216, б). Резонансную частоту можно найти, приравняв нулю мнимую часть выражения (98.3)

$$\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (98.4)$$

При  $R = 0$  эта формула переходит в (95.7).

Итак, резонанс токов характерен тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным и имеет наибольшую, возможную при данных параметрах цепи величину (в случае резонанса напряжений  $Z$  имеет наименьшую величину). При этом токи  $i_1$  и  $i_2$  значительно превышают текущий через источник ток  $i$ . Развиваемая источником мощность выделяется в активном сопротивлении цепи  $R$ .

Для тока частоты (98.4) контур с малым  $R$  имеет очень большое сопротивление, тем большее, чем меньше  $R$  (при  $R \rightarrow 0$  сопротивление контура  $Z$  стремится к бесконечности).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 99. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность и емкость. Такая цепь называется колебательным контуром. На рис. 217, а изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре с активным сопротивлением, равным нулю.

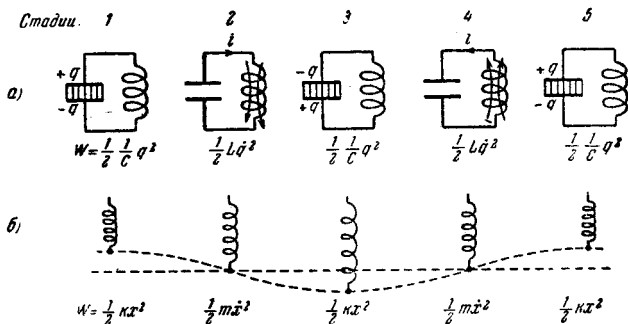


Рис. 217.

Для того чтобы вызвать колебания, можно присоединить отключенный от индуктивности конденсатор к источнику тока, вследствие чего на обкладках возникнут разноименные заряды величины  $q_m$  (стадия 1). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна  $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q_m^2$  [см. формулу (29.1)].



Если затем отключить источник тока и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна  $\frac{1}{2} Li^2$  [см. формулу (61.4)].

Так как активное сопротивление цепи равно нулю, полная энергия, слагающаяся из энергии электрического поля  $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$  и энергии магнитного поля  $\frac{1}{2} Li^2$ , не расходуется на нагревание и будет оставаться постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (стадия 2; начиная с этого момента ток течет за счет э. д. с. самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается и, когда заряды на обкладках достигнут первоначальной величины  $q_m$ , сила тока становится равной нулю (стадия 3). Затем те же процессы протекают в обратном порядке (стадии 4 и 5), после чего система приходит в первоначальное состояние (стадия 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе описанного процесса периодически изменяются (т. е. колеблются) заряд  $q$  на обкладках, напряжение  $U$  на конденсаторе и сила тока  $i$ , текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 217, б колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения  $x_m$ . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная  $\frac{1}{2} kx_m^2$  [см. т. I, формулу (62.3)]. Стадии 2 соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую и определяется выражением

$\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ . Сопоставление дальнейших стадий предостав-  
ляем читателю.

Из сопоставления электрических и механических ко-  
лебаний следует, что энергия электрического поля  
 $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$  аналогична потенциальной энергии упругой де-  
формации, а энергия магнитного поля  $\frac{1}{2} Li^2$  анало-  
гична кинетической энергии. Индуктивность  $L$  играет  
роль массы  $m$ , величина, обратная емкости  $(1/C)$ , —  
роль коэффициента жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  со-  
ответствует смещение маятника из положения равнове-  
сия  $x$ , а силе тока  $i = \dot{q}$  — скорость  $x$ . Как мы увидим  
ниже, аналогия между электрическими и механиче-  
скими колебаниями распространяется и на описываю-  
щие их математические уравнения.

Во время колебаний внешнее напряжение к контуру  
не приложено. Поэтому падения напряжения на емко-  
сти  $U_C = \frac{q}{C}$  и на индуктивности  $U_L = L \frac{di}{dt}$  в сумме  
должны дать нуль

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделив это выражение на  $L$  и заменив  $\frac{di}{dt}$  через  
 $\dot{q}$  ( $i = \dot{q}$ ), приходим к следующему уравнению:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (99.1)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (99.2)$$

уравнение (99.1) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (99.3)$$

хорошо знакомый нам из учения о механических коле-  
баниях [см. т. I, уравнение (62.6)]. Решением этого урав-  
нения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (99.4)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора  
изменяется по гармоническому закону с частотой,

определяемой выражением (99.2). Эта частота называется собственной частотой контура (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора). Для периода колебаний получается так называемая формула Томсона:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (99.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (99.6)$$

Продифференцировав функцию (99.4) по времени, получим выражение для силы тока

$$i = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (99.7)$$

Сопоставляя формулы (99.4) и (99.7), заключаем, что в момент, когда ток достигает максимального значения, заряд (а также напряжение) обращается в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

Из формул (99.6) и (99.7) вытекает, что

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Заменяя  $\omega_0$  по формуле (99.2), получим

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (99.8)$$

Эту формулу можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля  $\left[\frac{1}{2} C U_m^2; \text{ см. (29.1)}\right]$  должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля  $\left(\frac{1}{2} L I_m^2\right)$ .

## § 100. Свободные затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. Урав-

нение колебаний можно получить, исходя из того, что сумма падений напряжения на емкости, индуктивности и активном сопротивлении должна быть равна нулю:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделив это выражение на  $L$  и заменив  $i$  через  $\dot{q}$ , а  $\frac{di}{dt}$  через  $\ddot{q}$ , получим

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (100.1)$$

Учтя, что  $\frac{1}{LC}$  равно квадрату собственной частоты контура  $\omega_0$  [см. формулу (99.2)], и введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (100.2)$$

уравнению (100.1) можно придать вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (100.3)$$

Последнее уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний [см. т. I, формулу (73.2)]. При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , т. е.

$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ , решение уравнения (100.3) имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (100.4)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Подставляя значение (99.2) для  $\omega_0$  и (100.2) для  $\beta$ , находим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (100.5)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний меньше собственной частоты  $\omega_0$ . При  $R = 0$  выражение (100.5) переходит в (99.2).

Разделив (100.4) на емкость  $C$ , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (100.6)$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем (100.4) по времени:

$$i = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Умножим и разделим это выражение на  $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$ :

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

Введя угол  $\psi$ , определяемый условиями

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad ^1),$$

можно написать

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi). \quad (100.7)$$

Поскольку  $\cos \psi < 0$ , а  $\sin \psi > 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ . Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\pi/2$  (при  $R = 0$  опережение составляет  $\pi/2$ ).

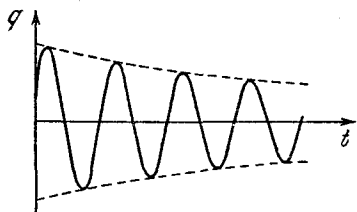


Рис. 218.

График функции (100.4) изображен на рис. 218. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

Затухание колебаний принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания [см. т. I, формулу (73.12)]

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

где  $a(t)$  — амплитуда соответствующей величины ( $q$ ,  $U$  или  $i$ ). Легко проверить, что логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний  $N_e$ , совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}.$$

<sup>1)</sup> Этим условиям можно также придать вид

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}, \quad \cos \psi < 0.$$

Колебательный контур часто характеризуют его добротностью  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (100.8)$$

Из (100.8) следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успеет совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Взяв вместо  $\lambda$  его значение  $\beta T$ , получим

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2\beta} \left( \frac{2\pi}{T} \right) = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Если затухание невелико ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), можно положить  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

[согласно (100.2)  $2\beta = R/L$ ]. Таким образом, в случае не- сильного затухания

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (100.9)$$

Амплитуда силы тока в контуре убывает по закону  $e^{-\beta t}$ . Энергия  $W$ , запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе); следовательно,  $W$  убывает по закону  $e^{-2\beta t}$ . Относительное уменьшение энергии за период равно

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\lambda}.$$

При незначительном затухании (т. е. при условии, что  $\lambda \ll 1$ )  $e^{-2\lambda}$  можно приближенно заменить через  $1 - 2\lambda$ :

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Заменяя в этом выражении  $\lambda$  через добротность контура  $Q$  в соответствии с формулой (100.8) и решив полученное уравнение относительно  $Q$ , получим

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (100.10)$$

Итак, при слабом затухании добротность контура оказывается пропорциональной отношению энергии, запасенной в контуре, к убыли этой энергии за один период колебания.

В заключение отметим, что при  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , т. е.  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ , вместо колебаний происходит аperiодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в аperiодический, называется критическим. Значение критического сопротивления  $R_k$  определяется условием  $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , откуда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (100.11)$$

### § 101. Вынужденные электрические колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура переменную э. д. с. или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение  $U$ . Последний случай рассмотрен подробно в предыдущей главе<sup>1)</sup> (см. рис. 204, а). Однако для того, чтобы провести до конца аналогию между электрическими и механическими колебаниями, мы рассмотрим вынужденные электрические колебания еще раз, придав уравнениям несколько иной вид.

Приравняем сумму падений напряжения на элементах контура приложенному напряжению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = U_m \cos \omega t.$$

Перейдя от тока  $i$  к заряду  $q$  и используя обозначения (99.2) и (100.2), получим уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

<sup>1)</sup> В случае э. д. с. уравнения остаются такими же, нужно лишь функцию  $U = U_m \cos \omega t$  заменить функцией  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$ .

которое совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний [см. т. I, формулу (75.2)]. Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (101.1)$$

где

$$q_m = \frac{\left(\frac{U_m}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

[см. т. I, формулы (75.7) и (75.8)].

Подстановка в эти выражения значений (99.2) и (100.2) для  $\omega_0^2$  и  $\beta$  дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (101.2)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (101.3)$$

Общее решение получится, если к частному решению (101.1) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Это решение было получено в предыдущем параграфе [см. формулу (100.4)], оно содержит экспоненциальный множитель  $e^{-\beta t}$ , поэтому по прошествии с начала колебаний достаточного времени становится очень малым и им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией (101.1). Заметим, что в предыдущей главе рассматривались лишь установившиеся токи и напряжения.

Разделив заряд  $q$  на емкость  $C$ , получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos(\omega t - \psi),$$

где

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (101.4)$$



Продифференцировав функцию (101.1) по  $t$ , найдем установившийся ток в контуре

$$i = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (101.5)$$

Амплитуда тока имеет значение

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (101.6)$$

совпадающее с выражением (95.2).

Введя в (101.5) обозначение  $\varphi = \psi - \pi/2$ , мы придем к выражению для  $i$ , совпадающему с формулой (95.3). В соответствии с (101.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \\ &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы снова пришли к формуле (95.1).

Резонансная частота для заряда  $q$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$  равна [см. т. I, формулу (75.11)]

$$\begin{aligned} \omega_q &= \omega_U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \end{aligned} \quad (101.7)$$

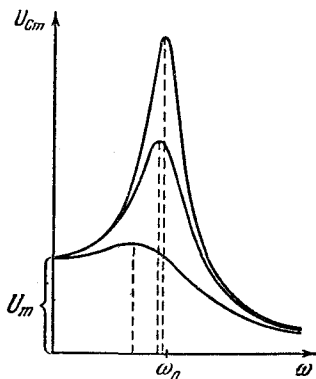


Рис. 219.

Резонансные кривые для  $U_C$  изображены на рис. 219 (резонансные кривые для  $q$  имеют точно такой вид). Они сходны с резонансными кривыми, получающимися для механических колебаний (см. т. I, рис. 189). При  $\omega \rightarrow 0$  резонансные кривые стремятся к  $U_{Cm} = U_m$  — напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения величины  $U_m$ . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше  $\beta = R/2L$ , т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 220. Они соответствуют резонансным кривым для

скорости при механических колебаниях. Амплитуда силы тока (101.6) имеет максимальное значение при  $\omega L - 1/\omega C = 0$ . Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура  $\omega_0$ . Отрезок, отсекаемый резонансными кривыми на оси  $I_m$ , равен нулю — при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может.

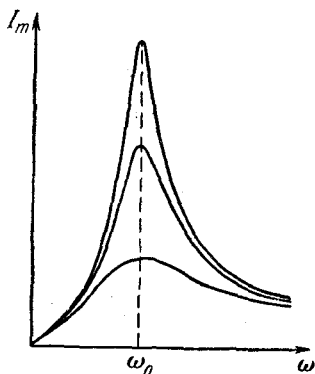


Рис. 220.

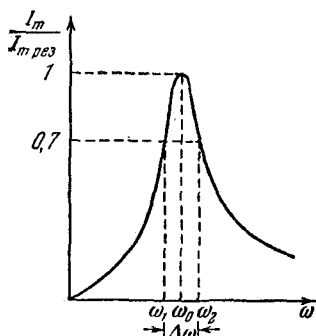


Рис. 221.

При малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансную частоту (101.7) для напряжения можно положить равной  $\omega_0$ :

$$\omega_U \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_U L - \frac{1}{\omega_U C} \approx 0.$$

Согласно формуле (101.4) отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{C \text{ рез}}$  к амплитуде внешнего напряжения  $U_m$  будет в этом случае равно

$$\frac{U_{C \text{ рез}}}{U_m} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C \sqrt{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q,$$

где  $Q$  — добротность контура [см. формулу (100.9)].

Добротность контура характеризует также остроту резонансных кривых. Чтобы убедиться в этом, вычислим так называемую ширину резонансной кривой для силы тока по половине мощности. Под этой величиной

подразумевают разность частот  $\Delta\omega$ , для которых  $I_m^2$  составляет 0,5 от резонансного значения ( $I_m \approx 0,7 I_{m\text{рез}}$ ; рис. 221).

Согласно формуле (101.6) квадрат амплитуды силы тока равен

$$I_m^2 = \frac{U_m^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

При резонансе  $I_m^2$  равно  $I_{m\text{рез}}^2 = \frac{U_m^2}{R^2}$ . Квадрат амплитуды  $I_m^2$  составит 0,5  $I_{m\text{рез}}^2$  при частотах, удовлетворяющих условию

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки, придем после несложных преобразований к следующему уравнению:

$$\frac{\omega^4}{\left(\frac{1}{LC}\right)^2} - 2 \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}\right)} - R^2 \frac{C}{L} \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}\right)} + 1 = 0.$$

В соответствии с формулой (100.9)  $R^2 \frac{C}{L} = \frac{1}{Q^2}$ ,  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ . Поэтому можно написать

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - \left(2 + \frac{1}{Q^2}\right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 = 0.$$

Решим это уравнение относительно  $\omega^2/\omega_0^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} &= 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 - 1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}. \end{aligned}$$

При больших добротностях величинами, содержащими  $Q^2$  в знаменателе, можно пренебречь по сравнению с 1. Тогда получится

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{1}{Q} \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \pm \frac{1}{2Q}.$$

Таким образом, искомые значения частоты равны

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right).$$

Взяв разность  $\omega_2 - \omega_1$ , найдем ширину кривой  $\Delta\omega$ . Относительная ширина кривой  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  оказывается обратной добротности контура  $Q$ :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (101.8)$$

Напомним, что эта формула верна лишь при больших  $Q$ , т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

Мы рассмотрели вынужденные колебания, возникающие при включении внешнего напряжения последовательно с элементами колебательного контура (см. рис. 204, а). Очевидно, что вынужденные колебания можно также осуществить, подключив источник напряжения параллельно колебательному контуру (см. рис. 215). Резонансная частота в этом случае определяется формулой (98.4).

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно

$$U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Настроив контур на одну из частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и т. д. (т. е. подобрав соответствующим образом его параметры  $C$  и  $L$ ), можно получить на конденсаторе напряжение, в  $Q$  раз превышающее величину данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

## § 102. Получение незатухающих колебаний

Для возбуждения незатухающих электрических колебаний применяются автоколебательные системы с электронными лампами, называемые ламповыми генераторами. Одна из простейших схем такого генератора приведена на рис. 222. Колебательный контур, в котором возбуждаются колебания, включен между катодом и

сеткой триода. В анодную цепь включена катушка  $L_a$ , индуктивно связанная с катушкой  $L$  контура. Батарея  $B_c$  служит для того, чтобы сместить рабочую точку лампы на середину прямолинейного участка характеристики (рис. 223). При возникновении колебаний в кон-

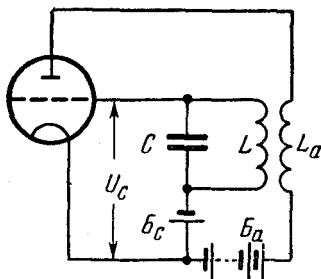


Рис. 222.

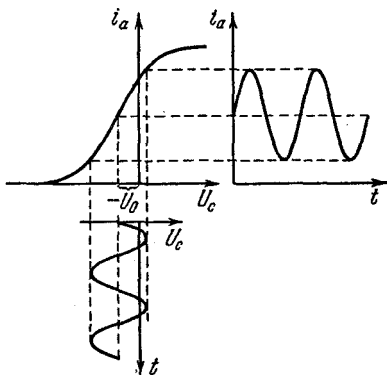


Рис. 223.

туре напряжение на сетке  $U_c$  складывается из напряжения батареи  $B_c$ , равного  $U_0$ , и напряжения на конденсаторе  $U_c = q/C$

$$U_c = U_0 + \frac{q}{C}. \quad (102.1)$$

На рис. 224 график этого напряжения сопоставлен с графиками для заряда  $q$  и силы тока  $i = \dot{q}$  в контуре. Если колебания невелики, напряжение  $U_c$  будет оставаться в пределах прямолинейного участка характеристики. В этом случае между анодным током  $i_a$  и сеточным напряжением  $U_c$  имеет место линейная зависимость:

$$i_a = i_0 + S U_c,$$

где  $S$  — крутизна характеристики на прямолинейном участке, т. е. величина постоянная [см. формулу (75.2)]. Подставив сюда выражение (102.1) для  $U_c$ , получим

$$i_a = i_0 + S U_0 + S \frac{q}{C} = i_{\text{пост}} + \frac{S}{C} q. \quad (102.2)$$

Таким образом, при синусоидальных изменениях заряда  $q$  в катушке  $L_a$  кроме постоянной составляющей

тока  $i_{\text{пост}}$  будет течь переменная составляющая  $i_{\text{пер}} = \frac{S}{C} q$ , изменения которой совершаются в такт с изменениями  $q$  (рис. 224, *а*). Эта составляющая будет наводить в катушке  $L$  переменную э. д. с. взаимной индукции

$$\mathcal{E}_i = -L_{12} \frac{di_a}{dt} = -\frac{L_{12}S}{C} \dot{q}, \quad (102.3)$$

где  $L_{12}$  — взаимная индуктивность катушек  $L$  и  $L_a$ .

Если переключить концы катушки  $L_a$  (что равносильно повороту ее на  $180^\circ$ ), направление  $\mathcal{E}_i$  изменится на противоположное. На рис. 224, *д* и *е* показаны графики  $\mathcal{E}_i$  для обоих способов включения  $L_a$ . Как видно из рисунка, в случае *д*)  $\mathcal{E}_i$  совпадает по фазе с током в контуре и, следовательно, при достаточно сильной связи между катушками может поддерживать колебания незатухающими. Убыль энергии в контуре пополняется за счет источника тока  $B_a$ . При включении катушки  $L_a$ , соответствующем рис. 224, *е*,  $\mathcal{E}_i$  находится в противофазе с  $i$ , вследствие чего препятствует колебаниям в контуре.

Существо протекающих в генераторе процессов заключается в том, что колебательный контур воздействует на анодную цепь лампы, которая в свою очередь оказывает действие на контур. Такой способ получения колебаний называется обратной связью. Соответственно катушку  $L_a$  называют катушкой обратной связи.

Строгая теория лампового генератора (и вообще любой автоколебательной системы, в том числе и механической) очень сложна, так как приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям. Нелинейность является характерным свойством всех автоколебательных систем.

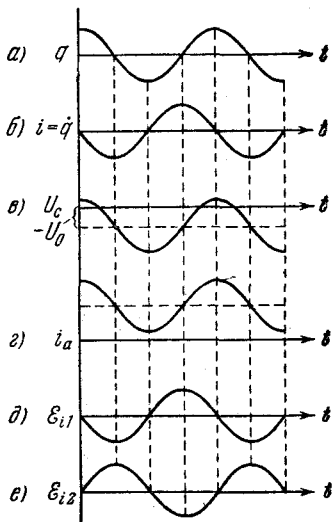


Рис. 224.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## § 103. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения потока магнитной индукции обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре; они также не могут быть силами Лоренца, так как силы Лоренца работы над зарядом не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в контуре электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля  $E_B$ <sup>1)</sup>. Согласно формуле (32.2) э. д. с. индукции равна циркуляции вектора  $E_B$  по контуру:

$$\mathcal{E}_i = \oint E_{B_l} dl. \quad (103.1)$$

В соответствии с формулой (56.3)

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad (103.2)$$

где интеграл берется по произвольной поверхности, опирающейся на контур. Поскольку контур неподвижен, опе-

<sup>1)</sup> Это обозначение, равно как и применяемое в дальнейшем обозначение  $E_q$ , является вспомогательным. Впоследствии индексы  $B$  и  $q$  мы опустим.

рации дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S B_n dS = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.3)$$

Вектор  $\mathbf{B}$  зависит как от времени, так и от координат. В правой части уравнения (103.3) имеется в виду производная по времени от  $\mathbf{B}$  в соответствующей неизменной точке поверхности. Поэтому в подынтегральном выражении применен символ частной производной по времени.

Произведя замену (103.3) в формуле (103.2) и приравняв затем выражения (103.1) и (103.2) для  $\mathcal{E}_i$ , получим

$$\oint E_{Bl} dl = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.4)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве поля  $\mathbf{E}_B$ , независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле  $\mathbf{E}_B$  существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля  $\mathbf{E}_q$ . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора  $\mathbf{E}_q$  по любому контуру равна нулю [см. формулу (9.2)]

$$\oint E_{ql} dl = 0. \quad (103.5)$$

Согласно формуле (103.4) циркуляция вектора  $\mathbf{E}_B$  отлична от нуля. Следовательно, поле  $\mathbf{E}_B$ , как и магнитное поле, оказывается вихревым. Линии напряженности поля  $\mathbf{E}_B$  замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным ( $\mathbf{E}_q$ ), так и вихревым ( $\mathbf{E}_B$ ). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля  $\mathbf{E}_q$ ,



создаваемого зарядами, и поля  $E_B$ , обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив вместе выражения (103.5) и (103.4), получим для напряженности суммарного поля  $E = E_q + E_B$  следующее соотношение:

$$\oint E_l dl = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.6)$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, в правой части — по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.

Выражение (103.6) является одним из основных уравнений электромагнитной теории Максвелла.

### § 104. Бетатрон

Вихревое электрическое поле используется в индукционном ускорителе электронов, называемом **бетатроном**. Этот прибор состоит из тороидальной вакуированной камеры, помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 225). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой порядка 100 гц. Возникающее при этом переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны, и, во-вторых, удерживает электроны на орбите, совпадающей с осью камеры.

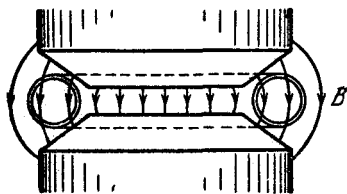


Рис. 225.

Чтобы удержать электрон на орбите постоянного радиуса, необходимо по мере возрастания его скорости увеличивать магнитную индукцию поля [согласно формуле (64,2) радиус орбиты пропорционален  $v/B$ ]. Поэтому для ускорения могут быть использованы лишь 2-я и 4-я четверти периода тока, в начале которых ток в обмотке магнита равен нулю. Таким образом, бетатрон работает в импульсном режиме. В начале импульса в камеру подается из электронной пушки пучок электронов, который подхватывается вихревым электрическим полем и начинает со все воз-

растающей скоростью двигаться по круговой орбите. За время нарастания магнитного поля ( $\sim 10^{-3}$  сек) электроны успевают сделать до миллиона оборотов и приобретают энергию, которая может достигать нескольких сотен Мэв. При такой энергии масса электрона в сотни раз превышает массу покоя, а скорость почти равна скорости света в пустоте  $c$ .

Для того чтобы ускоряемый электрон двигался по орбите постоянного радиуса  $r_0$ , между магнитной индукцией поля на орбите и внутри нее должно выполняться простое соотношение, которое мы сейчас найдем. Вихревое поле направлено по касательной к орбите, по которой движется электрон. Следовательно, циркуляцию вектора  $\mathbf{E}$  по этой орбите можно представить в виде  $2\pi r_0 E$ . Вместе с тем согласно формулам (103.1) и (103.2) циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  равна  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Знак «—» указывает направление  $\mathbf{E}$ . Нас будет интересовать лишь величина напряженности поля, поэтому знак «—» мы в дальнейшем опустим. Приравняв оба выражения для циркуляции, найдем, что

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Уравнения движения электрона запишутся следующим образом:

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE = \frac{e}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (104.1)$$

$$\frac{mv^2}{r_0} = evB_{\text{орб}} \quad (104.2)$$

(последнее уравнение получается, если произведение массы электрона на его центростремительное ускорение приравнять лоренцевой силе;  $B_{\text{орб}}$  — магнитная индукция поля на орбите).

Начав отсчет времени с момента, когда  $v$  и  $\Phi$  равны нулю, и проинтегрировав уравнение (104.1) от 0 до  $t$ , получим

$$mv = \frac{e}{2\pi r_0} \Phi.$$

Магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Поэтому можно положить  $\Phi = \pi r_0^2 \bar{B}$ , где  $\bar{B}$  — среднее

по площади орбиты значение магнитной индукции. Тогда имеем

$$mv = \frac{er_0}{2} \bar{B}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с (104.2), находим искомое условие

$$B_{\text{орб}} = \frac{1}{2} \bar{B}.$$

Таким образом, для того чтобы электрон все время двигался по орбите радиуса  $r_0$ , магнитная индукция на орбите должна составлять половину среднего значения магнитной индукции внутри орбиты. Это достигается за счет изготовления полюсных наконечников в виде усеченных конусов (см. рис. 225).

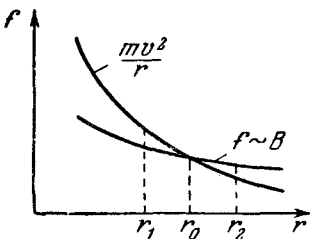


Рис. 226.

Для устойчивости электрона на орбите необходимо, чтобы при случайных радиальных отклонениях электрона возникали силы, возвращающие его снова на орбиту радиуса  $r_0$ . Для этого магнитная индукция должна в окрестности орбиты убывать с

расстоянием  $r$  от центра медленнее, чем  $1/r$  (рис. 226). Центробежное ускорение убывает по закону  $1/r$ . Следовательно, при переходе электрона на орбиту радиуса  $r_1 < r_0$  лоренцева сила окажется недостаточной для сообщения электрону необходимого центробежного ускорения, вследствие чего он удалится от центра и вернется на орбиту радиуса  $r_0$ . При переходе электрона на орбиту радиуса  $r_2 > r_0$  сила Лоренца окажется больше, чем необходимо для сообщения ускорения  $v^2/r_2$ , вследствие чего она вернет электрон на устойчивую орбиту радиуса  $r_0$ .

Осевая устойчивость электрона обеспечивается «бочкообразностью» магнитного поля (см. рис. 225). Сила Лоренца перпендикулярна к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Следовательно, при отклонении электрона от плоскости орбиты (т. е. в осевом направлении) появляется составляющая силы, которая, как легко видеть из рис. 227, возвращает орбиту электрона в прежнюю плоскость.

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет ускоренные электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны испускают жесткое электромагнитное излучение ( $\gamma$ -лучи, рентгеновские лучи).

Применяются бетатроны главным образом в ядерных исследованиях. Небольшие ускорители на энергию до 50 Мэв нашли применение в промышленности как источники очень жесткого рентгеновского излучения, используемого для целей дефектоскопии массивных изделий.

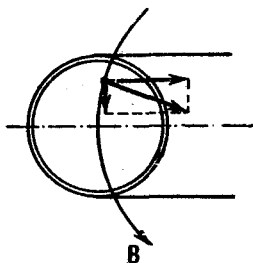


Рис. 227.

## § 105. Ток смещения

Как было выяснено в § 103, из явления электромагнитной индукции вытекает, что наличие в пространстве изменяющегося магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля. Основная идея Максвелла заключается в том, что между электрическим и магнитным полями имеется и обратное соотношение, т. е. что изменяющееся со временем электрическое поле должно приводить к появлению магнитного поля. Эта идея оказалась исключительно плодотворной. Разработанная Максвеллом на ее основе электромагнитная теория получила блестящее экспериментальное подтверждение.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим и возникающим магнитным полями Максвелл ввел в рассмотрение так называемый ток смещения. Рассмотрим цепь квазистационарного переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 228). Движение свободных носителей заряда, т. е. ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Следовательно, линии тока проводимости терпят на границах обкладок разрыв. Зато в пространстве между обкладками имеется переменное электрическое поле, которое можно

охарактеризовать смещением  $D$ . Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока, названного им током смещения<sup>1)</sup>.

Мгновенное значение силы тока равно  $i = \dot{q}$ . Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением

$$j_{\text{пр}} = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{S} \right) = \dot{\sigma},$$

где  $S$  — площадь обкладки,  $q$  — распределенный на ней заряд,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.

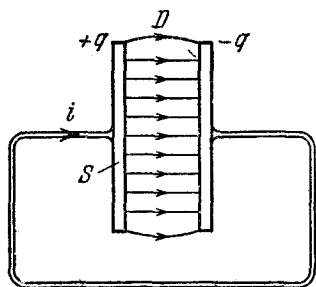


Рис. 228.

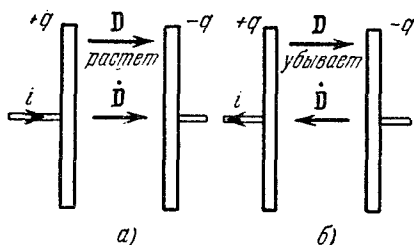


Рис. 229.

Чтобы линии тока смещения имели такую же густоту, как и линии тока проводимости, плотность тока смещения  $j_{\text{см}}$  также должна быть равна  $\dot{\sigma}$ . Выразим  $j_{\text{см}}$  через параметры электрического поля, имеющегося в зазоре. Согласно формулам (16.19) и (8.6) электрическое смещение в зазоре между обкладками равно  $D = \epsilon_0 E_0 = \sigma$ , откуда  $\dot{\sigma} = \dot{D}$ .

Таким образом, нужно положить

$$j_{\text{см}} = \dot{D}. \quad (105.1)$$

Рис. 229 поясняет, что направление вектора  $j_{\text{пр}}$ , а следовательно и вектора  $j_{\text{см}}$ , совпадает с направлением

<sup>1)</sup> Во времена Максвелла считалось, что электрические поля вызваны механическими натяжениями в гипотетической упругой среде, называемой мировым эфиром. Предполагалось, что эти натяжения приводят к смещению частиц эфира из положения равновесия.

вектора  $\mathbf{D}$ . При указанных на рис. 229, а знаках зарядов и направлении тока  $i$  вектор  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  направлен слева направо. Вектор  $\mathbf{D}$  также направлен слева направо и растет по величине. Следовательно, приращение вектора  $\mathbf{D}$ , а значит и вектор  $\dot{\mathbf{D}}$ , имеет то же направление, что и  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ . При направлении тока, указанном на рис. 229, б, вектор  $\mathbf{D}$  убывает по величине. Следовательно, вектор  $\dot{\mathbf{D}}$  направлен справа налево, т. е. опять так же, как и вектор  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ . На этом основании выражение (105.1) можно написать в векторном виде

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \dot{\mathbf{D}}. \quad (105.2)$$

Формулу (105.2), определяющую плотность тока смещения, Максвелл распространил на электрические поля любого вида<sup>1)</sup>, в том числе и на вихревые поля. Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Согласно Максвеллу при расчетах магнитных полей в формулы нужно подставлять полную плотность тока, слагающуюся из плотности тока проводимости и плотности тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \dot{\mathbf{D}}. \quad (105.3)$$

В частности, циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  по любому контуру [см. формулу (44.7)] должна быть равна

$$\oint H_l dl = \int_S (\mathbf{j}_{\text{полн}})_n dS = \int_S (\mathbf{j}_{\text{пр}} + \dot{\mathbf{D}})_n dS. \quad (105.4)$$

Уравнение (105.4) представляет собой второе основное уравнение теории Максвелла.

Согласно формуле (105.2) ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся электрическое поле. Следовательно, он существует и внутри проводника, по которому течет переменный электрический ток. Однако внутри проводов  $\mathbf{j}_{\text{см}}$  обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ .

<sup>1)</sup> Под  $\dot{\mathbf{D}}$  в этом случае следует понимать  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , поскольку  $\mathbf{D}$  может зависеть не только от времени, но и от координат.

В гауссовой системе выражение, определяющее ток смещения, имеет вид

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \dot{D}. \quad (105.5)$$

## § 106. Электромагнитное поле

Согласно идеям Максвелла переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, в свою очередь переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным. Таким образом, электрическое и магнитное поля оказываются неразрывно связанными друг с другом — они образуют единое электромагнитное поле.

Анализ результатов фундаментального опыта Майкельсона<sup>1)</sup> и других опытных фактов привел Эйнштейна к заключению, что принцип относительности, установленный Галилеем для механических явлений (см. т. I, § 17), должен быть распространен и на все другие физические явления. Согласно принципу относительности, сформулированному Эйнштейном, *законы всех физических явлений, в том числе и электромагнитных, имеют одинаковый вид (т. е. описываются одинаковыми уравнениями) во всех инерциальных системах отсчета.*

Из принципа относительности вытекает, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако, если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле (движущийся заряд эквивалентен току). Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод находится в движении. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой точке с данными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы

<sup>1)</sup> Этот опыт будет изложен в Оптике.

отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

## § 107. Описание свойств векторных полей

Поток вектора через некоторую поверхность и циркуляция вектора по заданному контуру позволяют судить о характере векторного поля. Однако эти величины дают среднюю характеристику поля в пределах объема, охватываемого поверхностью, через которую определяется поток, или в окрестности контура, по которому берется циркуляция. Уменьшая размеры поверхности или контура (стягивая их в точку), можно прийти к величинам, которые будут характеризовать векторное поле в данной точке. Для того чтобы ввести эти величины, нам придется более глубоко вникнуть в смысл понятий потока и циркуляции.

Пусть нам дано поле вектора скорости несжимаемой неразрывной жидкости. Поток вектора скорости через некоторую поверхность дает, как мы знаем, объем жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени. Возьмем в окрестности точки  $P$  воображаемую замкнутую поверхность  $S$  (рис. 230). Если в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью, жидкость не возникает и не исчезает, то поток, вытекающий наружу через поверхность, будет, очевидно, равен нулю. Отличие потока от нуля будет указывать на то, что внутри поверхности имеются источники или стоки жидкости, т. е. точки, в которых жидкость поступает в объем (источники), либо удаляется из объема (стоки). Величина потока определяет суммарную алгебраическую мощность источников и стоков<sup>1)</sup>. При преобладании источников над стоками величина потока будет положительной, при преобладании стоков — отрицательной.

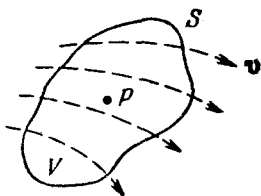


Рис. 230.

<sup>1)</sup> Под мощностью источника (стока) понимается объем жидкости, выделяемый (поглощаемый) в единицу времени. Сток можно рассматривать как источник с отрицательной мощностью.



Частное от деления потока  $\Phi_{\text{жидк}}$  на величину объема, из которого поток вытекает, т. е.

$$\frac{\Phi_{\text{жидк}}}{V}, \quad (107.1)$$

назовем средней удельной мощностью источников, заключенных в объеме  $V$ . Чем меньше объем  $V$ , включающий в себя точку  $P$ , тем ближе это среднее к истинной удельной мощности в этой точке. В пределе при стремлении  $V$  к нулю, т. е. при стягивании объема  $V$  к точке  $P$ , выражение (107.1) даст истинную удельную мощность источников в точке  $P$ , которую называют дивергенцией (или расхождением) вектора  $\mathbf{v}$  (обозначается  $\text{div } \mathbf{v}$ ). Итак, по определению

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\Phi_{\text{жидк}}}{V}.$$

Аналогично определяется дивергенция любого вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\Phi_{\mathbf{A}}}{V} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \oint_{\mathcal{S}} A_n dS. \quad (107.2)$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности  $\mathcal{S}$ , ограничивающей объем  $V$ . Поскольку совершается переход  $V \rightarrow P$ , при котором  $\mathcal{S}$  стремится к нулю, от формы поверхности выражение (107.2) зависеть не может.

Легко сообразить, что дивергенция определяется поведением векторной функции  $\mathbf{A}(P)$  в окрестности данной точки, т. е. тем, каков характер изменения вектора  $\mathbf{A}$  (или его компонент  $A_x, A_y, A_z$ ) при переходе от одной точки пространства к другой.

Из определения (107.2) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве (кратко — функция точки). Определение (107.2) является самым общим, не зависящим от выбора координатной системы.

Найдем выражение для дивергенции в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки  $P(x, y, z)$  малый объем в виде параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 231) [напомним, что форма поверхности, по которой берется интеграл в выражении (107.2), может быть произволь-

ной]. Ввиду малости объема [согласно (107.2) мы будем его стремить к нулю] значения  $A_x, A_y, A_z$  в пределах каждой из шести граней параллелепипеда можно считать неизменными. Поток через всю замкнутую поверхность образуется из потоков, текущих через каждую из шести граней в отдельности.

Найдем поток через пару граней, перпендикулярных к оси  $x$  (на рис. 231 эти грани заштрихованы косой штриховкой и помечены цифрами 1 и 2). Внешняя нормаль  $\mathbf{n}_2$  к грани 2 совпадает с направлением оси  $x$ . Следовательно,  $A_{n_2} = A_{x_2}$  и поток через грань 2 равен  $A_{x_2} \Delta y \Delta z$  (индекс 2 указывает на то, что значение  $A_x$  берется в том месте, где расположена грань 2). Нормаль  $\mathbf{n}_1$  к грани 1 имеет направление, противоположное оси  $x$ . Поэтому проекции вектора на ось  $x$  и на  $\mathbf{n}_1$  имеют противоположные знаки. Таким образом,  $A_{n_1} = -A_{x_1}$ , а поток через грань 1 равен  $-A_{x_1} \Delta y \Delta z$  (индекс 1 указывает на то, что значение  $A_x$  берется в том месте, где расположена грань 1). Суммарный поток через грани 1 и 2 определяется выражением

$$(A_{x_2} - A_{x_1}) \Delta y \Delta z. \quad (107.3)$$

Разность  $A_{x_2} - A_{x_1}$  представляет собой приращение  $A_x$  при смещении вдоль оси  $x$  на  $\Delta x$ . Ввиду малости  $\Delta x$  это приращение можно представить в виде  $\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$ . Тогда (107.3) переходит в

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V.$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям  $y$  и  $z$ , выражения

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V.$$

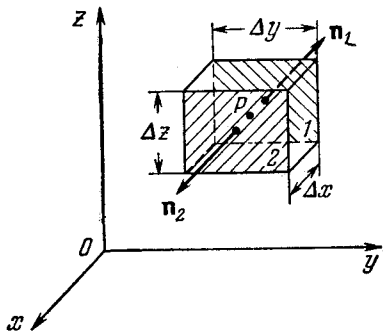


Рис. 231.

Следовательно, полный поток через всю замкнутую поверхность определяется выражением

$$\Phi_A = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V.$$

Разделив это выражение на  $\Delta V$ , найдем дивергенцию вектора  $\mathbf{A}$  в точке  $P(x, y, z)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (107.4)$$

(предельный переход  $V \rightarrow P$  мы предвосхитили, полагая  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$  в пределах каждой из граней постоянными величинами).

Зная дивергенцию вектора  $\mathbf{A}$  в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую поверхность конечных размеров. Для этого разобьем объем, ограниченный поверхностью  $S$ , на большое

(в пределе бесконечно большое) число малых (в пределе бесконечно малых) объемчиков (рис. 232). Согласно формуле (107.2) поток вектора  $\mathbf{A}$ , вытекающий из любого из этих объемчиков, может быть записан в виде

$$\text{поток} = \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta V.$$

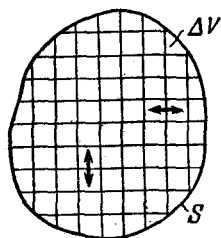


Рис. 232.

Если просуммировать это выражение по всем объемчикам, справа получится

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV,$$

взятый по всему объему, ограниченному поверхностью  $S$ , а слева, как легко убедиться, получится поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность  $S$ . В самом деле, при суммировании каждый из потоков, текущих через грани, разделяющие два соседних объемчика, войдет дважды с противоположными знаками (значения  $A_n$  для соседних объемчиков одинаковы по абсолютной величине, но отличаются знаком). Поэтому потоки через внутренние перегородки взаимно уничтожаются, некомпенсированными останутся только потоки через внешние грани объемчиков, которые в сумме дадут поток через  $S$ .

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$\oint_S A_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV, \quad (107.5)$$

которое носит название теоремы Остроградского-Гаусса.

Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур  $\Gamma$ . Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур  $\Gamma$  (рис. 233). В зависимости от характера течения (от характера поля вектора скорости) жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений.

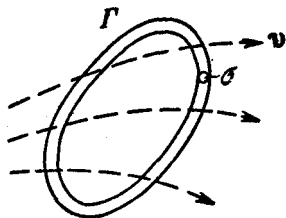


Рис. 233.

В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале, умноженной на длину контура  $l$ . Эту величину назвали циркуляцией вектора  $\mathbf{v}$  по контуру  $\Gamma$ <sup>1)</sup>. Итак,

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl$$

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости  $v = \text{const}$ ).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости  $v_t$ , касательная к контуру. С этой составляющей связан импульс  $dp_t$ , модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины  $dl$ , имеет величину  $\rho \sigma v_t dl$  ( $\rho$  — плотность жидкости,  $\sigma$  — площадь поперечного сечения канала). Поскольку жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление  $dp_t$ , но не его величину. Взаимодействие

<sup>1)</sup> Идея такого объяснения смысла циркуляции заимствована у Фейнмана (см. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5, стр. 17, «Мир», 1966).

между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выровняет скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу, теряемому второй частицей. Это означает, что

$$\rho \sigma v l = \oint_{\Gamma} \rho \sigma v_l dl,$$

где  $v$  — скорость циркуляции,  $v_l$  — касательная составляющая скорости жидкости в объеме  $\sigma dl$  в момент времени, предшествовавший затвердеванию стенок канала.

Сократив на  $\rho \sigma$ , получим, что

$$\text{циркуляция } v \text{ по } \Gamma = v l = \oint_{\Gamma} v_l dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора  $\mathbf{A}$  по произвольному контуру  $\Gamma$ :

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} \text{ по } \Gamma = \bar{A}_l l = \oint_{\Gamma} A_l dl, \quad (107.6)$$

где  $\bar{A}_l$  — среднее по контуру значение касательной составляющей вектора  $\mathbf{A}$ .

Можно подумать, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 234). Линии тока (линии вектора  $\mathbf{v}$ ) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора  $\mathbf{v}$  по изображенному пунктиром контуру, очевидно, отлична от нуля.

Циркуляция характеризует свойства поля, усредненные по области с размерами порядка поперечника контура  $\Gamma$ . Чтобы получить характеристику свойств поля в точке  $P$ , нужно уменьшать размеры контура  $\Gamma$ , стягивая его в точку  $P$ . Однако сама циркуляция при этом обратится в нуль. Действительно, среднее значение  $A_l$  — конечная величина, а длина контура  $l$  в пределе равна

нулю. Следовательно, и произведение  $\vec{A}l$  обращается в нуль. Поэтому целесообразно в качестве характеристики поля вектора  $\vec{A}$  в точке  $P$  взять предел отношения циркуляции вектора  $\vec{A}$  по плоскому контуру  $\Gamma$ , стягивающемуся к точке  $P$ , к величине площади контура  $S$ <sup>1)</sup>:

$$\lim_{S \rightarrow P} \frac{\text{циркуляция } \vec{A} \text{ по } \Gamma}{S}. \quad (107.7)$$

Однако при нахождении предела (107.7) обнаруживается следующее осложнение: величина этого предела

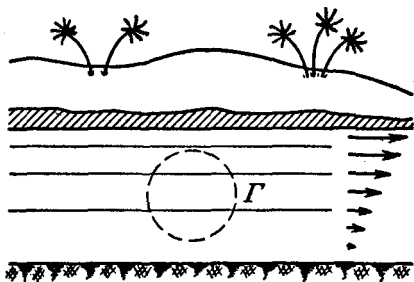


Рис. 234.

зависит не только от свойств поля в точке  $P$ , но также и от ориентации контура в пространстве, которая может быть задана направлением положительной нормали  $\vec{n}$  к плоскости контура (положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура при интегрировании правилом правого винта). Определяя предел (107.7) в одной и той же точке  $P$  для разных направлений  $\vec{n}$ , мы будем получать различные значения, причем для противоположных направлений эти значения отличаются только знаком (изменение направления  $\vec{n}$  на противоположное эквивалентно изменению направления обхода по контуру во время интегрирования, что вызовет лишь изменение знака у циркуляции). Для какого-то направления нормали величина (107.7) в данной точке окажется максимальной.

<sup>1)</sup> В случае дивергенции берется отношение интеграла по поверхности к объему, охватываемому этой поверхностью. В данном случае берется отношение интеграла по контуру к поверхности, охватываемой этим контуром.

Таким образом, величина (107.7) ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Максимальное значение величины (107.7) определяет модуль этого вектора, а направление положительной нормали  $\mathbf{n}$ , при котором достигается максимум, дает направление вектора. Этот вектор называется ротором (или вихрем) вектора  $\mathbf{A}$ . Обозначается он символом  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Используя это обозначение, можно записать выражение (107.7) в виде

$$\lim_{S \rightarrow P} \frac{\text{циркуляция } \mathbf{A} \text{ по } \Gamma}{S} = (\text{rot } \mathbf{A})_{\mathbf{n}}. \quad (107.8)$$

Под  $(\text{rot } \mathbf{A})_{\mathbf{n}}$  подразумевается проекция вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  на положительную нормаль к площадке  $S$ , охватываемой контуром  $\Gamma$ .

Выражение (107.8) может служить определением вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Из него следует, что ротор есть векторная функция точки  $P$ .

Определение (107.8) является самым общим, не зависящим от выбора системы координат. Для того чтобы

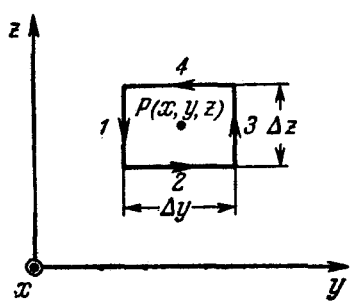


Рис. 235.

найти выражения для проекций вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (107.8) для таких ориентаций площадки  $S$ , при которых нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке совпадает с одной из осей  $x, y, z$ . Если, например, направить  $\mathbf{n}$  по оси  $x$ , то (107.8) превратится в  $(\text{rot } \mathbf{A})_x$ . Контур  $\Gamma$  расположен в этом случае в плоскости, параллель-

ной координатной плоскости  $yz$ . Возьмем этот контур в виде прямоугольника со сторонами  $\Delta y$  и  $\Delta z$  (рис. 235; ось  $x$  имеет на этом рисунке направление на нас; указанное на рисунке направление обхода связано с направлением оси  $x$  правилом правого винта). Имея в виду предельный переход  $S \rightarrow P$ , можно считать значения  $A_y$  и  $A_z$  на каждой из четырех сторон контура неизменными. Участок 1 контура противоположен по направле-

нию оси  $z$ . Поэтому  $A_1$  на этом участке совпадает с  $-A_{z1}$  (индекс 1 указывает на то, что  $A_z$  берется в том месте, где расположен участок 1). Рассуждая аналогично, найдем, что  $A_1$  на участках 2, 3 и 4 равна соответственно  $A_{y2}$ ,  $A_{z3}$  и  $-A_{y4}$ . В итоге получим для циркуляции значение

$$(A_{z3} - A_{z1}) \Delta z - (A_{y4} - A_{y2}) \Delta y. \quad (107.9)$$

Разность  $A_{z3} - A_{z1}$  представляет собой приращение  $A_z$  при смещении вдоль оси  $y$  на  $\Delta y$ . Ввиду малости  $\Delta y$  это приращение можно представить в виде  $\frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y$ . Аналогично разность  $A_{y4} - A_{y2}$  можно представить в виде  $\frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z$ . Подставив эти выражения в (107.9) и вынося общий множитель за скобки, получим

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta S,$$

где  $\Delta S$  — площадь контура. Разделив циркуляцию на  $\Delta S$ , найдем выражение для проекции  $\text{rot } \mathbf{A}$  на ось  $x$ :

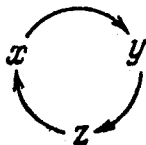
$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (107.10)$$

(предельный переход  $S \rightarrow P$  мы предвосхитили, предположив, что на каждом из участков контура  $A_y$  и  $A_z$  неизменны). Путем аналогичных рассуждений можно найти, что

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (107.11)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (107.12)$$

Легко убедиться в том, что любое из выражений (107.10) — (107.12) может быть получено из предыдущего [для (107.10) предыдущим следует считать (107.12)] путем так называемой циклической перестановки координат, т. е. замены координат, осуществляемой по схеме:





Итак, ротор вектора  $\mathbf{A}$  определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (107.13)$$

Ниже мы укажем более изящный способ записи этого выражения.

Зная ротор вектора  $\mathbf{A}$  в каждой точке некоторой поверхности  $S$ , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру, ограничивающему  $S$ . Для этого разобьем поверхность на очень малые элементы  $\Delta S$ . Согласно (107.8) циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по контуру, ограничивающему  $\Delta S$ , может быть представлена в виде

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n \Delta S,$$

где  $\mathbf{n}$  — положительная нормаль к элементу поверхности  $\Delta S$ . Просуммировав эти выражения по всей поверхности  $S$ , справа получим

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n dS, \text{ слева — циркуляцию } \mathbf{A}$$

по контуру  $\Gamma$ . Действительно, при суммировании слагаемые  $A_i \Delta l$ , отвечающие отрезкам, разделяющим смежные элементы поверхности, взаимно уничтожаются. Например, для  $\Delta S$ , лежащей слева от  $MN$  (рис. 236), этот участок при определении циркуляции проходится в направлении  $N \rightarrow M$ , а для  $\Delta S$ , лежащей справа от  $MN$ , тот же участок проходится в направлении  $M \rightarrow N$ . Следовательно, отвечающие  $MN$  слагаемые  $A_i \Delta l$  отличаются для смежных площадок лишь знаком и при сложении дают нуль. Некомпенсированными останутся только слагаемые  $A_i \Delta l$  для внешних (по отношению ко всей поверхности  $S$ ) участков отдельных контуров, которые в сумме дадут  $\oint_{\Gamma} A_i dl$ .

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$\oint_{\Gamma} A_i dl = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n dS, \quad (107.14)$$

которое носит название теоремы Стокса.

Написание формул векторного анализа значительно упрощается и облегчается, если ввести в рассмотрение векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом  $\nabla$  (набла) и носящий название оператора набла или оператора Гамильтона. Под этим оператором подразумевается вектор с составляющими  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Следовательно,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (107.15)$$

Сам по себе этот вектор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается. Так, если умножить вектор  $\nabla$  на скаляр  $\varphi$ , то получится вектор

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (107.16)$$

который, как мы знаем (см. § 11), называется градиентом функции  $\varphi$ .

Если вектор  $\nabla$  умножить скалярно на вектор  $\mathbf{A}$ , получится скаляр

$$\nabla \mathbf{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (107.17)$$

который есть не что иное, как дивергенция вектора  $\mathbf{A}$  [см. (107.4)].

Наконец, если умножить  $\nabla$  на  $\mathbf{A}$  векторно, получится вектор с составляющими:  $[\nabla \mathbf{A}]_x = \nabla_y A_z - \nabla_z A_y = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$  и т. д., которые совпадают с составляющими  $\text{rot } \mathbf{A}$  [см. (107.10) — (107.12)]. Следовательно, воспользовавшись записью векторного произведения с помощью определителя, можно написать:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (107.18)$$

Пользуясь вектором  $\nabla$ , нужно помнить, что он является дифференциальным оператором, действующим на

все функции, стоящие справа от него. Поэтому при преобразовании выражений, в которые входит  $\nabla$ , нужно учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференциального исчисления. Так, например, производная произведения функций  $\varphi$  и  $\psi$  равна

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'.$$

В соответствии с этим

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \psi.$$

Градиент некоторой функции  $\varphi$  представляет собой векторную функцию. Поэтому к нему могут быть применены операции и дивергенции, и ротора:

$$\begin{aligned} \text{div grad} \varphi = \nabla(\nabla\varphi) &= (\nabla\nabla)\varphi = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2)\varphi = \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \end{aligned} \quad (107.19)$$

( $\Delta$  — оператор Лапласа),

$$\text{rot grad} \varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0, \quad (107.20)$$

так как векторное произведение вектора на самого себя равно нулю.

Электростатическое поле  $\mathbf{E}$  может быть представлено как градиент потенциала  $\varphi$  [см. формулу (11.3)]. Согласно (9.2) циркуляция этого поля для любого контура равна нулю, что согласуется с (107.20).

Ротор вектора  $\mathbf{A}$  является векторной функцией точки. Следовательно, к нему могут быть применены операции дивергенции и ротора:

$$\text{div rot} \mathbf{A} = \nabla[\nabla\mathbf{A}] = 0 \quad (107.21)$$

(из векторной алгебры известно, что смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах; если два из этих векторов совпадают, то объем параллелепипеда равен нулю),

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \mathbf{A} = [\nabla, [\nabla\mathbf{A}]] &= \nabla(\nabla\mathbf{A}) - (\nabla\nabla)\mathbf{A} = \\ &= \text{grad div} \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \end{aligned} \quad (107.22)$$

[мы воспользовались формулой  $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ].

Из формулы (107.21) вытекает, что поле ротора не имеет источников, линии такого поля замкнуты, либо уходят в бесконечность. Подобным свойством обладают линии магнитного поля. Это позволяет представить поле вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  как поле ротора некоторой векторной функции  $\mathbf{A}$ <sup>1)</sup>, которую называют векторным потенциалом

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (107.23)$$

Входить в дальнейшие подробности по поводу векторного потенциала мы не имеем возможности.

## § 108. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (103.6) и (44.1). Для удобства изложения напомним их еще раз

$$\oint E_t dl = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS, \quad (108.1)$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (108.2)$$

Первое из этих уравнений связывает значения  $\mathbf{E}$  с временными изменениями вектора  $\mathbf{B}$  и является по существу выражением закона электромагнитной индукции.

<sup>1)</sup> Во всех предыдущих формулах символом  $\mathbf{A}$  мы обозначали произвольный вектор. Векторный потенциал магнитного поля принято обозначать этим же символом  $\mathbf{A}$ .

Второе уравнение отражает то свойство вектора  $\mathbf{B}$ , что его линии замкнуты (или уходят в бесконечность).

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (105.4) и (16.6):

$$\oint H_t dl = \int_S j_n dS + \int_S \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS, \quad (108.3)$$

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV \quad (108.4)$$

(под  $j$  здесь и в дальнейшем понимается плотность тока проводимости).

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что линии вектора  $\mathbf{D}$  могут начинаться и оканчиваться на зарядах.

Уравнения (108.1) — (108.4) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме. Они связывают значения  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  вдоль некоторого контура со значениями  $\mathbf{B}$  (соответственно  $\mathbf{D}$ ) в точках опирающейся на контур поверхности. От уравнений в интегральной форме можно с помощью теорем векторного анализа перейти к уравнениям в дифференциальной форме, которые связывают значения  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  в некоторой точке с  $\mathbf{B}$  (соответственно  $\mathbf{D}$ ) в той же самой точке пространства.

Применим теорему Стокса [см. (107.14)] к левой части формулы (108.1), взяв в качестве поверхности, по которой производится интегрирование функции  $(\text{rot } \mathbf{E})_n$ , ту же поверхность, по которой берется интеграл в правой части. Тогда уравнение (108.1) примет вид

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E})_n dS = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS.$$

Оба интеграла берутся по одной и той же поверхности. Поэтому полученное равенство можно написать следующим образом:

$$\int_S \left( \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS = 0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольно выбранной поверхности интегрирования  $S$ , что, очевидно,

возможно лишь в том случае, если подынтегральное выражение в любой точке пространства для произвольно ориентированной площадки  $dS$  будет равно нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что в каждой точке пространства выполняется равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Применив теорему Стокса к формуле (108.3) и повторив те же самые рассуждения, найдем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Теперь применим теорему Остроградского — Гаусса [см. (107.5)] к левой части формулы (108.4). В результате получим уравнение

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

При произвольном выборе объема, по которому производится интегрирование, полученное соотношение может выполняться лишь при условии, что подынтегральные выражения в обеих частях имеют в каждой точке пространства одинаковые значения, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Применение теоремы Остроградского — Гаусса к формуле (108.2) дает

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Итак, в дифференциальной форме уравнения Максвелла выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (108.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (108.6)$$

(первая пара уравнений),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (108.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (108.8)$$

(вторая пара уравнений).

При решении этих уравнений используется то обстоятельство, что между входящими в них величинами имеются соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (108.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (108.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (108.11)$$

Совокупность семи уравнений (108.5) — (108.11) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Спроектировав уравнения (108.5) и (108.7) на координатные оси, получим вместо каждого из векторных уравнений три скалярных. Приняв во внимание формулы (107.10) — (107.12), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (108.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (108.13)$$

Уравнения (108.6) и (108.8) можно написать в скалярном виде, используя соотношение (107.4)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (108.14)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (108.15)$$

В гауссовой системе уравнения Максвелла имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (108.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho. \end{aligned} \right\} \quad (108.17)$$

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

## § 109. Волновое уравнение

В предыдущей главе мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, вообще говоря, тоже оказывается переменным<sup>1)</sup>. Это переменное магнитное поле порождает электрическое поле и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью зарядов переменное электрическое или магнитное поле, в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну. Вывод о возможности существования электромагнитных волн вытекает, как мы сейчас покажем, из уравнений Максвелла.

Напишем уравнения Максвелла для однородной нейтральной ( $\rho = 0$ ) непроводящей ( $\mathbf{j} = 0$ ) среды с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . В этом случае

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

---

<sup>1)</sup> Для того чтобы возникшее магнитное поле было постоянным, необходимо соблюдение весьма специального условия:  $\dot{\mathbf{D}} = \text{const.}$



Следовательно, уравнения (108.5) — (108.8) имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (109.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (109.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (109.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (109.4)$$

Применим к уравнению (109.1) операцию  $\operatorname{rot}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu\mu_0 \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (109.5)$$

Символ  $\operatorname{rot}$  означает дифференцирование по координатам. Меняя порядок дифференцирования по координатам и времени, можно написать  $\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H})$ .

Произведя в уравнении (109.5) эту замену и подставив в получившееся выражение значение (109.3) для  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ , получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (109.6)$$

Применив операцию  $\operatorname{rot}$  к уравнению (109.3) и произведя аналогичные преобразования, придем к уравнению

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (109.7)$$

В соответствии с (107.22)  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ . При условии, выражаемом уравнением (109.4), первый член этого равенства обращается в нуль. Следовательно, левая часть формулы (109.6) может быть записана в виде  $-\Delta \mathbf{E}$ . Опустив в получающейся формуле знак минус слева и справа, придем к уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

или, расписав  $\Delta \mathbf{E}$ ,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (109.8)$$

Сходным образом уравнение (109.7) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (109.9)$$

Заметим, что уравнения (109.8) и (109.9) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (109.1) и (109.3), каждое из которых содержит и  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

представляет собой волновое уравнение [см. т. I, § 80)]. Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ , дает фазовую скорость этой волны. Таким образом, уравнения (109.8) и (109.9) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (109.10)$$

Для вакуума по этой формуле получается

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек} = c$$

[см. значения (4.2) и (38.3) для  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ ].

Таким образом, в вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света.

В гауссовой системе

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (109.11)$$

## § 110. Плоская электромагнитная волна

Исследуем плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в однородной непроводящей среде ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$  — постоянные). Направим ось  $x$  перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а значит, и их составляющие не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ . Поэтому уравнения (108.12) — (108.15) упрощаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (110.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (110.2)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (110.3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (110.4)$$

Первое из уравнений (110.2) и уравнение (110.4) показывают, что  $E_x$  не может зависеть ни от  $t$ , ни от  $x$ . Первое из уравнений (110.1) и уравнение (110.3) дают тот же результат для  $H_x$ . Таким образом, отличные от нуля  $E_x$  и  $H_x$  могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладываемыми на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси  $x$ , т. е. векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны к направлению распространения волны — электромагнитные волны поперечны. В дальнейшем мы будем предполагать постоянные поля отсутствующими и полагать  $E_x = H_x = 0$ .

Два последних уравнения (110.1) и два последних уравнения (110.2) можно объединить в две независимые

группы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (110.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (110.6)$$

Первая группа уравнений связывает составляющие  $E_y$  и  $H_z$ , вторая —  $E_z$  и  $H_y$ . Предположим, что первоначально было создано переменное электрическое поле  $E_y$ , направленное вдоль оси  $y$ . Согласно второму из уравнений (110.5) это поле создаст магнитное поле  $H_z$ , направленное вдоль оси  $z$ . В соответствии с первым уравнением (110.5) поле  $H_z$  создаст электрическое поле  $E_y$  и т. д. Ни поле  $E_z$ , ни поле  $H_y$  при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле  $E_z$ , то согласно уравнениям (110.6) появится поле  $H_y$ , которое возбудит поле  $E_z$  и т. д. В этом случае не возникают поля  $E_y$  и  $H_z$ . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (110.5) и (110.6), положив составляющие, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (110.5), положив  $E_z = H_y = 0$ . Продифференцируем первое уравнение по  $x$  и произведем замену:  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$ . Подставив затем  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  из второго уравнения, получим волновое уравнение для  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (110.7)$$

Продифференцировав по  $x$  второе уравнение (110.5), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (110.8)$$

Напомним, что остальные составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равны нулю, так что  $E = E_y$  и  $H = H_z$ . Мы сохранили в уравнениях (110.7) и (110.8) индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  направлены по взаимно перпендикулярным осям  $y$  и  $z$ .

Уравнения (110.7) и (110.8) представляют собой частный случай уравнений (109.8) и (109.9). Простейшим решением уравнения (110.7) будет функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (110.9)$$

Решение уравнения (110.8) имеет аналогичный вид

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (110.10)$$

В этих формулах  $\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число, равное  $\omega/v$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — начальные фазы колебаний в точках с координатой  $x = 0$ .

Подставим функции (110.9) и (110.10) в уравнения (110.5):

$$\begin{aligned} kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) &= \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2), \\ kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) &= \epsilon\epsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Кроме того, должны соблюдаться соотношения:

$$\begin{aligned} kE_m &= \mu\mu_0\omega H_m, \\ \epsilon\epsilon_0\omega E_m &= kH_m. \end{aligned}$$

Перемножив эти два равенства, находим, что

$$\epsilon\epsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2.$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}. \quad (110.11)$$

Из формулы (110.11) вытекает, что между значениями  $E_m$  и  $H_m$  для волны, распространяющейся в пустоте, имеется соотношение

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{H_m} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \\ &= \sqrt{(4\pi)^2 900} = 120\pi \approx 377. \end{aligned} \quad (110.12)$$

В гауссовой системе формула (110.11) имеет вид

$$E_m \sqrt{\varepsilon} = H_m \sqrt{\mu}.$$

Следовательно, в пустоте  $E_m = H_m$  ( $E_m$  измеряется в СГСЭ-единицах,  $H_m$  — в СГСМ-единицах).

Умножив уравнение (110.9) на орт оси  $y$  ( $E_y \mathbf{j} = \mathbf{E}$ ), а уравнение (110.10) на орт оси  $z$  ( $H_z \mathbf{k} = \mathbf{H}$ ), получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= E_m \cos(\omega t - kx), \\ \mathbf{H} &= H_m \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \right\} \quad (110.13)$$

(мы положили  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ).

На рис. 237 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Как видно из рисунка, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через  $1/4$  периода достигают наибольшего значения (причем, если  $\mathbf{E}$  направлен вверх, то  $\mathbf{H}$  направлен вправо; смотрим вдоль направления, по которому распространяется волна). Еще через  $1/4$  периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения (но на этот раз  $\mathbf{E}$  направлен вниз, а  $\mathbf{H}$  — влево). И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси  $x$ .

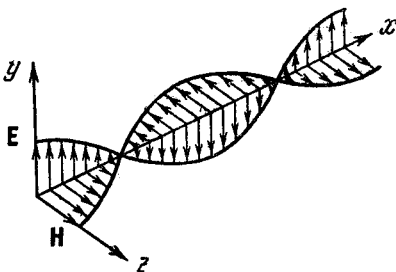


Рис. 237.

## § 111. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании электромагнитных волн была осуществлена Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 238).

В колебательном контуре, образованном конденсатором  $C$  и катушкой  $L$  (рис. 239, *a*), электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное — внутри катушки. В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения волн

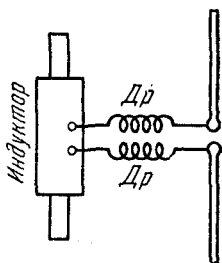


Рис. 238.

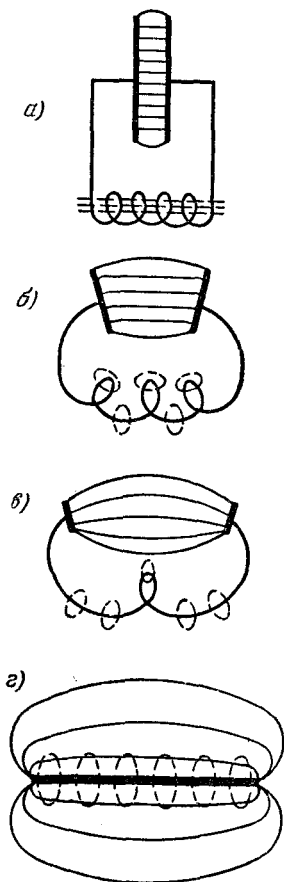


Рис. 239.

не происходит. Чтобы излучение играло заметную роль, нужно сделать области, в которых возникают поля, менее обособленными от окружающего пространства. Этого можно достигнуть, увеличивая расстояние между обкладками конденсатора и между витками ка-

тушки (рис. 239, б и в). В пределе мы приходим к вибратору Герца (рис. 239, г). В процессе видоизменений, изображенных на рис. 239, а — г, сильно уменьшается емкость и индуктивность контура, что также выгодно, так как приводит к увеличению частоты колебаний [см. формулу (99.2)], а следовательно к уменьшению длины волны. С волнами же меньшей длины легче экспериментировать. Герц достиг частот порядка  $10^8$  гц и получал волны, длина которых составляла от 10 до 0,6 м.

Для возбуждения колебаний вибратор подключался к индуктору (рис. 238). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробивного значения, возникала искра, которая закорачивала обе половинки вибратора (в соответствии с этим на рис. 239, г разрыв посередине вибратора не показан). В результате возникали свободные затухающие колебания, которые продолжались до тех пор, пока искра не гасла. Для того чтобы возникающий при колебаниях высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора, между вибратором и индуктором включались дроссели  $Dp$ , т. е. катушки с большой индуктивностью (сопротивление индуктивности переменному току равно  $\omega L$ ). После погасания искры вибратор снова заряжался от индуктора и весь процесс повторялся вновь. Таким образом, вибратор Герца возбуждал ряд цугов слабо затухающих волн.

В вибраторе во время колебаний устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока  $i$  (рис. 240, а) была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в нуль на его концах (узлы тока). Напряжение  $U$  (рис. 240, б) в середине вибратора имело узел, на концах — пучности. Таким образом, вибратор аналогичен струне, колеблющейся с основной (т. е. наименьшей) частотой. Длина  $\lambda$  излучаемых вибратором волн приблизительно в два раза превышала длину вибратора. По этой причине подобный вибратор называют полуволновым. Заметим, что если каким-либо образом возбудить в вибраторе вынужденные колебания в два раза большей частоты, то распределение токов и напряжений будет иметь вид,

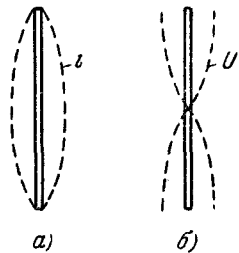


Рис. 240.



изображенный на рис. 241. В этом случае вибратор аналогичен струне, колеблющейся с частотой первого обертона.

Исследование излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посредине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Так как длина вибратора была равна  $\lambda/2$ , колебания в нем вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр<sup>1)</sup>.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (размером более 1 м и весом 1,2 т) Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и показал, что оба эти явления подчи-

няются законам, установленным в оптике для световых волн. Поместив излучающий вибратор в фокусе вогнутого зеркала, Герц получил направленную плоскую волну. На ее пути он расположил плоское зеркало и получил таким образом стоячую волну. Измерив расстояние между узлами и пучностями волны, Герц нашел длину волны  $\lambda$ . Произведение  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$  дало скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к  $c$ . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решетку, были перпендикулярны к вектору  $\mathbf{E}$ , волна проходила сквозь решетку без помех. При расположении проволок параллельно  $\mathbf{E}$  волна сквозь решетку не проходила. Таким образом была доказана поперечность электромагнитных волн.

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил электромагнитные волны дли-

<sup>1)</sup> В современных демонстрациях в искровой промежуток включают небольшую лампочку. Яркость ее свечения указывает интенсивность волны.

ной 6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн (см. Оптику).

В 1896 г. А. С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике.

## § 112. Энергия электромагнитного поля

Возможность обнаружения электромагнитных волн (по проскакиванию искры, свечению лампочки и т. п.) указывает на то, что эти волны переносят энергию. Для переноса энергии волной была введена (см. т. I, § 82) векторная величина, называемая плотностью потока энергии. Она численно равна количеству энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению, в котором течет энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии. Там же было показано, что плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны [см. т. I, формулу (82.8)].

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  складывается из плотности энергии электрического поля [определяемой формулой (30.2)] и плотности энергии магнитного поля [определяемой формулой (61.8)]:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

В данной точке пространства векторы  $E$  и  $H$  изменяются в одинаковой фазе<sup>1)</sup>. Поэтому соотношение (110.11) между амплитудными значениями  $E$  и  $H$  справедливо и для их мгновенных значений. Отсюда следует, что плотность энергии электрического и магнитного полей каждый момент времени одинакова:  $w_E = w_H$ . Поэтому можно написать, что

$$w = 2w_E = \epsilon\epsilon_0 E^2.$$

<sup>1)</sup> Это справедливо только для непроводящей среды. В проводящей среде фазы  $E$  и  $H$  не совпадают.

Воспользовавшись тем, что  $E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H \sqrt{\mu\mu_0}$ , выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} EH. \quad (112.1)$$

В соответствии с формулой (109.10) скорость электромагнитной волны равна  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$ . Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$ , получим плотность потока энергии

$$S = wv = EH. \quad (112.2)$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[\mathbf{EH}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  ( $\sin \alpha = 1$ ). Следовательно, вектор плотности потока энергии можно представить как векторное произведение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \quad (112.3)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга.

В гауссовой системе выражение для  $\mathbf{S}$  имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (112.4)$$

Поток энергии  $\Phi_w$ , т. е. количество энергии, переносимое волной в единицу времени через некоторую поверхность  $S$ , равен [см. т. I, формулу (82.14)]

$$\Phi_w = \int_S S_n dS \quad (112.5)$$

(здесь  $S_n$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{S}$ ;  $dS$  — элемент поверхности  $S$ ).

В качестве примера на применение формулы (112.5) рассмотрим участок однородного цилиндрического проводника, по которому течет стационарный (т. е. не изменяющийся со временем) ток (рис. 242). Вначале будем считать, что на этом участке сторонние силы отсутствуют. Тогда согласно формуле (33.4) в каждой точке проводника выполняется соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Стационарный (постоянный) ток распределяется по сечению провода с постоянной плотностью  $\mathbf{j}$ . Следовательно,  $\mathbf{E}$  в пределах изображенного на рис. 242 участка проводника будет однородным. Выделим мысленно внутри проводника цилиндрический объем радиуса  $r$  и длины  $l$ . В каждой точке боковой поверхности этого цилиндра вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{E}$  и направлен по касательной к поверхности (см. рис. 242). Величина  $H$  равна  $\frac{1}{2}jr$  [согласно теореме (44.7)  $2\pi rH = j\pi r^2$ ]. Таким образом, вектор (112.3) в каждой точке поверхности направлен к оси провода и имеет величину  $S = EH = \frac{1}{2}Ejr$ . Умножив  $S$  на боковую поверхность цилиндра, равную  $2\pi rl$ , найдем, что внутрь рассматриваемого нами объема втекает поток электромагнитной энергии (поток вектора  $\mathbf{S}$ )

$$\begin{aligned}\Phi_S &= 2\pi rl \cdot S = 2\pi rl \cdot \frac{1}{2}Ejr = \\ &= Ej \cdot \pi r^2 l = Ej \cdot V, \quad (112.6)\end{aligned}$$

где  $V$  — объем цилиндра.

Согласно (34.5)  $Ej$  есть количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника. Следовательно, равенство (112.6) указывает на то, что энергия, выделяющаяся в виде лэнц-джоулева тепла, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля.

Отметим, что поток энергии  $\Phi_S$  по мере проникновения в глубь проводника постепенно ослабляется [уменьшается и  $S$  (он пропорционален расстоянию от оси провода  $r$ ), и поверхность, через которую течет поток] за счет поглощения энергии и превращения ее в тепло.

Теперь допустим, что в пределах рассматриваемого нами участка проводника действуют сторонние силы, поле которых однородно ( $\mathbf{E}^* = \text{const}$ ). В этом случае согласно формуле (35.4) в каждой точке проводника имеет место соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

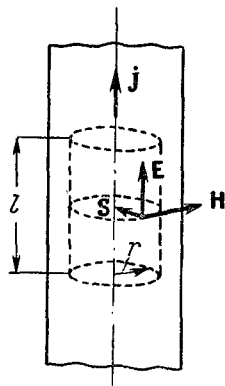


Рис. 242.

из которого вытекает, что

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} - \mathbf{E}^*. \quad (112.7)$$

Будем считать, что сторонние силы на рассматриваемом участке цепи не противятся, а способствуют прохождению тока. Это означает, что направление  $\mathbf{E}^*$  совпадает с направлением  $\mathbf{j}$ . Допустим, что выполняется соотношение  $\rho \mathbf{j} = \mathbf{E}^*$ . Тогда окажется, что напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}$  в каждой точке равна нулю, и поток электромагнитной энергии через боковую поверхность отсутствует. В этом случае тепло выделяется за счет работы сторонних сил.

Если же имеет место соотношение  $E^* > \rho j$ , то, как следует из (112.7), вектор  $\mathbf{E}$  будет направлен противоположно вектору  $\mathbf{j}$ . В этом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{S}$  имеют направления, противоположные указанным на рис. 242. Следовательно, электромагнитная энергия не втекает, а наоборот вытекает через боковую поверхность проводника в окружающее его пространство.

Резюмируя, можно сказать, что в замкнутой цепи стационарного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается к другим участкам цепи не вдоль проводников, а через окружающее проводники пространство в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором  $\mathbf{S}$ .

### § 113. Импульс электромагнитного поля

Падая на какое-либо тело, электромагнитная волна должна оказывать на него давление. Происхождение этого давления легко пояснить на примере проводящего тела ( $\sigma \neq 0$ ). Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность тела (рис. 243). Электрический вектор волны возбуждает в теле ток плотности  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле (47.2):

$$\mathbf{f}_{\text{ед. об}} = [\mathbf{j}\mathbf{B}] = \mu\epsilon_0 [\mathbf{j}\mathbf{H}].$$

Направление этой силы, как видно из рис. 243, совпадает с направлением распространения волны.

Согласно вычислению Максвелла в случае, когда тело полностью поглощает падающую на него энергию, давление равно среднему (по времени) значению плотности энергии в падающей волне:

$$p = \bar{w} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (113.1)$$

Если тело отражает волну, посылая в обратном направлении волну интенсивности  $S = kS_0$  ( $S_0$  — интенсивность, т. е. плотность потока энергии падающей волны,  $k$  — коэффициент отражения), то давление равно

$$p = (1 + k)\bar{w}, \quad (113.2)$$

где  $\bar{w}$  — среднее значение плотности энергии падающей волны. Для идеально отражающего тела  $k = 1$  и  $p = 2\bar{w}$ .

Из того факта, что электромагнитная волна оказывает давление, вытекает, что поле электромагнитной волны обладает импульсом. Вычисления дают для импульса единицы объема (плотности импульса) поля в пустоте значение

$$K_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (113.3)$$

Наличие импульса заставляет приписать электромагнитному полю массу, связанную с импульсом соотношением  $K = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью  $c$ ). Разделив модуль выражения (113.3) на  $c$ , получим массу единицы объема поля

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{EH}{c^3}.$$

Выражение  $\frac{EH}{c}$  дает плотность энергии поля  $w$ . Следовательно, можно написать, что

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{w}{c^2}.$$

Полученное нами соотношение является частным случаем вытекающего из теории относительности

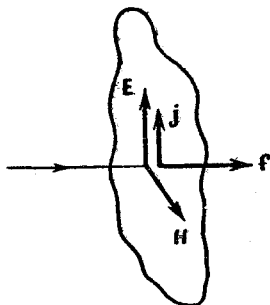


Рис. 243.

соотношения между массой и энергией:

$$W = mc^2, \quad (113.4)$$

согласно которому всякое изменение энергии системы (под которой понимается совокупность тел и полей) связано с изменением ее массы и, наоборот, изменение массы системы влечет за собой изменение ее энергии.

Если свет представляет собой, как предположил Максвелл, электромагнитную волну, он должен оказывать на тела давление. Правда, величина этого давления, вычисленная по формуле (113.1), оказывается очень малой. Так, например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион свечей давление составляет всего лишь около  $10^{-7}$  н/м<sup>2</sup> ( $10^{-4}$  дин/см<sup>2</sup>). Обнаружить и измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву. Осуществив опыты, потребовавшие большой изобретательности и мастерства, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела и в 1910 г. — на газы. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

## § 114. Излучение диполя

Во время совершающихся в вибраторе Герца колебаний происходит периодическое изменение его дипольного электрического момента. Поэтому излучатели подобного вида называются также диполями. Вибратор Герца представляет собой полуволновой диполь (его длина  $l$  равна  $\lambda/2$ ). Рассмотрим излучение диполя, длина которого мала по сравнению с длиной волны ( $l \ll \lambda$ ). Такой диполь называется элементарным.

Простейший элементарный диполь образуют два точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , колеблющиеся в противофазе около некоторой точки  $O$  (рис. 244, а). Дипольный электрический момент такой системы изменяется со временем по закону

$$\mathbf{p} = ql \cos \omega t \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}_m \cos \omega t, \quad (114.1)$$

где  $l$  — удвоенная амплитуда колебаний каждого из зарядов,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя,  $\mathbf{p}_m = ql\mathbf{n}$ .

Такой же электрический момент имеет система, образованная неподвижным положительным зарядом  $+q$  и

колеблющимся около него с амплитудой  $l$  отрицательным зарядом  $-q$  (рис. 244, б). Рассмотрение такой излучающей системы особенно важно потому, что к ней может быть сведено излучение электромагнитных волн электронного атома. Согласно классическим представлениям электрон движется в атоме вокруг ядра по эллиптической орбите. Движение по эллипсу можно разложить на два взаимно перпендикулярных колебания (см. т. I, § 71). Таким образом, излучение атома можно свести к излучению элементарного диполя [длина волны видимого света ( $\sim 10^{-7}$  м) на много порядков больше диаметра орбиты ( $\sim 10^{-10}$  м)].

В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля носит очень сложный характер. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину волны ( $r \gg \lambda$ ). Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим (рис. 245). Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиусу-вектору проведенному в данную точку из диполя (по сравнению с расстоянием до точек волновой зоны размерами диполя можно пренебречь).

Назовем сечения волнового фронта плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор  $\mathbf{E}$  в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор  $\mathbf{H}$  — по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча  $\mathbf{r}$ , то мгновенная картина волны будет такой

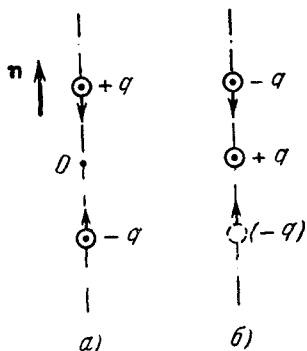


Рис. 244.

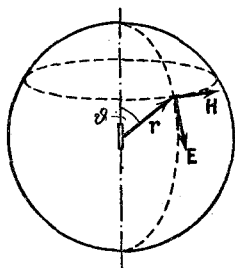


Рис. 245.



же, как на рис. 237, с тем отличием, что амплитуда при перемещении по лучу постепенно убывает.

В каждой точке векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются по закону  $\cos(\omega t - kr)$ . Амплитуды колебания  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{H}_m$  зависят от расстояния  $r$  до излучателя и от угла  $\vartheta$  между направлением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и осью диполя (рис. 245). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии  $\bar{S}$  пропорционально произведению  $E_m H_m$ , т. е.

$$\bar{S} \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (114.2)$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при  $\vartheta = \text{const}$ ) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла  $\vartheta$ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ). В направлениях, совпадающих с осью ( $\vartheta = 0$

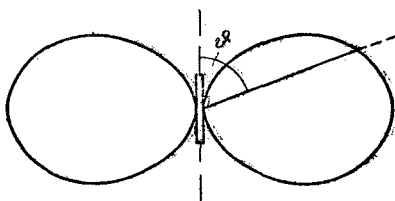


Рис. 246.

и  $\pi$ ), электрический диполь не излучает. Зависимость интенсивности волны от угла  $\vartheta$  очень наглядно изображается с помощью так называемой диаграммы направленности диполя (рис. 246). Эта диаграмма строится та-

ким образом, чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала в известном масштабе интенсивность излучения под углом  $\vartheta$ .

Энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени, называется интенсивностью (или мощностью) излучения. Соответствующий расчет дает для интенсивности излучения элементарного диполя следующее выражение:

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{6\pi c^2} \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (114.3)$$

Согласно формуле (114.1)  $\ddot{p}^2 = q^2 l^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ . Подставив это значение в формулу (114.3), получим

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 l^2 \omega^4}{6\pi c^2} \cos^2 \omega t. \quad (114.4)$$

Поскольку  $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ , средняя по времени интенсивность излучения равна

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 l^2 \omega^4}{12\pi c^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{p_m^2 \omega^4}{12\pi c^2}.$$

Таким образом, средняя интенсивность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Если диполь образован системой из неподвижного и колеблющегося зарядов,  $l$  в формуле (114.4) означает амплитуду колебания, а величина  $l^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$  равна квадрату ускорения  $w$  колеблющегося заряда. В этом случае формулу для интенсивности излучения можно записать следующим образом:

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 w^2}{6\pi c^2}. \quad (114.5)$$

Эта формула сохраняет свое значение и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения дается формулой (114.5). Электроны, ускоряемые в бетатроне (см. § 104), также теряют энергию за счет излучения, обусловленного центростремительным ускорением  $\omega_n = \frac{v^2}{r_0}$ . Согласно формуле (114.5) количество теряемой на излучение энергии сильно растет с увеличением скорости электронов в бетатроне (пропорционально  $v^4$ ). Поэтому возможное ускорение электронов в бетатроне ограничено пределом в 500 Мэв (при скорости, соответствующей этому значению, потери на излучение становятся равными энергии, сообщаемой электронам вихревым электрическим полем).

В отличие от случая, когда ускорение изменяется по гармоническому закону, при произвольном  $w$  излучение представляет собой не монохроматическую волну, а состоит из набора волн различных частот.

Согласно формуле (114.5) интенсивность обращается в нуль при  $w = 0$ . Следовательно, электрон, движущийся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо лишь в том случае, если скорость электрона  $v_{эл}$  не превышает скорости света

$v_{св} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  в той среде, в которой движется электрон.

В случае  $v_{эл} > v_{св}$ <sup>1)</sup> наблюдается излучение, открытое в 1934 г. С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым. Более подробно об этом излучении будет идти речь в Оптике.

---

<sup>1)</sup> Этот случай не может осуществиться при движении электрона в вакууме, так как согласно теории относительности скорость любых частиц не может превысить  $c$ .

# ПРИЛОЖЕНИЕ I

## ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН В СИ И В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

В системе единиц СИ:  
электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi (2,99776)^2 \cdot 10^9} \text{ ф/м} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ ф/м},$$

магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$ .

В гауссовой системе единиц  
электродинамическая постоянная

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}.$$

Соотношения между единицами даны приближенно. Чтобы получить точные значения, нужно в величинах, приведенных в последнем столбце, заменить 3 на 2,99776 и 9 на  $(2,99776)^2$ .

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Сила $f$ Работа $A$ и энергия $W$ Заряд $q$ Напряженность электрического поля $E$ Потенциал $\phi$ , разность потенциалов или напряжение $U$ и э. д. с. $\mathcal{E}$	ньютон ( $n$ ) джоуль ( $дж$ ) кулон ( $к$ )  вольт на метр ( $в/м$ ) вольт ( $в$ )	дина ( $дин$ ) эрг ( $эрг$ ) СГСЭ-ед.  СГСЭ-ед.  СГСЭ-ед.	$1 n = 10^5 \text{ дин}$ $1 дж = 10^7 \text{ эрг}$ $1 к =$ $= 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ $1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 3 \cdot 10^4 \text{ в/м}$ $1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 300 \text{ в}$

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Электрический дипольный момент $p$	$\kappa \cdot \text{м}$	СГСЭ-ед.	$1 \kappa \cdot \text{м} = 3 \cdot 10^{11}$ СГСЭ-ед.
Вектор поляризации $P$	$\kappa/\text{м}^2$	СГСЭ-ед.	$1 \kappa/\text{м}^2 = 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Диэлектрическая восприимчивость $\kappa$	СИ-ед.	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} = 4\pi$ СИ-ед.
Электрическое смещение (электрическая индукция) $D$	кулон на квадратный метр ( $\kappa/\text{м}^2$ )	СГСЭ-ед.	$1 \kappa/\text{м}^2 = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Поток электрического смещения (поток электрической индукции) $\Phi$	кулон ( $\kappa$ )	СГСЭ-ед.	$1 \kappa = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Электрическая емкость $C$	фарада ( $\phi$ )	сантиметр ( $\text{см}$ )	$1 \phi = 9 \cdot 10^{11}$ см
Сила тока $i$	ампер ( $a$ )	СГСЭ-ед.	$1 a = 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Плотность тока $j$	ампер на кв. метр ( $a/\text{м}^2$ )	СГСЭ-ед.	$1 a/\text{м}^2 = 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Электрическое сопротивление $R$	ом ( $ом$ )	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 9 \cdot 10^{11} \text{ ом}$
Удельное сопротивление $\rho$	$ом \cdot \text{м}$	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 9 \cdot 10^9 \text{ ом} \cdot \text{м}$
Магнитная индукция $B$	тесла ( $тл$ )	гаусс ( $гс$ )	$1 тл = 10^4 гс$
Поток магнитной индукции $\Phi$ и потокосцепление $\Psi$	вебер ( $вб$ )	максвелл ( $мкс$ )	$1 вб = 10^8 мкс$
Магнитный момент $p_m$	$a \cdot \text{м}^2$	СГСМ-ед.	$1 a \cdot \text{м}^2 = 10^3$ СГСМ-ед.
Вектор намагниченности $J$	ампер на метр ( $a/\text{м}$ )	СГСМ-ед. (гаусс)	$1 \text{ СГСМ-ед.} =$ $= 10^3 a/\text{м}$

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Напряженность магнитного поля $H$ Магнитная восприимчивость $\chi$ Индуктивность $L$ и взаимная индуктивность $L_{12}$	ампер на метр ( $a/m$ ) СИ-ед. генри ( $гн$ )	эрстед ( $\text{э}$ ) СГСМ-ед. сантиметр ( $см$ )	$1 a/m = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э}$ $1 \text{ э} = 79,6 a/m$ $1 \text{ СГСМ-ед.} = 4\pi \text{ СИ-ед.}$ $1 \text{ гн} = 10^9 \text{ см}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА  
В СИ И В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Напряженность электрического поля (определение)	$E = \frac{f}{q}$	
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er^2}$	$E = \frac{q}{er^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$
Потенциал (определение)	$\varphi = \frac{W_p}{q}$	

Наименование	СИ	Гауссова система
Потенциал точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er}$	$\varphi = \frac{q}{er}$
Работа сил поля над зарядом	$A = q (\varphi_1 - \varphi_2)$	
Связь между $E$ и $\varphi$	$E = -\text{grad } \varphi$	
Связь между $\varphi$ и $E$	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl$	
Связь между $\varphi$ и $E$ в однородном поле	$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$	
Циркуляция вектора $E$ для электростатического поля	$\oint E_l dl = 0$	
Электрический момент диполя	$p = ql$	
Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле	$M = [pE]$	
Энергия диполя в электрическом поле	$W = -pE$	
Дипольный момент «упругой» молекулы	$p = \beta\epsilon_0 E$	$p = \beta E$
Вектор поляризации (определение)	$P = \frac{\sum \rho \Delta V}{\Delta V}$	
Связь между $P$ и $E$	$P = \kappa\epsilon_0 E$	$P = \kappa E$
Связь между $P$ и поверхностной плотностью связанных зарядов	$\sigma' = P_n = \kappa\epsilon_0 E_n$	$\sigma' = P_n = \kappa E_n$
Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$D = \epsilon_0 E + P$	$D = E + 4\pi P$

Наименование	СИ	Гауссова система
Связь между относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon$ и диэлектрической восприимчивостью $\chi$	$\epsilon = 1 + \chi$	$\epsilon = 1 + 4\pi\chi$
Связь между значениями $\chi$ в СИ ( $\chi_{СИ}$ ) и в гауссовой системе ( $\chi_{ГС}$ )	$\chi_{СИ} = 4\pi\chi_{ГС}$	
Связь между $D$ и $E$	$D = \epsilon\epsilon_0 E$	$D = \epsilon E$
Связь между $D$ и $E$ в вакууме	$D = \epsilon_0 E$	$D = E$
$D$ поля точечного заряда	$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$	$D = \frac{q}{r^2}$
Теорема Гаусса для $D$	$\oint D_n dS = \sum q$	$\oint D_n dS = 4\pi \sum q$
Напряжение (определение)	$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$	
Емкость конденсатора (определение)	$C = \frac{q}{U}$	
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Энергия системы зарядов	$W = \frac{1}{2} \sum q\varphi$	
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2}$	
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Сила тока (определение)	$i = \frac{dq}{dt}$	
Плотность тока (определение)	$j = \frac{di}{dS_{\perp}}$	



Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Ома	$i = \frac{1}{R} U$	
Закон Ома в дифференциальной форме	$j = \frac{1}{\rho} E$	
Закон Джоуля — Ленца	$Q = \int_0^t Ri^2 dt$	
Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме	$w = \rho j^2$	
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины)	$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i_1 i_2}{b}$	$f = \frac{2i_1 i_2}{b}$
Магнитный момент контура с током	$p_m = iS$	$p_m = \frac{1}{c} iS$
Магнитная индукция (определение)	$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$	
Вектор намагничивания (определение)	$J = \frac{\sum p_m}{\Delta V}$	
Напряженность магнитного поля (определение)	$H = \frac{1}{\mu_0} B - J$	$H = B - 4\pi J$
Связь между $J$ и $H$	$J = \chi H$	
Связь между относительной магнитной проницаемостью $\mu$ и магнитной восприимчивостью $\chi$	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Соотношение между значениями $\chi$ в СИ ( $\chi_{СИ}$ ) и в гауссовой системе ( $\chi_{ГС}$ )	$\chi_{СИ} = 4\pi\chi_{ГС}$	
Связь между $B$ и $H$	$B = \mu\mu_0 H$	$B = \mu H$

Наименование	СИ	Гауссова система
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Закон Био — Савара	$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{i [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{b}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2i}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{i}{2r}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi i}{r}$
Напряженность поля соленоида	$H = ni$	$H = \frac{4\pi}{c} ni$
Циркуляция вектора $\mathbf{H}$	$\oint H_{\parallel} dl = \sum i$	$\oint H_{\parallel} dl = \frac{4\pi}{c} \sum i$
Теорема Гаусса для $\mathbf{B}$		$\oint B_n dS = 0$
Закон Ампера	$d\mathbf{f} = i [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{f} = \frac{1}{c} i [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
Сила Лоренца	$\mathbf{f} = e' [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$	$\mathbf{f} = \frac{e'}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$
Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле		$\mathbf{M} = [p_m \mathbf{B}]$
Энергия магнитного момента в магнитном поле		$W = -p_m B$
Поток магнитной индукции (определение)		$\Phi = \int_S B_n dS$
Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле	$A = i \Delta \Phi$	$A = \frac{1}{c} i \Delta \Phi$

Наименование	СИ	Гауссова система
Потокоцепление или полный магнитный поток (определение)	$\Psi = \sum \Phi$	
Э. д. с. индукции	$\mathcal{E}_l = -\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_l = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{i}$	$L = \frac{\Psi}{i/c} = c \frac{\Psi}{i}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu n^2 l S$	$L = 4\pi \mu n^2 l S$
Э. д. с. самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{di}{dt}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{Li^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{Li^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров	$W = \frac{1}{2} \sum L_{ik} i_i i_k$	$W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{ik} i_i i_k$
Плотность тока смещения (определение)	$j_{см} = \dot{\mathbf{D}}$	$j_{см} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint E_l dl =$	$\oint E_l dl =$
	$= - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS$	$= -\frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS$
	$\oint B_n dS = 0$	$\oint B_n dS = 0$
	$\oint H_l dl = \int_S i_n dS +$	$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS +$
	$+ \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS$	$+ \frac{1}{c} \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS$
	$\oint D_n dS = \int_V \rho dV$	$\oint D_n dS = 4\pi \int_V \rho dV$

Наименование	СИ	Гауссова система
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$
Соотношение между амплитудами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в электромагнитной волне	$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$	$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Интенсивность излучения диполя	$I = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{2}{3c^2} \ddot{\mathbf{p}}^2$	$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2$

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Авогадро число 300  
Автоколебательная система 369  
Акцептор 260  
Ампер 15, 108, 124  
— на метр 146  
Ампера гипотеза 142, 170  
— закон 124, 156  
Ампер-виток 139  
Ампер-секунда 125  
Анион 296  
Анод 269  
Антиферромагнетизм 188, 189  
Астона масс-спектрограф 232  
Астоново темное пространство 326
- База транзистора 290  
Баллистический метод измерения магнитной индукции 184, 198  
Барнетта опыт 173  
Бейбриджа масс-спектрограф 233  
Бетатрон 374, 415  
Био — Савара — Лапласа закон 129  
Богуславского — Ленгмюра закон 270  
Больцмана функция распределения 252, 254  
Бора магнетон 174  
— теория 170  
Буша опыт 226
- Вавилова — Черенкова излучение 416  
Валентность 299  
Ван-де-Граафа генератор 86  
Вебер 194  
Вектор намагничивания 143  
— плотности тока 107  
— поляризации 53, 148  
Векторная диаграмма 339, 354  
Весы крутильные 13  
Вибратор полуволновой 405  
Видемана — Франца закон 244  
Вихрь 388  
Внешняя область короны 336  
Волновая зона диполя 413  
Волновое уравнение 399  
Вольт 41  
— на метр 19  
Вольт-амперная характеристика 269, 288, 330  
Вольтметр искровой 335
- Восприимчивость диэлектрическая 53  
— магнитная 147, 179, 180, 182, 185  
— — атомная 169  
— — килоатомная 169  
— — молярная 169  
— — киломолярная 169  
— — удельная 169  
Вторичные химические реакции 296  
Выпрямитель германиевый 289  
— кремниевый 289  
— на газотроне 333  
— полупроводниковый 289  
— ртутный 332  
— селеновый 289  
Выпрямление тока 271, 289  
— — двухполупериодное 272  
— — однополупериодное 271  
Вырождение 247
- Газотрон 332  
Гальваномагнитное явление 262  
Гальванометр баллистический 199  
Гальванопластика 303  
Гальваностегия 303  
Гамильтона оператор 391  
Гамма-лучи 377  
Гаусс 130, 133, 147  
Гаусса теорема для вектора  $\mathbf{B}$  143  
— — — —  $\mathbf{D}$  62, 63  
— — — —  $\mathbf{E}$  28, 61  
Генератор ламповый 369  
— электростатический 86  
Гернри 202  
— на метр 203  
Герца вибратор 404, 412  
— опыты 404  
Гидратация ионов 296  
Гиромагнитное отношение 171, 173  
Гиромагнитные явления 171  
Гистерезис 77  
— магнитный 184, 188  
Гистерезиса петля 77, 185, 217  
— — максимальная 185  
Градиент 42, 391  
— потенциала 42, 43  
Грамм-эквивалент 299
- Давление световое 412  
— электромагнитной волны 410

Двойное преломление электромагнитных волн 407  
Двойной электрический слой 265, 286  
Дейтерий 304  
Джоуля — Ленца закон 114, 243  
— — в дифференциальной форме 115  
Диаграмма направленности диполя 414  
Диамagnetизм 176  
Диамagnetики 170  
Дивергенция 57, 382, 384, 391  
— вектора  $\mathbf{B}$  395.  
— —  $\mathbf{D}$  395  
Диод вакуумный 269, 271  
— — двойной 272  
— кристаллический 284  
— плоскостной 285  
— полупроводниковый 284  
Диполь 20  
— жесткий 50  
— полуволновой 405  
— упругий 50  
— элементарный 412  
Диполя излучение 412  
— электрический момент 21  
Диссоциация электролитическая 292  
Диффузионная разность потенциалов 279  
Диэлектрик 12  
Домены сегнетоэлектрика 78  
— ферромагнетика 187  
Донор 259  
Дроссель 405  
Друде теория металлов 240  
Дуанты 235  
Дуга вольтова 330  
— с холодным катодом 331  
— термоэлектронная 331  
— электрическая 330  
Дырка 255, 257, 260

Единица заряда абсолютная электростатическая 14  
— — в СИ 16, 108, 125  
— напряженности магнитного поля 146, 147  
— — электрического поля 19  
— электрического смещения 63  
Единицы емкости 89  
— индуктивности 202  
— магнитного момента 174  
— — потока 194  
— магнитной индукции 129, 130  
— потенциала 41  
— силы тока 108, 124  
— сопротивления 111  
Емкость 88, 339, 341  
— конденсатора 90  
— плоского конденсатора 91  
— сферического конденсатора 92  
— цилиндрического конденсатора 93  
— шара 89

Закон преломления линий магнитной индукции 153  
— — — электрического смещения 72  
— сохранения заряда 12  
— трех вторых 270  
— электромагнитной индукции 193, 393

Заряд индуцированный 84  
— пробный 18  
— свободный 60  
— связанный 60  
— точечный 13  
— удельный 219, 227, 230  
— — электрона 227  
— электрический 11  
— элементарный 11, 15, 16, 230, 300  
Защита магнитная 154  
— электростатическая 85  
Зеебека явление 277  
Зона валентная 249, 255  
— запрещенная 248, 255  
— проводимости 250, 255  
— разрешенная 248  
— энергетических уровней 246, 247

Излучение атома 413  
Изолятор 12, 250  
Изотоп 232  
Импульс электромагнитного поля 410  
— электромагнитной волны 411  
Индуктивность 202, 204, 339  
— взаимная 211, 215  
— соленоида 203  
Индукция взаимная 211  
— магнитная 126, 146  
— — остаточная 184  
— электрическая 61, 63  
— электромагнитная 190  
Интенсивность излучения 414  
Ионизационная камера 310, 313  
— — импульсная 313  
— — интегрирующая 315  
Ионизация 306  
— термическая 305, 323, 330  
— ударом 310, 323, 327  
Ионосфера 323  
Ионы 84, 86, 292, 305  
— Ланжевена 308  
Истечение с острия 84  
Источники 381

Катион 296  
Катод 269  
— оксидный 271  
Катодная светящаяся пленка 326  
Катодное падение потенциала 327  
— пятоно 331  
Катодолюминесценция 329  
Квадруоль 23  
Квант действия 174  
— света 317  
Квантование момента импульса 175  
— энергии 246  
Кварц 79  
Кенотрон 271  
Килограмм-эквивалент 299  
Кирхгофа правила 117, 338, 353  
Клаузиуса — Мосотти формула 76  
Колебательный контур 357, 404  
— —, добротность 363, 367, 369  
— —, собственная частота 360  
Коллектор 290  
Конденсатор 89  
— плоский 32, 91  
—, соединение параллельное 93  
—, — последовательное 94  
— сферический 35, 93  
— цилиндрический 34, 92

- Конденсатор электролитический 304  
 Контактная разность потенциалов 274  
 — — — внешняя 275  
 — — — внутренняя 276, 278  
 Контуры связанные 211, 215  
 Концентрация носителей тока 263  
 — эквивалентная 302  
 Корона 336  
 — дипольная 337  
 Коронирование 87  
 Коэффициент взаимной индукции 211  
 — вторичной эмиссии 320  
 — газового усиления 312, 315  
 — диссоциации 294  
 — мощности 348  
 — Пельтье 282, 284  
 — полезного действия источника то-  
 ка 122  
 — самоиндукции 202  
 — теплопроводности 244  
 — термо-э. д. с. 280, 282, 284  
 — Томсона 284  
 — электропроводности 112, 244  
 Кратер анода 330  
 Кратность вырождения 247  
 Кривая намагничивания нулевая 184  
 — — основная 184  
 Круково темное пространство 326, 329  
 Крутизна характеристика 273, 370  
 Кулон 16, 108, 125  
 — на квадратный метр 63  
 Кулона закон 13, 14, 16, 73  
 Кюри закон 180, 183  
 — постоянная 180, 183  
 Кюри — Вейсса закон 188
- Лампа двухэлектродная 269  
 — пятиэлектродная 274  
 — трехэлектродная 272  
 — четырехэлектродная 274  
 Лампы дневного света 332  
 — люминесцентные 332  
 — неоновые 329  
 — ртутные дуговые 331  
 — сверхвысокого давления 331  
 — электронные 268  
 Ланжевена теория парамагнетизма  
 180  
 Ларморова прецессия 177, 179  
 — частота 177  
 Лебедева опыты 406, 412  
 Ленца правило 191, 200  
 Ленц-джоулево тепло 114, 243, 409  
 Линии напряженности 23  
 Логарифмический декремент затуха-  
 ния 362  
 Лоренца сила 158, 193, 195, 219  
 — теория металлов 240  
 Лучи каналовые 330  
 — катодные 329  
 — положительные 330  
 Люминофор 332
- Магнетики 142, 169  
 Магнит постоянный 185  
 Магнитное поле 126  
 — — движущегося заряда 131  
 — — кругового тока 133, 134  
 — — прямого тока 132  
 — — соленоида 139  
 — — тороида 141
- Магнитный момент атома 174  
 — — индустриальный 177  
 — — контура 127, 128  
 — — молекулы 174  
 — — электрона орбитальный 171  
 — — — собственный 173  
 Магнитомеханические явления 171,  
 187  
 Магнитоотрицательность 186  
 Майкельсона опыт 380  
 Максвелл 194  
 Максвелла теория 374, 377, 379, 393  
 — уравнения в дифференциальной  
 форме 395  
 — — — интегральной форме 393, 394  
 Мандельштама и Папалекси опыт  
 239  
 Масс-спектрограмма 233  
 Масс-спектрограф 233  
 Масс-спектрометр 234  
 Масса, зависимость от скорости 228  
 — покоя 228  
 — электромагнитного поля 411  
 Металл 249  
 Метастабильное состояние 317, 318  
 Метатитанат бария 78, 79  
 Метод магнитной фокусировки 226  
 Механический момент электрона ор-  
 битальный 171  
 — — — собственный 173  
 Микромикрофарада 89  
 Микрофарада 89  
 Милликена опыт 228  
 Мировой эфир 378  
 Молекулы неполярные 49  
 — полярные 49, 292  
 Молекулярные токи 142, 149  
 Молизация ионов 293  
 Молния 334  
 Мощность излучения 414  
 — источника 381  
 — — удельная 382  
 — переменного тока 348  
 — полезная 122  
 — постоянного тока 122  
 — тока удельная 115
- Намагничивание 142, 143  
 — остаточное 185  
 — спонтанное 187  
 Направление запорное 289  
 — обратное 289  
 — пропускное 288  
 — проходное 288  
 — прямое 288  
 Напряжение 111  
 — действующее 348  
 — обратное 288  
 — прямое 287, 288  
 Напряженность поля диполя 22  
 — — магнитного 145, 146  
 — — сторонних сил 110  
 — — электрического 18, 146  
 Неупругие столкновения второго ро-  
 да 318  
 — — первого рода 318  
 Носители заряда 12, 106, 107, 238, 292,  
 305  
 — тока 106, 107, 238, 292, 305
- Области спонтанного намагничивания  
 187

Области спонтанной поляризации 78  
 Область Гейгера 312  
 — непрерывного разряда 313  
 — пропорциональности 312  
 — частичной пропорциональности 312  
 Обратная связь 371  
 Огни святого Эльма 337  
 Окуполь 23  
 Ом 111  
 Ома закон 111, 242, 338, 351  
 — в дифференциальной форме 112  
 — для газов 308  
 — — замкнутой цепи 116  
 — — неоднородной цепи 116  
 — — в дифференциальной форме 117  
 — — электролитов 301  
 Омо-метр 112  
 Оператор Гамильтона 391  
 — Лапласа 392  
 — набла 42, 391  
 Остроградского — Гаусса теорема 385  
 Осциллограф 224

Падение напряжения 111  
 Парамагнетизм 180  
 Парамагнетики 170  
 Паули принцип 247  
 Пашена закон 334  
 Пельтье тепло 282  
 — явление 282, 283  
 Пентод 274  
 Печь индукционная 200  
 Пикофарада 89  
 Плазма 322, 328  
 — высокотемпературная 323, 330  
 — газоразрядная 323, 328, 332  
 — изотермическая 323, 325  
 Планка постоянная 174, 321  
 Плотность заряда линейная 29  
 — — объемная 29  
 — — поверхностная 29  
 — импульса электромагнитной волны 411  
 — потока энергии 407, 408, 414  
 — связанных зарядов объемная 57  
 — — — поверхностная 58, 59  
 — силы 158, 410  
 — тока 107  
 — — насыщения 270, 309  
 — — полная 379  
 — — проводимости 378, 379, 394  
 — — смещения 379  
 — энергии магнитного поля 209, 210, 218  
 — — электрического поля 102  
 — — электромагнитного поля 407  
 $p$  —  $n$ -переход 285, 289, 290  
 Поверхностный эффект 201  
 Поверхность эквипотенциальная 46  
 Подвижность ионов в газах 308  
 — — электролитах 301  
 — носителей тока 264, 301  
 — электронов в металлах 301  
 Пойнтинга вектор 408  
 Поле вектора 23  
 — — В 393  
 — — скорости 23, 381  
 — вихревое 138, 372  
 — истинное 60, 142

Поле магнитное 126, 142  
 — микроскопическое 60, 142  
 — микроскопическое 60, 142  
 — однородное 32  
 — потенциальное 36, 137, 373  
 — размагничивающее 151  
 — соленоидальное 138  
 — электрическое 17  
 — электромагнитное 380  
 Полный магнитный поток 197  
 Положительная нормаль 127, 387  
 Положительный столб 326—328  
 Полупроводники 12, 250, 254  
 —  $n$ -типа 258, 264  
 — примесные 258  
 —  $p$ -типа 260, 264  
 — собственные 255  
 — электронные 250  
 Поляризация диэлектрика 52  
 — остаточная 77  
 — спонтанная 77  
 Поляризуемость молекулы 50  
 Попова опыты 407  
 Порог области Гейгера 312  
 — пропорциональной области 312  
 Постоянная времени цепи 206, 314  
 — магнитная 17, 125, 417  
 — электрическая 16, 17, 417  
 — электродинамическая 16, 17, 126, 417  
 Потенциал 39, 40, 138  
 — векторный 393  
 — выхода 267  
 — системы зарядов 40  
 — точечного заряда 39  
 Поток вектора 25, 381  
 — — Пойнтинга 409  
 — — поляризации 58  
 — — скорости 25, 381  
 — магнитной индукции 143, 190  
 — смещения 62  
 — энергии 408  
 Потокосцепление 197  
 Правило левой руки 156  
 Процессия электронной орбиты 177, 179  
 Примесь акцепторная 260  
 — донорная 259  
 Принцип относительности Галилея 380  
 — — Эйнштейна 380  
 — суперпозиции полей 20  
 Пробой газового промежутка 335  
 Проводник 12  
 — второго рода 292  
 — первого рода 292  
 Проницаемость диэлектрическая 62, 63, 68, 77  
 — — абсолютная 62  
 — — относительная 62, 64, 68, 77  
 — — магнитная 148, 185  
 — — абсолютная 148  
 — — относительная 148, 150, 185  
 Пьезоэлектрики 79  
 Пьезоэлектрический эффект обратный 80  
 — — поперечный 79  
 — — продольный 79  
 — — прямой 78, 79  
 Работа выхода 267, 270  
 — — полная 267



Работа выхода эффективная 267  
 — перемагничения 217  
 — перемещения проводника с током в магнитном поле 166  
 Размагничивающий фактор 151  
 Разряд аperiodический 364  
 — газовый 305  
 — — дуговой 330, 332  
 — — искровой 334  
 — — кистевой 336  
 — — коронный 87, 336  
 — — несамостоятельный 305, 306  
 — — самостоятельный 305, 325  
 — — тлеющий 326  
 Расхождение 382  
 Рафинирование металлов 303  
 Резерфорда опыты 170  
 Резонанс напряжений 345  
 — токов 353  
 Резонансная частота 345, 353, 355, 367  
 Резонансные кривые 366, 367  
 Рекомбинация ионов 293, 306, 328  
 — электронов и дырок 257, 286  
 Рентгеновские лучи 377  
 Рикке опыт 238  
 Ричардсона формула 271  
 Ротор 388, 390, 391

Самоиנדукция 201  
 Сантиметр, единица емкости 89  
 —, — индуктивности 202  
 Сверхпроводимость 113  
 —, критическая температура 113  
 —, критическое поле 113  
 Сегнетова соль 77, 79  
 Сегнетоэлектрики 77, 185  
 Селектор скоростей 233  
 Сетка 272, 333  
 Сеточная характеристика 273  
 Сила взаимодействия токов 124, 156  
 — коэрцитивная 78, 185  
 — лоренцева 158  
 — сторонняя 109  
 — термоэлектродвижущая 278  
 — тока 106  
 — — действующая 347  
 — — эффективная 347  
 Символический метод 348  
 Синхротрон 236  
 — протонный 236  
 Синхрофазотрон 236  
 Синхроциклотрон 236  
 Система единиц абсолютная электростатическая 15  
 — — гауссова 15, 126, 130  
 — — международная 15, 16  
 — — рационализованная 16  
 Скин — эффект 201  
 Скорость света 126, 399  
 — электромагнитных волн 126, 399  
 Соленоид 138  
 Сольват 296  
 Сольватация ионов 296  
 Соотношение между массой и энергией 412  
 Сопротивление активное 339  
 — емкостное 342  
 — индуктивное 341  
 — комплексное 351

Сопротивление критическое 364  
 — металлов, зависимость от температуры 113, 245, 254  
 — остаточное 113  
 — полное 344  
 — реактивное 345  
 — удельное 112  
 — электрическое 111, 243  
 Спираль 173  
 Стоки 381  
 Стокса теорема 390  
 Столетова опыты 184, 198  
 Страты 327  
 Стриммер 334, 335  
 Суперпозиция полей магнитных 128  
 — — электрических 20  
 Счетчик газоразрядный 310  
 — Гейгера — Мюллера 316  
 — несамогасящийся 316  
 — пропорциональный 310, 315  
 — самогасящийся 316

Температура критическая сверхпроводника 113  
 — электронов 325  
 Теория металлов квантовая 246  
 — — классическая 240  
 Теплоемкость металлов 246, 254  
 Термометр сопротивления 114  
 Термопара 281  
 Термоэлектрические явления 277  
 Термоэлектродвижущая сила 278  
 — — удельная 281  
 Тесла 129, 133  
 Тетрод 274  
 Тиратрон 333  
 Тлеющее свечение 326, 329  
 Ток анодный 269  
 — вихревой 200  
 — индукционный 190  
 — квазистационарный 338  
 — насыщения 270, 309  
 — обратный 288  
 — переменный 338  
 — постоянный 108  
 — проводимости 377, 394  
 — сеточный 272  
 — смещения 377—380, 393, 394  
 — электрический 106  
 Толмена и Стюарта опыт 239  
 Томсона метод парабол 230  
 — опыт 225  
 — формула 360  
 — явление 284  
 Торонд 140  
 Точка Кюри антиферромагнитная 189  
 — — сегнетоэлектрика 78  
 — — ферромагнетика 188  
 — Нееля 189  
 Транзистор 284, 290  
 Триод вакуумный 272  
 — кристаллический 284  
 — полупроводниковый 284, 290  
 Туннельный эффект 321  
 Тяжелая вода 304

Узел цепи 117  
 Уровень энергетический 246  
 — — акцепторный 260  
 — — донорный 259  
 — — локальный 259, 260  
 Успокоитель электромагнитный 200

Фазотрон 236  
Фарада 89  
Фарадеево темное пространство 326  
Фарадея закон электромагнитной индукции 193  
— законы электролиза 298  
— число 299  
Ферми уровень 252, 255, 260, 261, 268, 275, 278, 286, 287  
— функция распределения 252, 255  
Ферриты 183, 201  
Ферромагнетизм 183  
Ферромагнетики 170, 183  
— жесткие 186  
— мягкие 186  
Феррозлектрики 78  
Фильтр скоростей 233  
Фотоионизация 321, 335, 336  
— ступенчатая 321  
Фотон 317, 321  
Фотозффект 322  
Фуко токи 200

Химический эквивалент 299  
Холла постоянная 262, 263, 264  
— эффект 262, 264

Циклическая перестановка координат 389

Циклотрон 235  
Циркуляция 38, 381, 385, 386  
Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  136, 137  
— —  $\mathbf{E}$  38, 373  
— —  $\mathbf{H}$  146, 379  
— —  $\mathbf{J}$  145

Частицы элементарные 11  
Частный цикл 185  
Частота ларморовой прецессии 177

Шоттки эффект 266, 271  
Штерна и Герлаха опыт 175

Эйнштейна и де-Хааса опыт 171  
Электрические колебания 357  
— — вынужденные 364  
— — затухающие 360  
— — свободные 357  
Электрический ветер 84

Электрическое смещение 61, 146  
Электродвижущая сила 109  
— — взаимной индукции 211, 371  
— — индукции 192, 197  
— — самоиндукции 203  
Емкость 88  
Электронская обработка металлов 336  
Электролиз 297  
Электролит 292  
Электромагнит 154  
Электромагнитные волны 126, 393, 397  
— — плоские 400  
Электрометаллургия 303  
Электрон 11, 238  
— вторичный 320, 327  
— заряд 228, 230  
—, магнитный момент орбитальный 171  
—, — — собственный 173, 187  
—, масса 230  
—, механический момент орбитальный 171  
—, — — собственный 173  
—, спин 173, 247  
—, удельный заряд 225, 226, 227  
Электронвольт 41  
Электроннолучевая трубка 224  
Электронный газ 240  
— умножитель 320  
Электроны проводимости 240  
— свободные 240  
— —, концентрация 240  
Электрополировка 303  
Электросварка 331  
Электрострикция 72, 80  
Электрофильтер 337  
Электрохимический эквивалент 298  
Эмиссия автоэлектронная 321, 331  
— вторичная электронная 320, 327  
— термоэлектронная 268, 322, 330, 332  
— фотоэлектронная 322  
— холодная 321  
Эмиттер 290  
Энергия диполя в электрическом поле 51  
— заряженного конденсатора 99  
— — проводника 98  
— магнитного момента в магнитном поле 163  
— — поля связанных контуров 215  
— — — тока 208  
— системы зарядов 97  
Эрстед 147