Лекция 2

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ.

Определение 2.1

Если в силу некоторого правила f каждому элементу $x \in D$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция f и при этом пишут $D \xrightarrow{f} E$

В том случае, если множества D и E являются подмножествами множества вещественных чисел, т. е. $D \subset R$, $E \subset R$, то функция f называется **числовой** и при этом принята такая форма записи $y = f(x)$ или $y = y(x)$, где x - аргумент, y - значение функции;

Область определения может быть указана

***D(f)*=[1;2]**

Если область определения функции *y = f(x)* не указала, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

Пример:

$$y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D(f)=(-2;2),\quad E(f)=(0,5;\infty).$$

Определение 2.2

Пусть a, $b \in$ R, тогда множество $\{x: a \le x \le b\}$ называется **отрезком** числовой прямой или и обозначается $[a; b]$, т. е.

$$[a;b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \le x \le b\}$$

Числовые множества

$$[a,b) = \{x : a \le x < b\} \qquad (a,b] \overset{def}{=} \{x : a < x \le b\}$$

называются **полуинтервалами**.

Числовое множество

$$(a,b) \overset{def}{=} \{x : a < x < b\}$$

называется **интервалом**.

Термины **функция, отображение, преобразование** – синонимы.

Обозначения:

y=f(x); **f:** ***D→E;*** $D \xrightarrow{f} E$

Для функций одной переменной **D⊆R; E⊆R.**

Частное значение функции записывается в виде:

$$f\left(x_0\right) \;\; \textit{или} \;\; y\big|_{x=x_0}.$$

Способы задания функций:

Аналитический, табличный, графический, алгоритмический

Числовые функции могут задаваться формулами на различных промежутках или интервалах, принадлежащих множеству определения функции.

Такой способ задания называется **аналитическим**.

Если функция такова, что ее удается выразить в виде $y = f(x)$, то говорят о **явном аналитическом** способе задания

Пример

Функция $y = |\lg|x||$ определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множество ее значений $y = \{y: 0 \le y < +\infty\}$.

Если не удается явно выразить y через x, а удается только указать зависимость между функцией и аргументом в виде $F(x, y) = 0$ или в виде $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$, то такой способ задания называется **неявным аналитическим**.

Пример

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Здесь y как функция x связана с ним неявной аналитической зависимостью, правда, в данном случае нетрудно перейти к **явному аналитическому** способу задания, выразив из этого уравнения y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Но на практике чаще всего встречаются функции, не допускающие такого перехода.

Иногда при аналитическом способе задания функции бывает удобно ввести в рассмотрение промежуточный аргумент $\boldsymbol{t}$ (так называемый **параметр**) и выразить $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ как функции этого промежуточного аргумента, изменяющегося на некотором числовом подмножестве $T \subset R$.

Пример:

Если материальная точка перемещается в плоскости декартовой системы координат xOy,то, взяв в качестве параметра время t, указывают закон движения в виде

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t); \\ y = y(t); \end{array}\right\} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Исключив параметр t, можно перейти к явному или аналитическому способу задания рассматриваемой функции.

Такой способ задания называется **параметрическим**

Составные функции:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ задания функций.

$$x_1, \quad x_2, \dots, x_n$$

$$y_1, \quad y_2, \dots, y_n$$

Примеры: таблицы **ln, sin** и т. д.

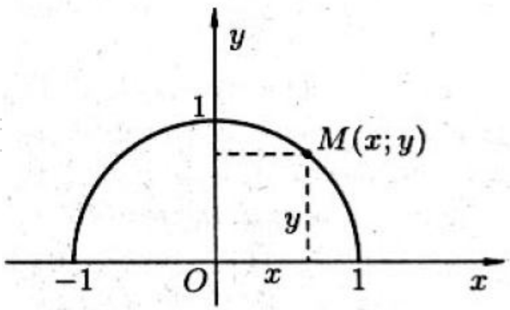
Определение 2.3

Графиком функции *y = f(x)* называется множество всех точек плоскости *xOy,* для каждой из которых *x* является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Другими словами график – это множество упорядоченных пар (x, f(x)). Например, графиком функции

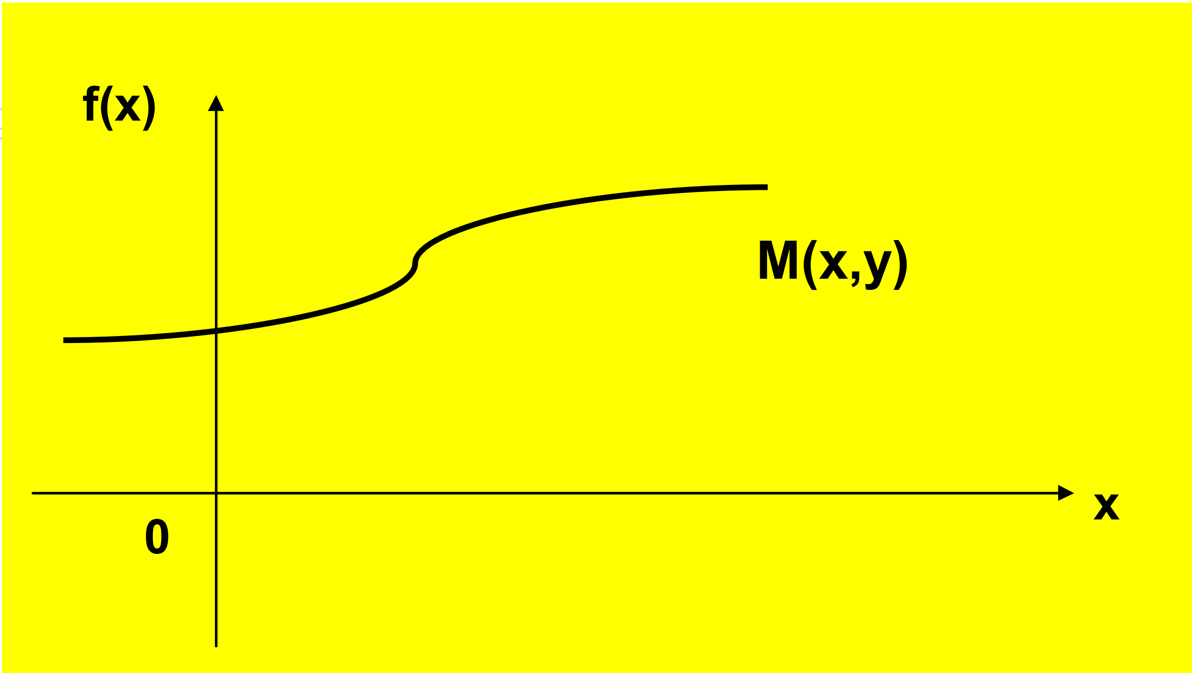
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

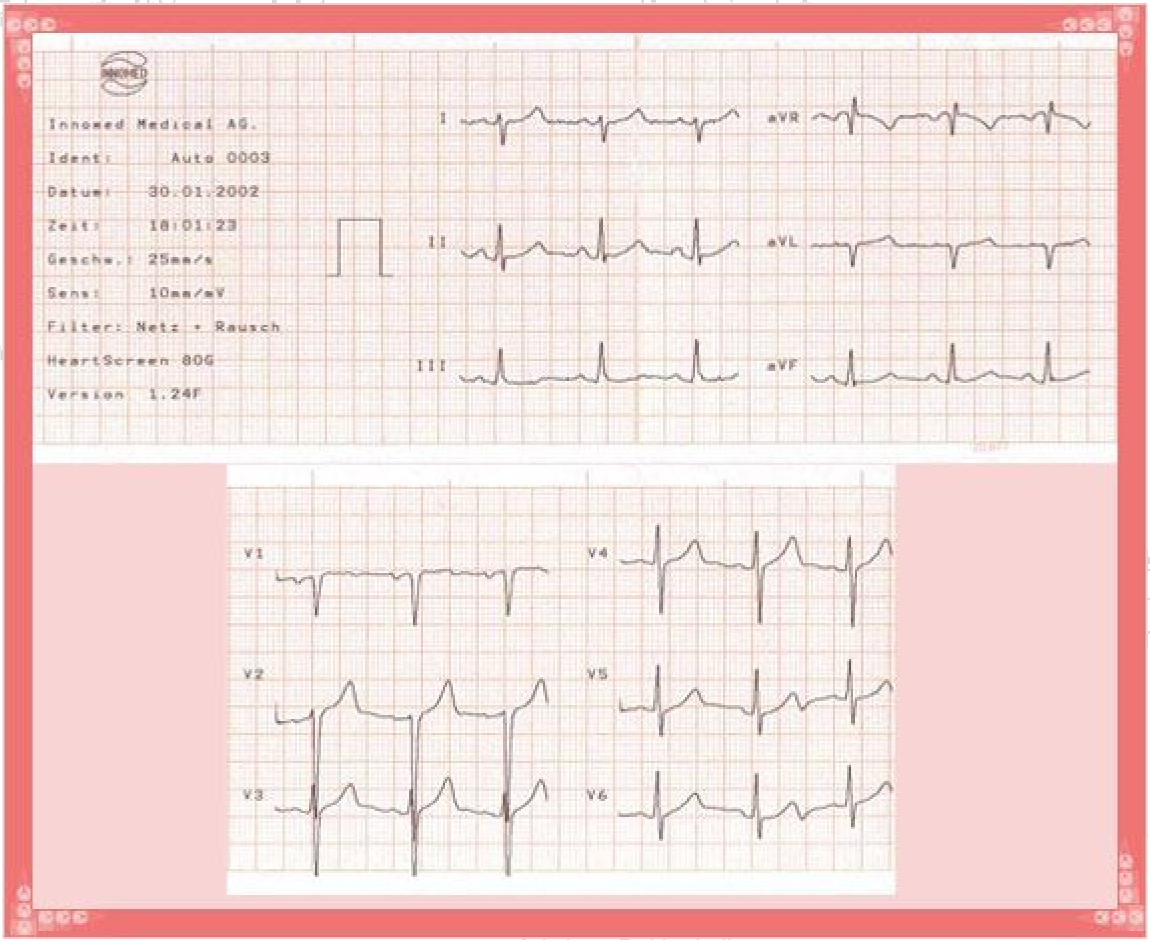
является верхняя полуокружность радиуса R = 1 с центром в O(0; 0)



Графический способ задания функций

$$\Gamma = \left\{ M\left(x, y \right) \in R^2 \mid y = f\left(x \right) \right\}.$$





Innomed Medical AG.
Ident: Auto 0003
Datum: 30.01.2002
Zeit: 18:01:23
Geschw.: 25mm/s
Sens: 10mm/mV
Filter: Netz + Rausch
HeartScreen 80G
Version 1.24F
I
aVR
II
aVL
III
aVF
V1
V4
V2
V5
V3
V6

Алгоритмически заданные функции

Editor - D:\work\LokFrac.m

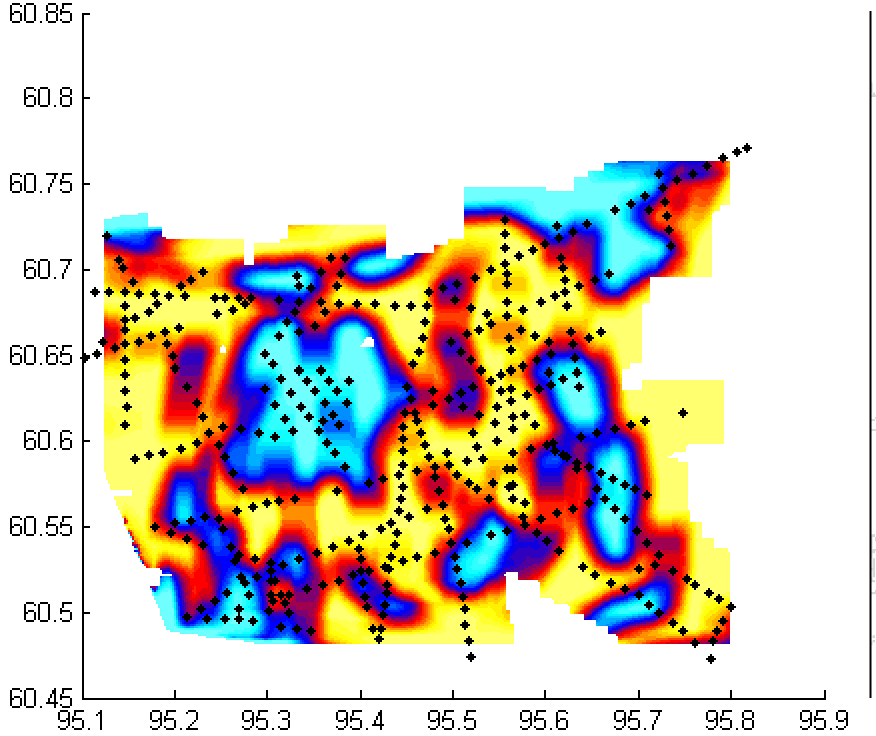
File Edit Text Desktop Window Help

```
function [y1] = LokFrac(BND,rw)

%B = wk1read('d:\work\Larichev\Vakynay\CO.wk1');

B = wk1read('d:\work\Pangeja\C2H6.wk1');

xi = linspace(min(B(:,1)),max(B(:,1)),length(B)/0.5);
yi = linspace(min(B(:,2)),max(B(:,2)),length(B)/0.5);
%zi = griddata_fil(B(:,1),B(:,2),B(:,3),xi,yi','linear',100000,1);%метр
zi = griddata_fil(B(:,1),B(:,2),B(:,3),xi,yi','linear',0.1,1);%град


%--- ОКОНТУРИВАНИЕ -----------------------------------------------------------
 %dX=0.06*length(xi);
 %dY=0.06*length(yi);
 %X=((B(:,1)-min(xi))/(max(xi)-min(xi)))*(length(xi)-1)+1;
 %Y=((B(:,2)-min(yi))/(max(yi)-min(yi)))*(length(yi)-1)+1;
 %Z(1:length(yi),1:length(xi))=NaN;
 %for i=1:length(B)
 %     Z(max(1,fix(Y(i)-dY)):min(ceil(Y(i)+dY),length(yi)),max(1,fix(X(i)-dX)):min(ceil(X(i)+dX),le
 %end
% zi=zi.*Z;
```

SalMaps.m | izo311fgn.m | d1.m | d1an.m | hilko2.m | LokFrac.m

LokFrac Ln 5 Col 41 OVR

Локальные фракталы



ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Начальный этап исследования функции.

1) Область определения **D(*f*)**

2) Нули **f(x)=0** и знак функции на множестве $x \in D(f)$.

3) Четность $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f)$: $(-x \in D(f)) \wedge (f(-x)=f(x))$;

нечетность $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f)$: $(-x \in D(f)) \wedge (f(-x)=-f(x))$.

Примеры:

$$f(x) = x^2 - \text{четная},$$

$$f(x) = x^3 - \text{нечетная}.$$

Замечание: Существуют функции общего вида.

4) Периодичность: $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$. **T** – период.

f(x) – периодическая $\Leftrightarrow \exists\, T \neq 0: \forall\, x \in D(f)$: $(x \pm T) \in D(f) \wedge f(x \pm T)=f(x)$.

5) **Монотонность**: функция - монотонно возрастающая, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

функция - монотонно убывающая, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

6) **Ограниченность:**

функция ограничена сверху $\Leftrightarrow$ **$\exists$ M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ f(x)$\leq$M,**

функция ограничена снизу $\Leftrightarrow$ **$\exists$ M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ f(x) $\geq$ M,**

функция ограничена $\Leftrightarrow$ **$\exists$ N,M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ N$\leq$f(x)$\leq$M.**

7) Если условия пункта 6 не выполняются, то функция называется **неограниченной.**

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.

Сложная функция.

На **D** определена функция **u=φ(x) → E(u)** – множество значений.

На **E(u)** задана **y=f(u)** **(D(f) ⊆ E(u)).**

Тогда

$$x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y\Leftrightarrow y=f\left(\varphi\left(x\right)\right)\Leftrightarrow\left(f\circ\varphi\right).$$

называется суперпозицией функций.

x – независимая переменная; **u** – промежуточный аргумент.

Пример:

$$y=\sqrt{ax^2+bx},\ u=ax^2+bx,\ y=\sqrt{u}.$$

Обратная функция.

- Функция $y=f(x)$ отображает $\mathbf{D(f) \to E(f)}$.
- Пусть f осуществляет взаимно однозначное отображение

$$f \Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists^1 y \in E: y=f(x):$$

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Тогда можно говорить об обратной функции

$$x=f^{-1}(y).$$

Пример:

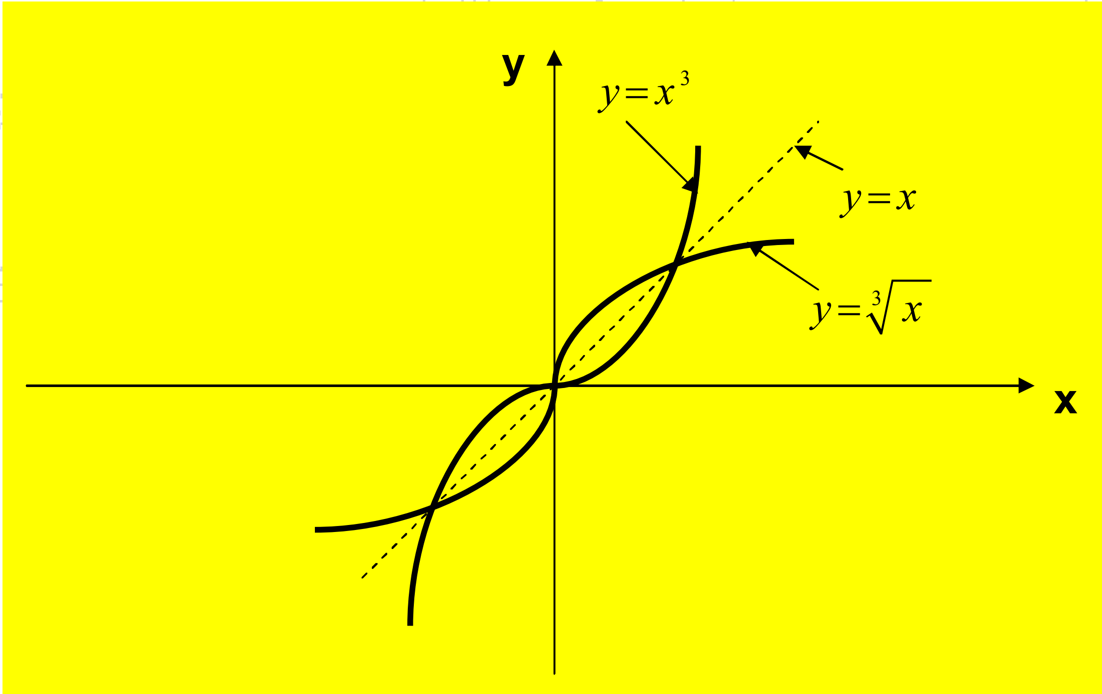
$$y=x^3, \quad x=\sqrt[3]{y}.$$

Теорема 2.1(достаточное условие обратимости)

- Если числовая функция монотонна, то существует обратная функция

$$x = f^{-1}(y).$$

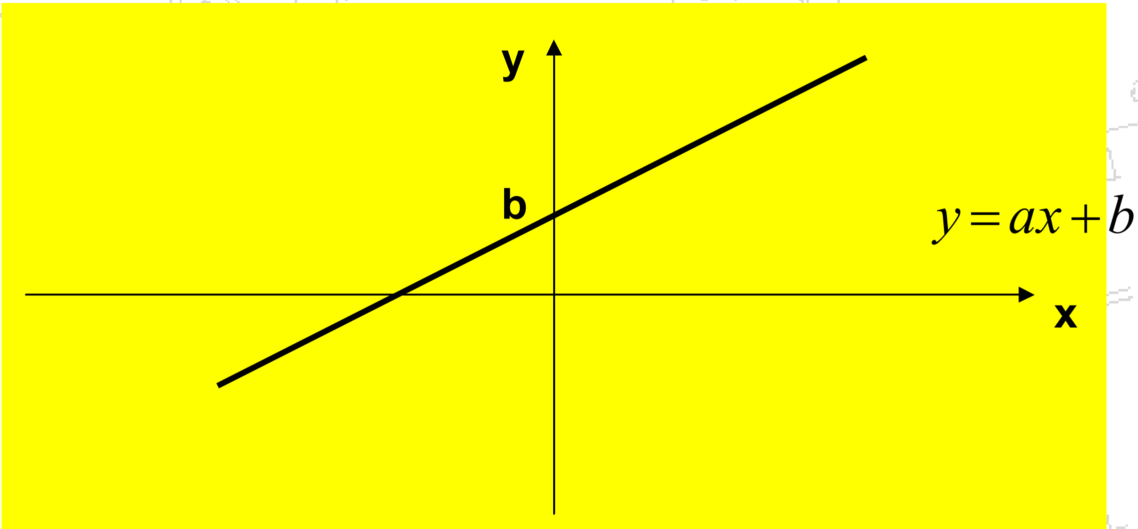
Построение графика обратной функции.



ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

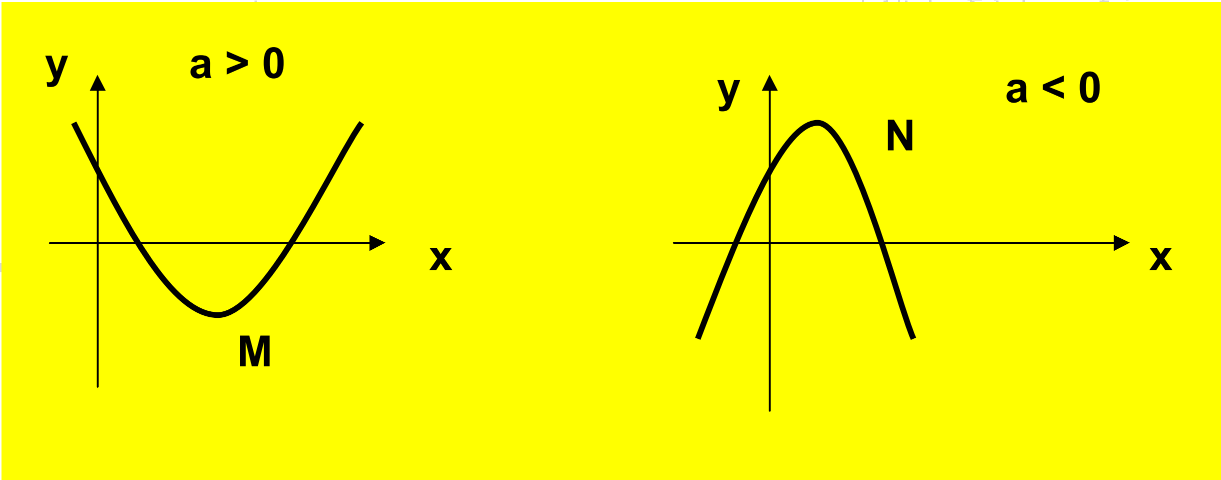
- **1) Линейная.**
- ***y=ax+b* (*a,b*∈R), D(f)=R.**

$$E(f)=\begin{cases} R & \forall\ a\neq 0, \\ \{b\} & a=0. \end{cases}$$



2) Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c,\ (a, b, c \in R;\ a \neq 0),\ D(f) = R.$$

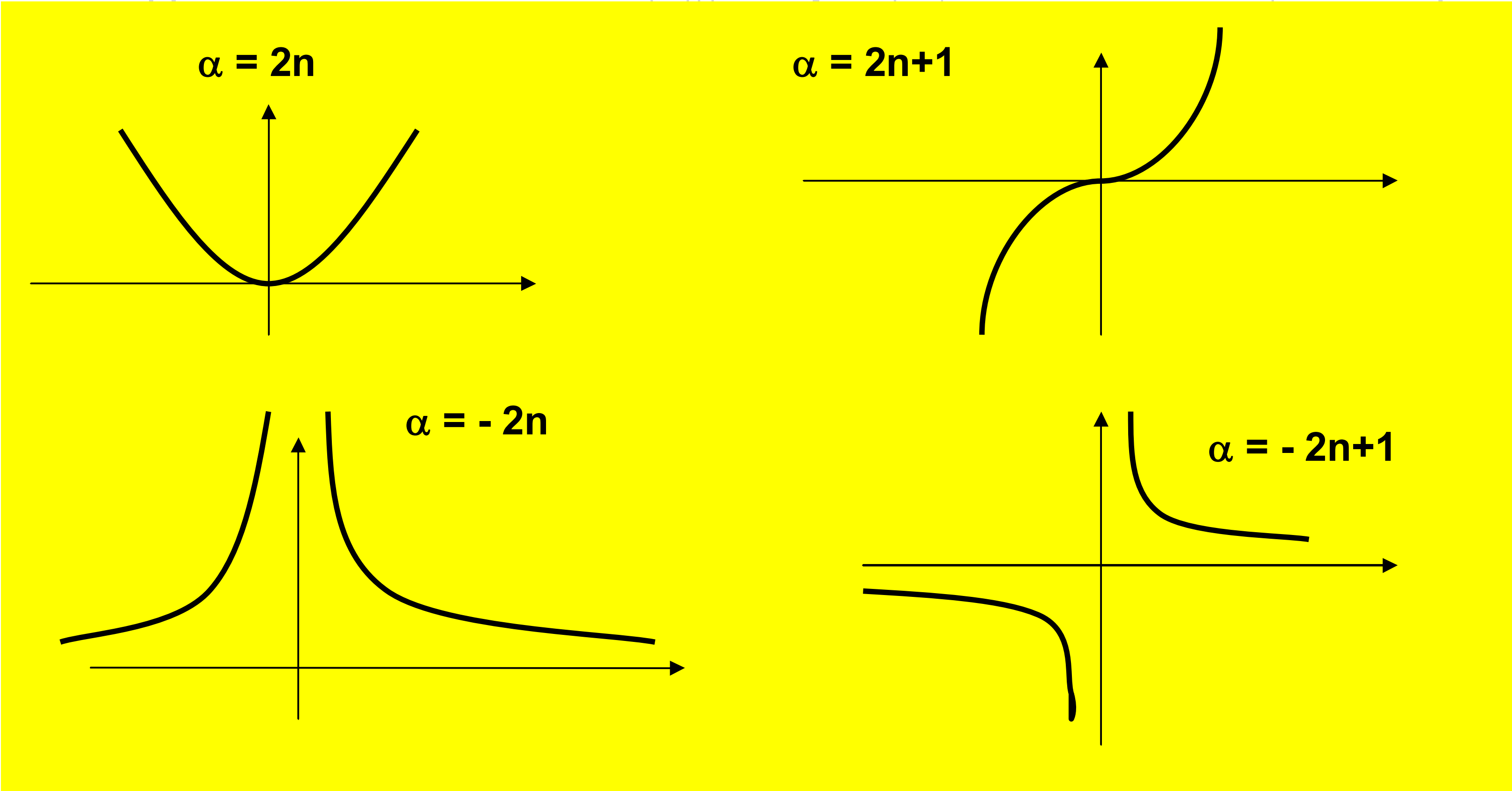


$$a > 0:\ E(f) = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}; \infty\right),\ M\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

$$a < 0:\ E(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right),\ N\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

3) Степенная функция

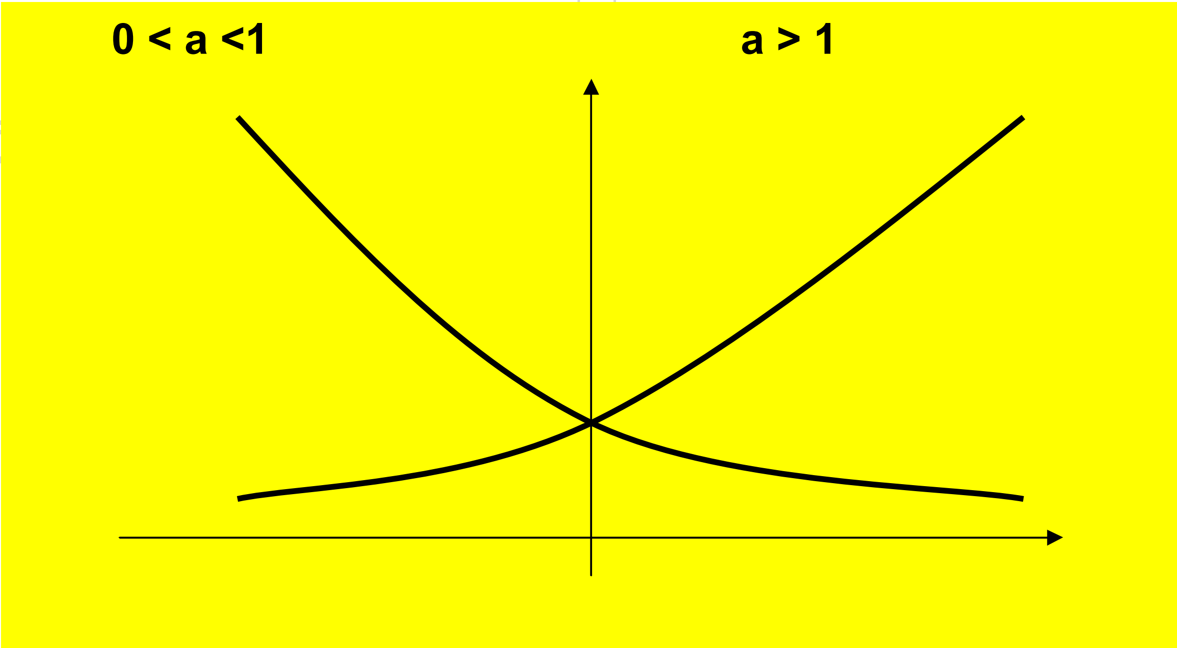
$$y=x^{\alpha}.$$



4) Показательная функция.

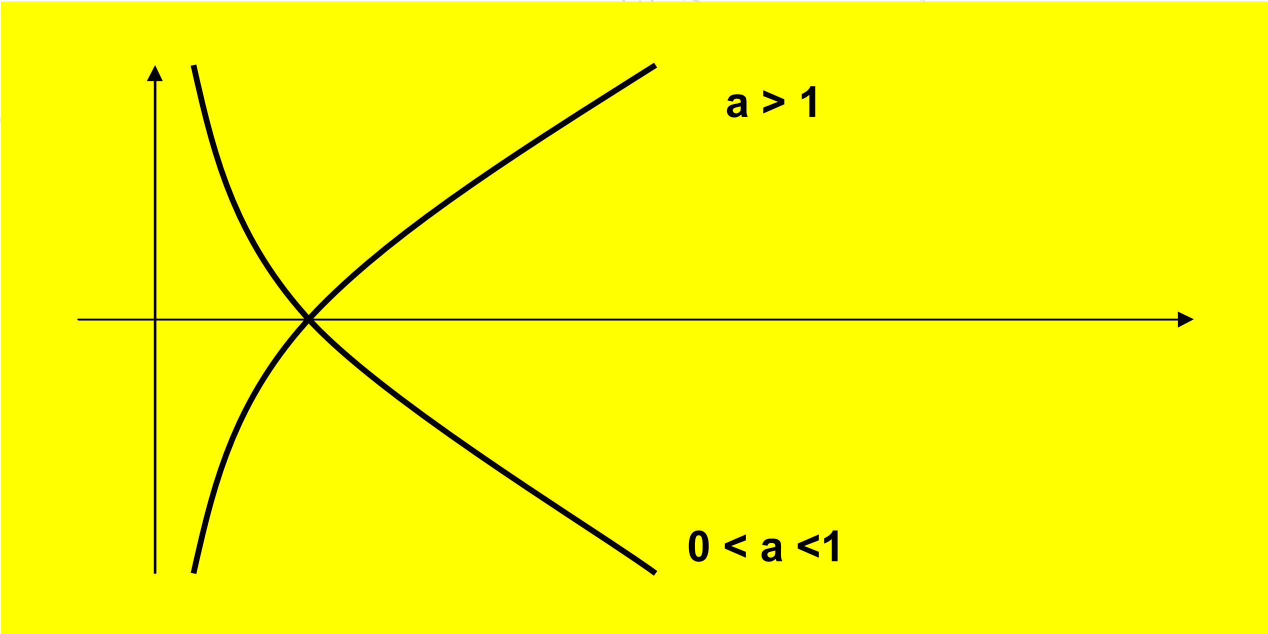
$$y = a^{x},\ (a > 0; a \neq 1).$$

$$D(f) = R,\ E(f) = (0; \infty).$$



5) Логарифмическая функция

$$y = \log_a x.$$



6) Тригонометрические функции.

y=sinx

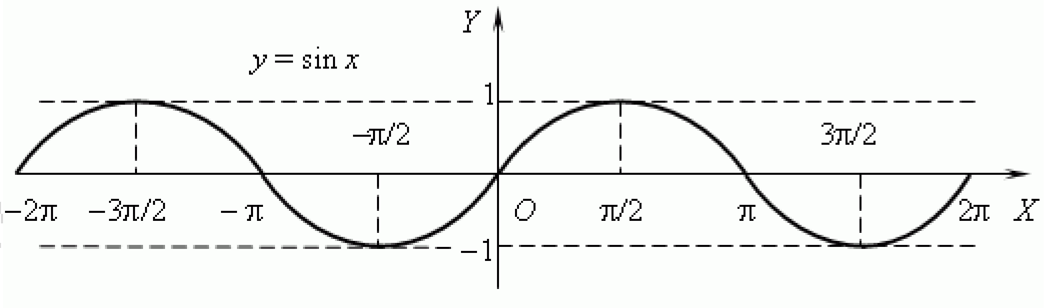


Рис. 19

y=cosx

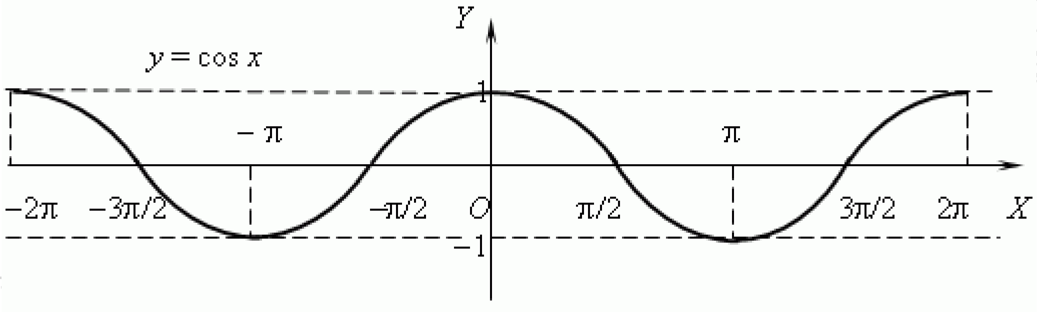
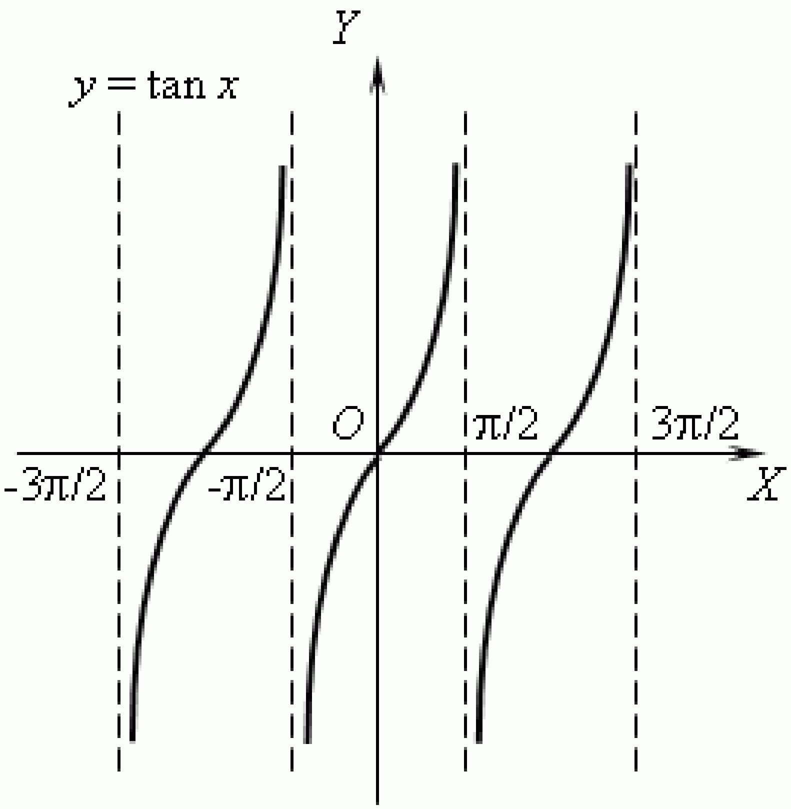


Рис. 20



y=tgx

Рис. 21

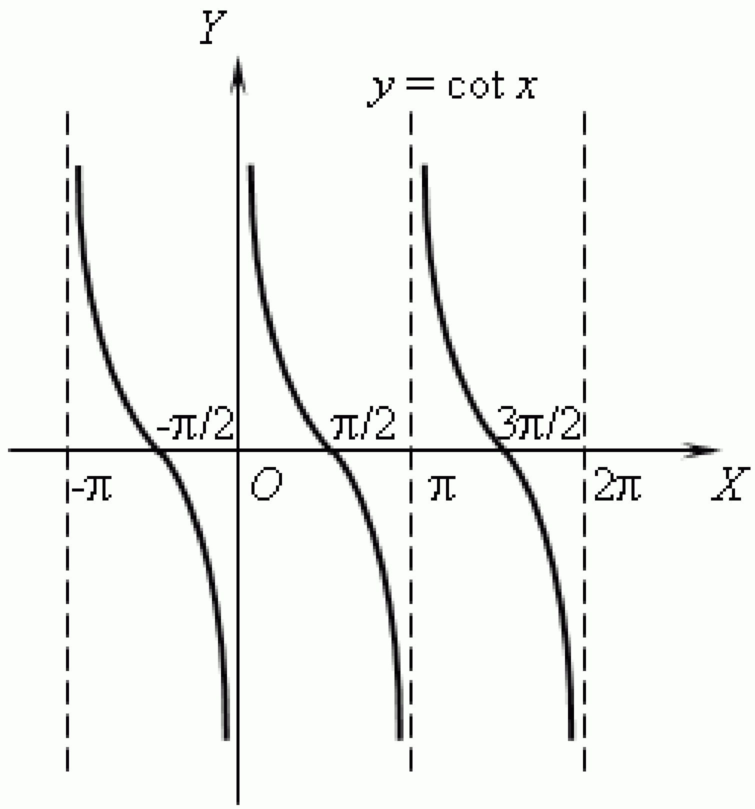


Рис. 22

y=ctgx

7) Обратные тригонометрические функции.

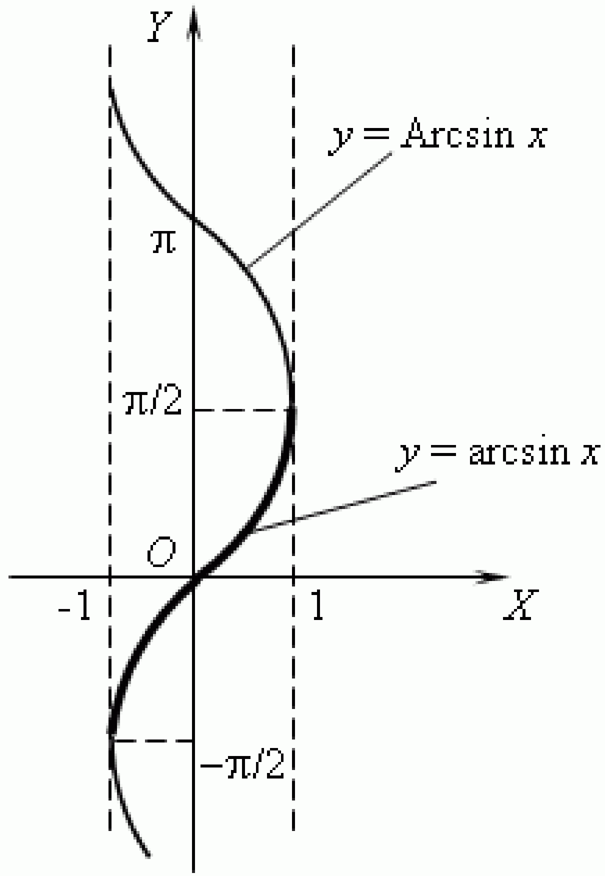


Рис. 23

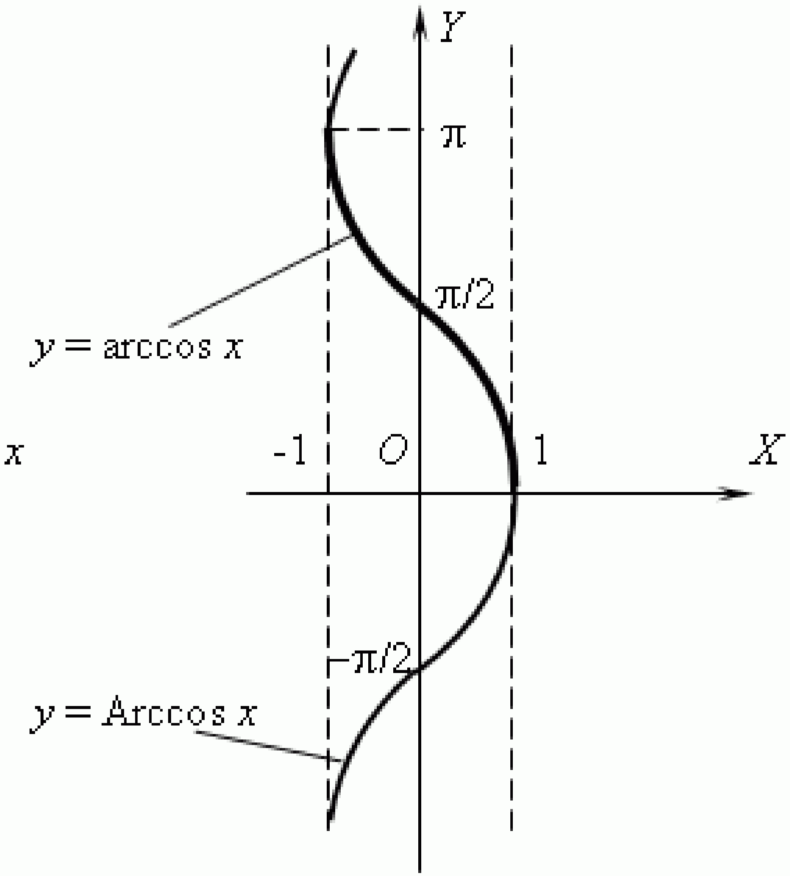


Рис. 24

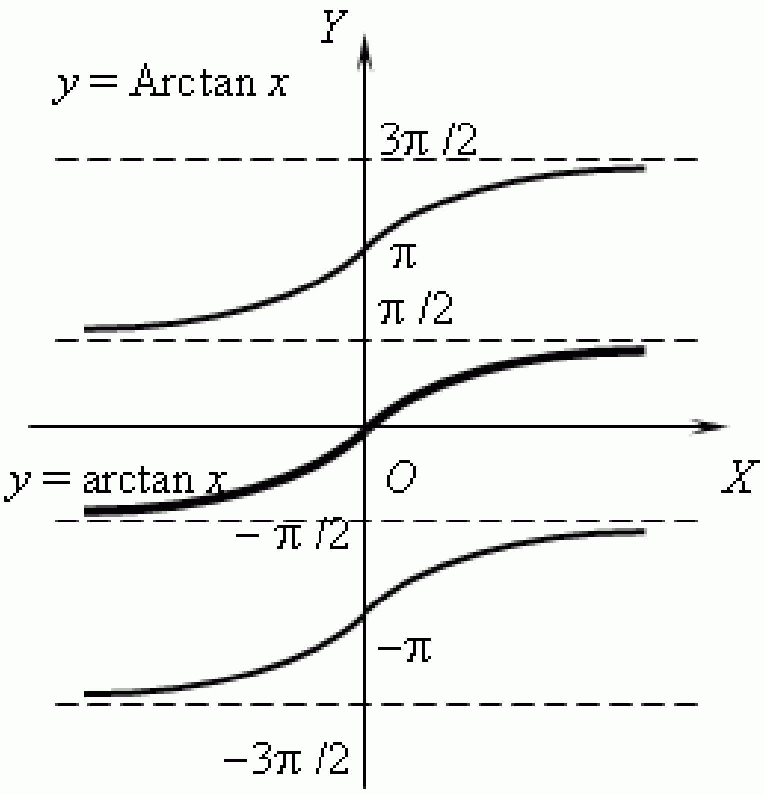


Рис. 25

y=Arctgx

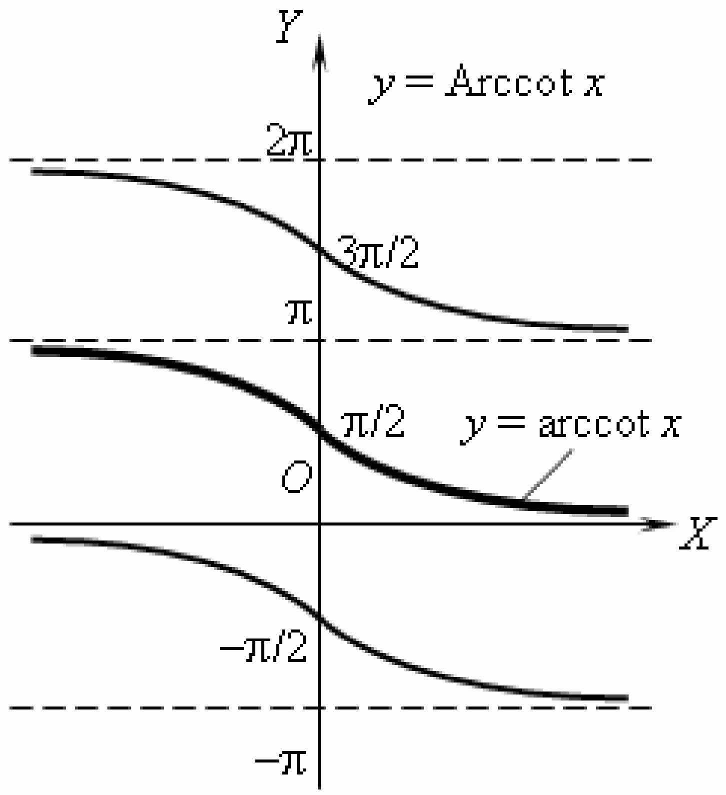
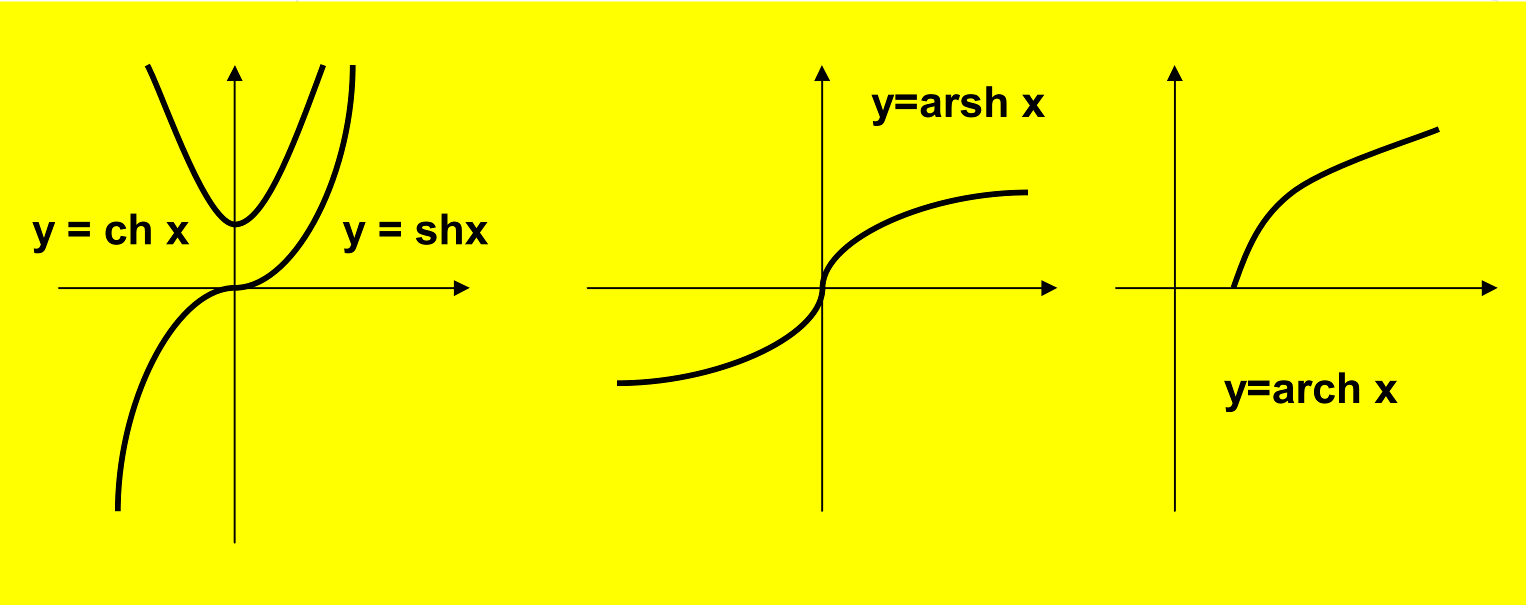


Рис. 26

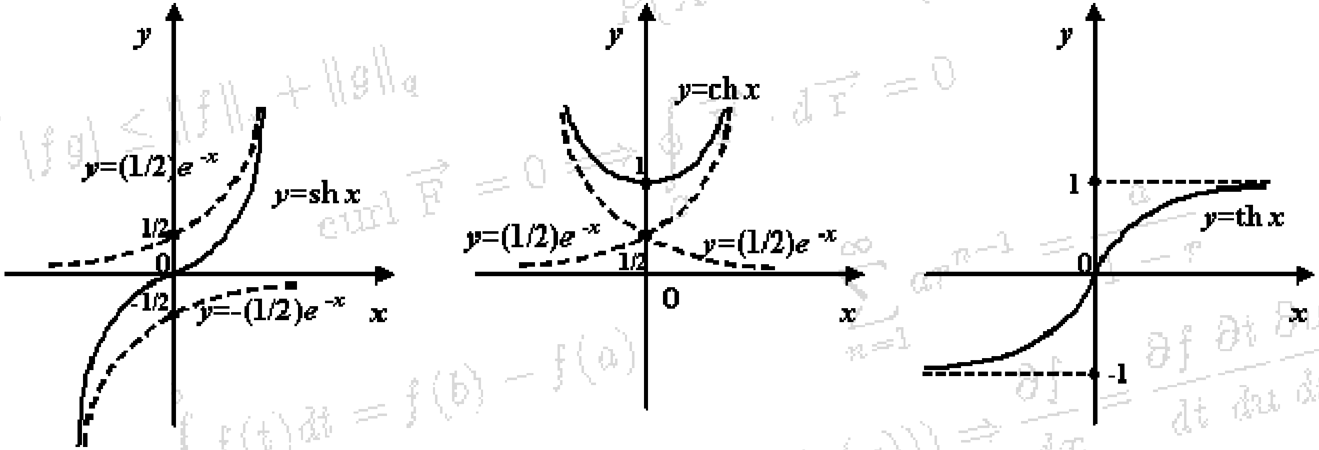
y=Arcctgx

8) Гиперболические функции.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



ареасинус $y = arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right);$ **ареакосинус** $y = archx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right);$



y
y=(1/2)e -x
y=sh x
1/2
0
-1/2
y=-(1/2)e -x
x
y
y=ch x
1
y=(1/2)e -x
y=(1/2)e -x
1/2
0
x
y
1
y=th x
0
x
-1

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ.

- **1) Целые рациональные функции:**

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

- **2) Дробно-рациональные функции:**

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

- ***Совокупность 1) и 2) – класс рациональных функций.***

3) Иррациональные функции: - получаются с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями.

$$y=\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{x}\,.$$

Совокупность 1), 2) и 3) – **класс алгебраических функций**

4) Трансцендентные функции: sin x, ln x, ch x и т. д.

Элементарные функции

Основные элементарные функции

Показательная функция
Степенная функция
Логарифмическая функция
Тригонометрические функции
Обратные тригонометрические функции

Определение 2.4

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***

ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ.

- $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in T.$
- **t** – называется параметром.
- Если **φ -** монотонна, то ∃ обратная и $t=\varphi^{-1}(x).$
- Тогда

$$y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

- Всякую явно заданную функцию можно представить параметрически

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t,\quad t\in T\\ y=f(t).\end{cases}$$

Пример:

$$y=\frac{1}{x},\ D(f)=(0,\infty).$$

Введем $x=t,\ t\in(0;\infty),$

Тогда $y=\frac{1}{t}.$

Введем $x=e^{t},\ t\in R,$

Тогда $y=e^{-t}.$

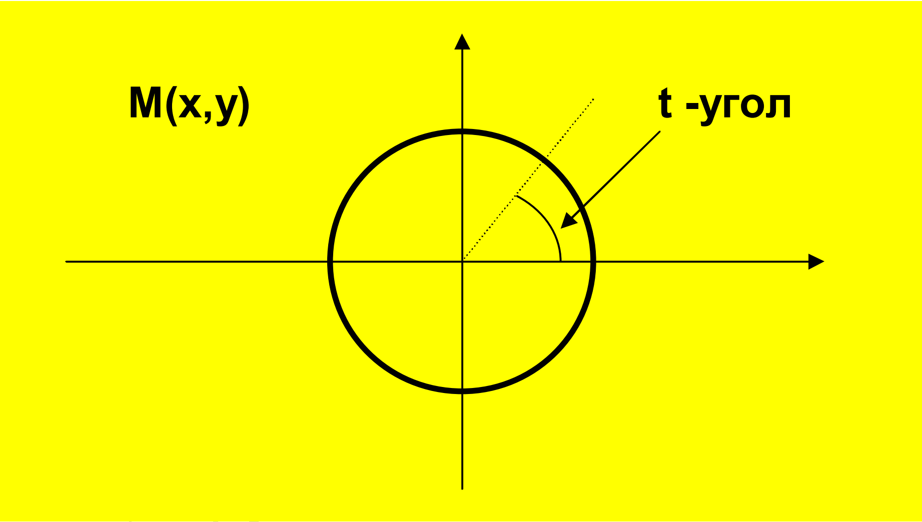
Параметрическое задание линий на плоскости.

- Множество точек **M(x,y)** вещественной плоскости координаты которых удовлетворяют **x=x(t), y=y(t), t∈T,** параметрически задают линию
- **Прямая:**

$$y = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \ t \in R, \\ y = at + b. \end{cases}$$

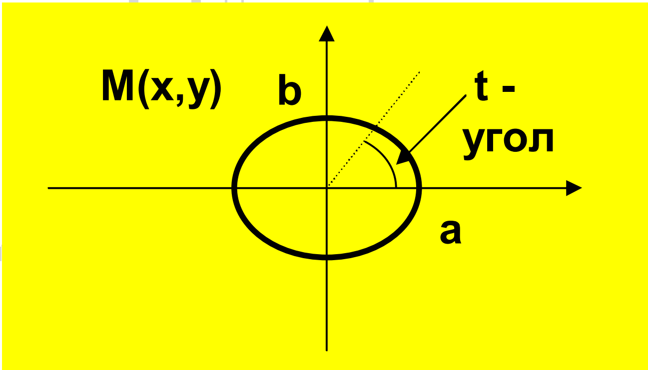
Окружность с центром в начале координат.

$$x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t, \; 0\le t<2\pi, \\ y=a\sin t. \end{cases}$$



Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t,\ 0\le t<2\pi, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$



- **Параболa.**

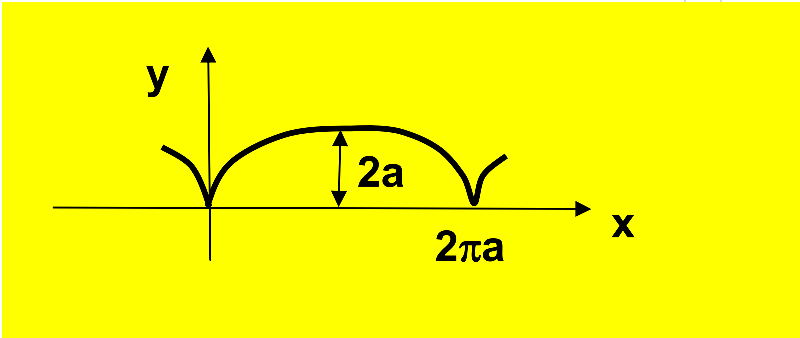
$$y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \ t \in [0;\infty), \\ y^2 = 2pt. \end{cases}$$

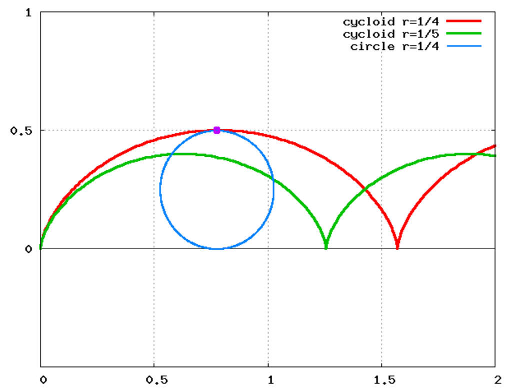
- **Гипербола.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \ t \in R, \\ y = b\operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Циклоида.

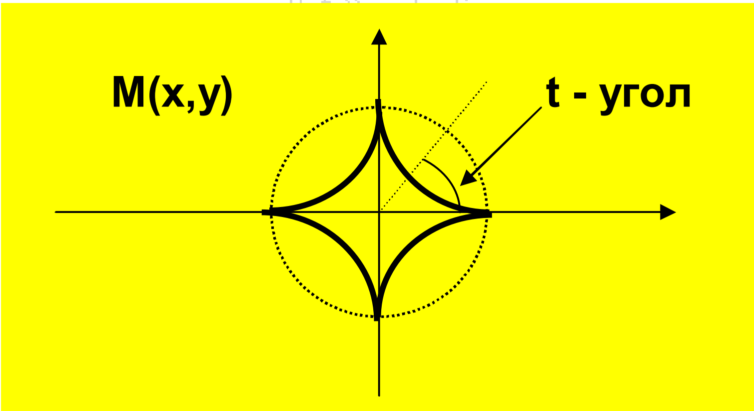
$$x = a(t - \sin t),\ t \in R,$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

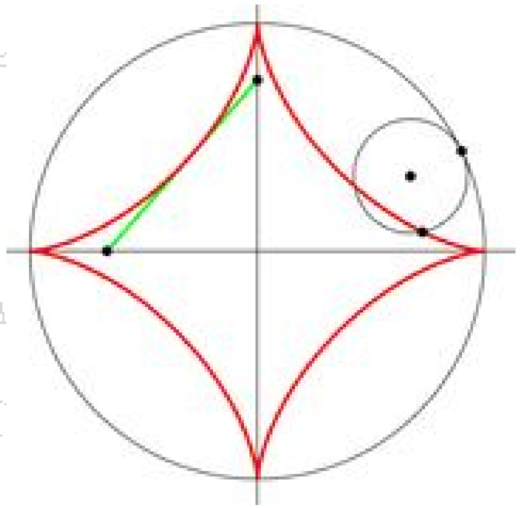


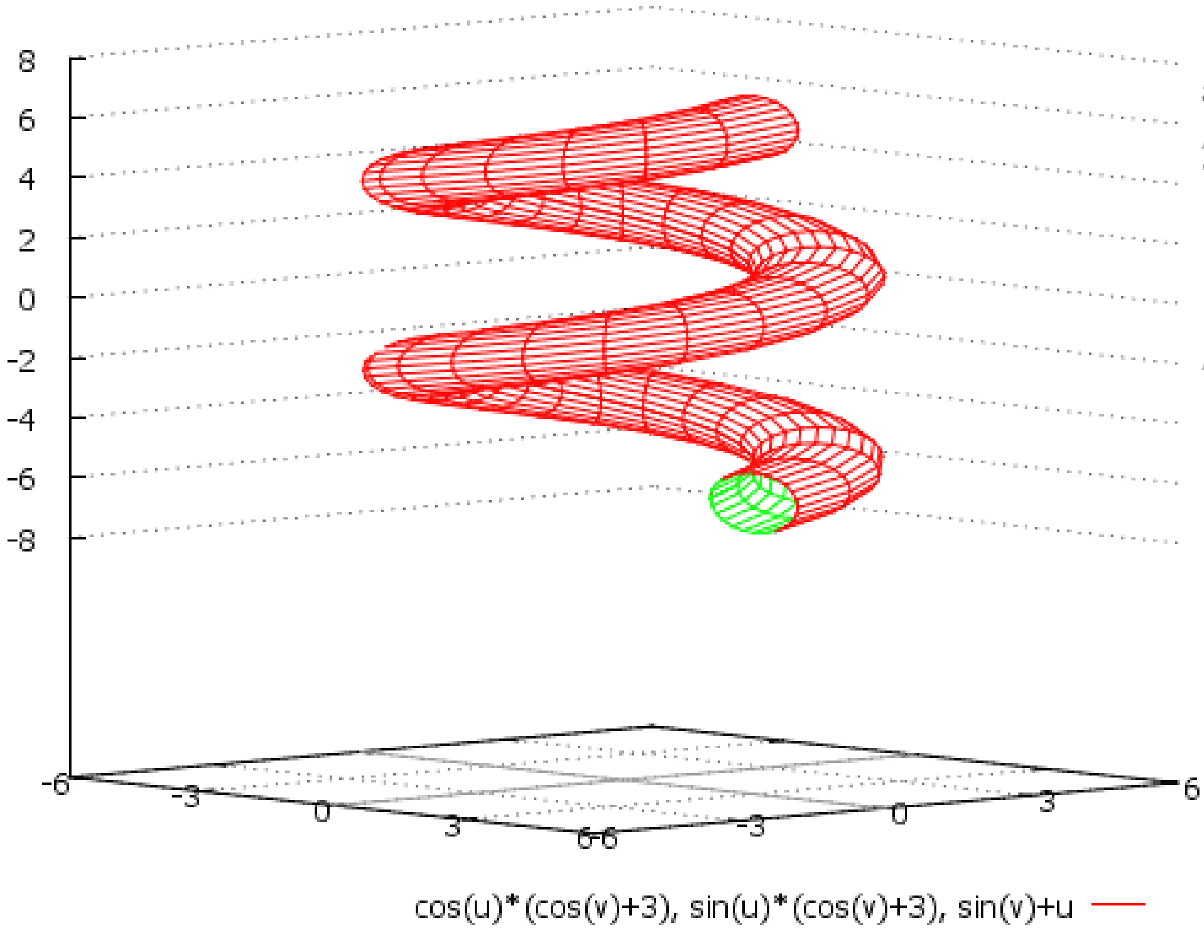


Астроида.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ (a=4r)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos^3 t,\ 0\le t<2\pi,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$





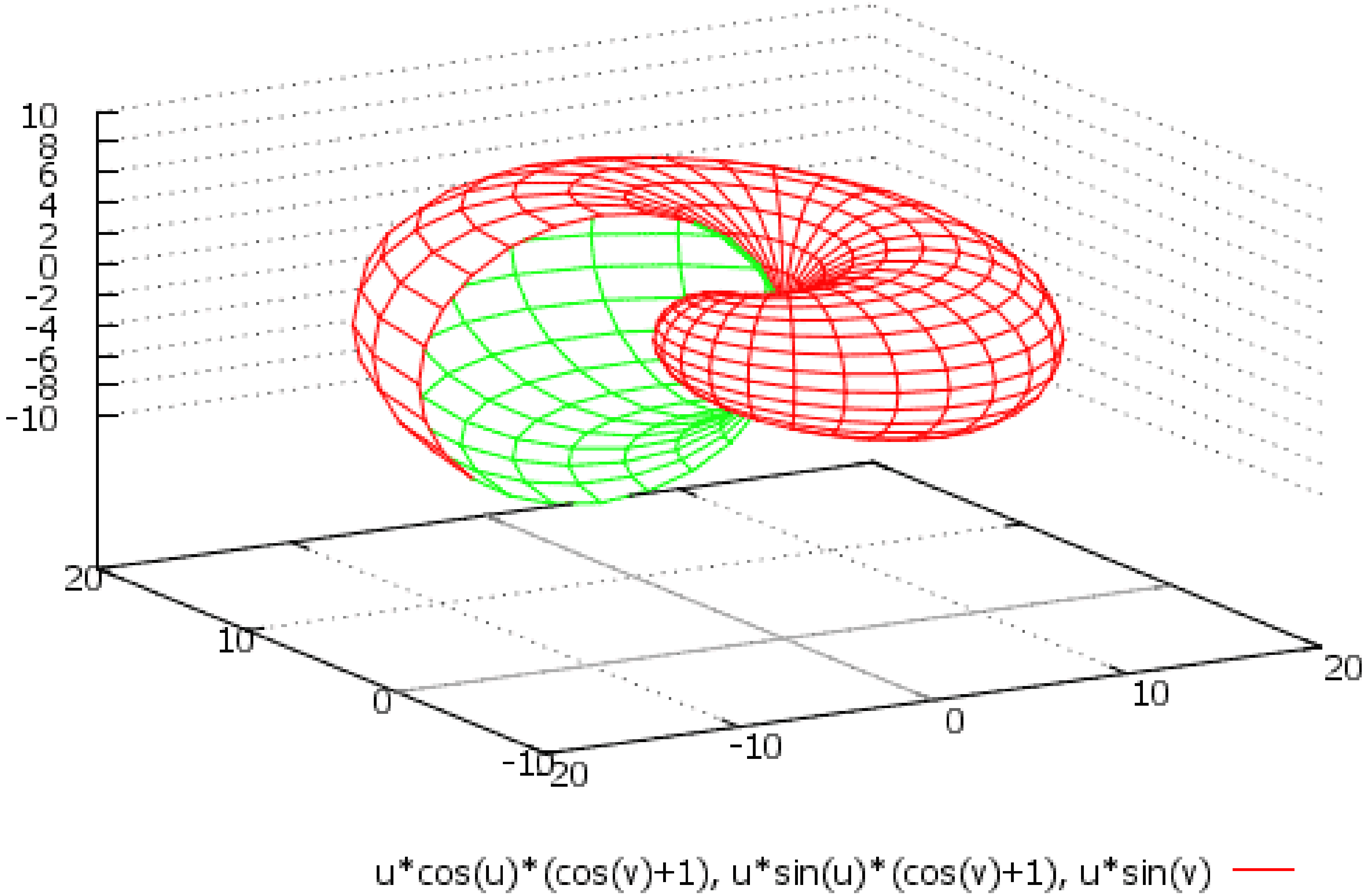


$$x = \cos(u)\left(\cos(v)+3\right)$$

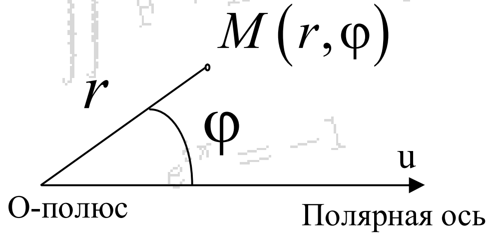
$$y = \sin(u)\left(\cos(v)+3\right)$$

$$z = \sin(v)+u$$

$$u \in [-2\pi; 2\pi], \quad v \in [-\pi; \pi]$$


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
20
10
0
-10
-20
-10
0
10
20
u*cos(u)*(cos(v)+1), u*sin(u)*(cos(v)+1), u*sin(v)

Полярные координаты.



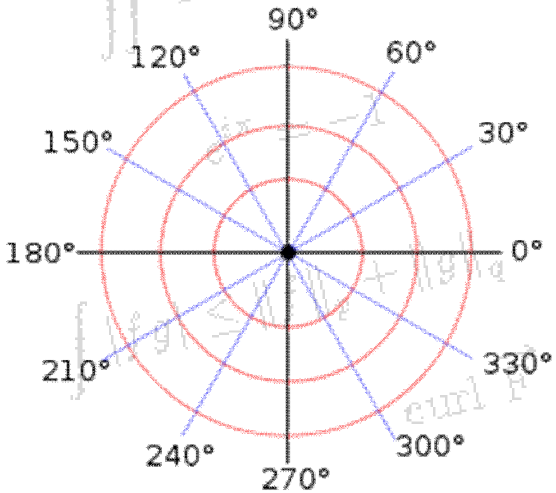
$r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус.

$\varphi(M)$ - полярный угол, принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на $2k\pi$. Значение φ: $0\le\varphi<2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi<\varphi\le\pi$).

$$\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\ r\le r(\varphi)\end{cases}$$

Связь декартовых и полярных координат:

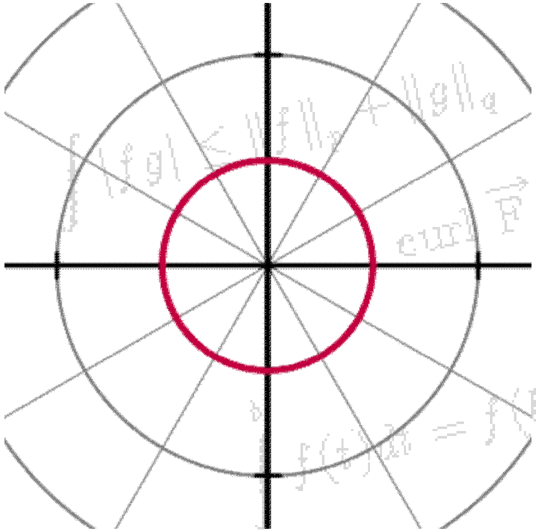
$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi.\end{cases}\qquad \begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$



90°
60°
30°
0°
330°
300°
270°
240°
210°
180°
150°
120°

Окружность

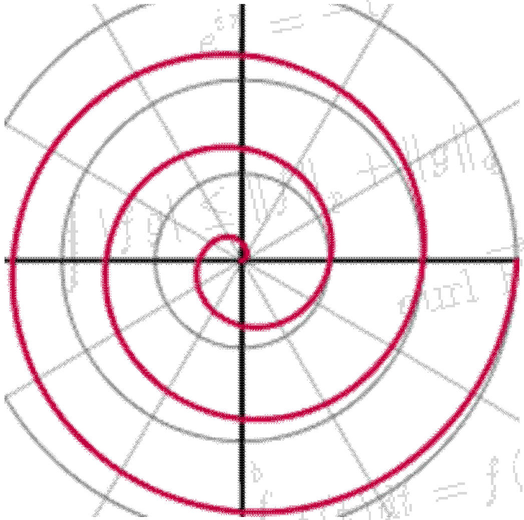
$$r(\varphi) = a$$



Прямая

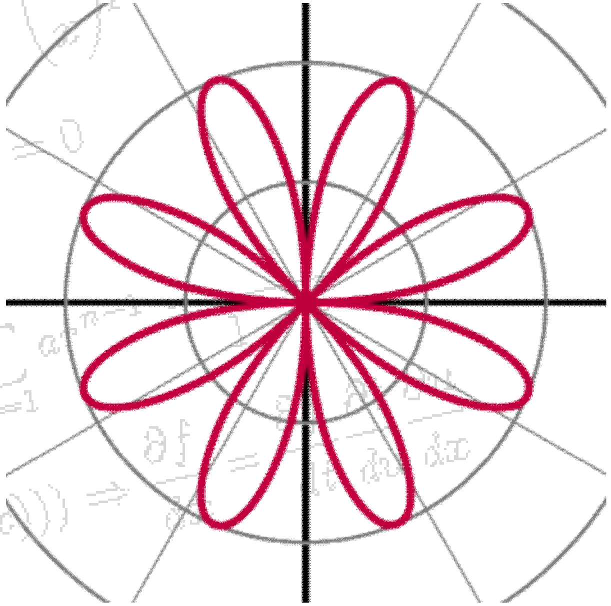
$$\varphi = \theta,$$

Спираль Архимеда



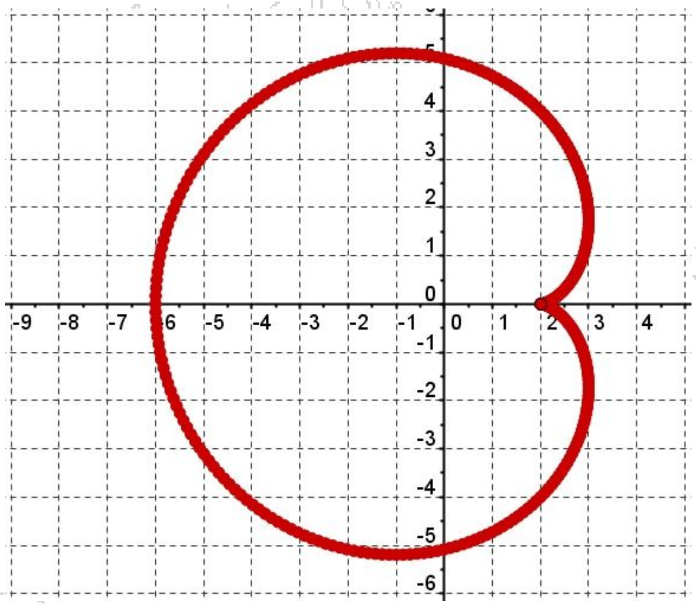
Полярная роза

$$r(\varphi) = a\cos(k\varphi + \theta_0)$$



$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$$



$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi.$$

$$p^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \text{, где } \begin{cases} x = c\sqrt{2}\frac{p+p^3}{1+p^4} \\ y = c\sqrt{2}\frac{p-p^3}{1+p^4} \end{cases}$$