Глава 4

ДВИЖЕНИЯ В ДВУХ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Эта глава представляет собой синтез понятий развитых в Главах 2 и 3. Здесь мы продолжим описывать движение частицы посредством ее положения, скорости и ускорения, так же как это было сделано в Главе 2. Однако, в этой главе мы снимем ограничение, связанное с движением частицы только по прямой линии. Здесь мы рассмотрим движение частицы в обычной трехмерной координатной системе. Наблюдение за **x**, **y** *и* **z** *компонентами движения значительно упрощается, если основываться на векторных обозначениях. Мы увидим, что кинематические уравнения Главы 2 можно непосредственно применить к более общему случаю просто заменив одномерные переменные соответствующими векторами. В качестве применения векторной техники рассмотрены два известных примера: движение тела в поле тяжести Земли, имеющее вертикальную и горизонтальную компоненты скорости, и движение тела по окружности.*

4-1. Положение, скорость и ускорение

На Рис. 1 показана частица в момент времени t, двигающаяся по криволинейному пути в трехмерном пространстве.

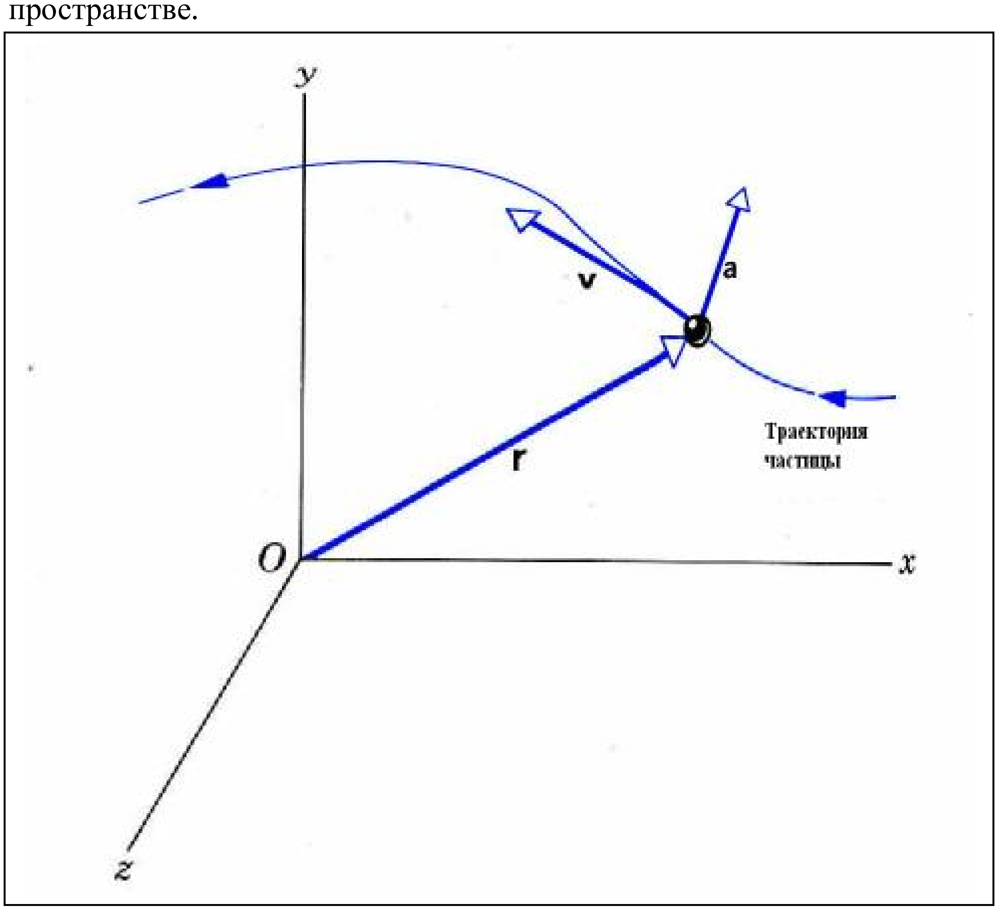

Рис. 1. Векторы положения, скорости и ускорения частицы, двигающейся вдоль произвольной траектории. Относительные длины этих трех векторов не зависят друг от друга, также как и их относительные направления в пространстве.

Ее *положение* или смещение относительно начала координат задается вектором **r**. Скорость отмечена вектором **v**, который, как мы увидим позже, направлен по касательной к траектории. Ускорение показано вектором **a**, направление которого, как будет показано позже, в общем случае не имеет универсальной связи с векторами **r** и **v**.

В декартовых координатах вектор положения **r** связан с координатами x, y, z точки, в которой частица находится в момент времени t, соотношением:

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z \qquad (1)$$

пусть частица передвинулась из положения $\mathbf{r}_1$ в момент t_1 в положение $\mathbf{r}_2$ в момент t_2 (Рис. 2a).

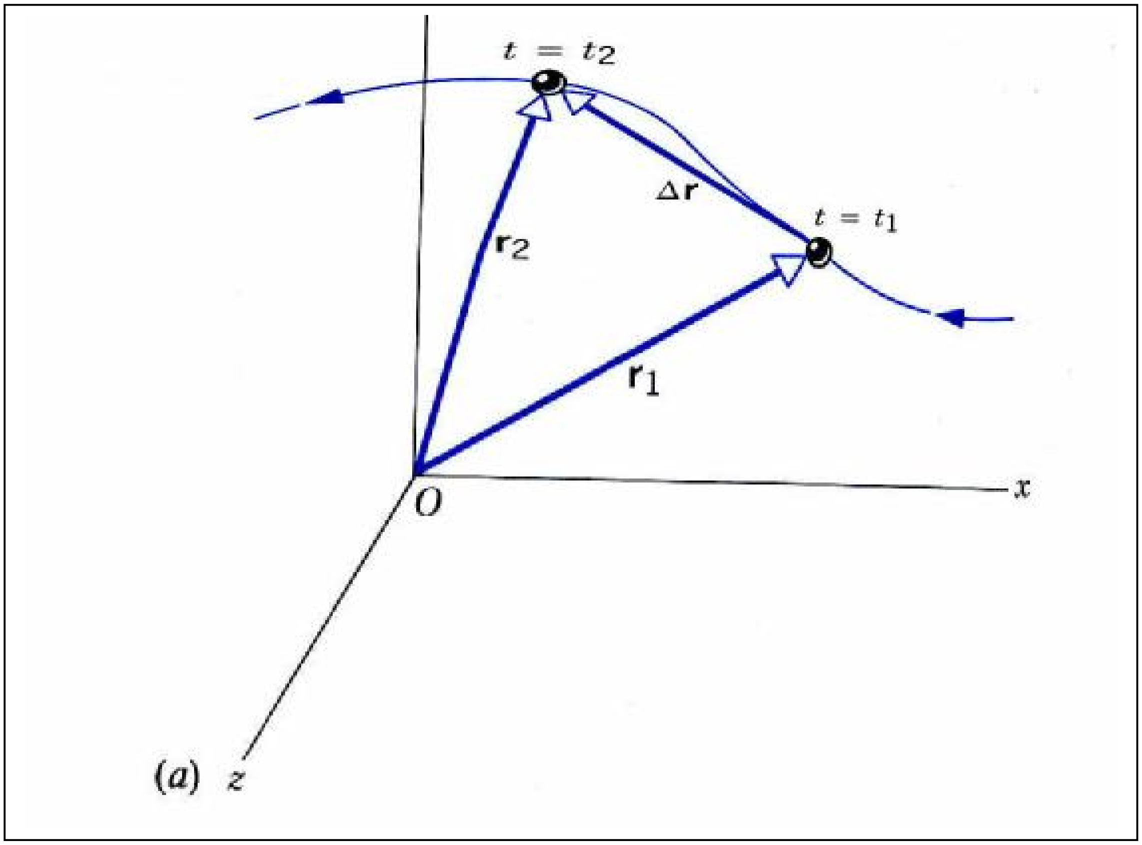

Рис. 2а. За время Δt от t_1 до t_2 частица передвинулась из положения $\mathbf{r}_1$ в положение $\mathbf{r}_2$. При этом ее смещение за этот интервал времени есть $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$.

При этом ее *смещение* за интервал времени $\Delta t=t_2-t_1$ есть вектор $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и средняя скорость на этом интервале есть:

$$\bar{\mathbf{v}}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

В этом уравнении вектор смещения $\Delta\mathbf{r}$ умножается на скаляр 1/Δt, поэтому вектор $\bar{\mathbf{v}}$ направлен по вектору $\Delta\mathbf{r}$.

Обратите внимание, что три вектора $\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_2$ связаны между собой также как и три вектора **a**, **b** и **s** на Рис.3 в Главе 3. Применив графический метод сложения векторов, мы получим, что при сложении вектора $\mathbf{r}_1$ с вектором $\Delta\mathbf{r}$ мы получим вектор $\mathbf{r}_2$. Таким образом, $\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2$ и $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$.

По мере уменьшения интервала Δt, вектор Δ**r** приближается к реальной траектории (Рис. 2b) и становится касательным к ней в пределе Δt→0. В этом случае средняя скорость стремится к своему мгновенному значению:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (3)$$

Посредством разумного расширения определения производной, которое мы дали в уравнении (8) Главы 2, мы запишем величину в правой части (3) как производную от вектора **r** по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4)$$

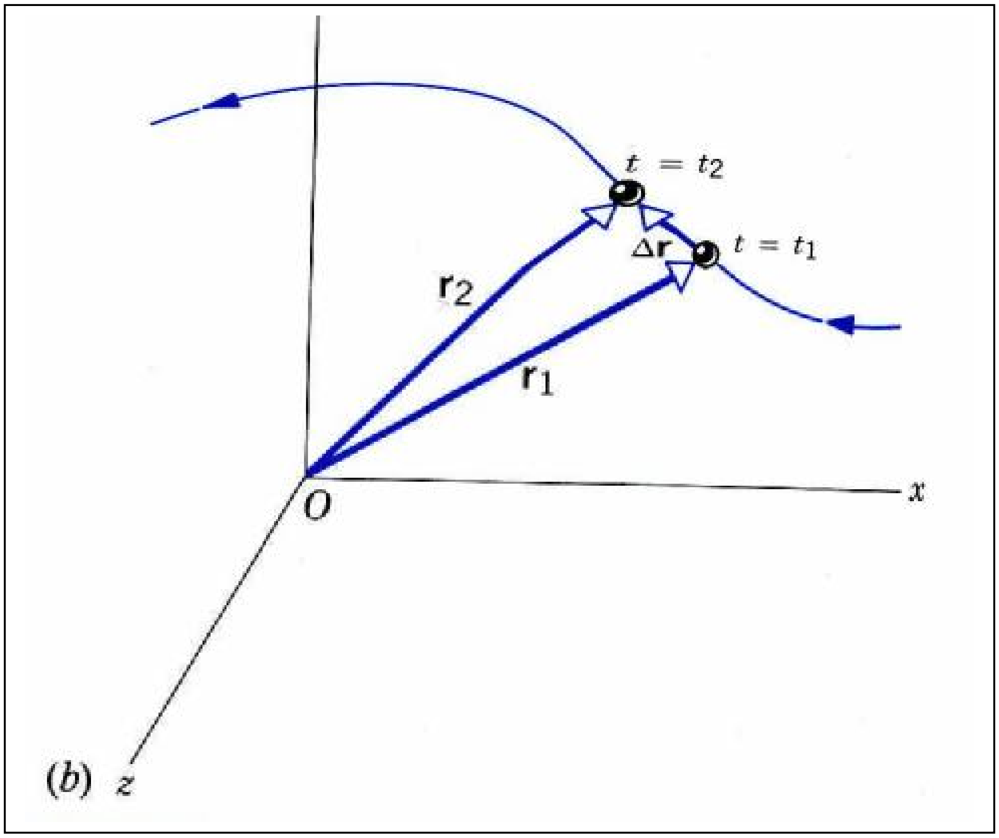

Рис. 2b. По мере того, как интервал времени Δt становится все меньше, вектор смещения приближается к реальной траектории.

Подобно вектору Δ**r** в пределе Δt→0, *вектор* **v** *направлен по касательной к траектории в любой ее точке.*

Уравнение (4), как и все векторные уравнения, эквивалентны трем скалярным уравнениям. Записав в (4) векторы **v** и **r** через их компоненты, получим:

$$\mathrm{v}_x\,\mathbf{i} + \mathrm{v}_y\,\mathbf{j} + \mathrm{v}_z\,\mathbf{k} = \frac{d}{dt}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (5)$$

Поскольку два вектора равны только тогда, когда равны их компоненты, то из (5) следует:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}; \quad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}; \quad \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt}; \qquad (6)$$

Таким образом, векторное уравнение (4) полностью эквивалентно трем скалярным уравнениям (6).

Действуя аналогичным образом, можно распространить этот метод и на ускорение, точно так, как это было сделано в Разделе 2-5. Среднее ускорение есть:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (7)$$

Мгновенное ускорение получается отсюда, когда временной интервал Δt стремится к нулю:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad , \qquad (8)$$

откуда

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (9)$$

и

$$a_x = \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dt}\mathbf{;}\ a_y = \frac{d\,\mathrm{v}_y}{dt}; \quad a_z = \frac{d\,\mathrm{v}_z}{dt}\mathbf{;} \qquad (10)$$

Обратите внимание, что векторные уравнения позволяют с одной стороны упростить запись (уравнение (9), например, представляет собой три уравнения (10)), а с другой стороны разделить компоненты (например, a_x никак не влияет на v_y или v_z).

Из (9) также следует, что, поскольку вектор **v** имеет как направление, так и величину, то изменение *направления* скорости приводит к появлению ускорения даже, если величина скорости не изменяется. Таким образом, движение с постоянной скоростью может быть также и движением с ускорением. То есть, поскольку $\mathrm{v}^2=\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2$, то компоненты скорости могут изменяться таким образом, что сама величина v^2 остается постоянной. Самый известный пример такого движения это равномерное движение по окружности, которое мы рассмотрим в Разделе 4-4.

Пример 1. Частица движется в плоскости ху так, что ее координаты меняются со времененм следующим образом: $x(t)=t^3-32t$, $y(t)=5t^2+12$. Здесь х и у в метрах, t в секундах. Найти положение, скорость и ускорение частицы в момент времени t= 3с.

Решение. Положение частицы определяется формулой (1):

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y= (t^3-32t)\ \mathbf{i}+(5t^2+12)\ \mathbf{j}$$

Проведя расчет для t-3 с, получим

$$\mathbf{r}=-69\ \mathbf{i}+57\ \mathbf{j}$$

где компоненты даны в метрах.

Компоненты скорости определяются из уравнения (6):

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 32t\right) = 3t^2 - 32$$

$$\mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2 + 12\right) = 10t$$

Используя уравнение (5), получим для скорости при t=3 с:

$$\mathbf{v}=-5\ \mathbf{i}+30\ \mathbf{j}$$

в м/с.

Для компонент ускорения будем иметь:

$$a_x = \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 32\right) = 6t$$

$$a_y = \frac{d\,\mathrm{v}_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(10t\right) = 10$$

При t=3 с получим

$$\mathbf{a} = 18\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j}$$

в м/с^2.

На Рис. 3. показана траектория этой частицы от t=0 до t=4 с. Показаны векторы положения, скорости и ускорения частицы в момент t= 3 с. Обратите внимание, что вектор скорости направлен по касательной к траектории, тогда как направление вектора ускорения не имеет определенной связи с направлениями векторов **r** или **v**.

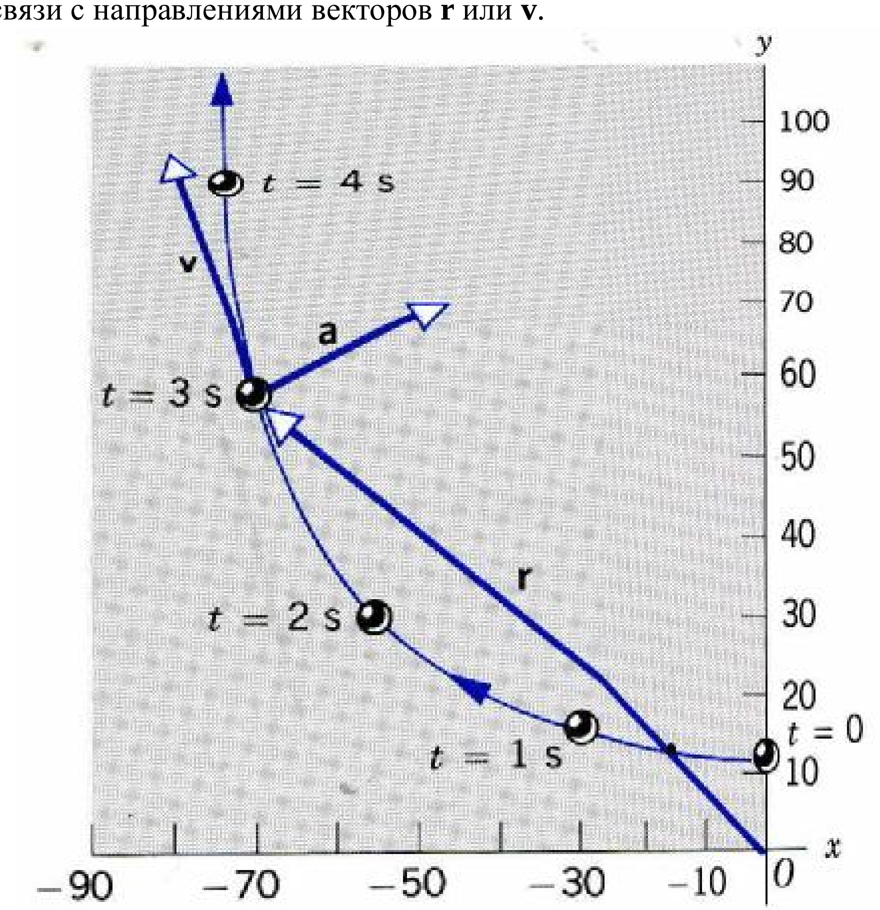

Рис. 3. К примеру 1. На рисунке показана траектория движущейся частицы и ее положение в моменты времени t=0, 1, 2, 3 и 4 с. В момент времени t=3 с показаны векторы положения, **r**, скорости **v** и ускорения ***a***. Обратите внимание, что между этими тремя векторами нет какой-либо определенной связи.

4-2. Движение с постоянным ускорением

В этом разделе мы рассмотрим специальный случай движения с постоянным ускорением, когда вектор ускорения частицы **a** не меняется ни по направлению, ни по величине. Следовательно, компоненты этого вектора также остаются неизменными. Таким образом, движение частицы можно представить как одновременное движение с постоянным ускорением по трем взаимно перпендикулярным пространственным направлениям. В общем случае частица движется по криволинейной траектории. Такая ситуация может быть даже и в том случае, если одна компонента ускорения, например a_x, равна нулю, при этом соответствующая компонента скорости v_x является постоянной величиной, которая может быть и *не равна* нулю. Примером такого движения является траектория снаряда, летящего по криволинейной траектории в вертикальной плоскости. Если не учитывать сопротивление воздуха, то на снаряд действует только постоянное ускорение свободного падения **g**, направленное вниз вдоль вертикальной оси.

Мы можем получить общие уравнения движения при постоянном ускорении положив

$$a_x=\text{const},\ a_y=\text{const},\ a_z=\text{const}.$$

частица начинает движение в момент t=0 из начального положения $\mathbf{r_0}=\mathbf{i}x_0+\mathbf{j}y_0+\mathbf{k}z_0$, в котором скорость частицы была $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\,\mathbf{i} + v_{y0}\,\mathbf{j} + v_{z0}\,\mathbf{k}$. Далее, действуя также как в Разделе 2-6, получим по аналогии с уравнением (15) Главы 2 три скалярных уравнения: $v_x = v_{x0} + a_x t;\quad v_y = v_{y0} + a_y t;\quad v_z = v_{z0} + a_z t$, которые можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t \tag{11}$$

Помните, что это векторное уравнение (или любое аналогичное векторное уравнение) представляет три независимых скалярных уравнения.

Второй член в правой части (11) есть произведение вектора на скаляр. Как было показано в Разделе 3-5, при этом получается вектор длины *at*, который направлен в ту же сторону, что и вектор **a**.

Продолжая далее в духе Раздела 2-6, мы получим пять уравнений, которые описывают трехмерное движение с постоянным ускорением. Эти пять уравнений приведены в Таблице 1, которые следует сравнить с пятью уравнениями в Таблице 2 Главы 2, описывающими одномерное движение. За исключением уравнения (13), которое является скалярным уравнением, каждое уравнение в Таблице 1 представляет (или эквивалентно) три независимых скалярных уравнения. *x*- компоненты уравнений 11, 12, 14 и 15 в точности совпадают с соответствующими уравнениями Таблицы 2 Главы 2. Уравнение 13 является скалярным, поэтому оно не имеет *x- (или какой либо другой) компоненты*.

Таблица 1 ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ[a]

Номер уравнения	Уравнение	Содержит **r**	**v**$_0$	**v**	**a**	*t*
11	$\mathbf{v}=\mathbf{v_0}+\mathbf{a}t$	×	∉	∉	∉	∉
12	$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	∉	∉	×	∉	∉
13[a]	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v_0}\cdot\mathbf{v_0}+2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$	∉	∉	∉	∉	×
14	$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{v_0})t$	∉	∉	∉	×	∉
15	$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v}t-\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	∉	×	∉	∉	∉

[a] Это уравнение включает в себя скалярные произведения двух векторов, которые были введены в Разделе 3-5.

Пример 2 Лыжник скользит по плоскому спуску. Направление спуска (север-юг) составляет угол θ=10° с горизонтом. Под действием западного ветра лыжник получает боковое ускорение 0.54 м/с^2 (см. Рис. 4). В начале спуска из его северозападного угла лыжник стартует со скоростью 9 м/с, направленную вдоль спуска (боковая компонента начальной скорости равна нулю).Длина спуска 125 м, ширина 25 м. Трение не учитывать. В какой точке спуска лыжник сойдет с него? Чему будет равна его скорость в этой точке? (Указание: ускорение силы тяжести на плоскости спуска равно gsinθ).

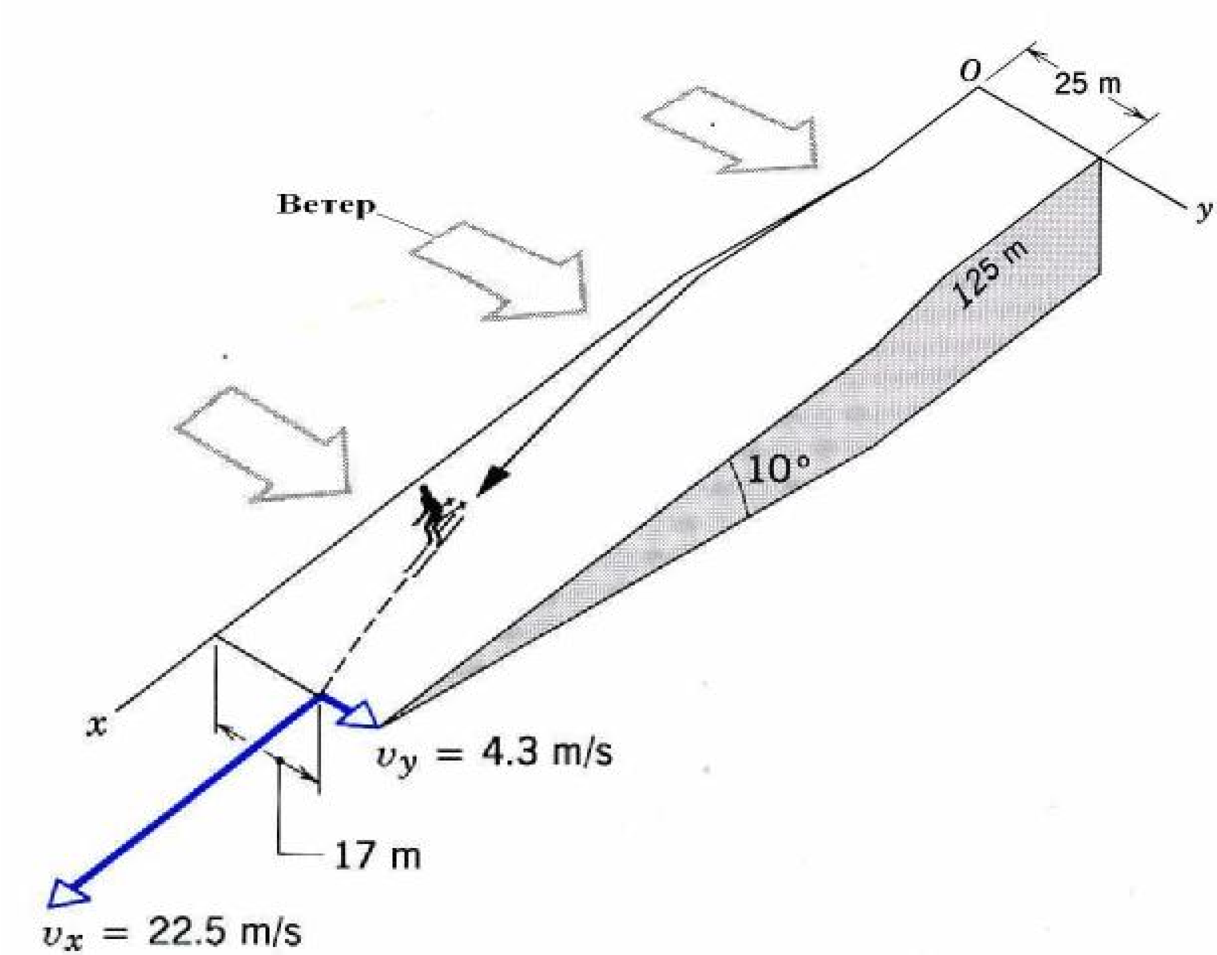

Рис 4. К примеру 2

Решение. Выберем начало координат в северо западном углу спуска, откуда стартует лыжник. Ось x направим вдоль спуска, ось y- в перпендикулярном направлении. Компоненты ускорения будут следующими:

$$a_X=g\,sin 10°=1.70 \text{ м/с}^2,$$

$$a_Y=0.54 \text{ м/с}^2$$

обратите внимание, что эти компоненты вычисляются независимо друг от друга. Компонента a_X- это ускорение вдоль спуска, которое имело бы то же самое значение и в том случае, если бы не было никакого бокового ветра. Аналогично, боковое ускорение a_Y из-за ветра имело бы место и в том случае, если бы не было никакого наклонного спуска. Сущность векторной арифметики как раз и состоит в том, что эти компоненты можно рассматривать независимо.

За момент времени t=0 возьмем момент начала спуска, для которого v_{X0}=9 м/с, v_{Y0}=0. Таким образом, будем иметь:

$$v_X=v_{X0}+a_X t=9.0\text{ м/с}+(1.70\text{ м/с}^2)t$$

$$v_Y=v_{Y0}+a_Y t=0+(0.54\text{ м/с}^2)t$$

$$x=x_0+v_{X0}t+\tfrac{1}{2}a_X t^2=0+(9.0\text{ м/с})t+(0.85\text{ м/с}^2)t^2$$

$$y=y_0+v_{Y0}t+\tfrac{1}{2}a_Y t^2=0+0+(0.27\text{ м/с}^2)t^2$$

Мы теперь предположим, что лыжник достигает нижней части спуска, не вылетая через его боковую сторону. (Это предположение мы проверим позднее). Сначала надо найти время, через которое лыжник достигнет нижней части спуска (x=125 м):

$$125\text{ м}=(9.0\text{ м/с})t+(0.85\text{ м/с}^2)t^2$$

Решая это квадратное уравнение, получим t_1=7.94 с, t_2=-18.5 с. Рассмотрим вначале положительный корень и вычислим соответствующую координату y:

$$y=(0.27\text{ м/с}^2)t^2=(0.27\text{ м/с}^2)(7.94\text{ с})^2=17.0\text{ м}$$

Таким образом, боковое смещение меньше ширины спуска, как мы и предположили вначале. Лыжник сойдет со спуска в точке, расположенной в 17-ти метрах от его западного края.
Компоненты скорости находятся непосредственно в момент времени t=7,94 с:

$$v_X=9.0\text{ м/с}+(1.70\text{ м/с}^2)(7.94\text{ с})=22.5\text{ м/с}$$

$$v_Y=(0.54\text{ м/с}^2)\ )(7.94\text{ с})=4.3\text{ м/с}$$

Обратите внимание, что решая эту задачу, мы выбрали оси x и y в плоскости спуска, приведя таким образом трехмерную задачу к двумерной. Если бы мы выбрали координаты так, чтобы плоскость xy лежала на земле, а ось z направили вертикально вверх, то ускорение имело бы три компоненты, и задача стала бы более сложной. При решении задач направления координатных осей и начало координат выбирается из соображений удобства, причем на протяжении всего решения выбранная система координат должна оставаться неизменной.
Рассмотрим теперь отрицательное решение t=-18.5 с. Каков смысл этого решения? Мы записали уравнения движения, предполагая, что движение начинается в момент t=0. Поэтому положительные времена соответствуют *последующему* движению лыжника со спуска, а отрицательные времена должны, по-видимому, описывать движение лыжника *до того*, как он оказался в верхнем углу спуска, откуда он начал движение вниз. Отрицательное время говорит о том, что вероятно имело место перемещение лыжника в прошлом, которое он должен был совершить, чтобы оказаться в момент t=0 в начале координат с заданной скоростью. В ходе этого перемещения лыжник должен был пройти через точку x=125 м в момент t=18.5 с (подымаясь вверх!!) прежде чем оказаться в верхнем северозападном углу спуска. Вычислите компоненты скорости при t=-18.5 с. Что можно сказать о движении лыжника в этот момент

времени. Чему равна координата y в этот момент времени? Является ли полученный результат разумным? Каковы минимальные значения координат x и y между t=-18.5 с и t=0?

Математическое решение физических задач часто приводит к неожиданным результатам, как, например, отрицательное время в рассмотренном примере. Если в считать, что лыжник *начинает* свое движение в момент t=0, то отрицательное решение для нас никакого интереса не представляет, но практически всегда полезно рассматривать физический смысл таких решений, когда они появляются.

4-3. Полет снаряда

Полет снаряда является примером движения с постоянным ускорением. Это двумерное движение частицы, брошенной в воздух под углом к горизонту. Примером такого движения является траектория бейсбола или шарика для гольфа. Далее мы будем считать, что можно пренебречь влиянием воздуха на это движение. Влияние сопротивления воздуха на траекторию будут рассмотрены в Главе 6.

При полете снаряда на него действует постоянное ускорение **g**, направленное вертикально вниз. Хотя в общем случае имеется горизонтальная компонента скорости, но горизонтальной компоненты ускорения нет. Если мы выберем координатную систему так, чтобы ось y была направлена вертикально вверх, то $a_y=-g$ (здесь, как и в Главе 2, g является положительным числом) и $a_x=0$. Далее будем считать, что вектор $\mathbf{v}_0$ лежит в плоскости xy, так что $v_{z0}=0$. Поскольку a_z также равно нулю, то из (11) следует, что $v_z=0$ при любых *t*, и, таким образом, мы можем ограничиться только рассмотрением того, что происходит в плоскости xy.

Выберем начало системы координат в точке, откуда тело начинает свой полет (Рис. 5). Например, в этой точке мячик отрывается от руки того, кто его бросает. Этой точке соответствует начало координат: $x_0=0$, $y_0=0$. Скорость тела в момент t=0, когда оно начинает свой полет есть $\mathbf{v}_0$. Вектор этой скорости составляет угол ϕ_0 с положительным направлением оси x. Компоненты вектора начальной скорости $\mathbf{v}_0$ есть (см. Рис. 5):

$$v_{X0}=v_0\cos\phi_0 \; ; \quad v_{Y0}=v_0\sin\phi_0 \tag{16}$$

Поскольку горизонтальная компонента ускорения равна нулю, то горизонтальная компонента скорости остается неизменной. Полагая в x компоненте уравнения (11) $a_x=0$ и $v_{X0}=v_0\cos\phi_0$, получим:

$$v_X=v_{X0}+a_Xt=v_0\cos\phi_0 \tag{17}$$

Горизонтальная компонента скорости сохраняет свое начальное значение v_{X0} *в течение всего полета.*

Вертикальная компонента скорости изменяется со временем из-за направленного вниз ускорения. В Ур. 11 возьмем y компоненту и положим $a_y=-g$ и $v_{Y0}=v_0\sin\phi_0$. Тогда получим:

$$v_Y=v_{Y0}+a_Yt= v_0\sin\phi_0 -gt \tag{18}$$

Вертикальная компонента скорости описывает свободное падение. В самом деле, если мы будем наблюдать движение тела, изображенное на Рис. 5, в системе отсчета, которая движется направо

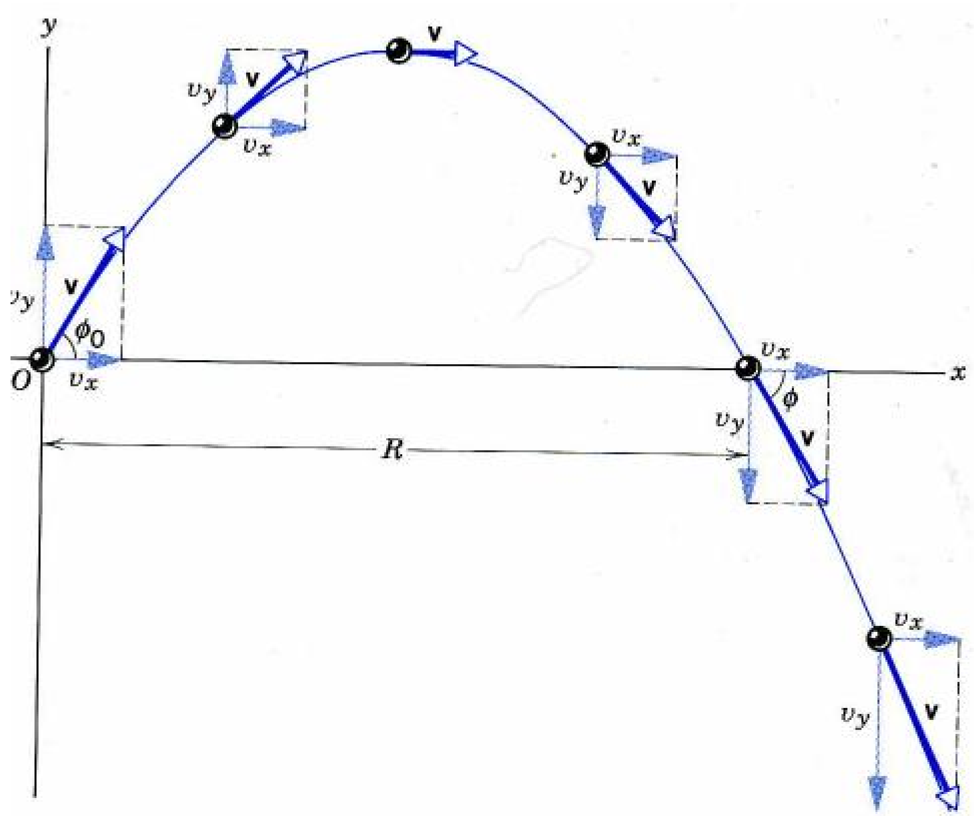

Рис. 5. Траектория снаряда, на которой показаны вектор начальной скорости $\mathbf{v}_0$ и е компоненты, а также вектор $\mathbf{v}$ и его компоненты в пяти более поздних моментах времени. Обратите внимание, что в каждой точке траектории $\mathbf{v}_x=\mathbf{v}_{x0}$. Расстояние R вдоль траектории называется дальностью полета снаряда.

со скоростью v_{X0}, то мы увидим, что тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 \sin\phi_0$.

В любой момент времени абсолютная величина вектора скорости есть:

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} \tag{19}$$

Угол ϕ между вектором скорости и горизонтальной осью в любой момент времени есть:

$$\tan f = \frac{v_Y}{v_X} \tag{20}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории тела в каждой ее точке, как показано на Рис. 5.

Координата x положения тела в любой момент времени получается из x- компоненты Ур. 12 (см. Таблицу 1) при $x_0=0$, $a_x=0$ и $v_{X0}=v_0\cos\phi_0$:

$$x=x_0+v_{X0}t+\tfrac{1}{2}a_X t^2=(v_0\cos\phi_0)t \tag{21}$$

Координата y получается из y- компоненты (12) при y0=0, $a_y=-g$ и $v_{Y0}=v_0\sin\phi_0$:

$$y=y_0+v_{Y0}t+\tfrac{1}{2}a_Y t^2=(v_0\cos\phi_0)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) дают нам зависимости координат частицы от общего параметра t, времени полета. Исключив параметр t из этих уравнений, получим:

$$y=(\tan\phi_0)x-\frac{g}{2\left(v_0\cos\phi_0\right)^2}x^2 \tag{23}$$

Полученная зависимость y(x) есть уравнение траектории полета тела. Поскольку v_0, ϕ_0 и g являются константами, то это уравнение имеет форму параболы:

$$y=bx-cx^2$$

Таким образом, траектория полета брошенного под углом к горизонту тела, является параболической, как это видно из Рис. 5.

Дальность полета тела R определяется как расстояние по горизонтальной оси до точки, в которой тело пересекает тот уровень, с которого оно было брошено (см. Рис. 5). Мы можем найти эту величину, положив y=0 в уравнении (23). Одно решение есть x=0, другое решение определяет R:

$$R=\frac{2v_0^2}{g}\sin\phi_0\cos\phi_0=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\phi_0 \tag{24}$$

где мы использовали тригонометрическое тождество $\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$. Обратите внимание, что при заданной начальной скорости максимальная дальность достигается при $\phi=45°$, когда $\sin 2\phi_0=1$.

Решения, которые мы только что получили, дают упрощенную, идеализированную картину, поскольку мы учли только один, хотя и важный, фактор- ускорение силы тяжести, но не учли другой, не менее важный фактор- сопротивление воздуха. Сопротивление воздуха дает нам пример силы, зависящей от скорости; чем больше скорость, тем больше замедляющий эффект, обусловленный сопротивлением воздуха. При низких скоростях этим эффектом обычно можно пренебречь, но при высоких скоростях траектория полета больше не будет параболой, как в (23), и дальность полета может быть значительно ниже величины, даваемой уравнением (24). Эффекты, связанные с сопротивлением воздуха будут рассмотрены в Главе 6. Пока же мы будем считать, что полученные в этой главе уравнения адекватно описывают полет брошенного тела.

На Рис. 6 показана траектория полета тела, на которую не слишком сильно влияет сопротивление воздуха. Хорошо видно, что форма траектории близка к параболической. На Рис. 7 показаны для сравнения две траектории одновременно брошенных тел. Одна траектория описывает тело брошенное горизонтально, а другая траектория описывает тело, брошенное вниз без начальной скорости. Здесь мы можем видеть непосредственно следствия из уравнений (21) и (22) когда $\phi_0=0$. Обратите внимание, что 1) горизонтальное перемещение первого тела в самом деле следует уравнению (21): x- координата увеличивается на одинаковую величину за равные промежутки времени независимо от перемещения по координате y; и 2) движение по оси y для двух тел одинаково: положение по оси y двух тел совпадает в любой момент времени, несмотря на то, что одно из них движется также и в горизонтальном направлении.

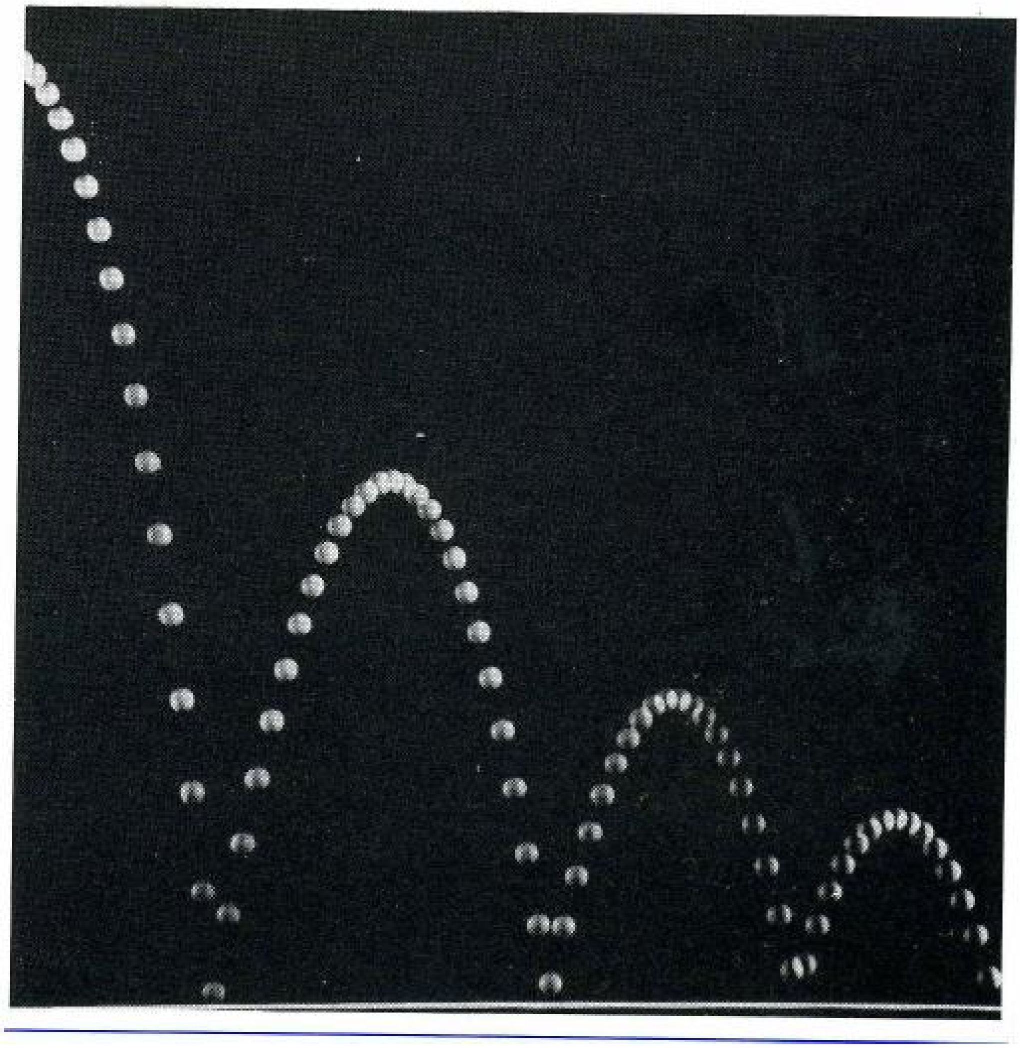

Рис. 6. Стробоскопическая фотография мячика для гольфа (который появляется слева), отскакивающего от твердой поверхности. Между ударами о поверхность траектория мячика имеет вид параболы, аналогичной траектории летящего снаряда. Почему высоты последовательных пиков уменьшаются? (Возможный ответ содержится в Главах 8 и 10).

Стрельба по падающей мишени

В одной из лекционных демонстраций воздушное ружье нацелено на неподвижную мишень, удерживаемую на некоторой высоте h. Специальный механизм одновременно нажимает на курок ружья и освобождает мишень. При этом пуля попадает в мишень независимо от ее (пули) начальной скорости.

Проще всего это можно понять следующим образом. Если бы не было ускорения свободного падения, то мишень оставалась бы в своем исходном состоянии и пуля двигаясь строго по нацеленной прямой неизбежно поразила бы мишень (Рис. 8). Влияние гравитации приводит к тому, что каждое тело получает одинаковое ускорение вниз и одинаково смещается вниз относительно того положения, которое бы оно занимало, если бы не было ускорения. Таким образом, за время t пуля упадет на расстояние $\frac{1}{2}gt^2$ относительно той точки на прицельной прямой, в которой бы она находилась при нулевом ускорении. Мишень же, в свою очередь, упадет на то же расстояние от своего начального положения. Когда пуля достигнет вертикальной линии, вдоль которой падает мишень, она окажется на таком же расстоянии от начальной точки мишени, что и сама мишень и, следовательно, произойдет столкновение. Если начальная скорость пули v_0 будет больше, она пересечет вертикальную линию падения мишени в более высокой точке, но поскольку пуля достигнет этой точки быстрее, то мишень пройдет за это же время меньшее расстояние от своей начальной точки и пуля и мишень опять столкнутся. Аналогичная картина будет и при скорости пули меньшей v_0.

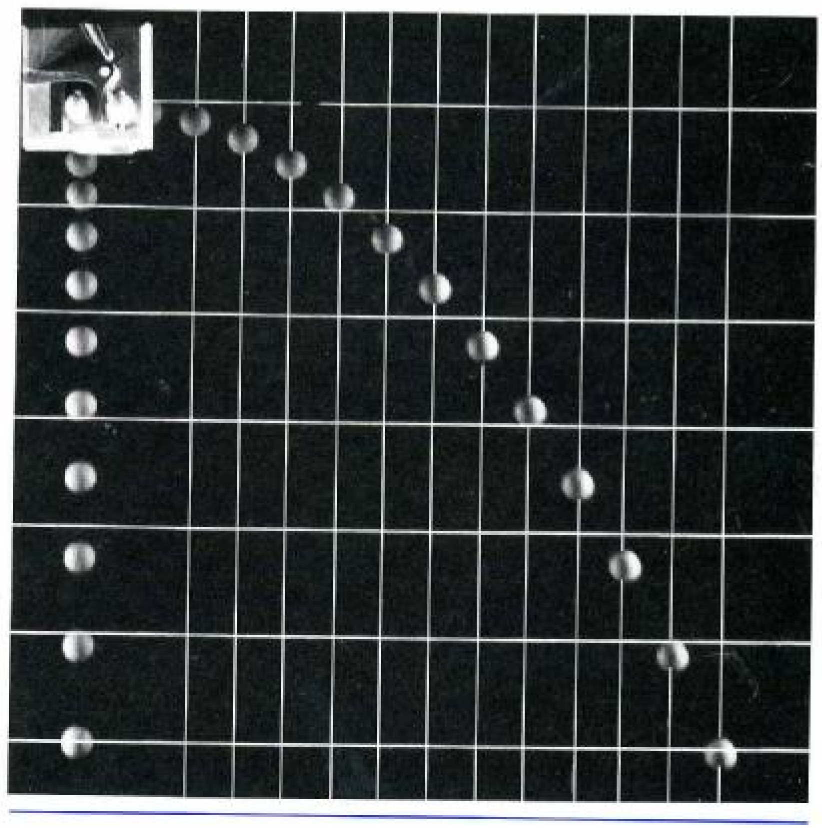

Рис. 7. Два мяча 1 и 2 одновременно начинают движение. Мяч 1 падает вертикально без начальной скорости, тогда как мячу 2 сообщается начальная горизонтальная скорость. Обратите внимание, что вертикальная скорость обеих мячей одинакова. Горизонтальная скорость мяча 2 не влияет на его вертикальную скорость. Интервал между каждым стробоскопическим снимком равен 1/30 с. Видно ли из этого рисунка, что горизонтальная скорость мяча 2 всюду одинакова?

Рассмотрим эту проблему аналитически. Возьмем уравнение (12)

$$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

которое описывает положение пули и мишени в любой момент времени. Для пули P имеем $\mathbf{r_0}=0$, $\mathbf{a}=\mathbf{g}$

$$\mathbf{r}_P=\mathbf{v}_{0P}t+\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

Для мишени T имеем $\mathbf{r_0}=\mathbf{r}_{0T}$, $\mathbf{v}_{0T}=0$ и $\mathbf{a}=\mathbf{g}$

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

Условие столкновения есть $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$. Сравнение последних двух уравнений показывает, что это всегда происходит в момент времени t, определяемый из уравнения $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$. Это как раз то время ($t = r_{0T}/v_{0P}$), которое потребовалось бы, чтобы пуля, двигаясь по прицельной прямой, поразила мишень в случае отсутствия ускорения. Поскольку умножение вектора на скаляр дает другой вектор, направленный в ту же сторону, уравнение $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ говорит о том, что векторы $\mathbf{r}_{0T}$ и $\mathbf{v}_{0P}$ должны быть направлены в одну и ту же сторону. Таким образом, чтобы пуля поразила мишень, ружье должно быть нацелено в точку, где первоначально находится мишень.

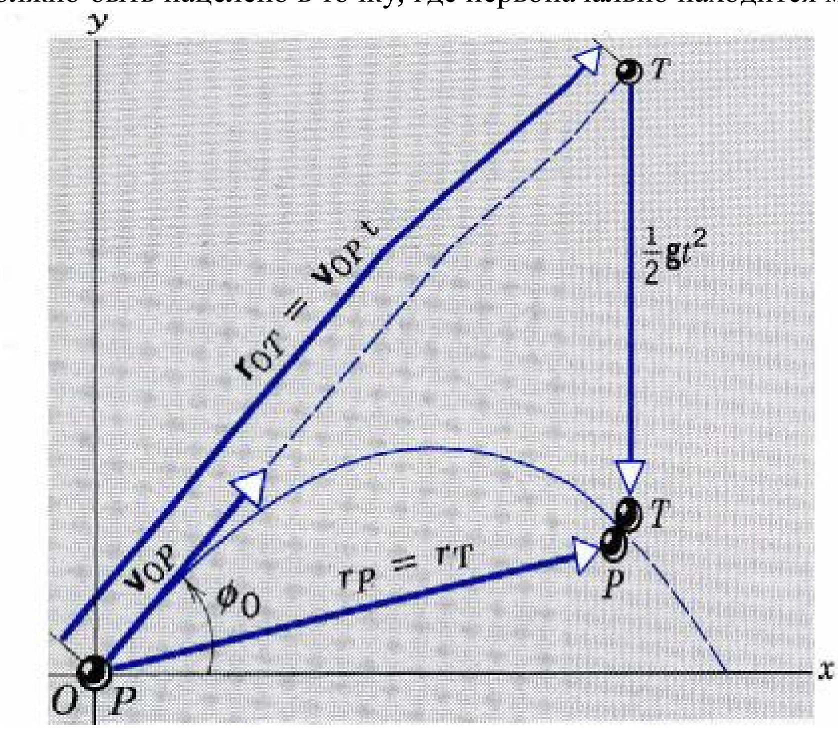

Рис. 8. При движении тела его смещение по отношению к началу координат в любой момен времени t есть сумма двух векторов $\mathbf{v}_{0P}t$, направленного вдоль $\mathbf{v}_{0P}$ и вектора $\mathbf{g}t^2/2$, направленного вниз.

Пример 3. Самолет, летящий с горизонтальной скоростью 155 км/час на высоте 225 м должен сбросить груз на цель, находящуюся в точке Т (см. Рис.9). При каком угле α направления на цель должен быть сброшен груз, чтобы он попал в точку Т?

Решение. Начало системы отсчета О поместим в точку, откуда сбрасывается груз. В первый момент, когда груз сброшен, он движется также как и самолет. Следовательно, начальная скорость груза $\mathbf{v}_0$ горизонтальна и равна 155 км/час. Угол проекции ϕ_0 равен нулю. Из уравнения (22) находим время падения груза. При $\phi_0=0$ и $y=-225$ м получим

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\,\mathbf{м})}{9.8\ \mathbf{м/с}^2}} = 6.78\ \mathbf{с}$$

Обратите внимание, что время падения не зависит от горизонтальной скорости самолета (см., однако, задачу 38).

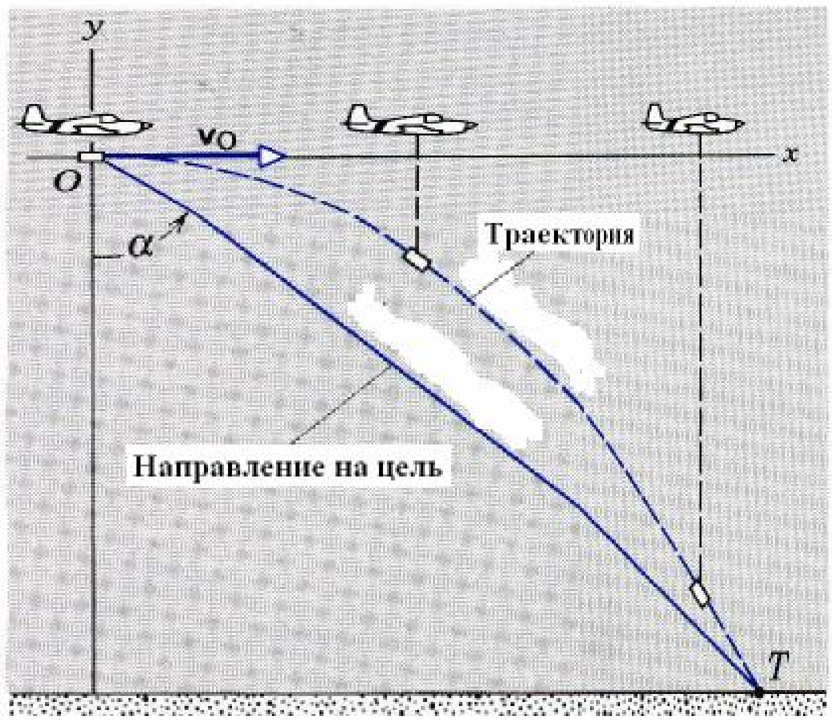

Рис. 9. К примеру 3

За время t груз пролетит в горизонтальном направлении расстояние, определяемое уравнением (21):

$$x = v_{X0}t = (155\ км/час)(1\ час/3600\ с)(6.8\ с) = 0.292\ км = 292\ м$$

так что угол α будет:

$$a = \tan^{-1}\frac{x}{|y|} = \tan^{-1}\frac{292\mathbf{м}}{225\mathbf{м}} = 52°$$

Является ли траектория груза параболической в системе координат, связанной с самолетом? (Видели ли вы в кино, как бомбы сбрасываются с самолета, и камера установлена либо на этом же самолете, либо на другом, который летит рядом с такой же скоростью?).

Пример 4. Футболист ударяет по мячу и он летит под углом 36° к горизонту с начальной скоростью 15.5 м/с. Считая, что мяч движется в вертикальной плоскости, найти (а) время t_1, через которое мяч достигнет наивысшей точки траектории; (б) максимальную высоту, на которую поднимется мяч; (в) дальность и время полета; (г) его скорость при ударе о землю.
Решение. (а) В верхней точке траектории вертикальная компонента скорости v_Y обращается в нуль. Решая уравнение (18) относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \sin f_0 - v_y}{g}$$

Подставив в это уравнение $v_Y=0$, $v_0=15.5$ м/с, $\phi_0=36°$, $g=9.8$ м/с^2, получим

$$t_1 = \frac{(15.5\,\text{м/с})(\sin 36°)}{9.8\ \text{м/с}^2} = 0.93\ \text{с}.$$

(б) Максимальная высота достигается при t=0.93 с. Используя Ур. 22, получим

$$y = (v_0 \sin f_0)t - \frac{1}{2} g t^2,$$

получим

$$y_{max} = (15.5\,\text{м/с})(\sin 36°)\,(0.93\ \text{с}) - \tfrac{1}{2}(9.8\ \text{м/с}^2)(0.93\ \text{с})^2 = 4.2\ \text{м}$$

(в) Дальность полета можно вычислить из уравнения (24):

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2f_0 = \frac{(15.5\,\text{м/с})^2}{9.8\ \text{м/с}^2}(\sin 72°) = 23.3\,\text{м}.$$

Положим в уравнении (22) y=0 и найдем время t_2, через которое мяч упадет на землю:

$$t_2 = \frac{2 v_0 \sin f_0}{g} = \frac{2(15.5\,\text{м/с})(\sin 36°)}{9.8\ \text{м/с}^2} = 1.86\,\text{с}.$$

Обратите внимание, что $t_2=2t_1$, что обязательно должно иметь место, так как мячу требуется одно и тоже время как для полета вверх, (чтобы достигнуть высшей точки траектории) так и для полета вниз (чтобы достигнуть земли, падая из высшей точки).
Мы можем проверить эти результаты на самосогласованность с помощью уравнения $x=x_0+v_{X0}t$. Когда $t=t_2$, x должен быть равен R. Таким образом, из (21) имеем $R= v_{X0}t_2=(v_0\cos\phi_0)t_2=23.3$ м, что и следовало ожидать.
(г) Для того, чтобы найти скорость мяча в момент удара о землю, мы сначала из (17) найдем скорость v_X, которая остается неизменной в течение всего полета:

$$v_X = v_0 \cos f_0 = (15.5\,\text{м/с})(\cos 36°) = 12.5\,\text{м/с}$$

Из (18) получим v_Y в момент $t=t_2$:

$$v_Y = v_0 \sin f_0 - gt = (15.5\,\text{м/с})(\sin 36°) - \left(9.8\ \text{м/с}^2\right)\left(1.86\,\text{с}\right) = -9.1\,\text{м/с}$$

Следовательно, по абсолютной величине скорость есть:

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = \sqrt{\left(12.5\,\text{м/с}\right)^2 + \left(-9.1\,\text{м/с}\right)^2} = 15.5\,\text{м/с}$$

Угол, под которым мяч падает на землю

$$\tan f = \frac{v_Y}{v_X} = \frac{-9.1}{12.5},$$

так что $\phi=-36°$, или 36° по часовой стрелке от оси x. Обратите внимание, что $\phi=-\phi_0$, что следует ожидать из симметрии задачи (Рис. 5).
Таким образом, конечная скорость мяча оказывается равной его начальной скорости. Можете ли вы объяснить это? Является ли это равенство случайным?

4-4. Движение по окружности с постоянной скоростью

При полете снаряда ускорение является постоянным по величине и направлению, однако скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Рассмотрим теперь специальный случай, когда частица движется с постоянной скоростью по круговой траектории. Как мы увидим, в этом случае, как скорость, так и ускорение одинаковы по величине, но непрерывно меняются по направлению. Такое движение называется *однородным движением по окружности*. Примеры такого движения- это, например, движение спутника вокруг Земли и точек на вращающихся поверхностях-вентиляторах, музыкальных пластинках, компьютерных дисках и т. д. Даже человек, если рассматривать его как частицу, участвует в однородном вращательном движении вследствие вращения Земли вокруг своей оси.

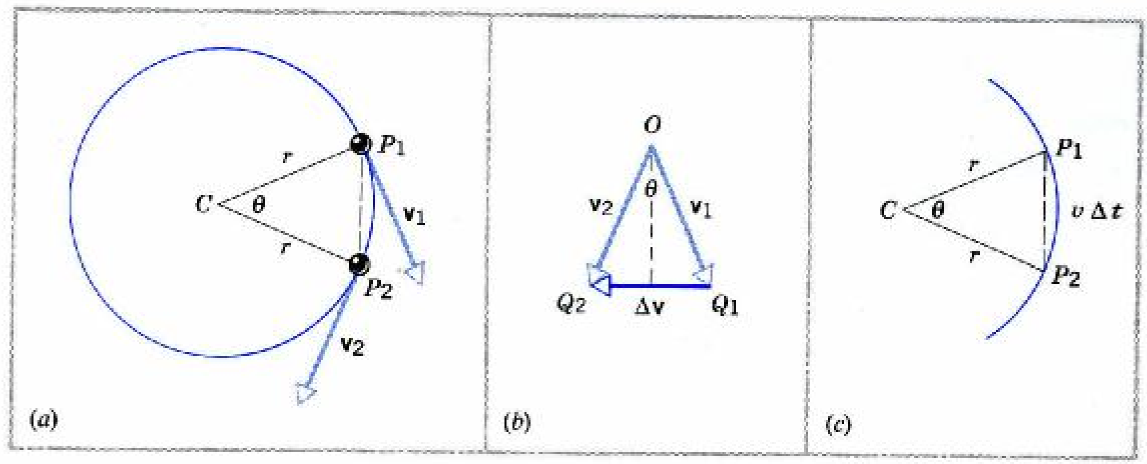

Рис. 10. Движение по окружности с постоянной скоростью. (a) Частица движется по окружности с постоянной скоростью. Показаны векторы скорости в двух точках P_1 и P_2. (b) Изменение скорости между точками P_1 и P_2 равно $\Delta\mathbf{v}$. (c) За время Δt траектория частицы описывает дугу P_1P_2

Пример такого движения показан на Рис. 10a. Пусть точка P_1 есть положение частицы в момент t_1, а точка P_2 есть положение этой же частицы в момент $t_2=t_1+\Delta t$. Скорость в точке P_1 есть $\mathbf{v}_1$- вектор касательный к кривой в точке P_1. Скорость в точке P_2 есть $\mathbf{v}_2$- вектор касательный к кривой в точке P_2. Векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ имеют одну и ту же величину v, так как скорость постоянна, но их направления различны. Расстояние, проходимое частицей за время Δt, есть длина дуги P_1P_2, равной $r\theta$ (где θ измеряется в радианах) и одновременно $v\Delta t$. Таким образом

$$r\theta=v\Delta t \tag{25}$$

Нарисуем теперь векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, как показано на Рис.10b, чтобы они выходили из одной точки и были по величине и направлению такими же, как и на Рис. 10a. Из Рис. 10b ясно видно *изменение скорости* при движении частицы из точки P_1 в точку P_2. Это изменение $\mathbf{v}_1–\mathbf{v}_2=\Delta\mathbf{v}$ есть вектор, который надо прибавить к $\mathbf{v}_1$, чтобы получить $\mathbf{v}_2$. Если мы представим изменение скорости на интервале P_1P_2, нарисовав вектор Δ**v** из середины дуги P_1P_2, то вектор Δ**v** будет направлен к центру круга.

Из сравнения Рис. 10b и 10c видно, что треугольник OQ_1Q_2, образованный векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и Δ**v** аналогичен треугольнику CP_1P_2, образованному хордой P_1P_2 и радиусами CP_1 и CP_2. Эти треугольники являются подобными, так как они имеют одинаковый угол при вершине: угол θ между векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ равен углу P_1CP_2 поскольку вектор $\mathbf{v}_1$ перпендикулярен CP_1, а вектор $\mathbf{v}_2$ перпендикулярен CP_2. Проведя биссектрису угла θ на Рис. 10b, получим

$$\frac{1}{2}\Delta\,\mathrm{v} = \mathrm{v}\sin\frac{q}{2} \tag{26}$$

Выразим теперь величину среднего ускорения на временном интервале с помощью результатов, полученных в уравнениях (25) и (26) для Δv и Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta\,\mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{2\,\mathrm{v}\sin(q\,/\,2)}{rq\,/\,\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v}^2}{r}\frac{\sin(q\,/\,2)}{q\,/\,2} \tag{27}$$

теперь можно найти мгновенное ускорение, взяв предел Δt→0. Когда Δt очень мало, то и угол θ тоже мал. В этом случае можно использовать приближенную формулу sin(x)≈x. (Эта формула справедлива только в том случае, если угол выражен в радианах, если x=5°=0.0873 рад, то sin(x)=0.0872). Таким образом, при малых углах sin(θ/2)≈θ/2 и вторая дробь в правой части (27) стремится к единице. При этом в первой дроби в правой части (27) ни v ни r не зависят от Δt и поэтому величина этой дроби не меняется при переходе к пределу Δt→0. Таким образом, для мгновенного ускорения мы получим:

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\,\mathrm{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{v}^2}{r}\frac{\sin(q\,/\,2)}{q\,/\,2} = \frac{\mathrm{v}^2}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(q\,/\,2)}{q\,/\,2}$$

Заменив с помощью приближенной формулы последний предел единицей, окончательно получим:

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{r} \tag{28}$$

Поскольку направление среднего ускорения совпадает с направлением вектора Δ**v,** то вектора **a** всегда направлен радиально к центру круга или дуги, по которой движется частица.

На Рис. 11 показано мгновенное положение векторов **v** и **a** в различных точках траектории. Величина вектора **v** является постоянной, однако его направление непрерывно меняется. Это приводит к возникновению ускорения **a**, которое также постоянно по величине, но непрерывно меняет свое направление. Вектор скорости **v** все время направлен в сторону движения частицы по касательной к траектории, а ускорение **a** всегда направлено вовнутрь по радиусу. Поэтому a называется радиальным или *центростремительным* (то есть, направленным к центру) ускорением. Вывод уравнения (28) с помощью единичных векторов приведен в следующем разделе.

При свободном падении или при полете снаряда вектор ускорения **a** постоянен как по величине, так и по направлению, так что мы можем применять в этом случае уравнения, полученные для постоянного ускорения. Однако, эти уравнения нельзя использовать для описания движения по окружности с постоянной скоростью, поскольку в этом случае вектор ускорения **a** изменяется по направлению и, следовательно, не является постоянным.

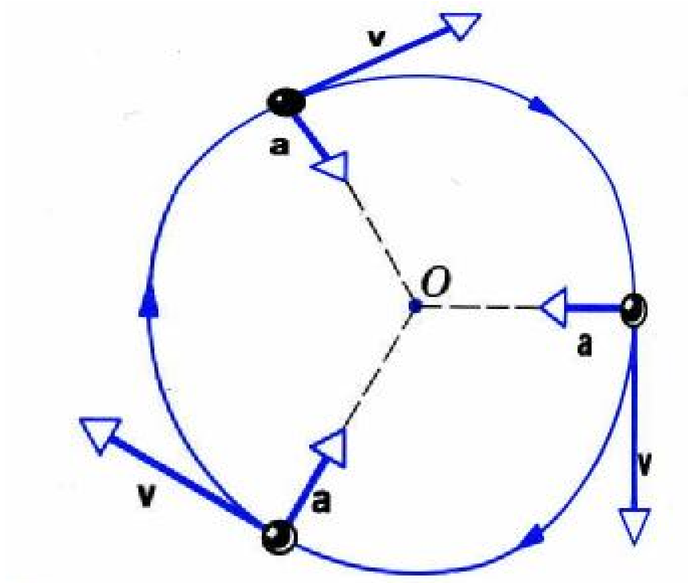

Рис. 11. При движении по окружности с постоянной скоростью ускорение **a** в любой момент времени направлено к центру окружности и, следовательно, всегда перпендикулярно скорости **v**.

Единицы измерения центростремительного ускорения те же, что и для ускорения, связанного с изменением скорости по величине. В размерных единицах

$$[a]=\frac{[\mathrm{v}^2]}{r}=\frac{(L/T)^2}{L}=\frac{L}{T^2},$$

что является обычной размерностью дл ускорения. Таким образом, центростремительное ускорение может измеряться в м/с^2 или км/час^2, либо в других единицах размерности L/T^2.

Ускорение, возникающее вследствие изменения направления скорости, является таким же реальным, как и ускорение вследствие изменения скорости по величине. По определению ускорение есть быстрота изменения скорости, а скорость, будучи вектором, может изменяться как по величине, так и по направлению. Если физическая величина является вектором, то его свойства, связанные с направлением, нельзя игнорировать, так как они также реальны и важны, как и свойства, связанные с изменением этого вектора по величине.

Здесь важно подчеркнуть, что в общем случае не обязательно, чтобы в направлении ускорения имело место реальное перемещение тела, поэтому никакой общей формулы, связывающей векторы **a** и **v**, не существует. На Рис. 12 приведен пример, когда угол между **a** и **v** изменяется от 0 до 180°. Только в одном случае (θ=0°) движение происходит в направлении **a**.

Пример 5. Луна совершает один оборот вокруг Земли за 27.3 дней. Предположим, что лунная орбита является окружностью с радиусом 238000 миль. Чему равна величина ускорения, которое испытывает Луна со стороны Земли?

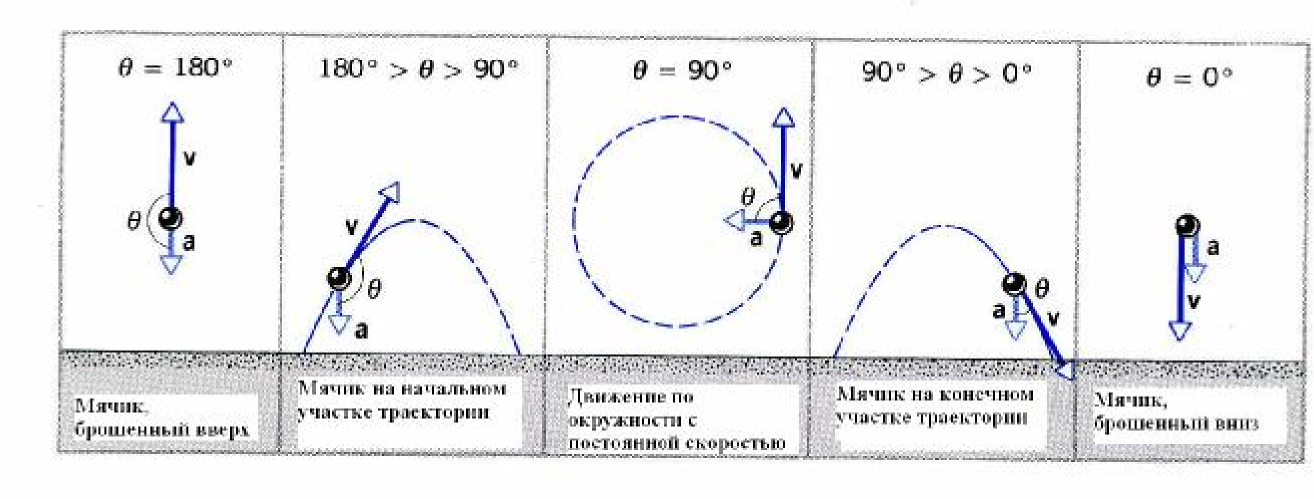

Рис. 12. Геометрическое соотношение между **v** и **a** для различных типов движения

Решение. Имеем r=238000 миль=3.82×10^8 м. Время, за которое совершается Луной один оборот, называемое периодом, есть T=27.3 дней=2.36×10^6 с. Считая скорость Луны постоянной, получим для нее

$$\mathrm{v}=\frac{2p\,r}{T}=\frac{2p\left(3.82\times10^{8}\ \text{м}\right)}{2.36\times10^{6}\,\text{с}}=1018\ \text{м/с}$$

Центростремительное ускорение есть:

$$a=\frac{\mathrm{v}^2}{r}=\frac{\left(1018\ \text{м/с}\right)^2}{3.82\times10^{8}\,\text{м}}=0.00271\ \text{м/с}^2=2.76\times10^{-4}g_n,$$

где g_n=9.80665 м/с^2 есть международное принятое значение для g, которое представляет приближенное значение ускорения свободного падения на уровне моря на широте 45°. Это приближенное значение часто используется в качестве стандартного значения величины ускорения силы тяжести. Например, это значение применяется для расчета ускорения, испытываемого пилотом самолета или частями увеселительной карусели в парке.

Пример 6. Вычислите скорость спутника, вращающегося вокруг Земли на высоте h=210 км, где g=9.2 м/с^2. (Это значение меньше чем 9.8 м/с^2, поскольку g уменьшается по мере удаления от поверхности Земли, что мы будем обсуждать в Главе 16). Радиус Земли R=6370 км.

Решение. Подобно любому свободному телу вблизи поверхности Земли спутник испытывает ускорение g, направленное к центру Земли. Именно это ускорение вместе с тангенциальной скоростью спутника заставляет его вращаться по круговой орбите. Следовательно, центростремительное ускорение равно g, и, поскольку, из (28) a=v^2/r, то имеем a=g, r=R+h,

$$g=\frac{\mathrm{v}^2}{R+h}$$

откуда

$$\mathrm{v}=\sqrt{\left(R+h\right)g}=\sqrt{(6580\,\text{км})(9.2\,\text{м/с}^2)(10^3\,\text{м/км})}=7780\,\text{м/с}$$

При такой скорости спутник совершает один оборот вокруг Земли за 1.48 часа.

4-5. Векторы скорости и ускорения при движении по окружности (*факультатив*)[*]

Как было показано в предыдущем разделе, частица, двигающаяся по дуге окружности с постоянной скоростью, испытывает центростремительное ускорение. Даже в том случае, если ее скорость не является постоянной, она испытывает центростремительное ускорение, но кроме того, на нее действует и тангенциальное ускорение, которое приводит к изменению тангенциальной скорости частицы. С помощью векторных методов можно связать скорости и ускорения и определить направление результирующего ускорения.

Сначала мы с помощью более общего векторного метода повторим вывод формулы (28) для центростремительного ускорения частицы, двигающейся с постоянной скоростью. На Рис. 13 показана частица, двигающаяся по окружности вокруг начала координат (точки О) с постоянной скоростью. Эту задачу удобнее рассматривать в полярных координатах r и ϕ нежели в прямоугольных координатах x и y, поскольку величина r остается все время постоянной, а угол ϕ линейно увеличивается со временем. В то же время, зависимость x и y от времени является более сложной. Два этих набора координат связаны следующими соотношениями

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{и} \qquad f = \tan^{-1}(y/x) \tag{29}$$

либо им обратными

$$x = r\cos f \qquad \text{и} \qquad y = r\sin f \tag{30}$$

В прямоугольной системе координат мы пользовались единичными векторами **i** и **j**. В полярных координатах на плоскости мы введем новые единичные векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$. Также как **i** и **j**, эти два вектора указывают только направление; они являются безразмерными и их длина равна единице.

Единичный вектор $\mathbf{u}_r$ в любой точке направлен в сторону увеличения r в этой точке. Он направлен по радиусу от центра. Единичный вектор $\mathbf{u}_\phi$ в любой точке направлен в сторону увеличения ϕ в этой точке. Он всегда направлен против часовой стрелки по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Как видно из Рис. 13а, векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ перпендикулярны друг другу. Единичные векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ отличаются от единичных векторов **i** и **j** в том отношении, что направления векторов $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ изменяются от точки к точке, то есть единичные векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ *не являются* постоянными векторами. Поэтому при вычислении производных от выражений, содержащих единичные векторы, **i** и **j** можно считать константами, тогда как $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ считать постоянными нельзя.

Векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\phi$ можно выразить через **i** и **j** следующим образом:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\,cosf + \mathbf{j}\,sinf \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{i}\,cos\left(f + p/2\right) + \mathbf{j}\,sin\left(f + p/2\right) = -\mathbf{i}\,sinf + \mathbf{j}\,cosf \tag{32}$$

---

[*] Этот раздел при первом чтении можно опустить и вернуться к нему при обсуждении вращательного движения в Главе 11.

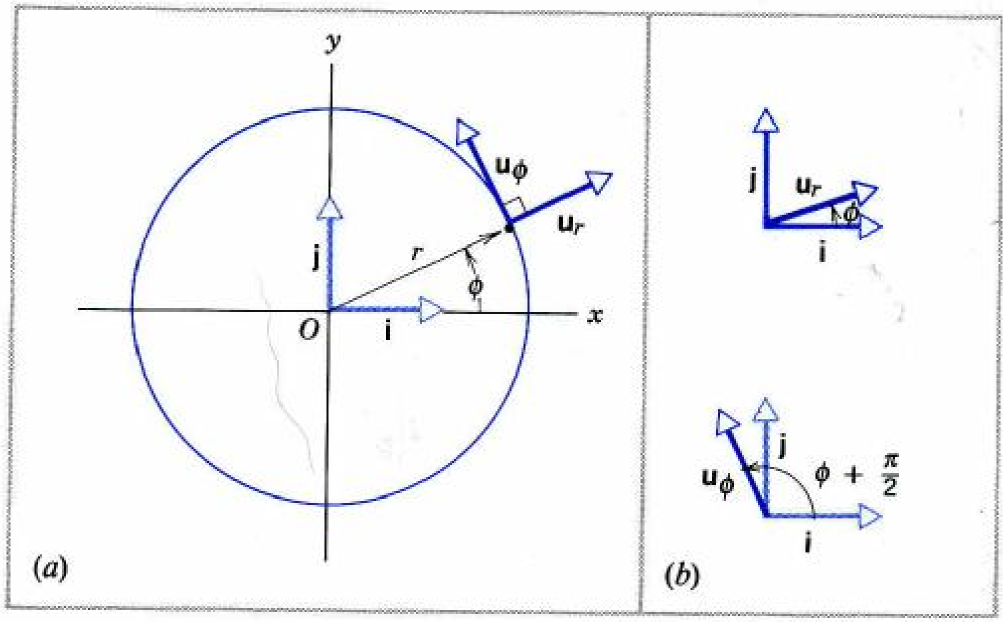

Рис. 13. (a) Частица движется против часовой стрелки по окружности радиуса r. (b) Единичные векторы $\mathbf{u_r}$ и $\mathbf{u}_{\text{f}}$ и их связь с векторами **i** и **j**.

При написании таких членов как **i**cosϕ мы умножаем вектор на скаляр, поэтому порядок сомножителей не имеет значения: мы также можем написать (cosϕ)**i**.

Если частица движется по окружности с постоянной скоростью, то она не имеет радиальной компоненты скорости, и вектор скорости направлен по $\mathbf{u}_\phi$. Кроме того, величина скорости является постоянной v, и поэтому мы можем написать

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{u}_f \tag{33}$$

Таким образом, вектор скорости **v** направлен по касательной к окружности, он постоянен по величине, но его направление все время меняется.

Теперь вычисляем ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\mathbf{u}_f\right) = v\,\frac{d\,\mathbf{u}_f}{dt} \tag{34}$$

Обратите внимание, что постоянная скорость v выходит из под знака дифференцирования.

С помощью уравнения (32) найдем производную от вектора $\mathbf{u}_\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathbf{u}_f}{dt} &= -\mathbf{i}\,\frac{d(\mathit{sinf})}{dt} + \mathbf{j}\,\frac{d(\mathit{cosf})}{dt} = -\mathbf{i}\,\mathit{cosf}\,\frac{df}{dt} - \mathbf{j}\,\mathit{sinf}\,\frac{df}{dt} \\ &= (-\mathbf{i}\,\mathit{cosf} - \mathbf{j}\,\mathit{sinf})\,\frac{df}{dt} = -\mathbf{u}_r\,\frac{df}{dt} \end{aligned} \tag{35}$$

На заключительном этапе вычисления мы использовали уравнение(31). Таким образом,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v \frac{d\phi}{dt} \tag{36}$$

Поскольку частица движется по окружности с постоянной скоростью, то $d\phi/dt$ есть не что иное как угловое расстояние, проходимое за один оборот (2π радиан), поделенное на время, затрачиваемое за один оборот ($2\pi r$ деленное на скорость v):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r} \tag{37}$$

Наконец, подставив (37) в (36), получим

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v \frac{v}{r} = -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r} \tag{38}$$

Из этого уравнения следует, что это ускорение имеет постоянное значение v^2/r, как мы уже получили в (28), и направлено по радиусу к центру (то есть, противоположно вектору $\mathbf{u}_r$). При движении частицы по окружности направления векторов $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{a}$ меняются по отношению к координатным осям x и y, вследствие того, что меняется направление радиус-вектора частицы.

Тангенциальное ускорение при круговом движении

Рассмотрим теперь более общий случай кругового движения, когда скорость частицы v не является постоянной. Здесь также мы используем векторный метод в полярных координатах. Как и раньше, скорость определяется уравнением (33):

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{u}_\phi\,,$$

однако теперь не только $\mathbf{u}_\phi$, но и скорость v изменяются со временем. Применив формулу производной от произведения двух функций, получим для ускорения:

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\,\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v\frac{d\,\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi \frac{dv}{dt} \tag{39}$$

По сравнению с уравнением (34), где скорость v была постоянной здесь появилось в правой части еще одно слагаемое. Первый член справа в (39) сводится, как мы видели выше, к $-\mathbf{u}_r(v^2/r)$. Теперь мы можем записать уравнение (39) следующим образом:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T \tag{40}$$

где $a_R = v^2/r$ и $a_T = dv/dt$.

Первый член, $-\mathbf{u}_r a_R$ представляет собой векторную компоненту **a**, направленную по радиусу к центру круга. Эта компонента возникает вследствие изменения *направления* скорости при движении по окружности (см. Рис. 14). Вектор $\mathbf{a}_R$ а также его величина a_R называются центростремительным ускорением. Второй член $\mathbf{u}_\phi a_T$ представляет собой векторную компоненту **a**, направленную по касательной к траектории частицы. Эта компонента возникает вследствие изменения *величины* скорости при движении по окружности (см. Рис. 14). Вектор $\mathbf{a}_T$ а также его величина a_T называются тангенциальным ускорением.

Величина мгновенного ускорения, таким образом, есть:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \tag{41}$$

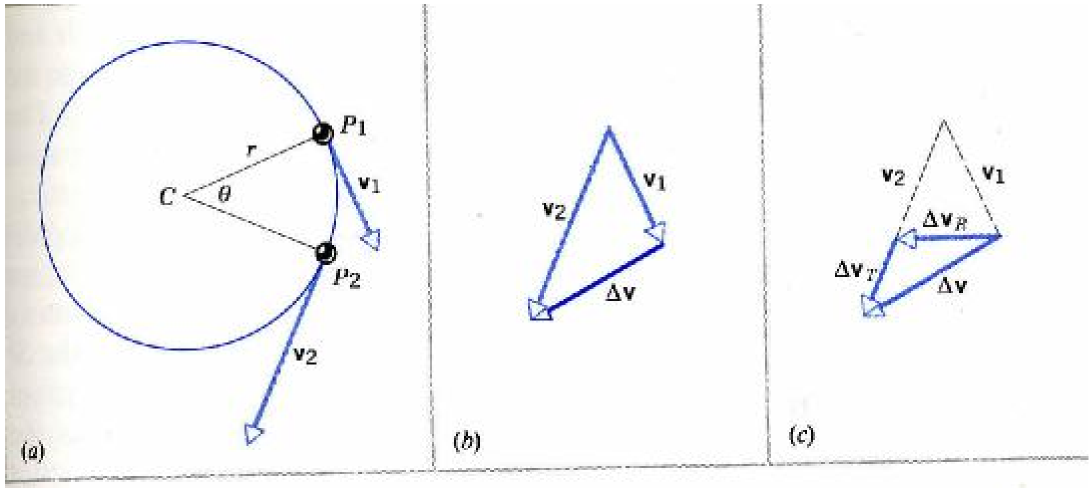

Рис. 14. (a) Движение по окружности с переменной скоростью. (b) Изменение скорости $\Delta\mathbf{v}$ при перемещении из точки P_1 в точку P_2. (c) Вектор $\Delta\mathbf{v}$ состоит из двух частей: вектора $\Delta\mathbf{v}_\mathbf{R}$ обусловленного изменением *направления* вектора **v** и вектора $\Delta\mathbf{v}_\mathbf{T}$**,** обусловленного изменением *величины* вектора **v.** В пределе $\Delta t \to 0$ вектор $\Delta\mathbf{v}_\mathbf{R}$ направлен к центру C окружности, а вектор $\Delta\mathbf{v}_\mathbf{T}$ стремится к касательной к траектории

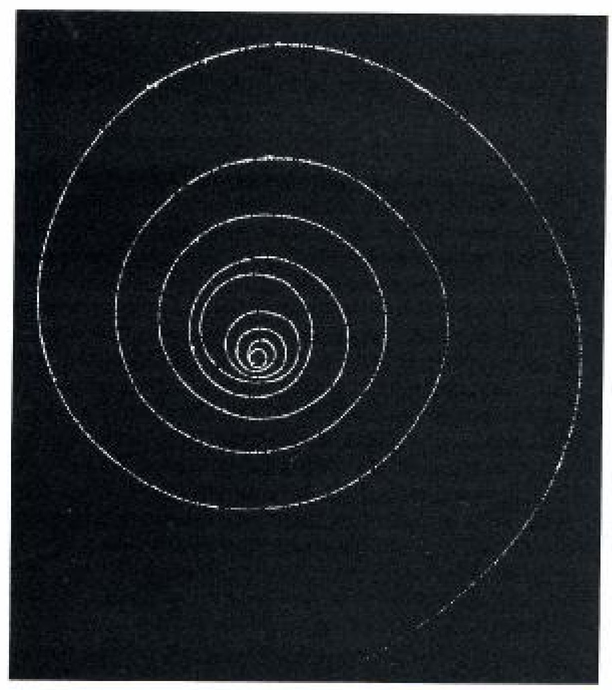

Рис. 15. Траектория электрона в пузырьковой камере, наполненной жидким водородом. Радиальное ускорение обусловлено магнитным полем, которое стремится закрутить электрон по окружности, но вследствие того, что электрон замедляется из-за столкновения с атомами водорода, он также испытывает тангенциальное ускорение, вследствие чего его траектория закручивается в спираль.

Если скорость постоянна, то a_T=dv/dt=0 и уравнение (40) сводится к (38). Если скорость не постоянна, то a_T не равно нулю и a_R меняется от точки к точке. Кроме того, скорость может меняться таким образом, что a_T не будет постоянна, и в этом случае как a_T так и a_R будут меняться от точки к точке.

На Рис. 15 показан спиральный след, который оставил электрон, влетевший в наполненную жидким водородом пузырьковую камеру. Проходя через жидкость, электрон замедляется, так что в каждой точке траектории тангенциальное ускорение a_T=dv/dt не равно нулю. Хотя траектория движения электрона не является окружностью, небольшие участки спирали очень похожи на дуги окружности с фиксированным радиусом r. Таким образом, центростремительное ускорение a_R в каждой точке равно v^2/r, где r- радиус дуги в данной точке. Как v так и r уменьшаются, по мере того как частица теряет энергию. Радиальное ускорение электрона возникает вследствие силы, действующей на него со стороны магнитного поля, которое направлено перпендикулярно плоскости Рис. 15 (см. Главу 34).

4.6 Относительное движение

Предположим, вы едете в автомобиле по автостраде со скоростью 55 миль в час. Те, кто едет вместе с вами в машине, тоже едут с той же скоростью; хотя их скорость по отношению к земле равна 55 миль в час, *относительно* вас их скорость равна нулю. Вы можете провести в машине какие-либо физические эксперименты и убедиться, что движение автомобиля с постоянной скоростью никак не влияет на результаты этих экспериментов. Например, вы могли бы бросить мяч вверх (в вашей системе отсчета) и увидеть, что этот мяч падает прямо вниз. Мяч имеет горизонтальную скорость (из-за движения автомобиля), но поскольку вы имеете ту же горизонтальную скорость, то *относительная* скорость мяча относительно вас равна нулю.

Для наблюдателя, стоящего на земле результат будет другой. Мяч имеет горизонтальную компоненту скорости равную 55 миль в час, и вертикальную компоненту скорости, которую вы сообщили мячу. Мы знаем, что в поле тяжести Земли тело, имеющее такие компоненты скорости, движется по параболе. Наблюдатель на земле и вы в автомобиле будете использовать разные уравнения для описания движения мяча, но и вы и наблюдатель на земле придете к выводу, что физические законы, управляющие движением мяча одни и те же (с точки зрения наблюдателя на земле и с точки зрения человека в автомобиле); например, ускорение свободного падения получится одним и тем же в этих двух системах отсчета.

Если рядом с вашим автомобилем едет другой автомобиль со скоростью 57 миль в час, то вы увидите, что относительно вас этот автомобиль движется гораздо медленнее, со скоростью (57–55)=2 мили в час. Если не обращать внимания на внешние факторы- движение воздуха мимо проезжающего автомобиля, неровность дороги, шум двигателя- и рассматривать только движение автомобиля, то невозможно решить какой автомобиль “на самом деле” движется. Например, проезжающий автомобиль может стоять на месте, а вы двигаетесь назад со скоростью 2 мили в час.

В этом разделе мы рассмотрим описание движения одной частицы двумя разными наблюдателями, которые движутся с постоянной скоростью друг относительно друга. Этими двумя наблюдателями могут быть, например, человек, едущий в автомобиле с постоянной скоростью по прямой автостраде и другой человек, неподвижно стоящий на земле. Частицей, за которой они оба наблюдают, может быть либо мяч, брошенный в воздух, либо другой движущийся автомобиль.

Мы обозначим этих двух наблюдателей S и S′. Каждый наблюдатель находится в своей системе отсчета, с каждой из которых связана прямоугольная система координат. Для удобства мы будем считать, что оба наблюдателя находятся в начале их соответствующих координатных систем. Мы наложим только одно ограничение: *относительная скорость между S и S¢ должна быть постоянной как по величине, так и по направлению*. Обратите внимание, что это ограничение не касается частицы, за движением которой наблюдают S и S′. Частица не обязана двигаться с постоянной скоростью, она, в принципе, может иметь ускорение.

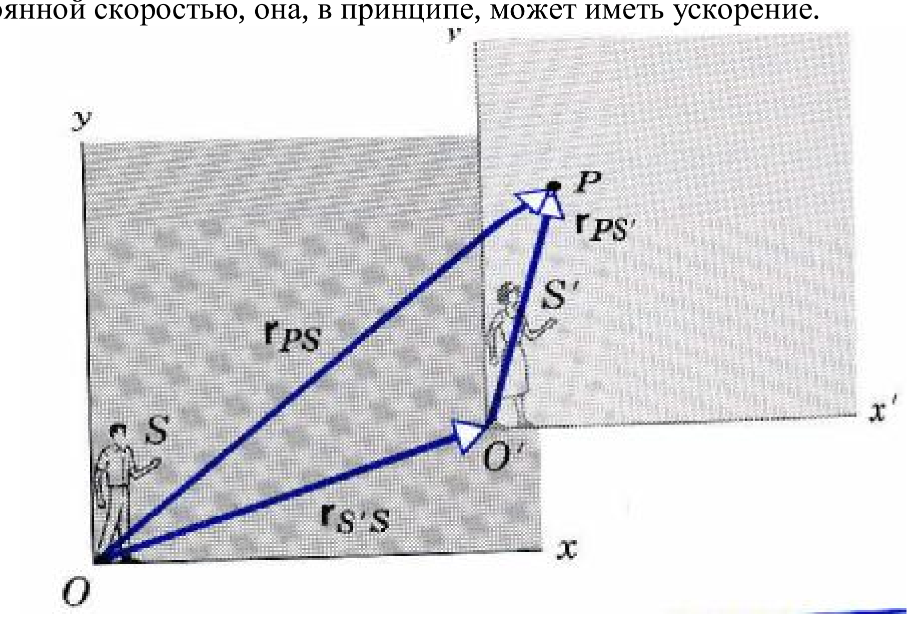

Рис. 16. Наблюдатели S и S’, движущиеся по отношению друг к другу, видят одну и ту же движущуюся частицу P. В момент времени, показанный на рисунке, каждый из них измеряет положение $\mathbf{r}_{PS}$ и $\mathbf{r}_{PS'}$ этой частицы по отношению к началу своей системы координат, O и O’, соответственно. В этот же момент времени наблюдатель S измеряет положение $\mathbf{r}_{S'S}$ наблюдателя S’ по отношению к началу O своей системы координат

На Рис. 16 показаны в некоторый момент времени t две координатные системы, относящиеся к S и S′. Для простоты мы рассмотрим движение только в двух измерениях: плоскости xy и x′y′ показаны на Рис. 16. Начало координат системы S′ по отношению к системе S характеризуется вектором $\mathbf{r}_{S'S}$. Обратите внимание на порядок индексов, которыми мы помечаем векторы: первый индекс относится к системе, в которой находится некоторая точка, а второй индекс относится к системе относительно которой определяется положение этой точки (в данном случае точка O′ находится в системе S′ и мы определяем ее положение по отношению к системе S). Таким образом, вектор $\mathbf{r}_{S'S}$ читается как “положение S′ относительно S”.

На Рис. 16 также показана точка P, которая определяется своими координатами как по отношению к системе S, так и по отношению к системе S′. Положение P по отношению к S характеризуется вектором $\mathbf{r}_{PS}$, а положение этой же точки относительно системы S′ характеризуется вектором $\mathbf{r}_{PS'}$. Из Рис. 16 мы можем получить следующее соотношение между этими тремя векторами:

$$\mathbf{r}_{PS}=\mathbf{r}_{S'S}+\mathbf{r}_{PS'}=\mathbf{r}_{PS'}+\mathbf{r}_{S'S} \tag{42}$$

где мы применили коммутативное правило сложения двух векторов, чтобы переменить порядок слагаемых. Еще раз обратите внимание на порядок нижних индексов в обозначениях векторов.

Уравнение (42) читается следующим образом: “положение точки P, измеренное наблюдателем S равно положению точки P, измеренное наблюдателем S′ плюс положение начала координат системы S′, измеренное наблюдателем S.”

Пусть частица P движется в системе S′ со скоростью $\mathbf{v}_{PS'}$. Чему будет равна скорость частицы в системе S? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно взять производную по времени от обеих частей уравнения (42):

$$\frac{d\,\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\,\mathbf{r}_{S'S}}{dt}$$

Поскольку быстрота изменения каждого вектора положения равна соответствующей скорости, то

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S} \tag{43}$$

Таким образом, в любой момент времени скорость точки P в системе S равна скорости точки P в системе S′ плюс относительная скорость системы S′ по отношению к системе S. Хотя уравнения (42) и (43) получены для двух измерений, они также справедливы и в трехмерном случае.

Уравнение (43) называется законом сложения скоростей. Этот закон позволяет нам преобразовать скорость, измеренную наблюдателем в одной системе отсчета, например в S′, в скорость, измеренную наблюдателем в другой системе, например, в S, если мы знаем относительную скорость двух систем отсчета. Этот закон сложения скоростей имеет солидную основу как с точки зрения здравого смысла, опирающегося на повседневный опыт, так и с точки зрения понятий пространства и времени в классической физике Галилея и Ньютона. Поэтому уравнение (43) часто называется галилеевским законом сложения скоростей.

Далее мы рассмотрим только один очень важный специальный случай, когда относительная скорость двух систем является постоянной. То есть, вектор $\mathbf{v}_{S'S}$ постоянен как по величине, так и по направлению. Что же касается скоростей точки P , $\mathbf{v}_{PS'}$ и $\mathbf{v}_{PS'}$, измеренных, соответственно, в S и S′, то эти скорости не обязательно должны быть константами, и, более того, они не обязаны быть равными между собой. Если, однако, один из наблюдателей, например, S′, измеряя скорость, видит, что она постоянная, то есть, не зависит от времени, то оба слагаемых в правой части (43) не зависят от времени и, следовательно, левая часть (43) также не зависит от времени. Таким образом, если один из наблюдателей видит, что в его системе частица движется с постоянной скоростью, тогда к аналогичному заключению придут и все другие наблюдатели, координатные системы которых движутся с постоянными скоростями относительно системы, в которой находится первый наблюдатель.

Более значительный результат следует после дифференцирования по времени уравнения (43):

$$\frac{d\,\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\,\mathbf{v}_{S'S}}{dt} \tag{44}$$

Последний член в (44) обращается в нуль, так как относительная скорость двух систем отсчета по нашему предположению является постоянной. Следовательно

$$\frac{d\,\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{v}_{PS'}}{dt}$$

Заменив эти производные соответствующими ускорениями, получим

$$\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PS'} \tag{45}$$

Ускорение частицы P в обеих системах отсчета оказывается одинаковым!

В следующей главе мы увидим, что ускорения является фундаментальным понятием при описании динамического поведения тела с помощью второго закона Ньютона **F**=m**a**, связывающего силу **F**, массу m и ускорение тела **a**. Уравнение (45) получено в предположении, что относительная скорость систем отсчета S и S′ является постоянной как по величине, так и по направлению. Такие системы, которые движутся друг относительно друга, но в которых все наблюдатели получают одно и то же ускорение движущегося тела, называются *инерциальными системами отсчета*. В следующей главе мы увидим, что инерциальные системы играют очень важную роль, так как законы движения Ньютона выполняются только в таких системах.

Приведем пример физического закона, с помощью которого можно проверить является ли система инерциальной. Привяжите какую-нибудь массу к пружине и возьмите пружину за другой конец так, чтобы масса свободно висела. Сила притяжения со стороны Земли растягивает пружину в направлении центра Земли. Направление растянутой пружины можно принять за вертикальную ось. Теперь проведите тот же самый эксперимент в вашем автомобиле, движущемся по прямой с постоянной скоростью 55 миль в час. Результат будет тот же самый: будет висеть вдоль той же вертикальной оси. Автомобиль, также как и земля, является инерциальной системой отсчета. Если вы проделаете тот же эксперимент в то время, когда ваш автомобиль, ускоряется, тормозит или движется по криволинейной траектории, то струна отклонится от вертикальной оси. Эти системы, которые движутся с ускорением (даже с центростремительным ускорением) не являются инерциальными системами отсчета.

Например, Землю можно рассматривать в качестве инерциальной только приближенно. Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, два наблюдателя, находящиеся на разных широтах, будут иметь относительную тангенциальную скорость, которая при вращении меняется по направлению. Этот эффект очень мал и им во многих случаях можно пренебречь, однако, он обязательно должен учитываться при точных измерениях и, кроме того, этот эффект может приводить к довольно драматическим явлениям на крупномасштабных размерах. Например, неинерциальная природа Земной поверхности вызывает закручивание ветров вокруг центров высокого или низкого давления, что приводит к разрушительным ураганам. Другие эффекты, связанные с неинерциальными системами отсчета, мы рассмотрим в разделе 8 Главы 6.

Пример 7 Стрелка компаса в кабине самолета указывает направление на восток. Скорость по спидометру 215 км/час. Скорость ветра, дующего в северном направлении, равна 65 км/час. (а) Чему равна скорость самолета относительно поверхности Земли? (б) Куда будет направлена стрелка компаса, если пилот решит лететь строго на восток?

Решение. (а) Движущейся “частицей ” в этой задаче является самолет Р. Имеется две системы отсчета- земля (З) и воздух (В). Пусть земля будет нашей S системой, а воздух S′ системой. Тогда уравнение (43) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{v}_{PЗ} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BЗ}$$

В этом соотношении, слева направо, векторы суть следующие: скорость самолета относительно земли, скорость самолета относительно воздуха, и скорость воздуха относительно земли (то есть, скорость ветра). Эти три вектора, образующие прямоугольный треугольник, показаны на Рис. 17 а. Обратите внимание на ориентацию самолета, совпадающую с направлением стрелки компаса.

Скорость самолета относительно земли есть

$$v_{PЗ} = \sqrt{v_{PB}^2 + v_{BЗ}^2} = \sqrt{\left(215км/ч\right)^2 + \left(65км/ч\right)^2} = 225км/ч$$

Угол α на Рис. 17 а есть

$$a = tan^{-1}\frac{v_{BЗ}}{v_{PB}} = tan^{-1}\frac{65км/ч}{215км/ч} = 16.8^{\mathbf{0}}$$

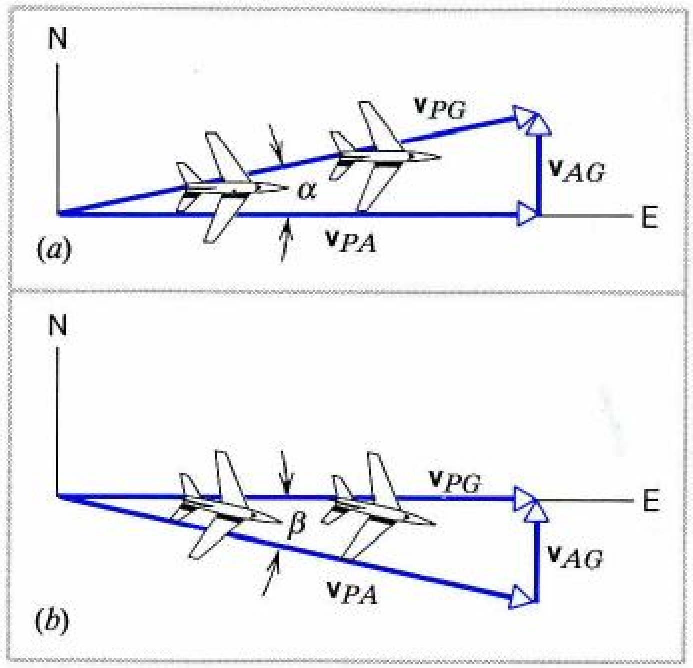

Рис. 17. К примеру 7. (a) Самолет, летящий строго на восток, ветром сносит к северу. (b) Чтобы выдержать направление строго на восток, самолет должен отклониться в ту сторону, откуда дует ветер.

Следовательно, по отношению к земле самолет летит со скоростью 225 км/ч в направлении 16.8° на северо-восток. Обратите внимание, что скорость самолета относительно земли больше его скорости относительно воздуха.

(б) В этом случае пилот должен отклонить самолет в сторону противоположную направлению ветра таким образом, чтобы по отношению к земле самолет летел строго на восток. Скорость ветра остается неизменной, и соответствующая диаграмма показана на Рис. 17б. Обратите внимание, что в этом случае три вектора скорости также образуют прямоугольный треугольник, но в этом случае гипотенуза есть v_{PB}, а не $v_{PЗ}$.

Скорость самолета относительно земли теперь есть

$$v_{PЗ} = \sqrt{v_{PB}^2 - v_{BЗ}^2} = \sqrt{\left(215 км/ч\right)^2 - \left(65 км/ч\right)^2} = 205 км/ч$$

Как видно из Рис. 17б, ориентация самолета составляет угол β по отношению к направлению на восток

$$b = \sin^{-1}\frac{v_{BЗ}}{v_{PB}} = \sin^{-1}\frac{65 км/ч}{215 км/ч} = 17.6^{\circ}$$

Обратите внимание, что в этом случае скорость самолета относительно земли меньше его скорости относительно воздуха.

Относительное движение при больших скоростях (факультатив)

Рассмотренные выше формулы относительного движения являются краеугольным камнем механики Ньютона, которую мы начнем рассматривать в Главе 5. Эти формулы не налагают никаких ограничений ни на относительную скорость систем отсчета (до тех пор, пока эта скорость является постоянной), ни на скорость самих тел. Через двести лет после Ньютона

Альберт Эйнштейн попытался представить себе результат применения уравнения (43) к лучу света, скорость которого в вакууме *c*=299792458 м/с. Предположим, что наблюдатель в системе S' смотрит на луч света, распространяющийся со скоростью *c* в положительном направлении оси x'. Пусть система S' движется относительно системы S в положительном направлении оси x' со скоростью v_{SS}'=1 м/с. Чему будет равна скорость света в S системе? Согласно механике Ньютона из уравнения (43) мы получим v_{PS}=299792458 м/с+1 м/с=299792459 м/с.

Эйнштейн знал, что именно такой результат предсказывает механика Ньютона. Он также знал, что свет не является обычным движущимся объектом. Свет распространяется особым образом. Свет является электромагнитным излучением и его можно описать в терминах составляющих его электрического и магнитных полей. Движущееся электрическое поле создает магнитное поле, и, в свою очередь, движущееся магнитное поле создает электрическое поле. Таким образом, движущиеся электрическое и магнитное поля светового пучка все время воссоздают друг друга при распространении света в пространстве. Если бы уравнение (43) было справедливо для световых лучей, размышлял Эйнштейн, то наблюдатель в S мог бы испустить луч света в направлении x со скоростью с, и тогда наблюдатель в S', которая движется относительно S в направлении x со скоростью$v_{S'S}$=c, мог бы поймать этот луч света. Подобно автомобилю, который едет рядом с вашей машиной с той же скоростью, для наблюдателя в S' свет казался бы неподвижным. Такая ситуация казалась Эйнштейну крайне противоречивой. Как может свет, который с фундаментальной точки зрения состоит из *движущихся* электромагнитных полей, оказаться неподвижным?

Эйнштейн предложил простое решение этой проблемы: ни для одного наблюдателя свет не может оказаться неподвижным. Из этого утверждения следует, что уравнение (43) абсолютно неверно, если его применять к телам, которые движутся со скоростями близкими к скорости света. Эйнштейн пошел еще дальше: независимо от относительной скорости систем S и S' наблюдатели в этих системах измерят одно и то же значение скорости света. Это утверждение кажется противоречит нашему здравому смыслу и уравнению (43). В самом деле, если два наблюдателя движутся с относительной скоростью 0.9999999с, то как они могут измерить одну и ту же скорость *c* светового луча, испущенного одним из них?

Полное математическое описание того, как это происходит, мы отложим до Главы 21. Здесь же мы дадим краткий ключ к решению этой проблемы для случая когда все скорости направлены по оси x (или x'). В этом случае Эйнштейновская формула преобразования скоростей имеет следующий вид:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'} v_{S'S} / c^2} \tag{46}$$

Обратите на красоту этой формулы. Когда $v_{PS'}$ и $v_{S'S}$ малы по сравнению с *c*, знаменатель в (46) очень близок к 1, и в этом случае уравнение (46) сводится к (43). При низких скоростях закон сложения скоростей Галилея дает приемлемые результаты. Но если $v_{PS'}=c$, (наблюдатель S′ наблюдает световой луч), то из (46) следует, что $v_{PS}=c$ *независимо от того, чему равна скорость* $v_{S'S}$. Все наблюдатели измерят одно и тоже значение скорости света независимо от их относительных скоростей.

Постулаты Эйнштейна и следующие из них кинематика и механика не требуют отказа от Ньютоновской физики. Наоборот, из них следует, что Ньютоновская механика справедлива только, если скорости много меньше скорости света. Это как раз относится к движущимся телам, которые мы встречаем в обыденной жизни. Даже одно из самых быстрых тел сконструированных человеком- высокоскоростная ракета ($v=10^4$ м/с) имеет скорость много меньше скорости света ($c=3\times10^8$ м/с), так что мы спокойно можем использовать формулу Галилея, не делая при этом существенной ошибки. С другой стороны, элементарные частицы, такие как электроны и протоны могут быть легко ускорены до скоростей сравнимых со скоростью света. При таких высоких скоростях необходимо использовать новые уравнения кинематики и динамики. Эта новая физика составляет содержание специальной теории относительности, которую мы будем подробно обсуждать в Главе 21.

Вопросы

1. Может ли ускорение тела изменить свое направление без изменения направления скорости?
2. Пусть **v** и **a** есть, соответственно, скорость и ускорение автомобиля. Опишите ситуации, при которых (а) **v** и **a** параллельны; (б) **v** и **a** антипараллельны; (в) **v** и **a** перпендикулярны друг другу; (г) **v** равно нулю, но **a** отлично от нуля; (д) **v** не равно нулю, но **a** равно нулю.
3. Имеет ли значение высота, на которую вы прыгаете, при прыжке в длину? Какие факторы определяют длину прыжка?
4. Почему электрон в пучке, вылетающем из электронной пушки, падает под действием силы тяжести в гораздо меньшей степени, чем молекула воды в струе из шланга? Считать движение в обоих случаях в начальный момент времени горизонтальным.
5. В какой точке или точках траектории снаряд имеет минимальную скорость? Максимальную?
6. На Рис. 18 показана траектория самолета, предназначенного для моделирования кратковременных условий с небольшим ускорением силы тяжести. Покажите, что если траектория самолета будет строго параболической, то пассажиры будут находиться в условиях невесомости.

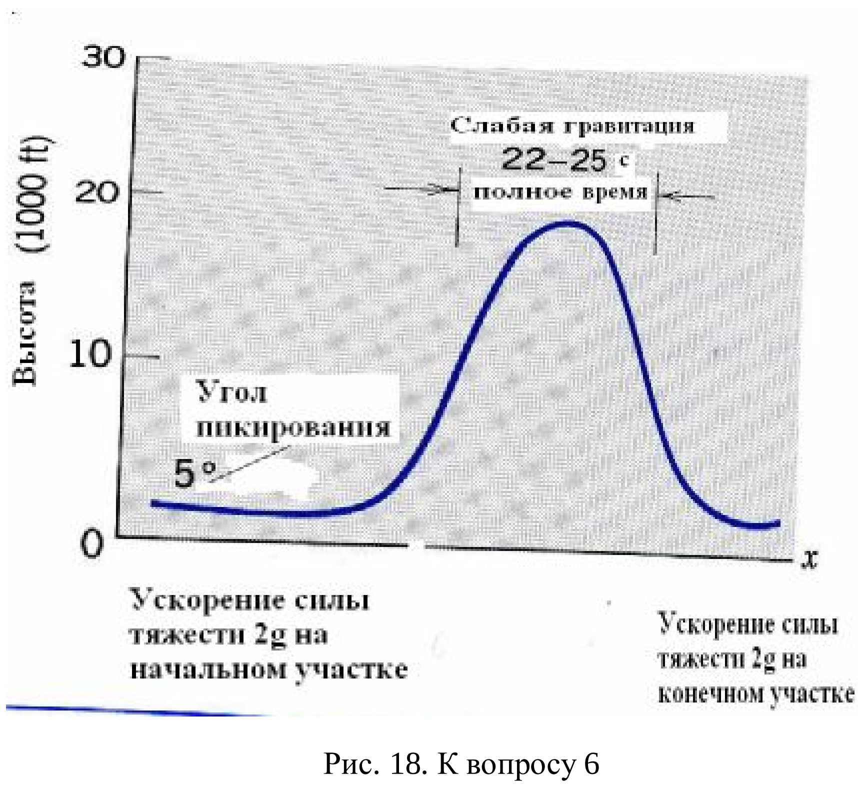

Рис. 18. К вопросу 6

7. При бросании камня наибольшая дальность полета достигается при угле бросания меньшим 45°. Иными словами, чем положе траектория, тем больше дальность. Объясните почему.
8. Снаряд находится в верхней точке своей траектории. (а) Выразите его скорость через v_0 и ϕ_0. (б) Чему равно ускорение снаряда? (в) Чему равен угол между ускорением снаряда и его скоростью?
9. На Рис. 19 показаны три траектории футбольного мяча. Укажите траекторию, для которой: (а) время полета мяча наименьшее; (б) вертикальная компонента начальной скорости наибольшая; (в) горизонтальная компонента начальной скорости наибольшая; (г) начальная скорость наименьшая. Сопротивлением воздуха пренебречь.

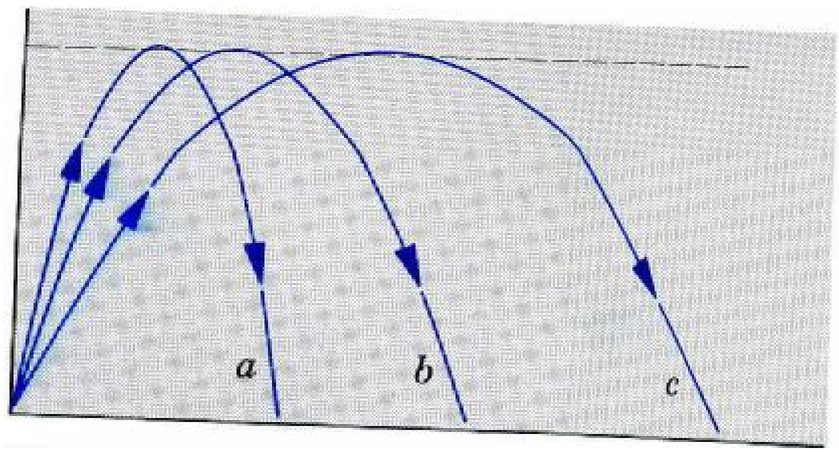

Рис. 19. К вопросу 9

10. Вы стреляете из ружья, ствол которого расположен горизонтально, и попадаете в цель, находящуюся на некотором расстоянии на одной линии со стволом ружья. Покажите, что, если, не меняя положения прицела, стрелять по цели, которая находится на таком же расстоянии, но расположена под некоторым углом выше или ниже горизонтальной линии, то пуля пролетит выше цели в обоих случаях.
11. В одной из книг, посвященных роли науки в спорте, автор, говоря о мячах для бейсболла и гольфа, пишет: “При прочих равных условиях, тело будет лететь дальше: (а) в более жаркий день; (б) на более высоких широтах; (в) в более влажном воздухе”. Можете ли вы объяснить эти утверждения?
12. Зависимость высоты от времени для тела, брошенного вертикально вверх, есть парабола. Траектория тела, брошенного под углом к горизонту, также есть парабола. Случайно ли это совпадение? Ответ обоснуйте.
13. Снаряды дальнобойной артиллерии достигают максимальной дальности не при угле “максимальной дальности” 45°, а при углах выстрела от 55° до 65°. Обьясните, в чем здесь дело?
14. Возможны ли ситуации, когда необходимо рассматривать движение тела в трех измерениях, вместо двумерного движения, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало?
15. Возможно ли испытывать ускорение, если вы движетесь с постоянной скоростью? Возможно ли **не** испытывать ускорения, если вы движетесь по криволинейной

траектории? Возможно ли испытывать постоянное ускорения, если вы движетесь по криволинейной траектории?

16. Опишите качественно ускорение, действующее на бусинку, которая без трения движется вниз по тонкой проволоке, свернутой в спираль.
17. Покажите, что при учете вращения Земли, книга, лежащая на вашем столе, движется ночью быстрее, чем днем. В какой системе отсчета справедливо это утверждение?
18. Летчик, выходя из пике по дуге окружности, испытывает перегрузку 3g. Объясните, что это значит.
19. Можно ли ускорение тела представить в любой точке траектории через его радиальную и тангенциальную компоненты? Если да, то в чем преимущество такого представления?
20. На Рис. 20 показана трубка в виде прямоугольника, расположенная в вертикальной плоскости. В верхний правый угол трубки одновременно запускают два шарика. Один шарик движется по пути AB, другой- по пути CD. Какой из шариков первым достигнет нижнего левого угла?

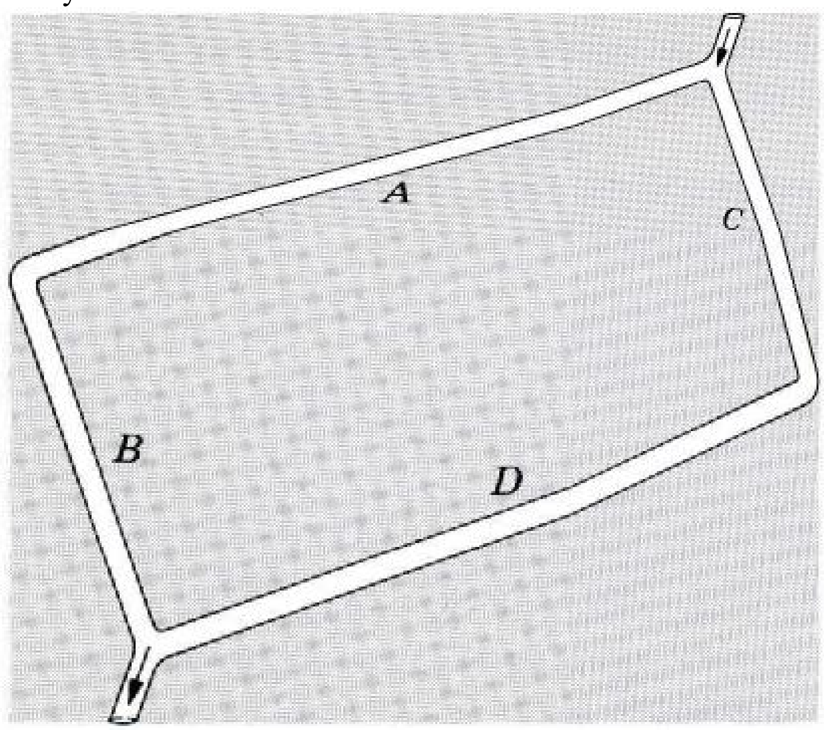

Рис. 20. К вопросу 20.

21. Ускорение тела является постоянным в некоторой системе отсчета. Следует ли отсюда, что оно является постоянным во всех других системах отсчета?
22. Мальчик, сидящий в железнодорожном вагоне, едущим с постоянной скоростью, бросает мячик вверх. Куда упадет мячик? За ним? Перед ним? В его руки? Что произойдет если вагон, пока мячик находится в воздухе, станет двигаться с ускорением или по криволинейному пути?
23. Женщина, стоящая на задней платформе поезда, движущегося с постоянной скоростью, склонившись над рельсами, роняет монету на рельсы. Опишите траекторию монеты для наблюдателя: (а) женщины, уронившей монету; (б) человека, стоящего на земле рядом с полотном: (в) человека, находящегося в другом поезде, который движется по параллельным рельсам в сторону противоположную первому поезду.

24. Лифт опускается с постоянной скоростью. Человек в лифте роняет монету на пол. Чему будет равно ускорение монеты для: (а) человека в лифте: (б) человека, находящегося в состоянии покоя вне лифта?
25. Ведро заполняется водой из вертикально расположенного шланга. Изменится ли скорость заполнения ведра, если в горизонтальном направлении подует ветер?
26. Автобус едет под дождем со скоростью v_b. Капли дождя падают вертикально со скоростью v_r. Под каким углом капли дождя ударяют в лобовое стекло автобуса, расположенное вертикально?
27. Капли дождя падают вертикально с постоянной скоростью. Вы хотите перебежать из одного место в другое таким образом, чтобы в вас попало наименьшее число дождевых капель. С какой скоростью вам надо бежать? С наибольшей возможной? С наименьшей возможной? С некоторой промежуточной? (см. S. A. Stern An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain, Am. J. Phys. September 1983, p. 815).
28. Что неправильно на Рис. 21? Лодка движется вдоль направления ветра.

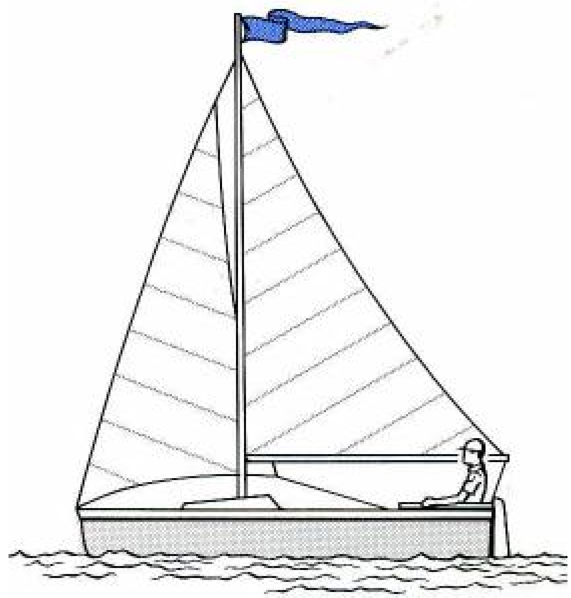

Рис. 21. К вопросу 28.

29. Галилеев закон сложения скоростей (43) настолько интуитивно знаком из повседневного опыта, что иногда утверждают, что этот закон является “очевидным, не требующим доказательства”. Многочисленные, так называемые опровержения специальной теории относительности основаны на этом утверждении. Что бы вы ответили кому-нибудь, сделавшем подобное утверждение?

Задачи

Раздел 4-1 Положение, скорость, ускорение

1. Самолет пролетел за 45 минут 410 миль на восток от города А к городу Б, а затем за 1 час 30 минут пролетел 810 миль на юг от города Б до города В. (а) Чему равны величина и направление полного вектора смещения? (б) Чему равен вектор средней скорости? (в) Чему равна средняя скорость этого полета?

2. Положение частицы, движущейся в плоскости xy задано вектором $\mathbf{r}=(2t^3-5t)\mathbf{i}+(6-7t^4)\mathbf{j}$, где r измеряется в метрах, t в секундах. Вычислите величины **r**, **v** и **a** в момент t=2 с.
3. За 3 часа 24 минуты воздушный шар пролетел 8.7 км на север, 9.7 км на восток и оказался на высоте 2.9 км над поверхностью земли. Найти: (а) величину его средней скорости; (б) угол между вектором средней скорости и горизонталью.
4. Скорость частицы, движущейся в плоскости xy задана вектором $\mathbf{v}=(6t-4t^2)\mathbf{i}+8\mathbf{j}$, где v измеряется в метрах, t>0 в секундах. (а) Чему равно ускорение в момент t=3 с? (б) Обращается ли (когда-либо) ускорение в нуль? (в) Обращается ли (когда-либо) скорость в нуль? (г) Достигнет ли скорость в какой-либо момент времени значения 10 м/с?

Раздел 4-2 Движение с постоянным ускорением

5. В катодной трубке пучок электронов, летящих горизонтально со скоростью 9.6×10^8 см/с, влетает в область, ограниченную двумя горизонтальными пластинами длиной 2.3 см. Электрическое поле между пластинами сообщает электронам постоянное ускорение, направленное вниз. Величина этого ускорения равна 9.4×10^{16} см/с^2. Определить: (а) время, за которое электроны пролетят пластины: (б) вертикальное смещение пучка на выходе из пластин: (в) горизонтальную и вертикальную компоненты скорости электрона в пучке на выходе из пластин.
6. По замерзшему озеру под парусом с постоянным ускорением под действием ветра движутся сани. В некоторый момент времени скорость саней $\mathbf{v}=6.3\mathbf{i}-8.42\mathbf{j}$ в м/с. Через 3 секунды сани останавливаются. Чему равно ускорение саней в течение этого интервала?
7. Положение частицы в зависимости от времени задано радиус вектором $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+4t^2\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, где все величины в системе СИ. Как зависят от времени скорость и ускорение этой частицы? Какова форма траектории частицы?
8. Частица вылетает из начала координат в момент t=0 с начальной скоростью $\mathbf{v}_0=3.6\mathbf{i}$ в м/с. Во время движения на частицу действует постоянное ускорение $\mathbf{a}=-1.2\mathbf{i}-1.4\mathbf{j}$, в м/с^2. (а) В какой момент времени частица достигнет максимального значения x координаты? (б) Чему будет равна скорость частицы в этот момент времени? (в) Где будет находиться частица в этот момент времени?

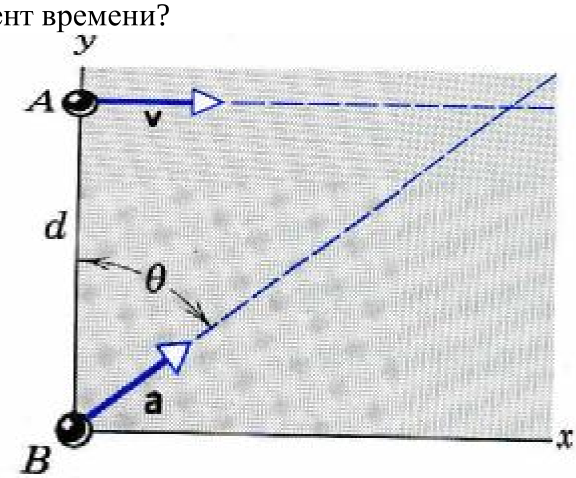

Рис. 22. К задаче 9.

9. Частица A двигается вдоль линии y=d (30м) с постоянной скоростью v=3.0 м/с, направленной параллельно положительной оси x (см. Рис. 22). В момент, когда частица A

пересекает ось y, из начала координат стартует вторая частица B с нулевой начальной скоростью и постоянным ускорением a=0.40 м/с^2. Какой должен быть угол θ между вектором ускорения **a** и положительной осью y, чтобы две частицы столкнулись?

10. Мяч бросают вниз с высоты 39.0 м. Ветер, дующий в горизонтальном направлении, сообщает мячу постоянное ускорение 1.20 м/с^2. (а) Покажите, что траектория мяча является прямой линией и найдите значения величин R и θ (см. Рис. 23). (б) Сколько времени мяч будет лететь до земли? (в) С какой скоростью мяч ударится об землю?

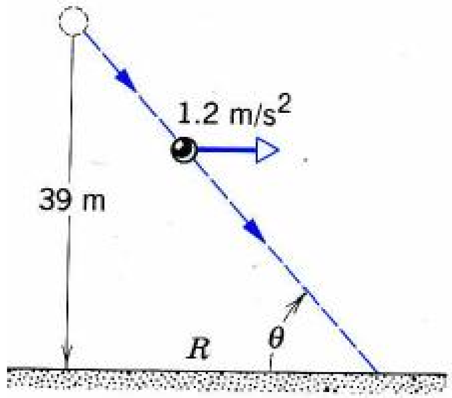

Рис. 23. К задаче 10.

Раздел 4-3 Движение в поле тяжести

11. Мяч, скатываясь с края горизонтального стола высотой 4.23 фута, падает на пол на расстоянии 5.11 футов, отсчитанного по горизонтали от края стола. (а) Сколько времени мяч находился в воздухе? (б) Чему была равна его скорость в момент отрыва от стола?

12. Электрон, как и все виды материи, испытывает влияние силы тяжести. Предположим, что электрон вылетает из электронной пушки с горизонтальной скоростью 3.0×10^7 м/с (это одна десятая скорости света). На какое расстояние электрон сместится в вертикальном направлении, пролетев 1 м в горизонтальном направлении?

13. Стрела брошена горизонтально в центр мишени (точка P на Рис. 24) с начальной скоростью 10 м/с. Через 0.19 с она попадает в точку Q на ободе, расположенную вертикально под точкой P. (а) Чему равно расстояние PQ? (б) На каком расстоянии от мишени стоит стрелок?

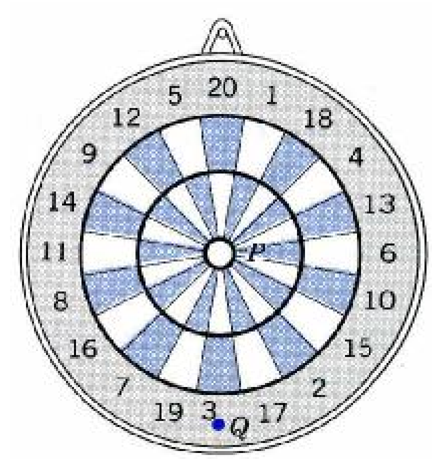

Рис. 24. К задаче 13.

14. Винтовка нацелена в точку А мишени, находящуюся на расстоянии 130 футов от стрелка. Пуля попадает в мишень в точку, расположенную на 0.75 дюймов ниже точки А. (а) Сколько времени пуля находилась в полете? (б) Чему равна скорость пули при вылете из ствола?

15. Пушка, расположенная на высоте 45 м над горизонтальной плоскостью, выстреливает снарядом в горизонтальном направлении. Начальная скорость снаряда 250 м/с. (а) Сколько времени снаряд будет находиться в воздухе? (б) На каком расстоянии по горизонтали он упадет на землю? (в) Чему будет равна вертикальная компонента скорости снаряда в момент его удара о землю?

16. Игрок бросает бейсбольный мяч в горизонтальном направлении со скоростью 92.0 миль/час. Другой игрок, который ловит мяч, находится на расстоянии 60.0 футов. (а) За какое время мяч пролетит по горизонтали первые 30 футов? Вторые 30 футов? (б) На какое расстояние упадет мяч из-за силы тяжести, пролетев первые 30 футов? Вторые 30 футов? (в) Почему эти величины неодинаковы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

17. В одной детективной истории тело было обнаружено на расстоянии 15 футов от стены дома под окном, которое находилось на высоте 80 футов. Случайна ли эта смерть или нет? Ответ обоснуйте.

18. Мяч бросают со скалы с начальной скоростью 15 м/с под углом 20° ниже горизонта. Через 2.3 с полета найдите (а) горизонтальное смещение мяча; (б) вертикальное смещение мяча.

19. Мяч бросают по направлению к стене с начальной скоростью 25.3 м/с под углом 42.0° к горизонту (см. Рис. 25). Стена находится на расстоянии 21.8 м от точки бросания. (а) Сколько времени мяч будет находиться в воздухе до того, как он ударится об стенку? (б) На какой высоте мяч ударится об стенку? (в) Чему будут равны вертикальная и горизонтальная компоненты скорости мяча в момент удара об стенку? (г) Достигнет ли мяч вершины своей траектории при полете к стене?

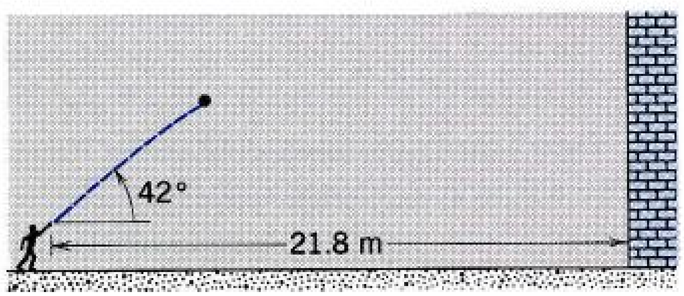

Рис. 25. К задаче 19.

20. Покажите, что максимальная высота, на которую поднимается брошенное тело есть $y_{\max} = (v_0 \sin f_0)^2 / 2g$.

21. (а) Покажите, что для тела, брошенного с поверхности земли под углом ϕ_0 к горизонту, отношение максимальной высоты H к дальности полета R равно $H / R = \frac{1}{4} \tan f_0$. (б) При каком угле бросания ϕ_0 дальность полета равна максимальной высоте?

22. Тело бросают с поверхности земли под углом ϕ_0 к горизонту. (а) Покажите, что угол θ, под которым видна наивысшая точка траектории из точки бросания, связан с углом бросания ϕ_0 соотношением $\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\phi_0$ (см. Рис. 26). (б) Вычислите θ для ϕ_0=45°.

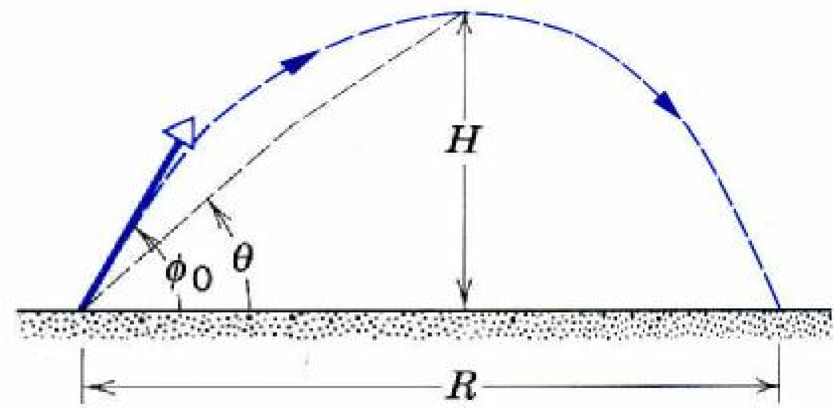

Рис. 26. К задачам 21 и 22.

23. Камень бросают по направлению к уступу с начальной скоростью 120 фут/с под углом 62.0° к горизонту (см. Рис. 27).. Через 5.5 с камень попадает в точку А на уступе. Найти (а) высоту уступа *h*; (б) Скорость камня в момент попадания в точку А; (в) максимальную высоту Н, на которую поднимется камень.

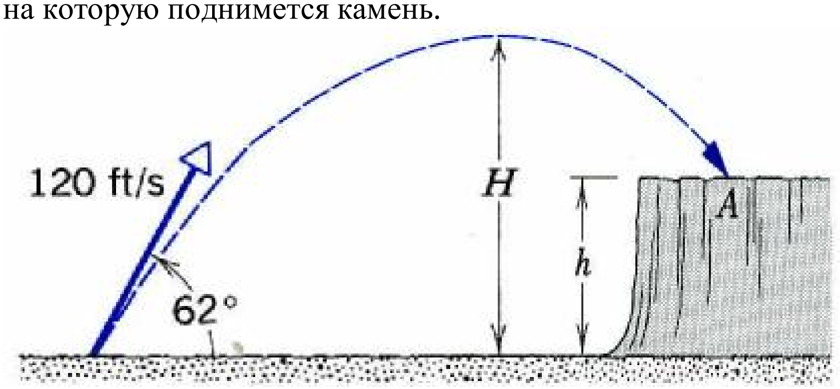

Рис. 27. К задаче 23.

24. В 1968 г. на Олимпиаде в Мехико Боб Бимон установил новый мировой рекорд в тройном прыжке- 8.90 м. Предположим, что его начальная скорость была равна скорости спринтера- 9.50 м/с. На сколько результат Бимона отличается от максимально достижимой дальности при этой начальной скорости, если сопротивление воздуха не учитывать? Ускорение свободного падения в Мехико g=9.78 м/с^2.

25. В Примере 3 найдите: (а) скорость, с которой груз ударяет в мишень; (б) угол, который вектор скорости груза составляет с вертикалью при ударе о мишень; (в) почему этот угол не равен углу, под которым видна мишень?

26. В своей работе "О двух главных системах мира" Галилей утверждал, что для двух начальных углов, которые больше и меньше 45° на одинаковую величину (см. Рис. 28), дальность полета является одинаковой. Докажите это утверждение. Найдите эти два угла для начальной скорости 30.0 м/с и дальности 20.0 м.

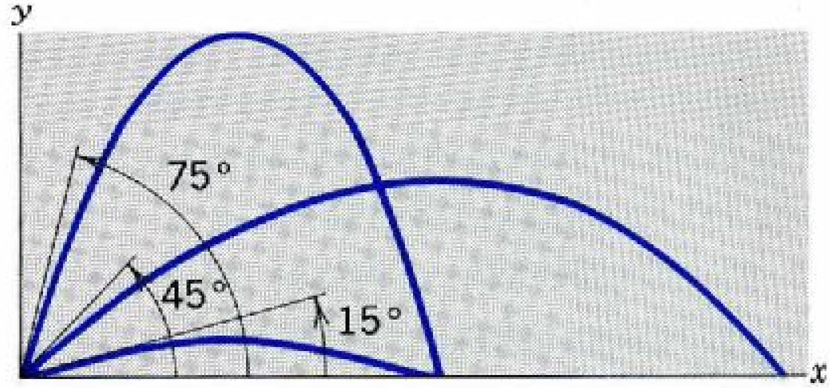

Рис. 28. К задаче 26.

27. Фокусник, жонглируя одновременно 5-ю мячиками, бросает их последовательно вверх на 3 м. (а) Определите интервал времени между последовательными бросками. (б) Определите положение других мячей в тот момент, когда жонглер ловит один из них. (Временем переброса мяча из одной руки в другую пренебречь).

28. Из винтовки произведен выстрел по мишени, находящейся на расстоянии 45 м. Пуля вылетает из винтовки со скоростью 450 м/с. На какой высоте над мишенью находится точка, куда должна быть нацелена винтовка, чтобы пуля поразила мишень?

29. Мяч скатывается с вершины лестницы с горизонтальной скоростью 1.50 м/с. Высота ступеней 20 см, ширина ступеней тоже равна 20 см. На какую ступеньку придется первый удар мяча?

30. Мяч брошен в воздух. На высоте 9.1 м скорость мяча есть $\mathbf{v}=7.6\mathbf{i}+6.1\mathbf{j}$, в м/с (ось x горизонтальна, ось y вертикальна и направлена вверх). (а) На какую максимальную высоту поднимется мяч? (б) На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч? (в) Чему равна скорость мяча (величина и направление) в момент удара мяча о землю?

31. При игре в бейсбол один из игроков, стоящий на специальном возвышении, высота которого над уровнем бейсбольного поля равна 40 см, неожиданно бросает мяч горизонтально со скоростью 150 км/ч. Может ли мяч попасть в ограниченную зону на расстоянии 18 м, если для того, чтобы попасть в эту зону, мяч должен упасть не менее, чем на 45 см, но не более, чем на 1 м?

32. Согласно уравнению 24 дальность полета снаряда зависит не только от v_0 и ϕ_0, но также и от ускорения силы тяжести g, величина которого зависит места на Земле. В 1936 г. Джесси Оуэнс установил мировой рекорд в 8.09 м в тройном прыжке на Олимпийских играх в Берлине (g=9.8128 м/с^2). Взяв те же значения величин v_0 и ϕ_0, определите насколько этот рекорд был бы отличен от Берлинского, если бы он прыгнул в 1956 г. в Мельбурне (g=9.7999 м/с^2)? (В этой связи посмотрите статью “The Earth’s Gravity” by W. A. Heiskanen, *Scientific American*, September 1955, p. 164).

33. При извержении вулкана из его кратера выбрасываются вулканические камни. На Рис. 29 показано поперечное сечение горы Фудзи в Японии. (а) С какой начальной скоростью должен быть выброшен камень из жерла вулкана в точке А под углом 35° к горизонту, чтобы он упал у подножия вулкана в точке В? (б) Чему равно время полета камня?

34. Бейсболист хочет бросить мяч своему партнеру, который находится от него на расстоянии 38.7 м. Его лучшая скорость бросания равна 136.7 км/час. (а) Если мяч отрывается от его руки на высоте 90 см параллельно поверхности земли, то по какой траектории он будет лететь? (б) Под каким углом бейсболист должен бросить мяч, чтобы партнер его поймал? Считайте, что ладонь ловящего мяч также находится на высоте 90 см. (в) Чему будет равно время полета мяча?

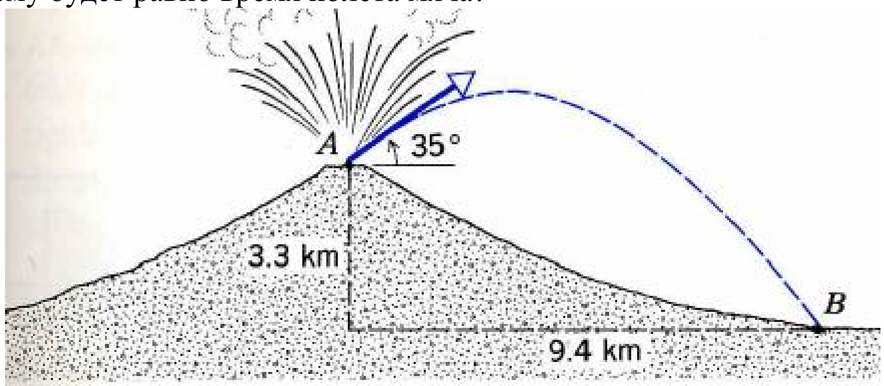

Рис. 29. К задаче 33.

35. С какой начальной скоростью баскетболист должен бросить мяч под углом 55° к горизонту, чтобы мяч попал в корзину? Диаметр кольца равен 45.7 см. Остальные данные приведены на Рис. 30.

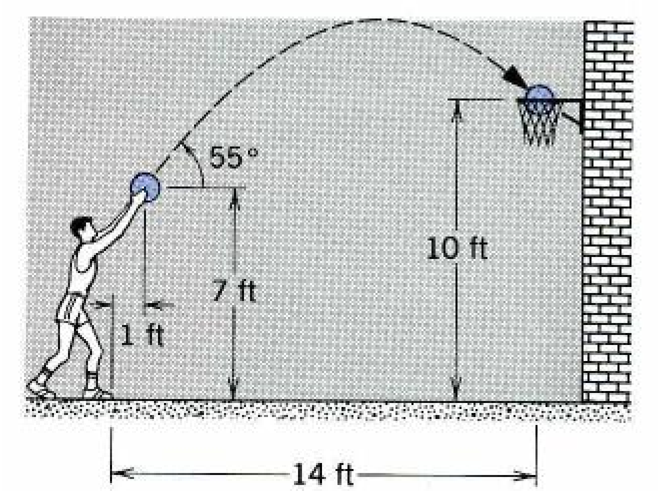

Рис. 30. К задаче 35.

36. Футболист посылает мяч в ноги партнеру, который находится от него на расстоянии 45.7 м. Время полета мяча 4.50 с. Считая, что футболист ударяет мяч ногой на высоте 1.52 м от поверхности земли, определите величину и направление начальной скорости мяча.

37. Самолет, летящий к земле со скоростью 290 км/час под углом 27° ниже горизонта, выпускает снаряд, являющийся ложной целью для радара. Расстояние по горизонтали от точки, где был выпущен снаряд до точки его удара о землю равно 700 м. (а) Сколько времени снаряд будет находиться в воздухе? (б) На какой высоте находился самолет в момент выпускания снаряда.

38. Пикирующий бомбардировщик, пикируя под углом 56.0° к вертикали, сбрасывает бомбу с высоты 730 м. Через 5.10с бомба ударяется о землю, не попав в цель. (а) Чему равна скорость бомбардировщика? (б) Какое расстояние по горизонтали пролетает бомба? (в)

Чему равны вертикальная и горизонтальная компоненты вектора скорости бомбы в момент ее удара о землю? (г) Чему равна величина скорости бомбы и угол вектора скорости с вертикалью в момент удара бомбы о землю?

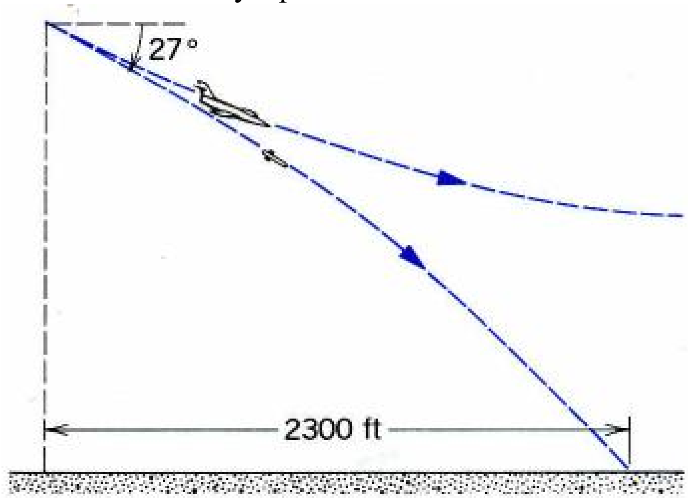

Рис. 31. К задаче 37.

39. Бомбардировщик B-52 имеет 49 м в длину и летит со скоростью 820 км/час над районом бомбометания (см. Рис. 32). На каком расстоянии от места сброса бомб образуются бомбовые воронки? Любые недостающие данные определите из Рис. 32. При расчете не учитывайте скорость ветра и сопротивление воздуха. Как повлияет на ваш ответ сопротивление воздуха?

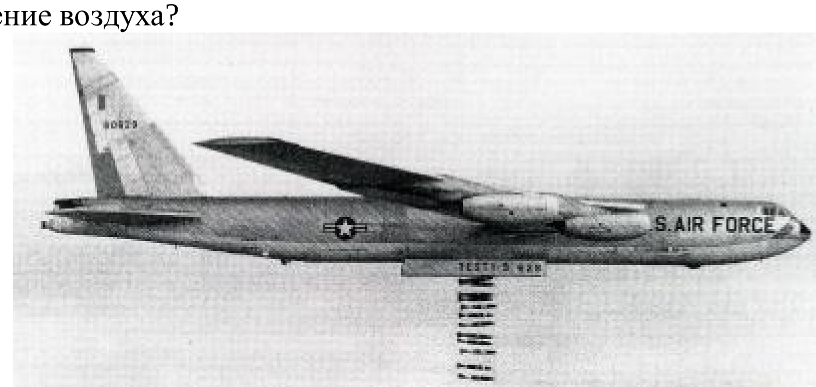

Рис. 32. К задаче 39.

40. Футболист посылает пас другому игроку, сообщив мячу начальную скорость 19.5 м/с под углом 42° к горизонту. В момент начала полета мяча принимающий игрок, находившийся на расстоянии 60 м от подающего игрока, начинает бежать, чтобы перехватить мяч, прежде чем он ударится об землю. С какой средней скоростью должен бежать этот игрок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

41. При игре в теннис игрок посылает теннисный мяч со скоростью 23.6 м/с горизонтально поверхности земли. Мяч отрывается от ракетки на высоте 2.37 м. На каком расстоянии от верхнего края сетки пролетит мяч? Сетка находится на расстоянии 12 м от игрока, ее высота равна 0.90 м. Перелетит ли мяч сетку, если направление первоначальной скорости мяча будет составлять 5° ниже горизонта?

42. Бейсболист бросает мяч с высоты 1.20 м под углом 45° к горизонту. Дальность полета мяча равна 107 м. Преодолеет ли мяч ограждение, которое находится на расстоянии 97.5 метра от места бросания? Высота ограждения равна 7.30 м.

43. Футболист может сообщить мячу начальную скорость 25 м/с. Каков диапазон углов между направлением начальной скорости мяча и горизонтом, чтобы мяч с расстояния 50 м попал в ворота, высота которых равна 3.44 м?

44. Пушка у подножия холма, угол подъема которого α, стреляет снарядами, начальная скорость которых v_0. Под каким углом к горизонту должно быть направлено дуло пушки, чтобы достичь максимальной дальности полета R (см. Рис. 33)?

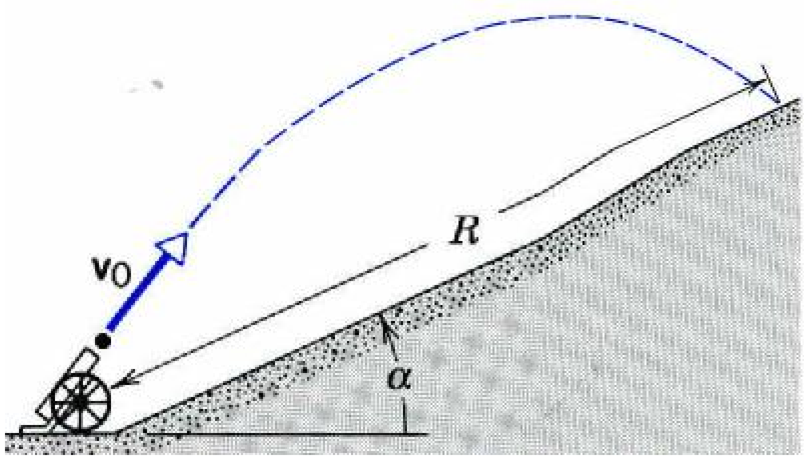

Рис. 33. К задаче 44.

45. Бейсболист бросает мяч с высоты 1.40 м под углом 52.0° к горизонту. Мяч попадает в трибуну на расстоянии 12 м от ее нижнего края (см. Рис. 34). Угол наклона трибуны равен 28° и она находится на расстоянии 110 м от места бросания. С какой начальной скоростью был брошен мяч? Сопротивлением воздуха пренебречь.

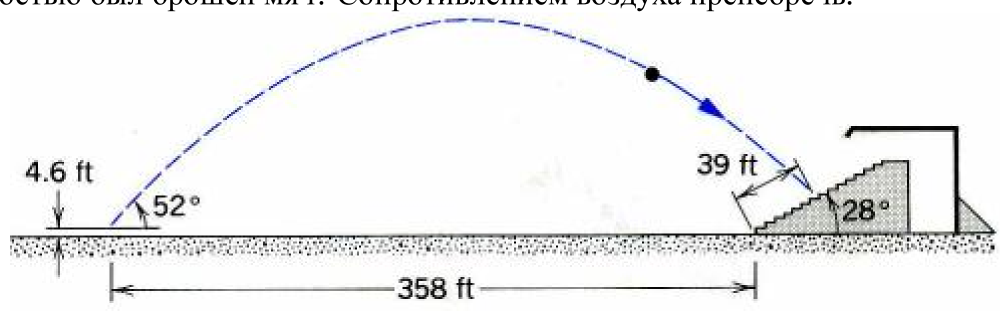

Рис. 34. К задаче 45.

46. Камни бросают так, чтобы их дальность полета была точно равна расстоянию R от места бросания до края обрыва, высота которого равна h (см. Рис. 35). Пусть скорость v_0 может меняться от нуля до некоторого максимального значения v_{max}, а угол ϕ_0 может меняться непрерывно. При каких значениях v_0 и ϕ_0 будет достигнуто минимальное значение x? Разрешено только одно столкновение с землей.

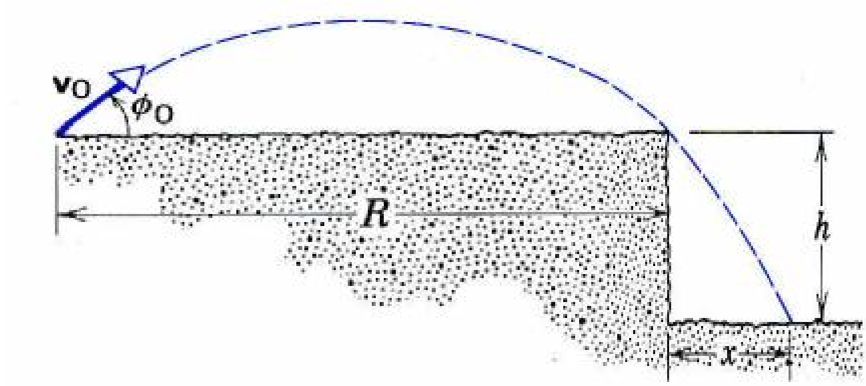

Рис. 35. К задаче 46.

47. Наблюдатель с помощью радара с земли отслеживает приближающийся снаряд. В некоторый момент времени он имеет следующую информацию о снаряде: снаряд находится в максимальной точке своей траектории и летит горизонтально со скоростью v; расстояние до цели по прямой равно L; эта прямая линия на цель составляет угол θ с горизонтом. (а) На каком расстоянии D от наблюдателя снаряд упадет на землю? D следует выразить через наблюдаемые величины v, L, θ и известное значение g. Землю считать плоской. Считать также, что наблюдатель находится в одной плоскости с траекторией снаряда. (б) Как можно определить перелетит ли снаряд через голову наблюдателя или упадет, не долетев до него?

48. Ракета стартует из состояния покоя и летит по прямой линии под углом 70.0° к горизонту с ускорением 46.0 м/с^2. Через 30.0 с после старта двигатель ракеты выключается и далее она летит по параболической траектории (см. Рис. 36). (а) Через какое время после старта ракета упадет на землю? (б) На какую максимальную высоту поднимется ракета? (в) На каком расстоянии от места старта упадет ракета? Зависимостью g от высоты пренебречь.

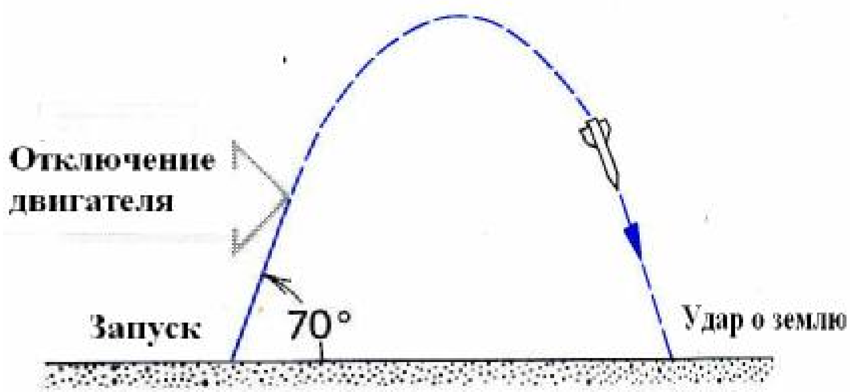

Рис. 36. К задаче 48.

49. Противотанковая пушка расположена на краю плато, которое возвышается на 60 м над окружающей местностью (см. Рис. 37). На расстоянии 2.20 км от пушки ее команда увидела неподвижный вражеский танк. В тот же самый момент с танка увидели пушку, и танк стал удаляться от пушки по прямой с ускорением 0.900 м/с^2. Пушка стреляет под углом 10.0° к горизонту, начальная скорость снаряда равна 240 м/с. Через какое время после начала движения танка должна выстрелить пушка, чтобы его поразить?

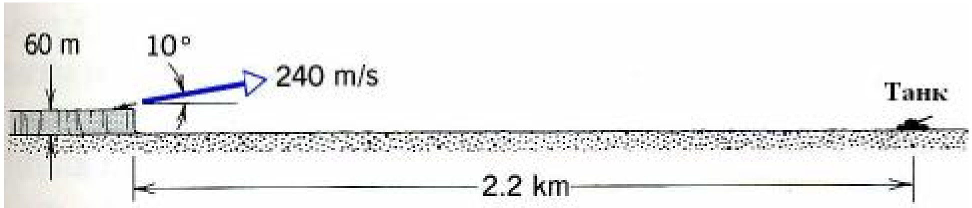

Рис. 37. К задаче 49.

50. На какую максимальную высоту бейсболист может подбросить мяч, если максимальное расстояние, на которое он его бросает, равно 60.0м? Считать, что в обеих случаях мяч бросается с высоты 1.60 м с одной и той же начальной скоростью.

Раздел 4-4 Равномерное криволинейное движение

51. В модели Бора атома водорода электрон вращается вокруг протона по круговой орбите радиуса 5.29×10^{-11} м со скоростью 2.18×10^{6} м/с. Чему равно ускорение электрона?

52. Астронавт вращается в центрифуге радиусом 5.2 м. (а) Чему равна скорость астронавта, если ускорение которое он испытывает равно 6.8g? (b) Сколько оборотов в минуту требуется для достижения этого ускорения?

53. Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте 640 км от поверхности Земли. Один оборот вокруг Земли спутник совершает за 98.0 минут. (а) Чему равна скорость спутника? (б) Чему равно ускорение свободного падения на орбите спуиника?

54. Карнавальное колесо радиусом 15 м совершает пять оборотов в минуту вокруг горизонтальной оси. (а) Чему равно ускорение по величине и направлению для пассажира, находящегося в *верхней* точке колеса? (б) Чему равно ускорение по величине и направлению для пассажира, находящегося в *нижней* точке колеса?

55. Ось электробритвы вращается со скоростью 1200 оборотов в минуту. (а) Нож электробритвы имеет радиус 0.15 м. (а) Какое расстояние проходит точка на краю ножа за один оборот? (б) Чему равна скорость этой точки? (в) Чему равно ее ускорение?

56. Скорый поезд, курсирующий между Парижем и Ла Маншем развивает максимальную скорость 310 км/час. (а) Считая, что ускорение, которое испытывает пассажир, не должно превышать 0.05g, определить наименьший допустимый радиус кривизны пути. (б) Если радиус кривизны пути составляет 0.94 км, то до какой скорости должен замедлится поезд?

57. Считается, что некоторые очень плотные нейтронные звезды вращаются со скоростью 1 об/с. Считая, что радиус такой звезды равен 20 км (это типичное значение) определить (а) скорость точки на экваторе такой звезды; (б) центростремительное ускорение этой точки.

58. Частица Р вращается с постоянной скоростью по окружности радиусом 3.0 м и совершает один оборот за 20 с. (Рис. 38). Частица проходит через точку О в момент времени t=0. По отношению к точке О найти (а) величину и направление вектора положения частицы спустя 5.0, 7.5, 10 с; (б) величину и направление вектора смещения точки от 5-й до 10-й секунды; (в) вектор средней скорости в этом интервале; (г) вектор мгновенной скорости в начале и в конце этого интервала; (д) вектор мгновенного ускорения в начале и в конце этого интервала. Угол отсчитывать в направлении против часовой стрелки от оси х.

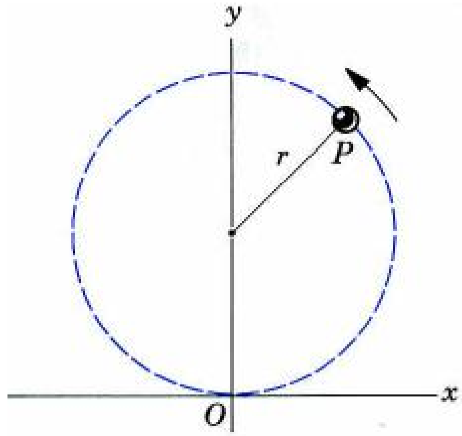

Рис. 38. К задаче 58.

59. Частица вращается по окружности радиуса r вокруг начала координат- точки О с постоянной скоростью v. (а) Покажите, что время Δt, необходимое, чтобы частица сместилась на угол Δθ, определяется соотношением $\Delta t = \frac{2p\,r}{\mathrm{v}}\frac{\Delta q}{360^{0}}$, где угол Δθ измеряется в градусах; (б) Покажите, что для точек 1 и 2 на Рис. 39, среднее ускорение, вычисленное по формуле (27) будет $\bar{a}_x = 0; \bar{a}_y = -0.9\mathrm{v}^2/r$ при Δθ=90° и $\bar{a}_x = 0; \bar{a}_y = -0.99\mathrm{v}^2/r$ для Δθ=30°; (в) Покажите, что из требований круговой симметрии следует что $\bar{a}_y \to -\mathrm{v}^2/r$ при $\Delta q \to 0$.

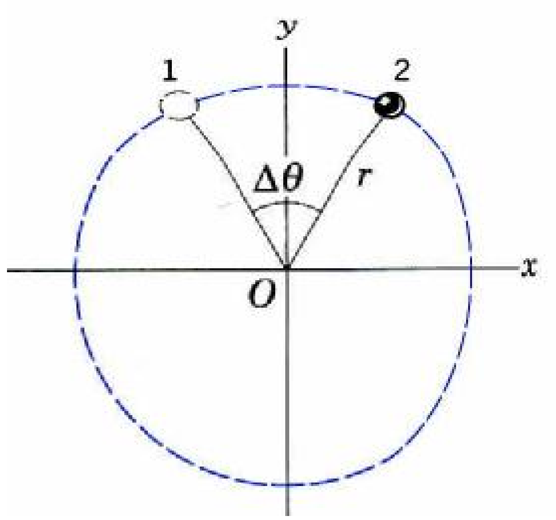

Рис. 39. К задаче 59.

60. Человек с помощью веревки длиной 1.4 м вращает камень по горизонтальной круговой траектории, расположенной на высоте 1.9 м над поверхностью земли. В некоторый момент времени веревка обрывается и камень, имея начальную горизонтальную скорость, падает на землю на расстоянии 11 м от центра вращения. Вычислите центростремительное ускорение камня во время его вращения по окружности.

61. (а) Пользуясь справочными данными вычислите отношение центростремительных ускорений Земли и Сатурна при их вращении вокруг Солнца. Считайте, что планеты вращаются по круговым орбитам с постоянными скоростями. (б) Чему равно отношение расстояний этих планет от Солнца? (в) Сравните ответы, полученные в пунктах а и б и предложите простую связь между расстоянием планеты до Солнца и ее центростремительным ускорением. Проверьте вашу гипотезу, вычислив те же самые отношения для других пар планет.

62. (а) Чему равно центростремительное ускорение тела на экваторе Земли, обусловленное вращением Земли вокруг своей оси? (б) Чему должен быть равен период вращения Земли для того, чтобы тело на экваторе имело центростремительное ускорение равное 9.8 м/с^2?

63. Вычислите обусловленное вращением Земли, ускорение человека, находящегося на широте 40°.

64. Женщина, рост которой 1.6 м, стоит на широте 50° в течение 24 часов. (а) Насколько большее за это время расстояние пройдет ее голова по сравнению с ботинками на ее ногах? (б) Насколько большее ускорение испытывает ее голова по сравнению с ускорением ботинок на ее ногах? Учитывайте только влияние вращения Земли.

Раздел 4-5. Векторы скорости и ускорения при круговом движении

65. Частица вращается по окружности радиусом 3.64 м. В некоторый момент времени скорость частицы равна 17.4 м/с, а угол между ее радиус- вектором и ее вектором ускорения составляет 22.0° (см. рис. 40). (а) Чему равно тангенциальное ускорение частицы? (б) Чему равна величина полного ускорения?

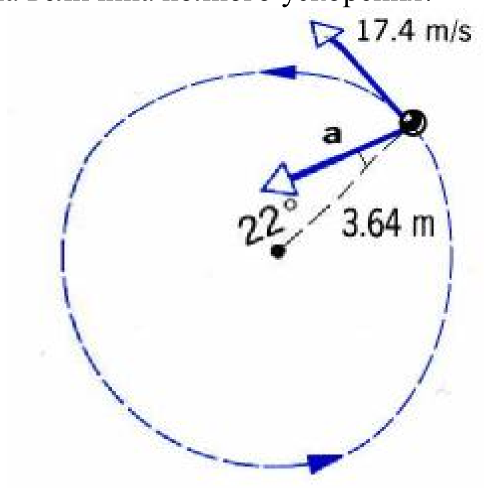

Рис. 40. К задаче 65.

66. Частица движется в плоскости x, y по закону

$$x = R\sin wt + wRt$$
$$y = R\cos wt + R$$

где величины ω и R являются константами. Траектория, описываемая этими уравнениями, называется *циклоидой*. Такую траекторию описывает точка на ободе колеса, которое катится без скольжения вдоль оси x. (а) Изобразите качественно эту траекторию на графике. (б) Вычислите мгновенные скорость и ускорение когда частица имеет минимальное и максимальное значение y.

Раздел 4-6. Относительное движение

67. Человек за 90 с взбирается вверх по неподвижному эскалатору длиной 15 м. Если эскалатор движется, то стоя на нем неподвижно, можно подняться наверх за 60 с. За какое время человек поднимется вверх по движущемуся эскалатору, если он будет идти по нему? Как зависит ответ от длины эскалатора?

68. Терминал аэропорта имеет движущуюся дорожку, чтобы пассажиры быстрее могли преодолеть длинный коридор. Петр, не пользуясь этой дорожкой преодолевает коридор за 150 с. Павел, просто стоя на дорожке, преодолевает то же расстояние за 70 с. Мария идет по этой дорожке. За какое время она преодолеет коридор? Считайте, что Петр и Мария идут с одной и той же скоростью.

69. Трансконтинентальный полет на запад длиной 2700 миль занимает на 50 минут больше, по сравнению с таким же полетом на восток. Скорость самолета равна 600 миль в час. Вычислите скорость ветра и его направление.

70. Снег падает вертикально со скоростью 7.8 м/с. (а) С какой скоростью и (б) под каким углом к вертикали будут падать снежинки с точки зрения водителя автомобиля, движущегося по прямой дороге со скоростью 55 км/час?

71. Поезд движется строго на юг со скоростью 28 м/с (относительно земли) под дождем и ветром, дующем в южном направлении. Относительно наблюдателя, стоящего неподвижно на земле траектория дождевых капель составляет с вертикалью угол 64°. Наблюдатель, находящийся внутри поезда видит, что капли стекают по стеклу окна вагона строго вертикально. Вычислите скорость дождевых капель относительно Земли.

72. В большом магазине покупатель стоит на эскалаторе, который движется вверх со скоростью 0.75 м/с. Линия эскалатора составляет 42° по отношению к горизонту. Он проезжает мимо своей дочери, которая стоит на другом таком же эскалаторе, движущемся вниз с той же скоростью (см. Рис. 41). Найдите скорость покупателя относительно скорости его дочери.

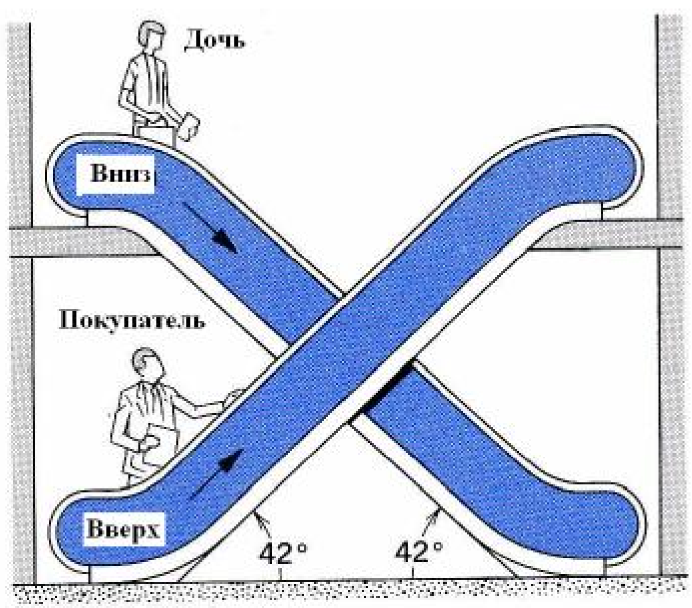

Рис. 41. К задаче 72.

73. Самолет летит на восток из пункта A в пункт B и затем возвращается в пункт A, летя строго на запад. Скорость самолета в воздухе равна **v**, а скорость ветра относительно земли равна **u**. Расстояние между A и B равно l и скорость самолета во время полета постоянна. Покажите, что, время в пути A→B→A равно (а) $t_0 = 2l/\mathrm{v}$, если **u**=0 (б) $t_E = t_0/\left(1-u^2/\mathrm{v}^2\right)$, если ветер дует строго на восток (иди на запад); (в) $t_N = t_0/\sqrt{\left(1-u^2/\mathrm{v}^2\right)}$, если ветер дует строго на север (или на юг). В последних двух случаях необходимо считать, что u<v. Почему?

74. Две автомагистрали пересекаются так, как показано на Рис. 42. В рассматриваемый момент времени полицейский автомобиль P, движущийся со скоростью 76 км/час, находится на расстоянии 41 м от перекрестка. В этот же момент времени другой автомобиль M, движущийся со скоростью 62 км/час, находится на расстоянии 57 м от перекрестка. Чему равна относительная скорость (по величине и направлению) автомобиля M по отношению к скорости автомобиля P?

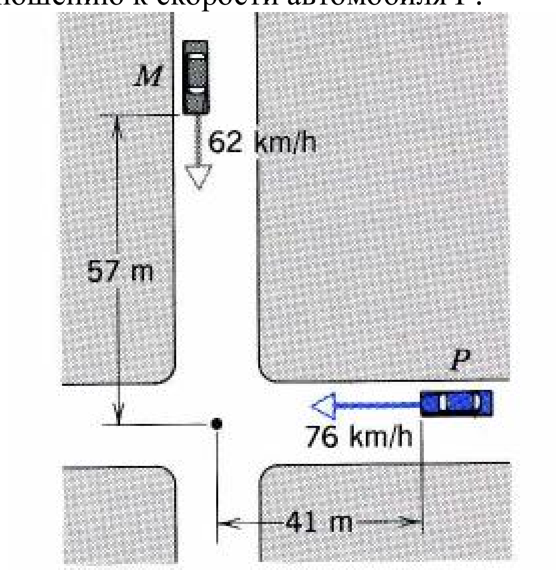

Рис. 42. К задаче 74.

75. Вертолет летит над плоской поверхностью на высоте 9.5 м со скоростью 6.2 м/с. С вертолета в сторону противоположную его движению выбрасывается пакет с начальной скоростью 12 м/ с относительно вертолета. (а) Найти начальную скорость пакета относительно земли; (б) Чему будет равно расстояние по горизонтали между вертолетом и пакетом в момент удара пакета о землю? (в) Чему равен угол между вектором скорости пакета и землей в момент удара пакета о землю с точки зрения неподвижного наблюдателя? (г) Чему равен угол между вектором скорости пакета и землей в момент удара пакета о землю с точки зрения наблюдателя, находящегося в вертолете?

76. Лифт поднимается вверх с ускорением 4.0 фт/с^2. В момент, когда скорость лифта равна 8.0 фт/с^2, с потолка кабины лифта, находящейся на расстоянии 9.0 фт от пола, падает болт. Вычислите: (а) время, через которое болт достигнет пола; (б) расстояние, которое пролетает болт относительно шахты лифта.

77. Легкомоторный самолет летит со скоростью 480 км/час. Расстояние до места назначения, расположенное строго по направлению на север составляет 810 км. Поднявшись в воздух пилот обнаруживает, что, для того, чтобы попасть к месту назначения, ему надо лететь под углом 21° на северо- восток. Время в пути равно 1.9 часа. Найдите величину и направление вектора скорости ветра.

78. Полиция штата Нью-Хэмпшир использует самолеты, чтобы контролировать скоростной режим на автомагистралях. Предположим, что один из самолетов имеет собственную скорость 135 миль в час. Самолет летит строго на север, так что он все время находится непосредственно над автомагистралью, идущей с севера на юг. Наблюдатель с земли сообщает пилоту по радио, что дует ветер со скоростью 70 миль в час, но забывает сказать направление ветра. Пилот самолета видит, что, несмотря на ветер, самолет проходит расстояние 135 миль вдоль автострады за 1 час. Иными словами, скорость самолета остается такой же, как и в отсутствии ветра. (а) В каком направлении дует ветер? (б) Чему равен угол между линией автомагистрали и направлением скорости самолета?

79. Женщина, сидящая в лодке, может грести со скоростью 4 миль/час в неподвижной воде. (а) Под каким углом лодка должна пересекать реку, скорость течения которой равна 2 миль/час, чтобы на противоположном берегу достичь точки, находящейся строго напротив исходной точки? (б) Сколько времени будет затрачено на пересечении реки, если ее ширина равна 4 мили? (в) Сколько времени уйдет на то, чтобы спуститься на 2 мили вниз по течению и затем вернуться назад в исходную точку? (г) Сколько времени уйдет на то, чтобы подняться на 2 мили вверх по течению и затем вернуться назад в исходную точку? (д) В каком направлении должна двигаться лодка, чтобы пересечь реку за минимальное время? Чему равно это время?

80. Деревянный вагон двигается по прямым рельсам со скоростью v_1. С зхемли снайпер стреляет по вагону (начальная скорость пули v_2). Пуля пробивает обе стенки вагона, причем для наблюдателя, находящегося в вагоне, дырки от пули на противоположных стенках находятся строго друг напротив друга. С какого направления по отношению к направлению движения вагона была выпущена пуля? Считайте, что, попав в вагон, пуля не изменила направление движения, но ее скорость уменьшилась на 20%. Для расчета возьмите v_1=85 км/час, v_2=650 м/с. (Вас не удивляет, что ширина вагона не задана?)

81. Человек должен пересечь реку шириной 500 м. Он может плыть со скоростью 3.0 км/час относительно воды. Скорость течения реки 2.0 км/час. Скорость человека на берегу равна 5.0 км/час. (а) Найдите путь (на берегу + в воде), который должен выбрать человек, чтобы за кратчайшее время попасть в точку на противоположном берегу, находящуюся строго напротив исходной точки. (б) Чему равно это время?

82. Боевой корабль движется строго на восток со скоростью 24 км/час. Подводная лодка, находящаяся от корабля на расстоянии 4 км выпускает торпеду, скорость которой 50 км/час (см. Рис. 43). Для наблюдателя на подводной лодке, корабль движется в направлении 20° градусов на северо- восток. (а) в каком направлении надо выпустить торпеду, чтобы она поразила корабль? (б) За какое время торпеда достигнет корабля?

83. Электрон движется со скоростью 0.42с по отношению к наблюдателю В. Наблюдатель В двигается со скоростью 063с по отношению к наблюдателю А в том же направлении, что и электрон. Чему равна скорость электрона для наблюдателя А?

84. Галактика Альфа удаляется от нас со скоростью 0.350с. Галактика Бета, расположенная в строго противоположном направлении удаляется от нас с той же скоростью. Чему будет равна для наблюдателя из галактики Альфа скорость удаления (а) нашей Галактики, (б) Галактики Бета?

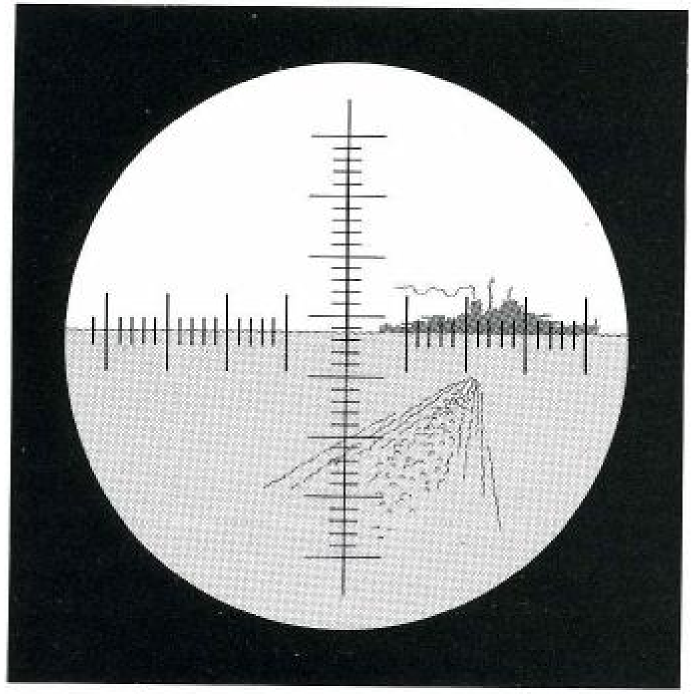

Рис. 43. К задаче 82.

Компьютерные проекты

85. Компьютер может генерировать в заданные моменты времени таблицы координат, компонент векторов скорости и ускорения движущегося объекта. В этих таблицах можно затем организовать поиск интересующих нас величин, таких, например, как наивысшую точку траектории, время падения и т. д. Напишите программу для вычисления координат и компонент скорости тела в конце каждого временного интервала Δt от момента времени t_1 до момента времени t_2, считая, что тело начало свое движение в момент $t=0$. Иными словами, компьютер должен вычислять величины $x=v_0t\cos\theta_0$, $y=v_0t\sin\theta_0-gt^2/2$; $v_x=v_0\cos\theta_0$, $v_y=v_0\sin\theta_0-gt$; для моментов $t=t_1$, $t_1+\Delta t$, $t_1+2\Delta t, \ldots\ldots\ldots$ $t_1+N\Delta t$. Исходными данными для программы являются величины v_0, θ_0, t_1, Δt, N. Составьте программу так, чтобы можно было легко менять при каждом прогоне величины t_1, Δt, N, не меняя при этом значения других величин. Проверьте свою программу на приведенном ниже примере и затем сравните результат расчета с тем, что следует из алгебраических выражений.

Тело брошено с некоторой высоты со скоростью $v_0=50$ м/с под углом 25° к горизонту. (а) В интервале от $t=0$ до $t=4.5$ с рассчитайте $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ $v_y(t)$ в конце каждой 0.1 с. (б) Найдите два соседних значения времени, между которыми находится значение времени, соответствующее максимуму траектории тела. Снова повторите расчет с шагом $\Delta t=0.005$ с, взяв в качестве t_1 наименьшее из этих двух времен. С помощью таблицы полученных значений оцените координаты наивысшей точки траектории с точностью до 2-х значащих цифр. (в) С помощью этого же метода вычислите время, координаты и компоненты скорости тела в момент, когда оно достигнет первоначальной высоты, с которой было брошено.

86. Частица движется в плоскости xy с ускорением a_x=–1.7 и a_y=–0.45. (В этой задаче все размеры даны в сантиметрах, а время в секундах). В момент времени t=0 частица находится в точке x=1, y=10, имея при этом скорость v_x=10, v_y=2. Напишите программу для вычисления следующих величин только в правом верхнем квадранте: t, x, y, r, $\phi(=\tan^{-1}y/x)$, v_x, v_y, v, $\theta(=\tan^{-1}v_y/v_x)$. С помощью полученной таблицы данных ответьте на следующие вопросы. Ответ дайте с точностью до 3-х значащих цифр. Некоторые вопросы могут иметь несколько вариантов ответа. (а) В какой момент времени и в каком месте частица покинет первый квадрант? (б) Чему равны в этот момент времени максимальное расстояние частицы от начала координат и ее скорость? В каком направлении движется частица, когда ее скорость равна 2.00? (г) В каком месте частица пересечет биссектрису квадранта?

87. Координаты тела, движущегося по окружности радиуса R с постоянной скоростью, заданы следующими соотношениями: x=Rcosωt; y=Rsinωt, где ω- не зависит от времени и угол ωt задан в радианах. Напишите компьютерную программу для вычисления средней скорости за интервал времени от t_0 до $t_0+\Delta t$. Возьмите R=1.5 м, ω=5.0 рад/с и вычислите $\bar{v}_x=\left[x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\right]/\Delta t; \bar{v}_y=\left[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)\right]/\Delta t;$ Организуйте программу таким образом, чтобы можно было при каждом ее запуске менять t_0 и Δt, не меняя при этом другие величины. Чтобы уменьшить потерю значащих цифр, проводите вычисления с двойной точностью.

(а) Возьмите t_0=1 с. Вычислите следующие величины: $x, y, \bar{v}_x, \bar{v}_y, x\bar{v}_x+y\bar{v}_y$. Последняя величина представляет собой скалярное произведение векторов положения и средней скорости. Она равна нулю, если эти два вектора ортогональны друг к другу. Проведите вычисления для Δt=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 с. Обратите внимание, что компоненты вектора $\bar{\mathbf{v}}$ стремятся к своему предельному значению- к компонентам вектора мгновенной скорости $\mathbf{v}$ и, что по мере уменьшения Δt, вектор $\bar{\mathbf{v}}$ становится все более перпендикулярен радиус- вектору (то есть, стремится к касательной к окружности). Компоненты вектора $\mathbf{v}$ можно получить также и прямым дифференцированием: v_x=–Rωsinωt; v_y=Rωcosωt. Чтобы посмотреть насколько точны ваши вычисления, сравните ваш численный расчет с результатом, следующим из этих аналитических выражений. (б) теперь измените программу так, чтобы она вычисляла компоненты среднего ускорения $\bar{a}_x=\left[v_x(t_0+\Delta t)-v_x(t_0)\right]/\Delta t; \bar{a}_y=\left[v_y(t_0+\Delta t)-\bar{v}_y(t_0)\right]/\Delta t;$ Используйте вышеприведенные выражения v_x=–Rωsinωt; v_y=Rωcosωt. Вычислите также $x\bar{a}_y+y\bar{a}_x$. Эта величина представляет собой векторное произведение радиус- вектора и вектора среднего ускорения. Если эти два вектора параллельны, то эта величина равна нулю. Проведите вычисления для t_0=1 с и Δt=1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 с. Обратите внимание, что компоненты вектора $\bar{a}$ стремятся к своему предельному значению- к компонентам вектора мгновенного ускорения a и, что по мере уменьшения Δt, вектор $\bar{a}$ становится все более параллелен радиус- вектору. Компоненты вектора a можно получить также и прямым дифференцированием: $a_x=-R\omega^2\cos\omega t$; $a_y=-R\omega^2\sin\omega t$. Чтобы посмотреть, насколько точны ваши вычисления, сравните ваш численный расчет с результатом, следующим из этих аналитических выражений. Проверьте также, что ваша программа дает правильное соотношение между величиной ускорения и скорости $a=v^2/r$.