Глава 3

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Многие законы физики выражаются не только в виде алгебраических связей между величинами, но также и в виде геометрических соотношений. Например, волчок, быстро вращающийся вокруг своей оси, в то время как его ось вращения в свою очередь медленно вращается вокруг вертикальной оси. Эти геометрические связи сложно представить алгебраическими уравнениями. Однако, если для представления физических переменных использовать векторы*, то физический закон можно записать всего одним уравнением. В огромном числе случаев векторы позволяют записывать физические законы в наглядной и экономной форме. Иногда, векторная форма записи позволяет увидеть связи и симметрии, которые невозможно увидеть из сложных алгебраических соотношений.*
В этой главе рассматриваются некоторые свойства и применения векторов, а также вводятся математические операции над векторами. Вы узнаете, что такие знакомые вам арифметические символы как $+$, $-$ *и* $\times$ *имеют совсем другое значение при их применении к векторам.*

3-1. Векторы и скаляры

Изменение положения частицы называется *смещением*. Если частица движется из точки А в точку В (Рис. 1а), то ее смещение представляется в виде линии, соединяющей точки А и В. Направление смещения показывается стрелкой, направленной от А к В, означающей, что смещение имело место *от* А *к* В. При этом, путь, по которому движется частица от А к В не обязательно совпадает со стрелкой, соединяющей точки А и В. Смещение представляет собой итоговый эффект движения, но не путь, по которому осуществлялось перемещение частицы.
На Рис. 1b показан один из возможных реальных путей частицы между А и В. Очевидно, что этот путь не совпадает со смещением АВ. Если бы мы сфотографировали частицу в момент, когда она была в точке А и затем позднее, когда она находилась в некоторой промежуточной точке Р, мы в качестве смещения получили бы вектор АР, который представляет итоговый результат движения на этом временном интервале, хотя ничего не говорит о реальном пути, по которому частица перешла из точки А в точку Р. Далее, смещение А’В’ (Рис. 1а) параллельное смещению АВ, одинаково с ним направленное и равное по длине представляет собой то же самое *изменение* в положение частицы, что и АВ. Поэтому мы говорим, что эти два смещения одинаковы. Таким образом, смещение характеризуется своим *длиной* и *направлением*.
Аналогичным образом, мы можем переместить частицу далее из точки В в точку С (Рис. 1с). Результирующий эффект этих двух смещений АВ и ВС будет тот же что и смещение из А в С. В этом случае мы говорим, что смещение АС равно сумме смещений АВ и ВС. Заметьте, что эта сумма не является алгебраической суммой,

то есть, операцию суммирования двух смещений нельзя выразить только одними алгебраическими числами.

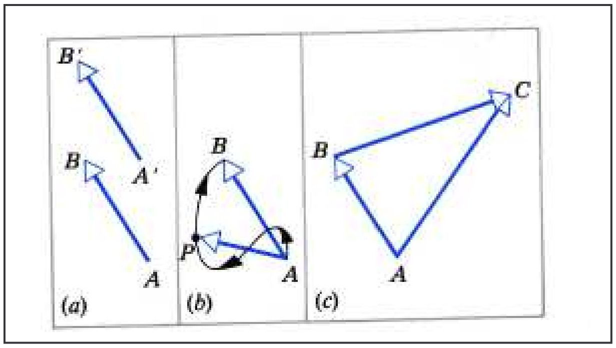

Рис. 1. Векторы смещений. (а) Векторы АВ и A′B′ идентичны, поскольку имеют одну и ту же длину и одно и то же направление. (b) Реальный *путь* частицы от А к В может быть криволинейным; *смещение* есть вектор АВ. В промежуточной точке Р смещение есть вектор АР; (с) После смещения АВ частица приобретает еще одно смещение ВС. Результат двух смещений есть вектор АС.

Величины, которые ведут себя как смещения называются *векторами*. (Слово *вектор* в переводе с латинского языка означает *переносчик*. Биологи используют слово *вектор* для обозначения насекомого, животного или другого агента, который является *переносчиком* заболевания от одного организма к другому). Таким образом, вектора являются такими величинами, которые характеризуются величиной и направлением, и действия с которыми подчиняются определенным правилам, которые мы опишем ниже. Кроме вектора смещения существуют и другие векторные величины такие как сила, скорость, ускорение, электрическое и магнитное поле. Многие физические законы с помощью векторов записываются в компактной форме, и вывод многих формул в векторном виде очень сильно упрощается.

Величины, которые полностью определяются числом и единицей измерения и, следовательно, характеризуются только величиной, называются *скалярами*. К скалярам относятся такие физические величины как масса, длина, время, плотность, энергия, температура. Действия над скалярами подчиняются правилам обыкновенной алгебры.

3-2. Сложение векторов. Графическаий метод

На рисунке вектор изображается стрелкой. Длина стрелки пропорциональна величине вектора (то есть, мы должны выбрать масштаб), и направление, в котором указывает стрелка- это и есть направление вектора. Например, смещение, равное 42 м в северовосточном направлении можно изобразить в масштабе 10 м в 1 см в виде стрелки длиной 4.2 см, составляющей угол 45° с линией, направленной в восточном направлении, причем наконечник стрелки направлен в верхний правый угол (Рис. 2.). При печатании вектор обычно изображается жирным символом, например, **d**, а при написании от руки- символом ср стрелкой: $\vec{d}$.

Часто нас интересует только величина (или длина) вектора, но не его направление. Величина вектора **d** иногда записывается как |**d**|, либо в виде символа, набранного курсивом: *d*. Таким образом, жирный символ представляет собой оба свойства вектора: его величину и направление, тогда как при написании от руки величина вектора представляется его символом без стрелки над ним.

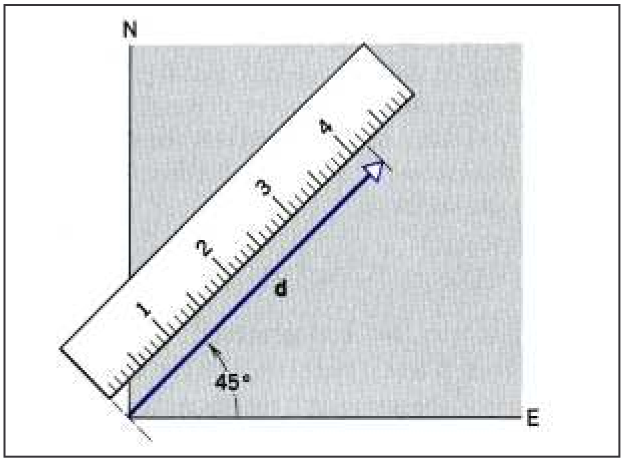

Рис. 2. Вектор d представляет собой смещение величиной 42 м (в масштабе 10 м=1 см) в направлении 45° на северо-восток.

Рассмотрим Рис. 3., на котором представлена схема векторов из Рис. 1с.

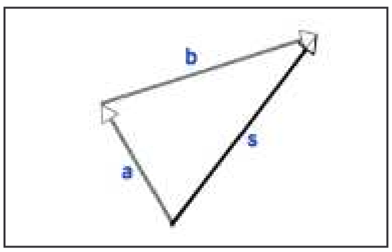

Рис. 3. Векторная сумма **a+b=s**. Сравните с Рис. 1с.

Соотношение между этими векторами можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{s} \qquad \textbf{(1)}$$

Для того, чтобы провести это векторное сложение надо следовать следующим правилам: 1) На диаграмме в выбранном масштабе рисуется вектор **a** в соответствующем направлении относительно фиксированной координатной системы. 2) Затем в этом же масштабе и в соответствующем направлении (в общем случае не совпадающее с направлением вектора **a**) откладывается вектор **b** так, что его начало совпадает с концом ветора **a**. 3) Начало вектора **a** соединяется прямой линией с концом вектора **b**. Полученный таким образом вектор **s**, начало которого совпадает с началом вектора **a**, а конец с концом вектора **b** и представляет собой сумму двух векторов **a** и **b**. Если вектора **a** и **b** являются смещениями, то вектор **s** будет смещением эквивалентным по длине и направлению результату двух последовательных смещений **a** и **b**. Описанную выше процедуру можно обобщить для сложения любого числа векторов.
Поскольку вектора отличаются от обычных чисел, то и правила действий с векторами отличаются от обычных алгебраических правил. Символ “+” в уравнении (1) не совпадает по своему значению с соответствующим арифметическим символом в скалярной алгебре. В векторной алгебре этому символу соответствует ряд только что описанных операций.

Внимательно изучив Рис. 4, можно вывести два важных свойства векторного сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \qquad \text{(коммутативный закон)} \quad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{d}+(\mathbf{e}+\mathbf{f})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})+\mathbf{f} \qquad \text{(ассоциативный закон)} \quad \mathbf{(3)}$$

Из этих законов следует, что нет разницы в каком порядке группировать вектора при сложении: сумма будет одной и той же. В этом отношении векторное сложение похоже на скалярное сложение.

Из Рис. 4b видно как с помощью графического метода находится сумма более двух векторов, в данном случае **d**+**e**+**f**. Начало каждого последующего вектора совмещается с концом предыдущего. Векторная сумма при этом представляет собой вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец- с концом последнего вектора.

Операция вычитания может быть включена в векторную алгебру, если мы определим отрицательный вектор, например, **−b**, как вектор равный по величине вектору **b**, но имеющий противоположное направление.

Таким образом

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathrm{a}+(-\mathbf{b}) \qquad \mathbf{(4)}$$

как показано на Рис.5. Здесь **−b** означает вектор той же величины, что и **b,** но направленный в противоположном направлении. Из уравнения (4) следует, что **a**−**a**=**a**+(−**a**)=**0**.

Помните, что, хотя в этом разделе мы описали эти операции для вектора смещения, но эти правила применимы ко всем векторным величинам, таким как скорости или силы.

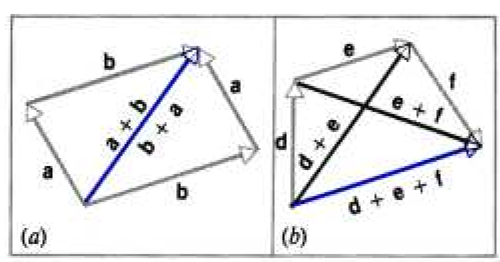

Рис. 4. (a) Коммутативный закон векторного сложения **a**+**b**=**b**+**a**. (b) Ассоциативный закон **d**+(**e**+**f**)=(**d**+**e**)+**f**.

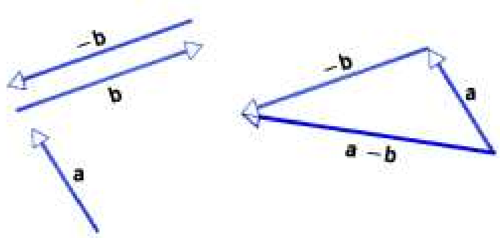

Рис. 5. Разность двух векторов **a**−**b**=**a**+(−**b**)

3-3. Компоненты вектора

Хотя мы определили векторное сложение с помощью графического метода, этот метод не очень удобен, если векторы представлены в двух или в трех измерениях. Другой способ сложения векторов, называемый аналитическим методом, заключается в разложении векторов по компонентам относительно выбранной системы координат.

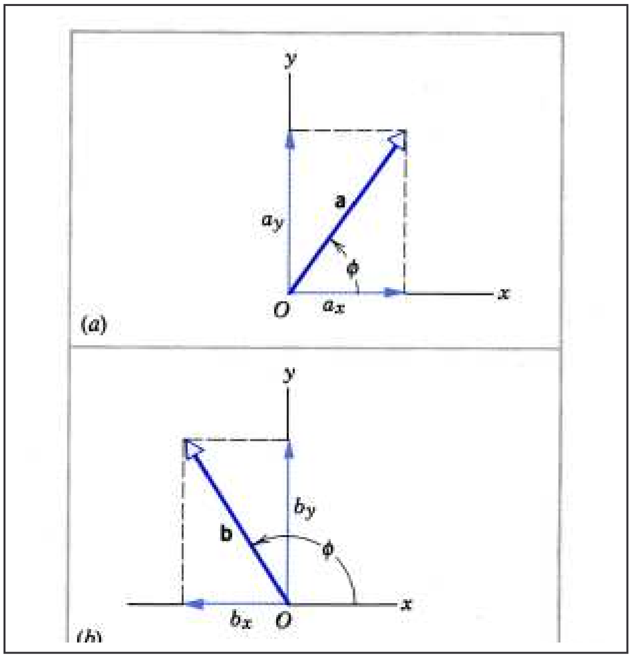

Рис. 6. (a) Вектор **a** имеет x- компоненту a_x и y-компоненту a_y. Вектор **b** имеет отрицательную x компоненту.

На Рис. 6a показан вектор ***a***, начало которого расположено в начале прямоугольной системы координат. Если мы опустим перпендикуляры из конца вектора ***a*** на координатные оси, то полученные таким образом величины a_x и a_y называются декартовыми компонентами вектора ***a***. Говорят, что таким образом мы *разложили вектор* ***a*** *на его компоненты*. Вектор ***a*** полностью и однозначно определен своими компонентами: если известны компоненты a_x и a_y, то вектор **a** восстанавливается однозначно по этим компонентам.

Компоненты вектора могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. На Рис. 6b показан вектор ***b***, у которого $b_x<0$ и $b_y>0$.

Компоненты вектора a_x и a_y легко находятся из:

$$a_x = a\cos\phi; \qquad a_y = a\sin\phi \tag{5}$$

где ϕ есть угол между вектором ***a*** и положительной осью x, измеренный от этой оси в направлении против часовой стрелки. Как видно из Рис. 6, алгебраические знаки компонент вектора зависят от квадранта, в котором лежит угол ϕ. Например, если ϕ заключен между 90° и 180°, как на Рис. 6b, то вектор всегда имеет отрицательную x- компоненту и положительную y- компоненту. Компоненты вектора ведут себя как скалярные величины, поскольку в любой координатной системе для их идентификации нужно только число с соответствующим знаком.

Как только вектор разложен на компоненты, сами эти компоненты можно использовать для идентификации вектора. Вместо двух чисел- величины вектора a и угла ϕ между направлением вектора и осью x можно использовать два числа a_x и a_y. Эти два описания полностью эквивалентны друг друг: можно использовать любое из них. Зная a_x и a_y, можно вычислить a и ϕ с помощью следующих соотношений:

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} \tag{6а}$$

$$\tan\phi = \frac{a_Y}{a_X} \tag{6б}$$

Квадрант, в котором лежит угол ϕ определяется из знаков a_x и a_y.
В трехмерном пространстве поступаем аналогично. Из конца вектора опускаем три перпендикуляра на координатные оси x, y, z. На Рис. 7 показано как это делается наиболее просто. Сначала находится проекция вектора ***a*** на плоскость *xy*, а затем из конца этой проекции опускаются перпендикуляры на оси x и y, находя таким образом компоненты вектора a_x и a_y. Из Рис. 7 видно, что между компонетами вектора a_x и a_y, a_z и углами θ, φ и абсолютным значением вектора a существует следующая связь:

$$a_X = a\sin\theta\cos\phi, \quad a_Y = a\sin\theta\sin\phi, \quad a_Z = a\cos\theta \tag{7}$$

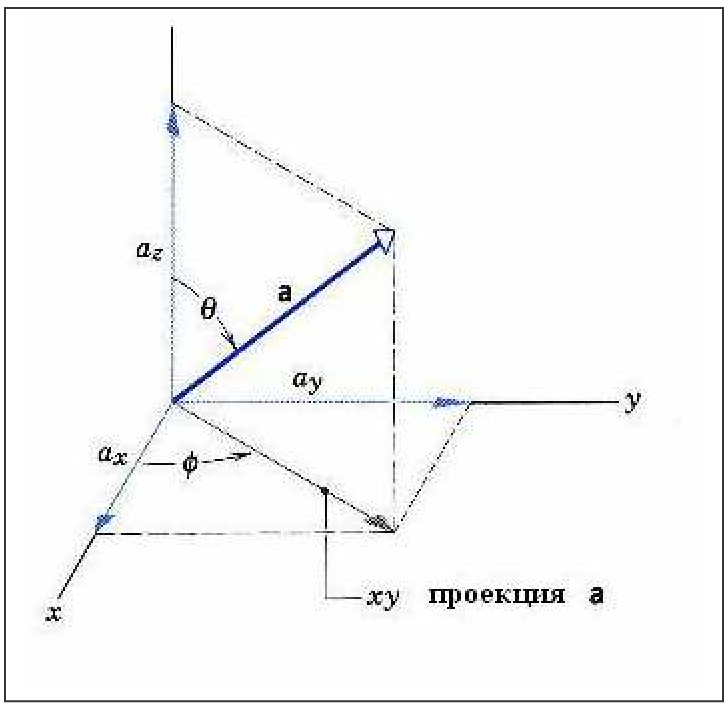

Рис. 7. Вектор **a** в трех измерениях с компонентами a_x, a_y, a_z. Компоненты x и y находятся из проекции **a** на плоскость xy. Угол θ между **a** и осью z называется *полярным углом*. Угол ϕ между проекцией **a** на плоскость xy и осью x называется *азимутальным углом*. Здесь азимутальный угол ϕ имеет то же значение, что и на Рис. 6.

При разложении вектора по компонентам иногда полезно ввести вектор единичной длины в заданном направлении. Как правило, направление этих единичных векторов выбирают так, чтобы оно совпадало с направлениями координатных осей. В прямоугольной системе координат эти единичные вектора обозначают буквами **i**,

j, **k**, которые представляют собой единичные вектора, направленные соответственно в положительном направлении осей x, y, z (см. Рис. 8).
Обратите внимание, что вектора **i**, **j**, **k** не обязательно должны располагаться в начале координат. Как и любые другие вектора их можно переносить в любую точку координатного пространства, сохраняя при .том их направление относительно координатных осей.

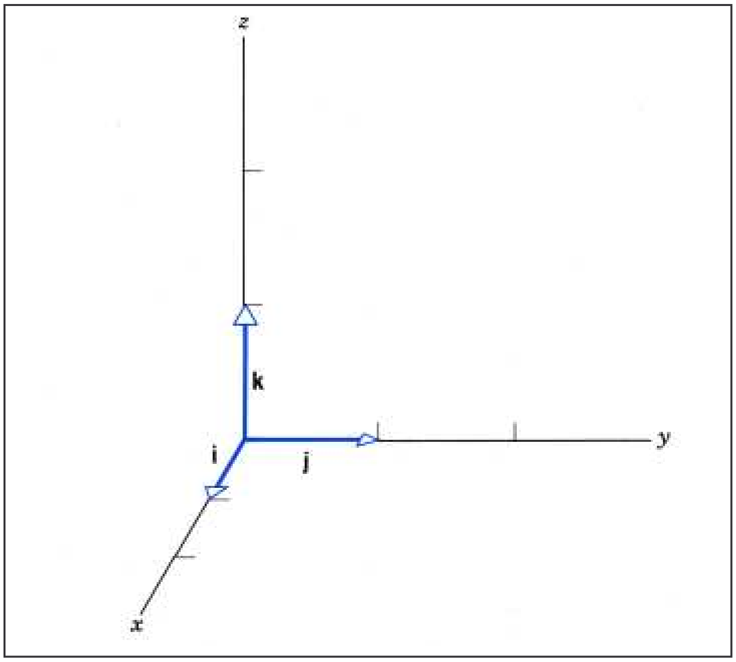

Рис. 8. Единичные векторы **i**, **j**, **k** направлены вдоль положительного направления осей x, y, z. Каждый из этих трех векторов является безразмерным и его длина равна единице.

В общем случае, произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ в трехмерном пространстве можно записать через его компоненты и единичные векторы следующим образом:

$$\boldsymbol{a}=a_X\mathbf{i}+a_Y\mathbf{j}+a_Z\mathbf{k} \qquad (8а)$$

В двумерном случае вместо (8а) будем иметь

$$\boldsymbol{a}=a_X\mathbf{i}+a_Y\mathbf{j} \qquad (8б)$$

Векторное соотношение (8б) эквивалентно скалярным соотношениям (6). Каждое уравнение (6) связывает вектор ($\boldsymbol{a}$, или a и ϕ) с его компонентами a_X и a_Y. Иногда величины $a_X\mathbf{i}$ и $a_Y\mathbf{j}$ в уравнении (8б) называют *векторными компонентами* вектора $\boldsymbol{a}$. На Рис. 9 изображены вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из Рис. 6 в терминах своих векторных компонент. Таким образом, действие величины, представленной вектором, можно заменить действием его векторных компонент. При необходимости мы будем говорить о векторных компонентах, имея ввиду величины $a_X\mathbf{i}$, $a_Y\mathbf{j}$, $a_Z\mathbf{k}$, тогда как слово *компоненты* будет означать величины a_X, a_Y, a_Z.

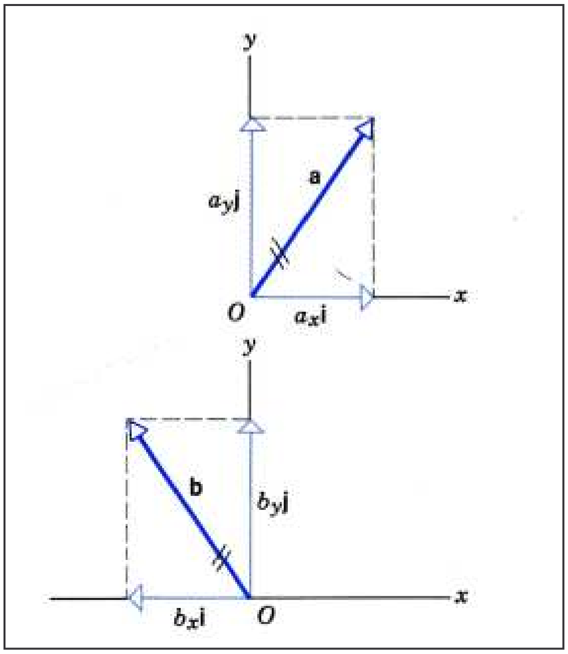

Рис. 9. *Векторные* компоненты векторов **a** и **b**. В любой физической ситуации с векторами мы получим один и тот же результат независимо от того, используем ли мы сам вектор **a** или его компоненты $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$. Если мы рассматриваем вместо вектора его векторные компоненты, то полезно перечеркнуть исходный вектор двумя черточками; это поможет нам помнить, что мы работаем не с исходным вектором, а с его компонентами.

Другие координатные системы (факультатив)

Существует много других координатных систем, которые могут быть более подходящими при решении конкретных физических задач. Например, двумерную координатную систему xy можно изменить одним из следующих двух способов: 1) переносом начала координат в другую точку xy плоскости. Такое преобразование называется *трансляцией* координатной системы; 2) поворотом осей xy вокруг фиксированной точки. Такое преобразование координат называется *вращением*. В каждом из этих преобразований вектора остаются фиксированными, мы двигаем только координатные оси. На Рис. 10 показано, как меняются векторные компоненты при этих преобразованиях. При трансляционном преобразовании компоненты вектора не изменяются (Рис. 10 а), тогда как при повороте координатных осей компоненты вектора становятся другими (Рис. 10б).
Если физическая ситуация, которую мы анализируем, имеет определенную симметрию, то бывает целесообразным выбрать другую координатную систему, где разложение вектора по компонентам окажется более удобным. Например, мы можем выбрать *полярную* систему координат, в которой координатными осями являются радиусы и окружности (Рис. 11). В этом случае компоненты вектора находятся точно также как и в случае прямоугольной системы: из конца вектора опускается перпендикуляр на каждую из координатных осей. Трехмерное обобщение Рис. 11 (сферическая полярная или цилиндрическая полярная системы координат) является во многих случаях намного удобней прямоугольной системы. Например, гравитационная сила, с которой Земля воздействует на удаленный объект, имеет сферическую симметрию, поэтому ее свойства удобней всего рассматривать в сферической полярной системе координат. Магнитное поле длинного прямого провода, по которому течет ток, имеет цилиндрическую симметрию, поэтому свойства такого поля проще всего описывать в цилиндрической полярной системе координат.

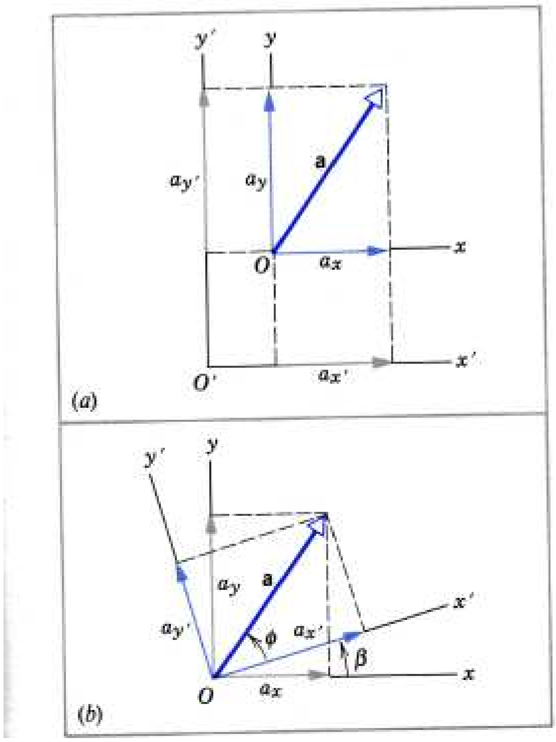

Рис. 10. (а) Начало координат О координатной системы, показанной на Рис.6*а*, передвинули или *транслировали* в новую точку О′. x и y компоненты вектора **а** совпадают с x′ и y′ компонентами. (б) оси x и y повернуты на угол β. Компоненты x′ и y′ теперь отличаются от компонент x и y (обратите внимание, что y′ компонента стала меньше, чем x′ компонента, тогда как на Рис. 6а y компонента была больше, чем x компонента), но *сам вектор* **а** *при этом не изменился*. На какой угол следует повернуть координатные оси, чтобы y компонента y′ обратилась в нуль?

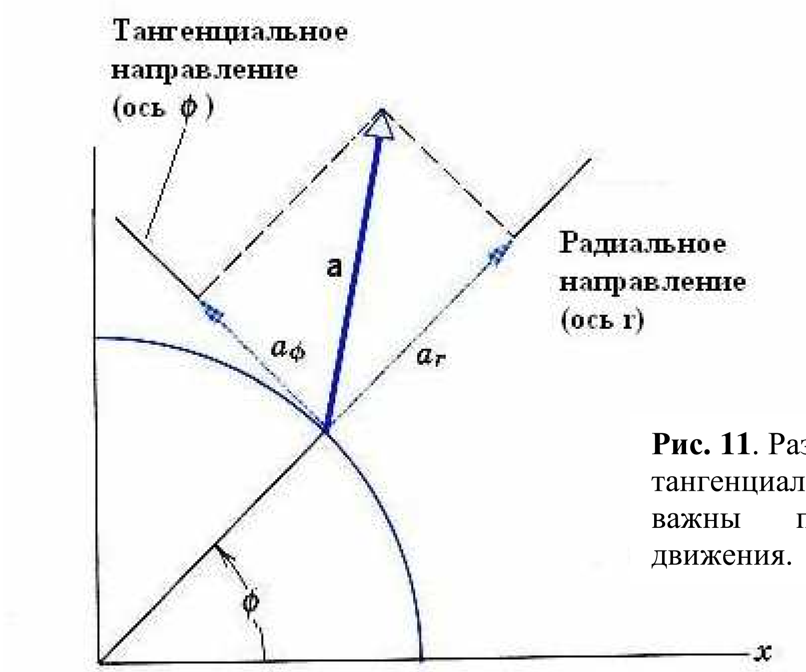

Рис. 11. Разложение вектора **а** на радиальную и тангенциальную компоненты. Эти компоненты важны при изучении криволинейного движения.

3-4. Сложение векторов: метод компонент

Теперь, после того, как мы показали, как разлагать вектор по его компонентам, мы рассмотрим сложение векторов аналитическим способом.

Пусть вектор **s** пусть сумма двух векторов **a** и **b**:

$$\mathbf{s=a+b} \tag{9}$$

Для того, чтобы два вектора **s** и **a+b** были равны они должны иметь одинаковую величину и одинаковое направление в пространстве. Это может быть только ы том случае если они имеют равные компоненты. Подчеркнем еще раз это важное обстоятельство:

Два вектора равны друг другу только в том случае, если равны их соответствующие компоненты.

Для векторов уравнения (9) это означает:

$$s_X\mathbf{i}+s_Y\mathbf{j}= a_X\mathbf{i}+a_Y\mathbf{j}+ b_X\mathbf{i}+b_Y\mathbf{j}=(a_X+b_X)\mathbf{i}+ (a_Y+b_Y)\mathbf{j} \tag{10}$$

приравнивая x и y компоненты в обеих частях (10), получим:

$$s_X= a_X+b_X \tag{11а}$$

$$s_Y= a_Y+b_Y \tag{11б}$$

Эти два алгебраических уравнения взятые вместе эквивалентны одному векторному соотношению (9).

Вектор s можно также определить, указав его длину и направление:

$$s=\sqrt{s_X^2+s_Y^2}=\sqrt{\left(a_X+a_Y\right)^2+\left(b_X+b_Y\right)^2} \tag{12а}$$

$$\tan\phi=\frac{s_Y}{s_X}=\frac{a_Y+b_Y}{a_X+b_X} \tag{12б}$$

Таким образом, сложение векторов осуществляется следующим образом. 1) Разложить вектор по его компонентам с учетом их алгебраического знака. 2) Сложить компоненты для каждой координатной оси с учетом их знака. 3) полученные таким образом суммы и будут компонентами вектора суммы. Зная компоненты суммарного вектора, мы можем легко восстановить его пространственное положение.

Преимущество метода разложения вектора по компонентам перед сложением с помощью тригонометрических соотношений заключается в том, что здесь мы всегда имеем дело с прямоугольными треугольниками, что существенно упрощает вычисления.

При сложении векторов с помощью компонент выбор координатных осей определяет насколько вычисления будут простыми или сложными. Иногда компоненты вектора в какой-либо координатной системе известны с самого начала, что и определяет выбор системы координат. В других случаях разумный выбор координатных осей может значительно упростить процедуру разложения вектора по компонентам. Например, оси можно ориентировать так, чтобы, по крайней мере, один из векторов оказался параллельным какой-либо оси, тогда его компоненты относительно других осей этой системы координат будут равны нулю.

Пример 1. Самолет пролетел 209 км по прямой на северовосток под углом 22.5° к северному направлению. На каком расстоянии к северу и к востоку от начальной точки окажется самолет?

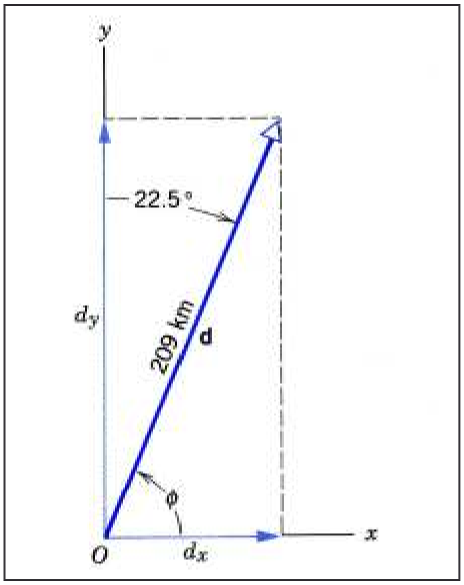

Рис. 12. К примеру 1.

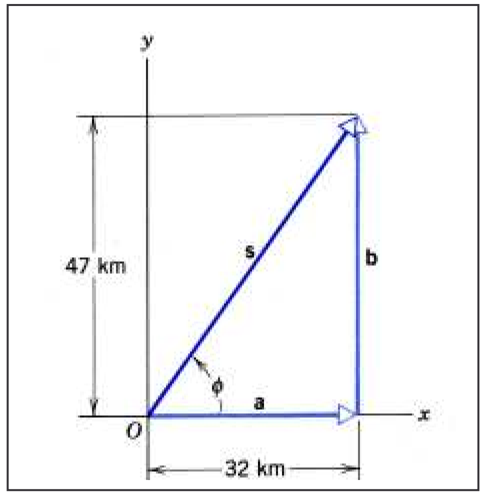

Рис. 13. К примеру 2

Решение Выберем координаты так, чтобы ось x была направлена на восток, а ось y на север. Далее, мы рисуем вектор смещения (Рис. 12) из начала координат (начальная точка) так, чтобы он составлял с осью y угол 22.5° и угол ϕ=90°−22.5°=67.5° с положительным направлением оси x. Длина этого вектора составляет 209 км. Обозначим этот вектор как **d**. Тогда d_x расстояние, которое самолет пролетел на восток от начальной точки, а d_y- расстояние, которое самолет пролетел на север. Таким образом (см. Ур. 5),

$$d_x = d\cos\phi = (209\ \text{км})(\cos 67.5°) = 80\ \text{км}$$

$$d_y = d\sin\phi = (209\ \text{км})(\sin 67.5°) = 193\ \text{км}$$

В этом примере мы использовали прямоугольную систему координат, хотя надо иметь в виду, что поверхность Земли является криволинейной, то есть, не является плоской. Например, самолет, стартующий с экватора в северовосточном направлении окажется впоследствии строго севернее точки вылета. Аналогично, два самолета, вылетевшие с экватора по параллельным направлениям строго на север с одинаковой скоростью неизбежно столкнутся на северном полюсе. Эти ситуации никогда бы не произошли в плоской системе координат. Однако, если рассматривать расстояния, которые много меньше радиуса Земли (6400 км), то можно спокойно применять плоскую систему координат.

Пример 2. Автомобиль проехал строго на восток 32 км, затем он повернул строго на север и проехал до остановки еще 47 км. Найти результирующее смещение автомобиля.

Решение. Выберем координатную систему фиксированной относительно поверхности Земли. Положительную часть оси x направим на восток, а положительную часть оси y направим на север. Соответствующие смещения **a** и **b** по осям x и y показаны на Рис. 13. Результирующее смещение **s** есть **s**=a+**b**. Поскольку вектор **b** не имеет x компоненты, а вектор **a** не имеет y компоненты, то мы получим (см. ур. 11):

$$s_X = a_X + b_X = 32\text{ км} + 0 = 32\text{ км}$$

$$s_Y = a_Y + b_Y = 0 + 47\text{ км} = 47\text{ км}$$

Величина и направление вектора **s** определяются следующим образом (см. ур. 12):

$$s = \sqrt{s_X^2 + s_Y^2} = \sqrt{(32km)^2 + (47km)^2} = 57\ km$$

$$\tan\phi = \frac{s_Y}{s_X} = \frac{47km}{32km} = 1.47, \qquad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56^\circ$$

Таким образом, результирующий вектор смещения s равен по абсолютной величине 57 км и его угол с положительным направлением оси x составляет 56°.

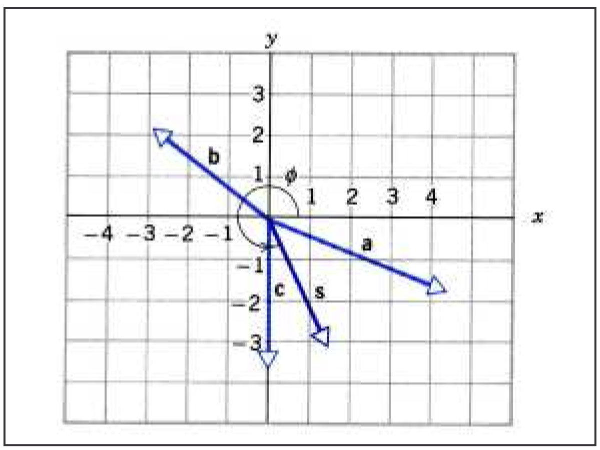

Рис. 14. К примеру 3.

Пример 3. В нкекоторой прямоугольной системе координат имеются три компланарных вектора: $\boldsymbol{a}$=4.3**i**−1.7**j**; **b**=−2.9**i**+2.2**j**; **c**=−3.6**j**, компоненты которых записаны в произвольных единицах. Найти вектор **s=a+b+c**.

Решение Обобщая уравнения (11) на случай трех векторов, получим:

$$s_X = a_X + b_X + c_X = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4$$

$$s_Y = a_Y + b_Y + c_Y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1$$

Таким образом,

$$\mathbf{s} = s_X\mathbf{i} + s_Y\mathbf{j} = 1.4\mathbf{i} - 3.1\mathbf{j}$$

Эти четыре вектора ***a***, **b**, **c**, **s** показаны на Рис. 14. Из этого рисунка можно видеть, что абсолютная величина вектора s равна 3.4, а угол, который этот вектор образует с положительной осью x, отсчитанный относительно этой оси против часовой стрелки, составляет:

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{3.1}{1.4}\right) = 294^{\circ}$$

В большинстве карманных калькуляторов результат вычисление арктангенса выдается в диапазоне от +90° до −90°. В нашем случае −66°, котрые показывает калькулятор эквивалентны 294°. Однако, мы получим тот же самый результат, если мы будем вычислять $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$, что соответствует углу во втором (верхнем левом) квадранте. В любом случае, график подобный рис. 14 поможет избежать ошибок. При необходимости вы можете преобразовать полученное с помощью калькулятора значение в результат в правильном квадранте с помощью тождества $\tan(-\phi) = \tan\left(180^{\circ} - \phi\right)$.

3-5. Перемножение векторов

При сложении скалярных величин каждое слагаемое должно иметь одинаковую размерность, при этом сумма будет иметь ту же размерность. Это же правило применяется и при сложении векторных величин. С другой стороны, мы можем перемножить две скалярных величины разной размерности и получить результат, размерность которого в общем случае может не совпадать с размерностью перемножаемых величин. Например, путь=скорость×время.

Подобно скалярам, разные вектора можно перемножать, получая при этом величины, имеющие новую физическую размерность. Поскольку вектор характеризуется двумя параметрами- направлением в пространстве и величиной, то правила умножения векторов отличаются от алгебраических правил перемножения для скалярных величин. Поэтому мы должны установить новые правила для перемножения векторных величин.

Имеется три сорта операций умножения с векторами: (1) умножение вектора на скаляр; (2) перемножение двух векторов таким образом, чтобы в результате получился скаляр; (3) перемножение двух векторов таким образом, чтобы в результате получился другой вектор. Имеются также и другие возможности, но здесь мы не будем их рассматривать.

1. Умножение *вектора на скаляр*. Эта операция имеет простой смысл: произведение скаляра c на вектор **a** записывается как c**a**, и представляет собой новый вектор, величина которого есть произведение c на величину вектора **a**, и направление которого совпадает по направлению с вектором **a** если c>0 и противоположно **a**, если c<0 (см. Рис. 15). Для того, чтобы поделить вектор на скаляр, мы просто умножаем вектор на величину обратную скаляру. Часто скаляр не есть просто число, а представляет собой физическую величину, имеющую единицы измерения и размерность.

2. *Перемножение двух векторов, в результате которого получается скаляр*. Такая операция называется *скалярным произведением*. Скалярное произведение двух векторов **a** и **b** записывается как **ab** и определяется следующим образом:

$$\mathbf{ab}=ab\cos\phi \qquad (13)$$

где a- величина вектора **a**, b- величина вектора **b**, ϕ- угол между двумя векторами (см. Рис. 16).

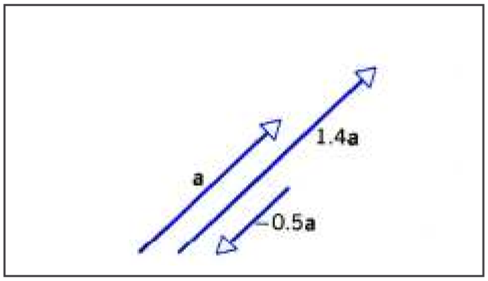

Рис.15. Умножение вектора **a** на скаляр c дает вектор c**a**, чье абсолютное значение в c раз больше абсолютного значения вектора **a**. Вектор c**a** имеет то же направление, что и вектор **a,** если c>0 и противоположное вектору **a** направление, если c<0. Примеры на рисунке приведены для c=+1.4 и c=−0.5.

Поскольку a и b являются скалярами, а cosϕ- это просто число, то скалярное произведение двух векторов есть скаляр. Скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как произведение величины одного вектора на величину компоненты другого вектора в направлении первого, как показано на Рис. 16. таким образом, скалярное произведение можно записать либо как $a(b\cos\phi)$, либо как $b(a\cos\phi)$. *Результат скалярного произведения не зависит от выбора координатных осей.*

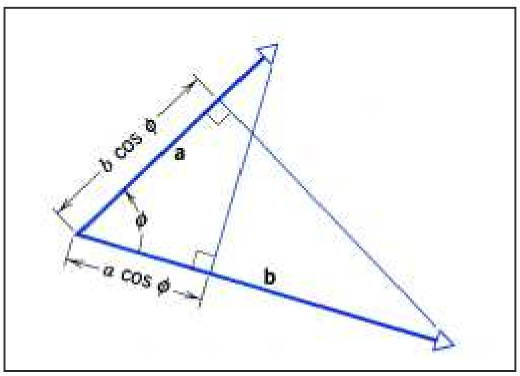

Рис. 16. Скалярное произведение $\mathbf{ab}=ab\cos\phi$ есть произведение абсолютной величины одного из векторов (например, *a*) на проекцию второго вектора на направление первого ($b\cos\phi$).

Мы могли бы определить операцию **ab** как-нибудь по другому, например, как $a^{1/3}\ b^{1/4}\ \tan(\phi/2)$, но такая операция в физике была бы совершенно бесполезной. Наше определение скалярного произведения (уравнение (13)) позволяет выразить многие важные физические величины в форме скалярного произведения двух векторов. Сюда относятся: механическая работа, потенциальная энергия гравитационного поля, электрический потенциал, электрическая мощность, плотность электромагнитной энергии, и др.

Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Используя скалярное произведение, мы можем получить следующие соотношения для единичных векторов **i**, **j**, **k** декартовой системы координат:

$$\begin{gathered}\mathbf{i\,i}=\mathbf{j\,j}=\mathbf{k\,k}=1\\ \mathbf{i\,j}=\mathbf{i\,k}=\mathbf{j\,k}=0\end{gathered} \qquad (14)$$

Используя эти соотношения, мы можем записать (см. задачу 35) скалярное произведение векторов **a** и **b** через их компоненты в трехмерной прямоугольной системе координат:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \tag{15}$$

3. *Перемножение двух векторов, в результате которого получается другой вектор*. Такая операция называется *векторным произведением*. Векторное произведение двух векторов **a** и **b** записывается как **a×b.** Это есть другой вектор **c**. Таким образом **c= a×b.** Величина вектора **c** определяется следующим образом:

$$c=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\phi \tag{16}$$

где ϕ- есть угол (наименьший) между векторами **a** и **b**.

Между векторами **a** и **b** имеются два разных угла: ϕ как на Рис. 16 и $2\pi-\phi$. При векторном произведении всегда выбирается наименьший из этих двух углов. Если мы вычисляем скалярное произведение, то неважно какой угол выбирать так как $\cos\phi=\cos(2\pi-\phi)$. Однако, при вычислении векторного произведения это важно, поскольку $\sin\phi=-\sin(2\pi-\phi)$.

Результат векторного произведения, вектор **c**, направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектора **a** и **b**. Имеется два взаимно противоположных направления для вектора **c,** и для выбора направления векторного произведения **a×b** договорились применять определенную процедуру, которая называется правилом правой руки. Для определения знака вектора **c** согласно этому правилу обратимся к Рис. 17.

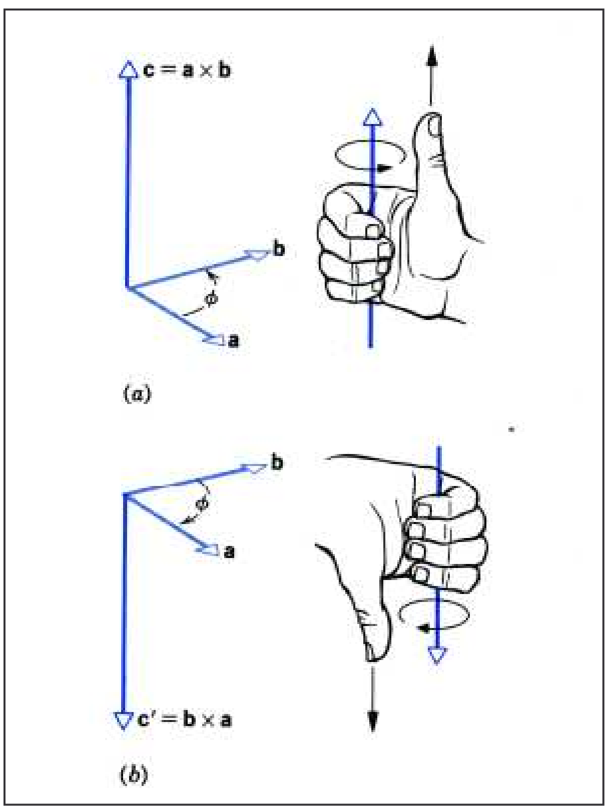

Рис.17. Правило правой руки для векторного произведения. (a) Поверните вектор **a** к вектору **b** пальцами правой руки. Тогда большой палец покажет направление вектора **c**. (b) Пространственное обращение этой процедуры показывает, что **b×a=−a×b.**

Нарисуем векторы **a** и **b** так, чтобы их начальные точки совпадали и проведем через эту точку ось, перпендикулярную плоскости, проходящей через векторы **a** и **b.** Согнем пальцы *правой руки* так, чтобы они охватывали эту ось таким образом, чтобы кончики пальцев указывали на направление вращения вектора **a** к вектору **b** в направлении наименьшего угла между этими векторами. Тогда большой палец будет показывать направление вектора **c= a×b**.

Если ϕ=90°, то угол между тремя векторами **a**, **b** и **c** является прямым и эти три вектора образуют в этом случае правостороннюю координатную систему.

Обратите внимание, что вектор **b×a** не совпадает с вектором **a×b,** так что порядок множителей в векторном произведении является важным. Наоборот, в скалярном произведении порядок множителей не важен, так как их перестановка не влияет на результат. Таким образом, как показано на Рис. 17 **a×b=− b×a,** в то время как абсолютная величина этих двух векторов одинакова: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\phi$; $|\mathbf{b}\times\mathbf{a}|=ba\sin\phi$. Определенное таким образом векторное произведение не зависит от выбора координатных осей.

Три единичных вектора **i**, **j**, **k** в правосторонней координатной системе связаны соотношением **i×j=k.** По существу это соотношение и является определением правосторонней координатной системы. Далее, если это не будет оговорено особо, мы везде будем подразумевать правостороннюю координатную систему. Производя в уравнении **i×j=k** циклическую перестановку, получим **k×i=j** и **j×k=i.** Если мы изменим порядок сомножителей, появится знак “–”: **j×i=–k.** Как мы видели раньше, векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю, поэтому **i×i=0, j×j=0. k×k=0.** Используя эти соотношения для единичных векторов можно показать, что:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\mathbf{i}+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)\mathbf{j}+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\mathbf{k} \tag{17}$$

Причина, по которой мы так, а не иначе, определили векторное произведение, состоит в том, что оно в физике оказывается очень полезным. Многие физические величины, являются векторами, векторное произведение которых также является важной физической величиной. Например, векторными произведениями являются такие векторные величины как момент сил, угловой момент, сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, поток электромагнитной энергии.

Другие векторные формы (*факультатив*)

Скалярное произведение двух векторов является простейшей формой скомпонованной из двух векторов. Следующей по сложности формой с участием двух векторов является векторное произведение двух векторов. При перестановке сомножителей значение векторного произведения умножается на –1, что соответствует изменению направления результирующего вектора на противоположное. Кроме этих двух форм существуют и другие более сложные формы. Например, перемножая каждую из компонент одного вектора на каждую компоненту другого вектора, мы получим так называемый тензор второго ранга, состоящий из 9-ти компонент. Согласно этой классификации вектор является тензором первого ранга, содержащим три компоненты, а скаляр- тензором нулевого ранга, содержащим одну компоненту. Такие физические величины как механическое напряжение в веществе, вызванное механическими или электрическими силами, а также момент инерции и деформация являются тензорными величинами. Однако, в этой книге мы ограничимся только векторами и скалярами.

Пример 4. Некоторый вектор **a** лежит в плоскости xy под углом 250°, отсчитанным против часовой стрелки относительно положительного направления оси x. Величина вектора **a** равна 7.4 единицы. Вектор **b** величиной 5.0 единиц направлен по оси z в сторону ее положительного направления. Найти: (a) скалярное **ab** и (b) векторное **a×b** произведения этих векторов.

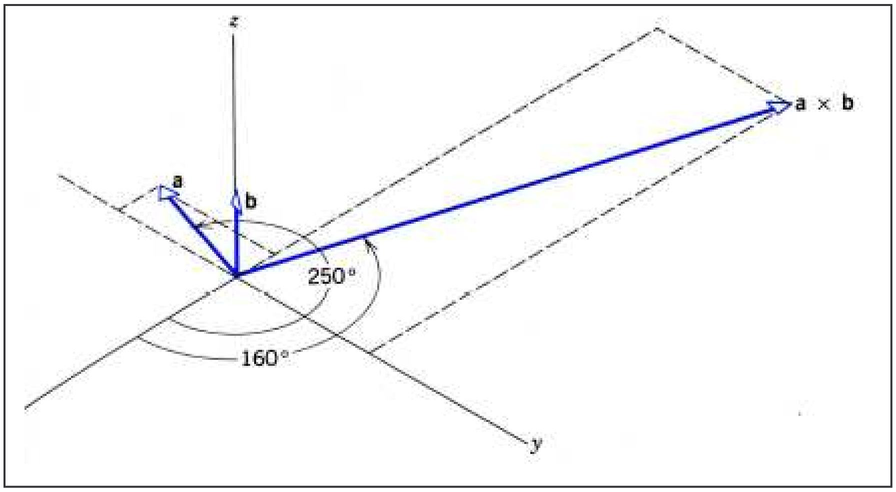

Рис. 18. К примеру 4

Решение. (a) Поскольку вектора a и b перпендикулярны друг другу, то угол ϕ между ними равен 90° и $\cos\phi=\cos 90°=0$. Поэтому из (13) получим

$$\mathbf{ab}=ab\cos\phi=ab\cos 90°=(7.4)(5.0)(0)=0,$$

что соответствует тому факту, что ни один из этих двух векторов не имеет компоненты вдоль другого вектора.

(b) Абсолютная величина векторного произведения согласно уравнению (16) есть

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\phi=(7.4)(5.0)\sin 90°=37$$

Направление этого вектора перпендикулярно плоскости, образованной векторами **a** и **b**. Следовательно, как видно из Рис. 18, этот вектор лежит в плоскости xy (перпендикулярно к вектору **b**) под углом 250°−90°=160° к положительному направлению оси x (перпендикулярно вектору **a** в соответствии с правилом правой руки).

С помощью уравнения (17) мы можем найти компоненты вектора **a×b.** Для этого мы вначале выпишем компоненты векторов **a** и **b**:

$$a_x=7.4\cos 250°=-2.5;\ a_y=7.4\sin 250°=-7.0;\ a_z=0;$$

$$b_x=0;\ b_y=0;\ b_z=5.0$$

Таким образом, получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [(-7.0)(5.0)-(0)(0)]\mathbf{i}+[(0)(0)-(-2.5)(5.0)]\mathbf{j}+[(-2.5)(0)-(-7.0)(0)]\mathbf{k}$$
$$= -35\mathbf{i}+13\mathbf{j} \quad ,$$

что соответствует величине и направлению этого вектора, изображенного на Рис. 18.

3-6. Векторные законы в физике (*факультатив*)

Можно показать (см. Рис. 10b и Задачу 51), что компоненты вектора **a** в повернутой координатной системе (x′,y′) связаны с компонентами этого же вектора в исходной системе (x,y) посредством соотношений:

$$a_{x'} = a_x \cos\beta + a_y \sin\beta \tag{18a}$$

$$a_{y'} = -a_x \sin\beta + a_y \cos\beta \tag{18b}$$

где β- угол поворота системы координат (x′,y′) относительно системы (x,y).

Уравнения (18) являются примером преобразования, при котором компоненты вектора в любой повернутой системе выражаются через компоненты этого же вектора в исходной системе. С помощью этих уравнений мы можем сформулировать более общее и строгое определение вектора. До сих пор мы определяли вектор как физическую величину, обладающую некоторым числовым значением, величиной, и направлением в пространстве, и подчиняющуюся некоторым правилам комбинирования (сложения, умножения и т. д.). Теперь мы заменим это определение следующим.

Для того, чтобы какая-либо физическая величина (например, скорость или сила) являлась вектором, необходимо, чтобы компоненты этой величины трансформировались при вращении координатных осей в соответствии с уравнениями (18).

Хотя уравнения (18) справедливы для двумерных векторов, их можно обобщить и на трехмерное пространство. Двумерный случай, тем не менее, сохраняет все необходимые особенности.

Как видно из Рис.10, вектор не меняется (или является *инвариантным*) при трансляции и вращении координатной системы. Некоторые физические величины (такие, например, как скорость) как раз этим свойством и обладают. Например, измеряя скорость проезжающего мимо окна вашего дома автомобиля, вы получите то же значение, что и ваш друг, который будет измерять эту скорость, глядя из окна своего дома через дорогу от вашего (важно только, чтобы ваши дома были неподвижны друг относительно друга!). Величины, которые обладают такими свойствами и которые подчиняются правилам векторной арифметики, описанным в этой главе, являются векторами. К векторным величинам относятся: скорость, ускорение, сила, импульс, угловой момент, электрическое и магнитное поля. Уравнения, которые связывают эти величины, являются векторными уравнениями. Примерами векторных уравнений являются **ab**=s, **a**+2**b**=6**c**, **a**×**b**=**c**, и т. д. С другой стороны, многие физические величины являются скалярами и описываются скалярными уравнениями. К скалярным величинам относятся, например, температура, давление, масса, энергия, время. Важным свойством векторных уравнений является то, что они не только указывают на математическую связь между физическими величинами, но также и на их геометрическую связь. Давайте здесь кратко рассмотрим некоторые примеры таких уравнений. Эти уравнения мы будем детально рассматривать в этой книге дальше, здесь же мы коснемся некоторых базовых свойств таких уравнений.

Начнем со второго закона Ньютона **F**=m**a** (см. Главу 5), который определяет величину силы **F**, с которой надо подействовать на тело массы m, чтобы сообщить этому телу ускорение **a**. Справа в этом уравнении стоит скаляр (масса m), умноженная на вектор (ускорение **a**), а слева стоит вектор (сила **F**). Это уравнение выглядит достаточно простым, но оно богато по содержанию. По сути, в этом векторном уравнении записано *три* независимых уравнения: $F_x = ma_x; F_y = ma_y; F_z = ma_z$. Каждое из этих уравнений можно решать отдельно, независимо от двух других. Например, у компонента силы абсолютно не влияет на x или z компоненты ускорения. Другими словами, мы можем сказать, что направление ускорения системы определяется направлением силы, действующей на нее (поскольку умножение вектора на положительный скаляр дает вектор в том же направлении). Мы используем это свойство в следующей главе при анализе двумерного движения тела под действием силы тяжести.

Законы, в которых фигурируют скалярные произведения, появляются в нескольких различных контекстах. Наш первый пример касается определения механической работы W, которая осуществляется внешней силой **F**, производящей перемещение **d**: W=**Fd**=*Fd*cosϕ (см. Главу 7). В этом случае сила не обязательно параллельна перемещению; представьте, что вы тащите санки по земле за веревку, переброшенную через ваше плечо. В данном случае перемещение санок является горизонтальным, тогда как сила приложена вдоль веревки и имеет горизонтальную и вертикальную компоненты. Обратите внимание, что согласно геометрическим соотношениям, представленным на Рис. 16 только компонента силы **F** вдоль **d** (равная *F*cosϕ) дает вклад в работу. Еще раз подчеркнем, что векторное уравнение содержит информацию о геометрическом соотношении.

Пример физического закона, в который входит векторное произведение, дается уравнением **F**=q**v**×**B** (см. Главу 34), которое определяет силу **F**, действующую со стороны магнитного поля **B** на точечный заряд q, движущийся со скоростью **v**. Геометрическая природа этой силы, определяемая векторным уравнением, ответственна за то, что траектория частицы скручивается в окружность, что наблюдается в ускорителях элементарных частиц, таких как циклотрон, например. Обратите внимание, что эта сила всегда перпендикулярна как вектору скорости так и вектору магнитного поля. Не будь перед нашими глазами этого векторного уравнения, было бы затруднительно понять возникновение такого свойства.

Физические законы, выражаемые векторными уравнениями, являются универсальными и независимыми от выбранной системы координат. Например, рассматривая движение заряженной частицы в магнитном поле в двух координатных системах, повернутых друг относительно друга, мы обнаружим, что каждый из векторов силы **F**, скорости **v** и магнитного поля **B** имеет в этих системах разные компоненты (см. Рис.10b), однако, наблюдатели в каждой из систем

согласятся, что векторная форма закона в повернутой системе осталась прежней: $\mathbf{F}'=q\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'$.
Это свойство настолько присуще природе, что мы часто считаем, что природа и должна вести себя подобным образом. Помимо чисто локальных эффектов, например, электростатическая сила взаимодействия между двумя электронами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга, не должна зависеть от того в каком направлении (север- юг или восток- запад) мы измеряем это расстояние. Не слишком трудно представить себе Вселенную, которая не ведет себя столь хорошо; в такой Вселенной длина вектора, например, могла бы изменяться при трансляциях и вращениях. Физики и математики всегда задавались вопросом, почему наша Вселенная обладает траляционной и вращательной симметрией. Оказалось, что имеется замечательная связь между симметриями природы и некоторыми величинами, которые *сохраняются* (то есть, численное значение таких величин не меняется) в физических процессах. Например, из инвариантности физических законов относительно *временной трансляции* (то есть, если закон выполняется в понедельник, то он также выполняется и во вторник) непосредственно следует закон сохранения энергии.

Симметрия при отражении, полярные и аксиальные векторы

Имеется еще один тип преобразований, отличный от трансляции и вращения. Это преобразование отражения координатной системы относительно начала координат: $x\to -x$, $y\to -y$, $z\to -z$.

Можно ожидать, что при таком преобразовании все, что нужно сделать в уравнениях это заменить знак каждой векторной компоненты на обратный. (Скалярные величины при этом преобразовании не меняются). В самом деле, если мы инвертируем ось x, не меняя при этом вектор $\boldsymbol{a}$, то очевидно $a_x\to -a_x$. Таким образом, вместо того, чтобы рисовать инвертированную координатную систему, мы можем в исходной координатной системе нарисовать вектор $-\boldsymbol{a}$. Огромное количество векторных физических величин, таких как скорость, ускорение, сила, импульс, электрическое поле, так себя и ведут: при инвертировании координатных осей знак этих векторных компонент меняется на обратный. Вектора, обладающие этим свойством, называются *полярными векторами*.

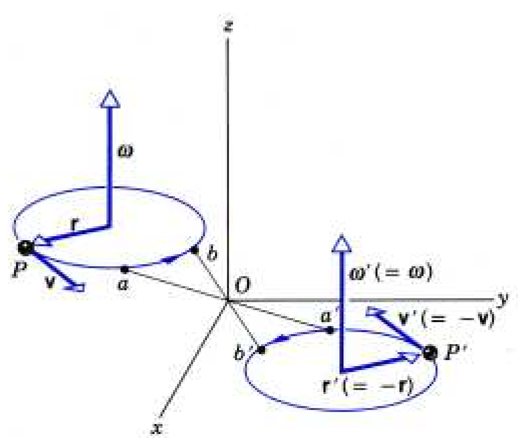

Рис. 19. Частица P, движущаяся по окружности, характеризуется вектором угловой скорости **ω**. Если все координаты отразить относительно начала координат O, то движение по окружности отраженной частицы P′ характеризуется вектором угловой скорости **ω′**.

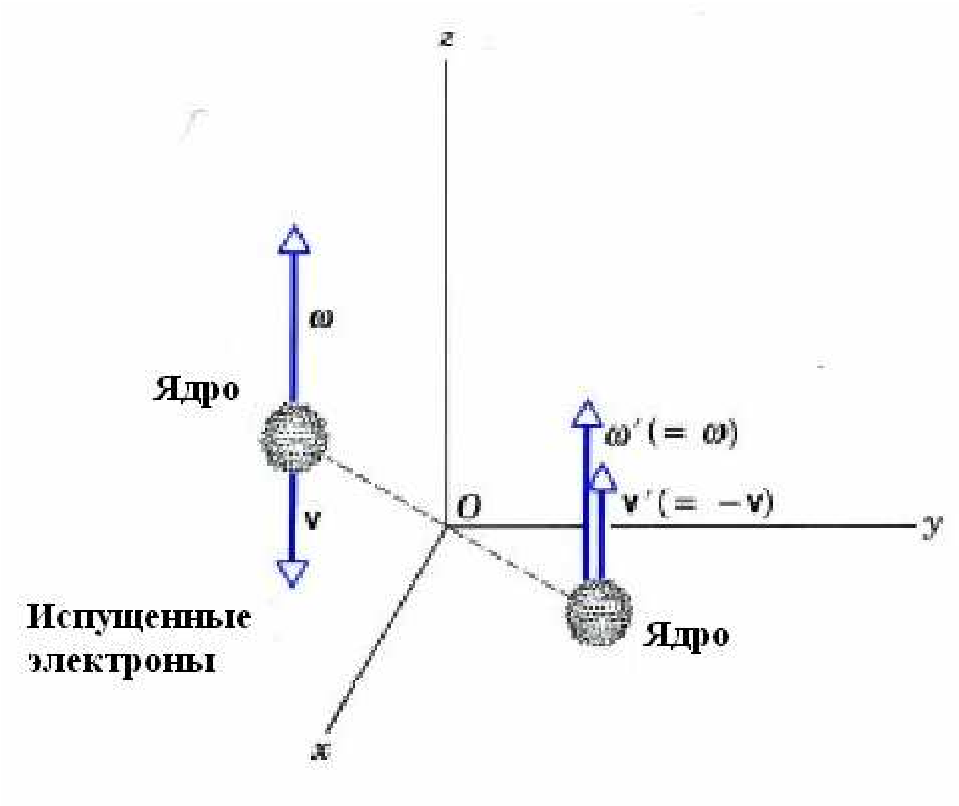

Рис. 20. Ядра, вращение которых характеризуется вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, испускают электроны преимущественно в направлении противоположном $\boldsymbol{\omega}$. В зеркально отраженной версии этого эксперимента электроны должны испускаться в основном вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}'$. Эксперимент и его отраженный вариант не идентичны друг другу, что означает нарушение зеркальной симметрии при этих распадах.

Имеется также класс векторов, которые не обладают этим свойством. Рассмотрим пример, показанный на Рис. 19. Часто удобно характеризовать частицу, движущуюся по окружности с помощью вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Величина этого вектора ω показывает нам как быстро вращается частица, а направление этого вектора перпендикулярно плоскости, в которой лежит траектория частицы, и определяется правилом правой руки. (Если согнуть пальцы правой руки так, чтобы их концы указывали направление движения частицы, то большой палец будет указывать направление вектора $\boldsymbol{\omega}$.)

Рассмотрим теперь ситуацию, когда траектория частицы инвертируется или отражается относительно начала координат, как показано на Рис. 19. Вектор $\mathbf{r}$, фиксирующий положение частицы P относительно центра круга, трансформируется согласно $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, а вектор скорости как $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. В исходной системе частица двигалась от точки a к точке b, в отраженной системе она будет двигаться от точки a' к точке b'. При этом направление вращения (по часовой или против часовой стрелки) остается неизменным, то есть, $\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}$. Таким образом, в противоположность полярным векторам **r** и **v**, вектор угловой скорости не меняет знак при инвертировании координатных осей. Такие вектора называются *аксиальными* векторами или *псевдовекторами*. Кроме вектора угловой скорости к аксиальным векторам относятся также вращательный момент и магнитное поле.

В Главе 11 мы увидим, что векторы **r**, **v** и **ω** связаны между собой векторным произведением $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Если бы все три вектора меняли знак при отражении, то мы бы получили $-\mathbf{v}=(-\boldsymbol{\omega})\times(-\mathbf{r}) =\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, что является очевидным противоречием, так как величина $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ не может одновременно быть $-\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}$ (если **v** не есть нуль, что очевидно не имеет места в нашем случае). Таким образом, преобразование $\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}$ является абсолютно необходимым для того, чтобы соотношение $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ выполнялось также и в инвертированной системе координат $\mathbf{v}'=\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}'$. Именно это имеется в виду, когда говорят об инвариантности физического закона при некотором преобразовании системы координат. Это значит, что если мы пишем уравнение физического закона в одной системе координат, затем трансформируем каждый вектор в этом уравнении в соответствии с преобразованием координат и подставляем эти трансформированные вектора в уравнение физического закона, то в преобразованной системе координат уравнение физического закона должно быть по форме идентично уравнению в исходной системе координат.

Вплоть до 1956 года считалось, что все законы физики остаются неизменными при инверсии, подобной показанной на Рис. 19 (равно как и при трансляции и вращении). Соответствующий закон сохранения получил название *закона сохранения четности.* Однако, в 1956 году было обнаружено, что зеркальная симметрия нарушается при некоторых радиоактивных распадах. В этих процессах, которые называются бета распадами, из ядер вылетают электроны. Можно представить, что ядра вращаются вокруг своих осей подобно маленьким волчкам, и каждому ядру можно приписать вектор **ω**, описывающий его вращение. В экспериментах по бета распаду изучалось направление испускания электронов по отношению к направлению вектора **ω** (Рис. 20). Если в направлении вектора **ω** и в противоположном ему направлении испускается одинаковое число электронов, то в этом случае зеркально отраженный эксперимент выглядит точно также как неотраженный и закон распада при инверсии координат не нарушается. Однако, оказалось, что почти все электроны испускаются в направлении противоположном вектору **ω.** Поэтому при инверсии координат большая часть электронов будет испускаться вдоль вектора **ω** (так как при отражении **v** меняет знак, тогда как **ω** знак не меняет). Таким образом, этот эксперимент отличается от своего зеркального изображения. Закон сохранения четности в этом эксперименте не сохраняется[1].

Этот эксперимент помог революционизировать наше понимание фундаментальных процессов и природу физического закона, ответственного за бета распад, в основе которого лежит одна из четырех фундаментальных сил. В результате серии последовавших экспериментов были открыты другие связи между свойствами преобразований, принципами инвариантности и симметриями.

Вопросы

[1] См. The New Ambidextrous Universe, by Marin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990)/

1. В 1969 году три астронавта стартовали с мыса Канаверал на Луну и затем возвратились на Землю, приземлившись в заданном месте Тихого Океана (см. Рис. 21. Адмирал попрощался с астронавтами во время старта ракеты и затем отправился на авианосце в то место океана, где должны были приземлиться астронавты. Сравните смещения астронавтов и адмирала.

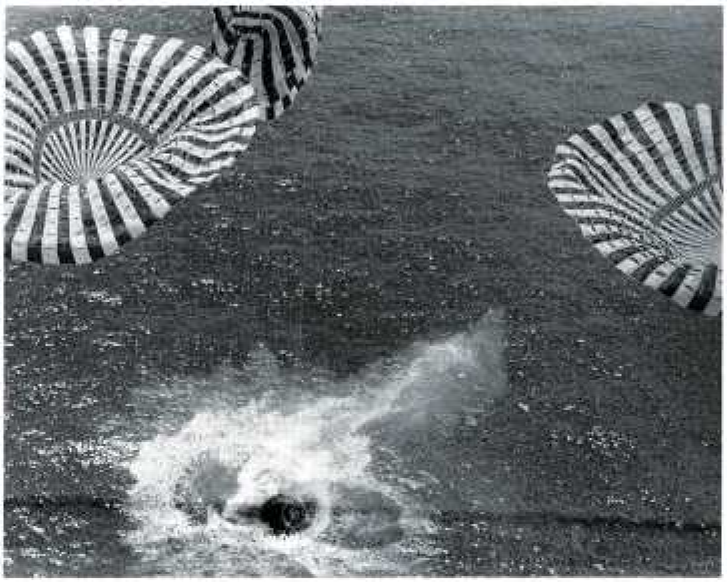

Рис. 21. К вопросу 1

2. Собака пробежала сначала 100 м на юг, затем 100 м на восток и потом 100 м на север, при этом она оказалась в исходной точке, так что ее смещение равно нулю. Где находится эта исходная точка? Очевидный ответ-Северный полюс, однако, есть еще одно решение, расположенное недалеко от Южного полюса. Что это за решение?
3. Можно ли так скомбинировать два вектора с разными абсолютными значениями, чтобы в результате получить ноль? А три вектора?
4. Может ли абсолютная величина вектора быть равной нулю, если одна из его компонент не равна нулю?
5. Может ли сумма абсолютных значений двух векторов быть равной абсолютному значению суммы этих векторов?
6. Может ли абсолютное значение разности двух векторов быть больше абсолютного значения какого либо из этих векторов?
7. Пусть $\mathbf{d}=\mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2$. Значит ли это что $d \geq d_1$ или $d \geq d_2$. Если нет, объясните почему.
8. Если три вектора в сумме дают ноль, то все они лежат в одной плоскости. Докажите это утверждение.
9. Являются ли единичные вектора **i**, **j**, **k** размерность?
10. Объясните смысл утверждения, что векторное уравнение содержит больше информации чем скалярное уравнение.

11. Назовите несколько скалярных величин. Зависит ли значение скалярной величины от выбранной вами системы координат?
12. Вы можете упорядочить события во времени. Например, если событие *b* предшествует событию *c*, но случилось после события *a*, то эти события можно записать в следующем порядке *a, b, c*. Следовательно, существует направление времени, благодаря которому мы различаем прошедшее, настоящее и будущее. Можно ли на основании этого утверждать, что время есть вектор? Если нет, то почему?
13. Применимы ли ассоциативный и кумулятивный законы к процедуре вычитания векторов?
14. Может ли скалярное произведение быть отрицательным?
15. (a) Если **ab**=0, то следует ли отсюда, что вектора **a** и **b** взаимно перпендикулярны? (b) Если **ab=ac**, то следует ли отсюда, что **b=c**?
16. Если **a**×**b**=0, то следует ли отсюда, что вектора **a** и **b** должны быть обязательно параллельными? Верно ли обратное утверждение?
17. Вектор **a** параллелен оси вращения Земли и направлен с юга на север. Второй вектор **b** направлен вертикально вверх в том месте, где вы сейчас находитесь. Куда направлен вектор **a×b**? В каком месте на поверхности земли величина вектора **a×b** максимальна? Минимальна?
18. Необходимо ли указывать систему координат при вычислении (а) суммы двух векторов; (б) их скалярного произведения; (в) их векторного произведения; (г) их компонент?
19. (а) Покажите, что при изменении на противоположное направления всех векторных компонент, направление самого вектора меняется на противоположное. (б) Покажите, что, если направления компонент двух векторов, образующих векторное произведение, изменить на противоположное, то векторное произведение не изменится. Является ли векторное произведение вектором?
20. Мы рассмотрели сложение, вычитание и умножение векторов. Как выдумаете, почему мы не рассматривали деление векторов. Можно ли определить такую операцию?
21. Как мы видели, в векторной алгебре принято применять правило правой руки. Что надо было бы изменить, если бы вместо этого договорились бы применять правило левой руки?
22. (а) Объясните, почему векторное произведение двух полярных векторов, является аксиальным вектором; (б) Какой вектор (полярный или аксиальный) дает векторное произведение полярного и аксиального вектора?

Задачи

Раздел 3-2. Сложение векторов. Графический метод.

1. Имеется два смещения: одно величиной 3 м и второе величиной 4 м. Покажите, как эти два вектора можно скомбинировать, чтобы получить в результате смещение: (а) 7 м; (б) 1 м; (в) 5 м.

2. Какими свойствами должны обладать два вектора **a** и **b**, чтобы: (а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ и $a+b=c$; (б) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$; (в) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ и $a^2+b^2=c^2$?
3. Женщина проходит 250 м в направлении 35° на северо- восток, затем 170 м прямо на восток. (а) С помощью графического метода найдите ее смещение относительно начальной точки. (б) Сравните величину смещения с пройденным ею расстоянием.
4. Человек проходит 3.1 км на север, затем 2.4 км на запад и наконец 5.2 км на юг. (а) Постройте векторную диаграмму этого путешествия. (б) Какое расстояние и в каком направлении пролетела бы птица по прямой линии, чтобы попасть в ту же конечную точку?
5. Покажите графически, что при сложении двух векторов **a** и **b** результирующий вектор не может иметь величину большую, чем $a+b$ и меньшую чем $|a-b|$.
6. Автомобиль проезжает на восток 54 км, затем на север 32 км и потом 27 км под углом 28° на северо восток. Нарисуйте векторную диаграмму перемещения автомобиля и найдите полное смещение автомобиля относительно начальной точки.
7. Вектор **a** имеет величину 5.2 единицы и направлен на восток. Вектор **b** имеет величину 4.3 единицы и направлен под углом 35° на северо запад. С помощью векторной диаграммы определите величину и направление векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.
8. Игроку в гольф понадобилось три удара по мячу, чтобы попасть в ямку на лужайке. После первого удара мяч переместился на 12 футов на север, после второго на 6 футов на юговосток и после третьего удара на 3 фута на югозапад. Чему равно расстояние от исходной точки до ямки? Нарисуйте векторную диаграмму.
9. Один из банков города Бостон был ограблен (см. Рис. 22). Воры имели в своем распоряжении вертолет, и, чтобы запутать следы, они вначале

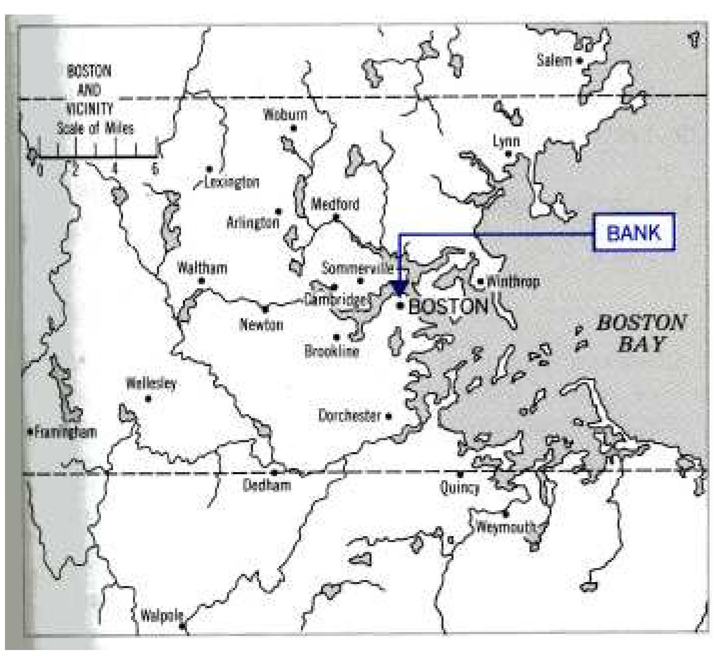

Рис. 22. К задаче 9

пролетели 20 миль под углом 45° на юговосток, затем 33 мили под углом 26° на северозапад и, наконец, 16 миль под углом 18° на юговосток. В конце третьего полета воры были пойманы. С помощью графического метода определите по карте в каком городе произошло их задержание.

Раздел 3-3. Векторные компоненты.

10. (a) Чему равны компоненты вектора **a** на плоскости xy, если его направление составляет 252° с положительным направлением оси x, отсчитанного против часовой стрелки и его величина равна 7.34 единицы? (b) x-компонента некоторого вектора равна −25 единиц, а y-компонента +43 единицы. Чему равны величина этого вектора и угол между ним и положительным направлением оси x?
11. Некоторый агрегат переместили по наклонной доске (см. Рис. 23) на 13 м. Угол наклона доски равен 22°. На какую высоту подняли агрегат? На какое расстояние его переместили по горизонтали?

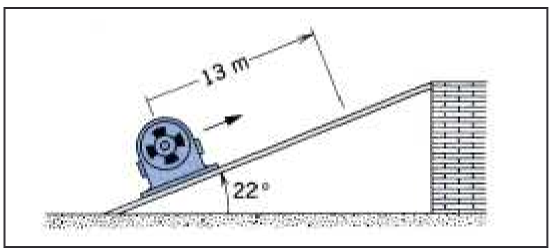

Рис. 23. К задаче 11

12. Длина минутной стрелки настенных часов составляет 11.3 см. Чему равен вектор смещения конца этой стрелки (а) от 12 ч 15 мин до 12 ч 30 мин (б) через следующие полчаса (в) через час?
13. Человек хочет попасть в точку, расположенную от него на расстоянии 3.42 км в направлении 35.0° на северовосток. Однако, улицы, по которым он должен идти, расположены либо с юга на север, либо с востока на запад. Какое минимальное расстояние пройдет человек, чтобы попасть в нужное место?
14. Пароход начал плыть строго на север в точку, расположенную от него на расстоянии 124 км. Из-за неожиданного шторма пароход оказался в точке, расположенной на 72.6 км к северу и 31.4 км к востоку от его начальной точки. Какое расстояние должен пройти теперь пароход и в каком направлении двигаться, чтобы попасть в необходимую точку?
15. Дефекты в скальных породах представляют из себя трещины, вдоль которых параллельно поверхности разрыва могут сдвигаться противоположные поверхности породы. Часто такие движения происходят при землетрясениях. Точки A и B на Рис. 24 совпадали перед образованием трещины. Компонента вектора смещения AB параллельная горизонтальной поверхности называется *сдвиговой шириной* (AC). Компонента вектора

смещения AB вдоль линии наибыстрейшего спуска называется *сдвиговой глубиной* (AD). (а) Чему равен полный сдвиг, если сдвиговая ширина равна 22 м и сдвиговая глубина равна 17 м? (б) Пусть плоскость трещины составляет угол 52° с горизонтом. Чему равно при этом *вертикальное* смещение точки B для параметров сдвига, приведенных в (а)?

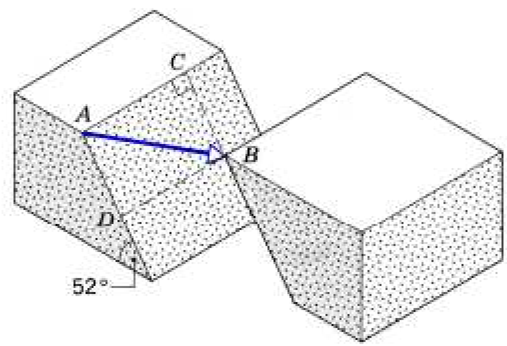

Рис. 24. К задаче 15

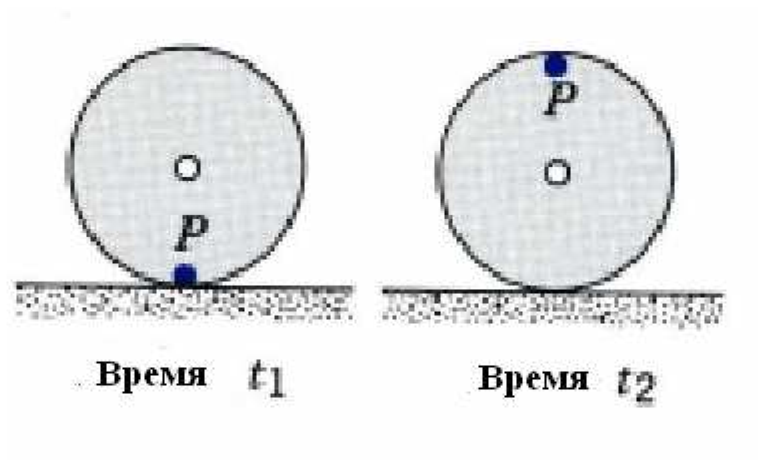

Рис. 25. К задаче 16

16. Колесо радиусом 45 см катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности (Рис. 25). На ободе колеса имеется нанесенное краской пятно P. В момент t_1 точка P соприкасается с полом. Через полоборота в момент t2 точка P оказывается в положении, показанном на Рис. Чему равно смещение P за этот интервал.
17. Комната имеет размеры 10×12×14 фт. Из одного угла комнаты в диаметрально противоположный угол перелетает муха. (а) Найти вектор смещения в координатных осях, совпадающих с ребрами комнаты. (б) Чему равна величина этого смещения. (в) Может ли быть длина пути, по которому

летела муха, быть меньше этого расстояния? Больше этого расстояния? Равным этому расстоянию? (г) Если муха будет не лететь, а ползти по стенам, то чему равен наименьший путь, пройденный мухой между исходной и конечной точками?

Раздел 3-4. Сложение векторов. Метод компонент.

18. Найдите сумму двух векторов **a**=5**i**+3**j** и **b**=−3**i**+2**j.** Чему равны абсолютная величина м направление вектора **a+b?**
19. Имеется два вектора **a**=4**i**−3**j**+**k**, **b**=−**i**+**j**+4**k**. Найти (а) **a+b;** (б) **a−b;** (в) вектор **c**, такой, что **a−b+c=0.**
20. Имеется два вектора **a**=4**i**−3**j**, **b**=6**i**+8**j**. Найти абсолютные величины и направление по отношению к оси x векторов **a**, **b**, **a+b; a−b; b−a**.
21. (а) Человек выходит из своего дома, проходит 1400 м на восток, затем 2100 м на север, достает из кармана монетку и бросает ее вниз с обрыва высотой 48 м. В координатной системе, в которой положительные оси x, y и z направлены, соответственно, на восток, на север и вниз, а начало координат находится у порога дома человека, записать выражение для смещения монетки через единичные векторы. (б) Человек возвращается к своему дому по другому маршруту. Чему равен вектор смещения для обратного маршрута?
22. Частица движется на плоскости так, что ее три последовательных смещения есть: 4.13 м на югозапад, 5.26 м на восток и 5.94 м в направлении 64.0° на северовосток. Направьте ось x на восток, ось y на север и найдите; (а) компоненты каждого из трех смещений; (б) компоненты результирующего смещения; (в) величину и направление результирующего смещения; (г) вектор смещения, с помощью которого частица переместится в начальную точку.

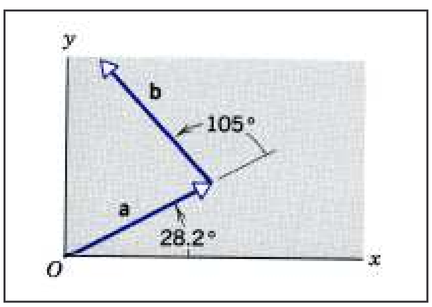

Рис. 26. К задаче 23

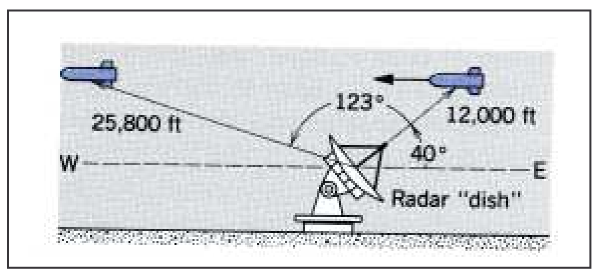

Рис. 27. К задаче 24

23. Векторы **a** и **b** имеют одинаковые абсолютные значения равные 12.7 единиц. Они ориентированы так, как показано на Рис. 26 и их сумма равна вектору **r**. Найти: (а) x и y компоненты вектора **r**;(б) абсолютное значение вектора **r**;(в) угол между **r** и положительной осью x.
24. Радар пеленгует ракету, которая летит с востока. При первом пеленге ракета находится на расстоянии 12000 футов и 40° над горизонтом (см. Рис. 27). Ракета отслеживается радаром при ее перемещении на 123° в плоскости

восток- запад. При последнем пеленге ракета находилась от радара на расстоянии 25800 футов. Найти смещение ракеты за время слежения за ней радаром.

25. Угол между двумя векторами, имеющими абсолютные значения a и b и расположенными друг за другом, равен θ. Разложив эти два вектора по двум взаимноперпендикулярным осям, покажите, что абсолютная величина суммы этих векторов дается выражением: $r=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$.
26. Докажите, что два вектора, сумма которых перпендикулярна их разности, должны иметь равные абсолютные значения.
27. (а) Используя единичные векторы, направленные вдоль трех ребер куба, выразите диагональ куба (линию, проходящую через центр куба и соединяющую противоположные углы куба) через ребра куба. Длина ребра равна *a*. (б)Определите углы между диагональю и прилегающими ребрами. (в) Найдите длину диагонали.
28. Турист летит из столицы США Вашингтона в столицу Филлипин Манилу. (а) Опишите вектор смещения. (б) Чему равно его абсолютное значение? Координаты городов, соответственно, 39° северной широты, 77° западной долготы и 15° северной широты, 121° восточной долготы. (Указание. См. Рис. 7 и формулы (7). Направьте ось z по оси вращения Земли, так что 90°−θ- широта и ϕ- долгота. Радиус Земли 6340 км).

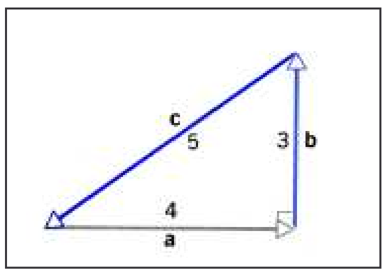

Рис. 28. К задачам 41, 42

29. Пусть *N* целое положительное число большее 1. Тогда имеет место тождество $\cos 0+\cos\frac{2\pi}{N}+\cos\frac{4\pi}{N}+...+\cos(N-1)\frac{2\pi}{N}=0$, которое можно записать как $\sum_{n=0}^{n=N-1}\cos\frac{2\pi n}{N}=0$. Аналогично, имеет место тождество $\sum_{n=0}^{n=N-1}\sin\frac{2\pi n}{N}=0$. Докажите два этих тождества, рассмотрев сумму *N* векторов одинаковой длины, когда каждый последующий вектор составляет угол $2\pi/N$ с предыдущим вектором.

Раздел 3-5. Умножение векторов.

30. Вектор **d** величиной 2.6 м направлен на север. Чему равны абсолютные значения и куда направлены векторы: (а) **–d**; (б) **d**/2.0; (в) –2.5**d;** (г) 5.0**d.**
31. Покажите, что для любого вектора **a** справедливы следующие соотношения: (**aa**)=a^2 и **a**×**a**=0**.**

32. Угол между вектором **a**, равный по абсолютной величине 12 единиц, и вектором **b**, абсолютная величина которого составляет 5.8 единиц, равен 55°. Вычислить (а) скалярное произведение этих векторов; (б) их векторное произведение.
33. В плоскости xy лежат два вектора **r** и **s**. Их абсолютные значения равны, соответственно, 4.5 и 7.3 единиц, а их направления составляют соответственно углы 320° и 85°, отсчитанные против часовой стрелки от положительного направления оси x. Чему равны значения величины (**rs**) и **r**×**s**=0?

34. Вычислите (а) “**север**” ×“**запад**”; (б) (“**вниз**”“**юг**”); (в) “**восток**” ×“**вверх**”; (г) (“**запад**” “**запад**”); (д) “**юг**” ×“**юг**”. Абсолютную величину каждого вектора считать равной единице.

35. Имеется два вектора $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$. Покажите, что скалярное произведение этих векторов (**ab**) записывается в виде уравнения (15).

36. Имеется два вектора $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$. Покажите, что векторное произведение этих векторов (**a**×**b**) записывается в виде уравнения (17).

37. Покажите, что векторное произведение (**a**×**b**) можно записать в виде 3×3 детерминанта:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

38. С помощью уравнений (13) и (15) вычислите угол между двумя векторами **a**=3**i**+3**j**+3**k** и **b**=2**i**+**j**+3**k**.

39. Имеется три вектора ***a***=3**i**+3**j**–2**k**, ***b***=–**i**–4**j**+2**k**, **c**=2**i**+2**j**+**k**. Найти: а) ***a***(***b***×***c***)**;** б) ***a***(***b***+***c***)**;** в) ***a***×(***b***+***c***)**.**

40. Имеется три вектора ***a***=5**i**+4**j**–6**k**, ***b***=–2**i**+2**j**+3**k**, **c**=4**i**+3**j**+2**k**. Найти: а) вектор ***r***=***a***–***b***+***c*****;** б) угол между вектором ***r*** и положительным направлением оси z**;** в) угол между векторами ***a*** и ***b*****.**

41. Векторная сумма трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равна нулю (см. рис.28). Вычислить величины $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{ac}$, $\boldsymbol{bc}$.

42. Векторная сумма трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равна нулю (см. рис.28).. Вычислить величины $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

43. Вектор **a**, лежащий в плоскости yz, составляет 63.0° с положительным направлением оси y, имеет положительную z- компоненту и абсолютное значение 3.20 единиц. Вектор **b**, лежащий в плоскости xz, составляет 48.0° с положительным направлением оси x, имеет положительную z- компоненту и абсолютное значение 1.40 единиц. Найти: (а) (**ab**); (б) **a×b;** (в) угол между **a** и **b**.

44. (а) Выше мы видели, что векторное произведение не удовлетворяет коммутативному закону, то есть, **a×b** не равно **b×a.** Покажите, что скалярное произведение подчиняется коммутативному закону, то есть (**ab**)= (**ba**). (б) Покажите, что как скалярное, так и векторное произведение подчиняются дистрибутивному закону, то есть, **a**(**b**+**c**)=**ab**+**ac** и **a**×(**b**+**c**)=**a**×**b**+**a**×**c.** (в) Выполняется ли ассоциативный закон для векторного произведения, то есть, выполняется ли равенство **a×(b×c) = (a×b)×c**? (г) Имеет ли смысл говорить об ассоциативном законе для скалярного произведения?

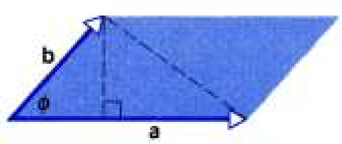

Рис. 29. К задачам 45, 46

45. Покажите, что площадь треугольника, образованного двумя векторами **a** и **b** (см. Рис. 29), равна ½|**a**×**b**|.

46. Покажите, что абсолютная величина векторного произведения двух векторов численно равна площади параллелограмма, две стороны которого равны длинам соответствующих векторов (см. Рис. 29). Можно ли отсюда понять, как ориентированную в пространстве элементарную площадку можно представить посредством вектора?

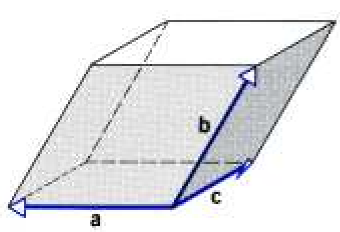

Рис. 30. К задаче 47

47. Покажите, что величина **a(b×c)** равна объему параллелепипеда, образованного тремя векторами, как показано на Рис. 30.

48. Имеется два вектора **a** и **b** **c** компонентами a_x=3.2, a_y=1.6; b_x=0.50; b_y=4.5. Найти: (а) угол между векторами **a** и **b**; (б) компоненты вектора **c**, который перпендикулярен вектору **a**, лежит в xy плоскости и имеет абсолютное значение 5.0 единиц.

49. Найдите углы между внутренними диагоналями куба. См. задачу 27.

50. Три вектора, показанные на Рис. 31, имеют абсолютные значения a=3, b=4, c=10. (а) Вычислить x и y компоненты этих векторов. (б) Найти числа p и q такие, что **c**=p**a**+q**b**.

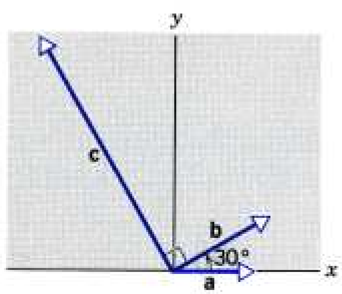

Рис. 31. К задаче 50

Раздел 3-6. Векторные законы в физике

51. Вывести уравнения (18), используя Рис. 10b.

52. Вектор **a**, имеющий абсолютное значение 17 м, направлен под углом 56°, отсчитанным против часовой стрелки от положительного направления оси x, как показано на Рис. 32. (а) Чему равны компоненты a_x, a_y этого вектора? (б) Вторая координатная система повернута на 18° относительно первой. Чему равны компоненты a'_x, a'_y в повернутой системе?

53. На Рис. 33 показаны два вектора **a** и **b** и две системы координат, у которых углы между осями x и x′ и y и y′ равны β. Покажите аналитически, что абсолютная величина и направление вектора **a+b** не зависят от того, в какой системе координат производятся вычисления.

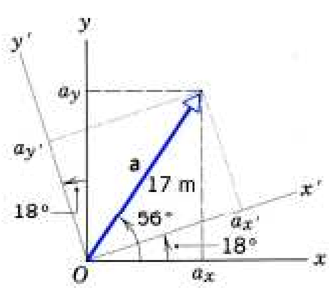

Рис. 32. К задаче 52

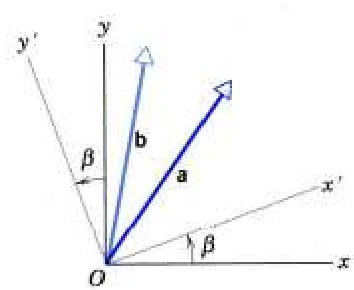

Рис. 33. К задаче 51