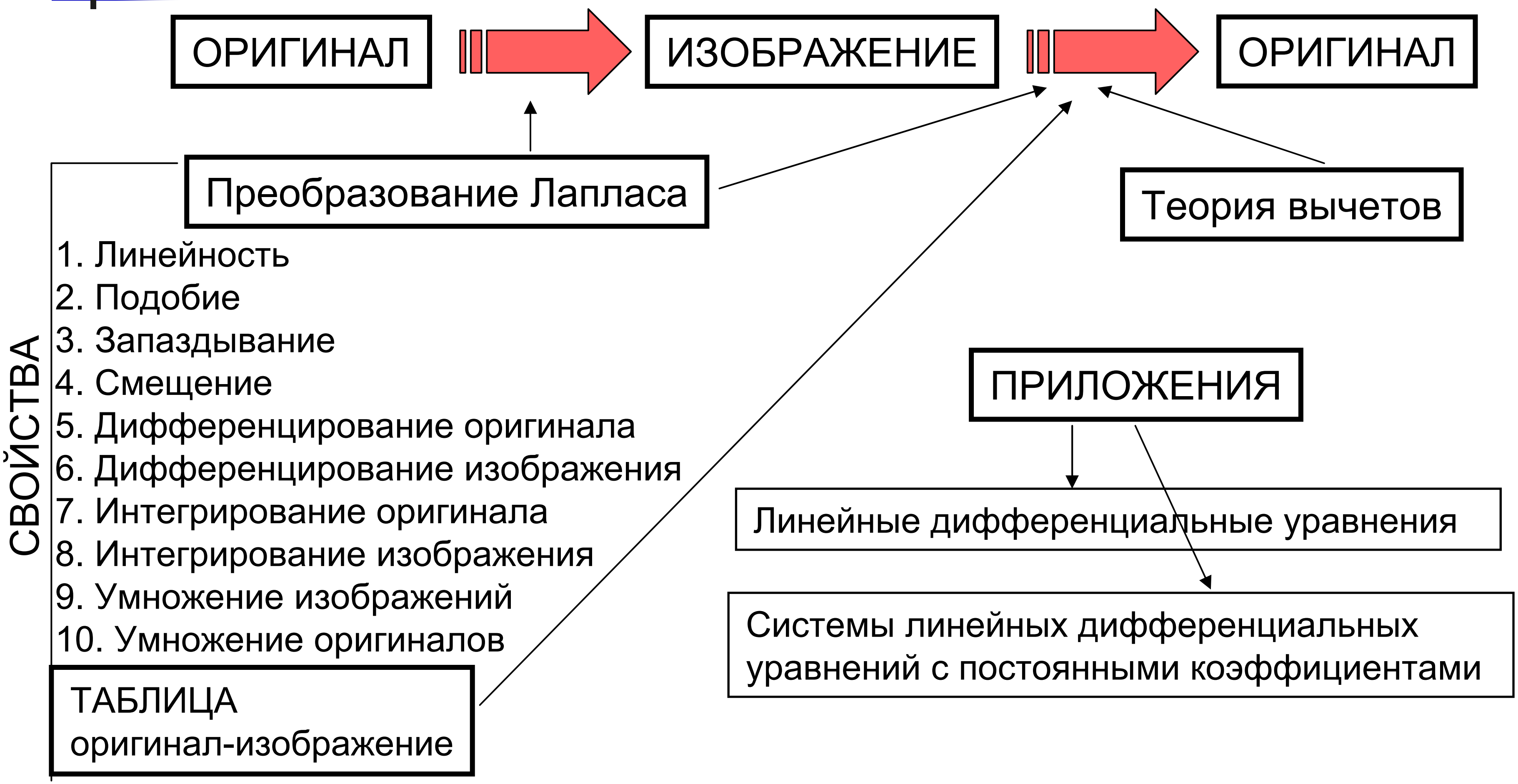
Интеграл Лапласа и его основные свойства

- Преобразование Лапласа
- Свойства преобразования Лапласа

Элементы операционного исчисления

Схема курса


ОРИГИНАЛ
ИЗОБРАЖЕНИЕ
ОРИГИНАЛ
Преобразование Лапласа
Теория вычетов
СВОЙСТВА
1. Линейность
2. Подобие
3. Запаздывание
4. Смещение
5. Дифференцирование оригинала
6. Дифференцирование изображения
7. Интегрирование оригинала
8. Интегрирование изображения
9. Умножение изображений
10. Умножение оригиналов
ТАБЛИЦА оригинал-изображение
ПРИЛОЖЕНИЯ
Линейные дифференциальные уравнения
Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение

(Воднев В.Т. Математический словарь высшей школы: Общая часть М., изд-во МПИ, 1988. – 527 с.)

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев посредством простых правил решать сложные математические задачи. В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (образами), получаемыми из данных по определенным правилам, причем действия над оригиналами заменяются более простыми действиями над образами. Наиболее часто для этих целей используется преобразование Лапласа

Схема решения задач методами операционного исчисления

1. От искомых функций переходят к некоторым другим функциям (их изображениям);
2. Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями;
3. Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям.

- В качестве преобразования, позволяющего перейти от функции к их изображениям, используют **преобразование Лапласа**

Определение

Пусть $f(t)$ — комплексная функция комплексного переменного t. Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t > 0$, т.е. она непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на любом интервале конечной длины;
3. Существуют такие числа $M > 0,\ s,$ что для всех t выполняется неравенство

$$\left| f(t) \right| \le M e^{st}$$

Определение

Нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых справедливо неравенство

$$\left| f(t) \right| \le Me^{st}$$

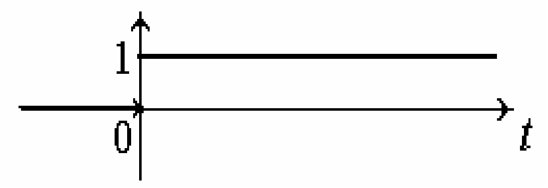
называется показателем роста оригинала $f(t)$

Замечание

- Условие 3 требует, чтобы оригиналы при $t \to +\infty$ были или ограничены, или стремились к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция

Определение

Введем функцию $$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



называемую единичной функцией Хевисайда.

Функцию-оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая, что

$$\eta(t) f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

т.е. рассматриваем функцию с некоторого момента времени, что удовлетворяет условию 1 из определения оригинала

Замечание

Для ограниченных оригиналов, т.е.

$$|f(t)| \le M \quad \forall t > 0$$

принимают показатель роста $s_0 = 0$

Например, для единичной функции Хевисайда $s_0 = 0$

Примеры

В приведенных примерах при $t < 0$ функции равны 0

1. $f(t) = \dfrac{1}{t}$ - не выполняется второе условие,

разрыв второго рода при $t=0$

2. $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ - функция-оригинал,

справедлива оценка $|f(t)| < 1$

Примеры

3. $f(t)=e^{t^2}$ - не выполняется третье условие

4. $f(t)=t^n,\ n\in\mathbf{N}$ - функция-оригинал, показатель роста степенной функции равен нулю

Определение

Изображением оригинала *f(t)* называется функция *F(p)* комплексного переменного $p = s + i\sigma$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Интеграл в правой части этого равенства называют интегралом Лапласа.
Область сходимости несобственного интеграла – совокупность комплексных p, для которых интеграл имеет смысл

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Определение

- Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют преобразованием Лапласа

- Множество всех функций-оригиналов называется пространством оригиналов, совокупность всех функций-изображений – пространством изображений

Обозначения

Связь между функциями $f(t),\ F(p)$
называется соответствием между ними
и обозначается посредством знака соответствия

$$f(t) \div F(p) \qquad\qquad F(p) \div f(t)$$

Для обозначения преобразования Лапласа вводят символ

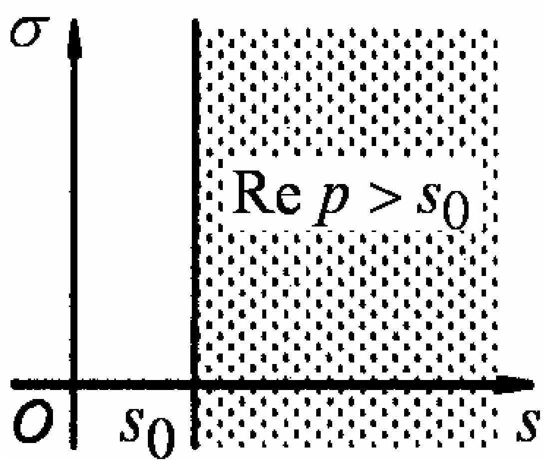
$$F(p) = L\{f(t)\}$$

Обратное преобразование Лапласа обозначается так

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$$

Теорема существования изображения

Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости ($s > s_0$)



Доказательство

Докажем первую часть теоремы. Абсолютная сходимость интеграла $F(p)$ следует из оценки

$$| f(t)e^{-pt} | = | f(t) || e^{-st} e^{-i\sigma t} | \leq M e^{s_0 t} e^{-st} = M e^{-(s-s_0)t}$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^\infty M e^{-(s-s_0)t} dt = M \left. \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \right|_0^\infty = \frac{M}{s-s_0} \quad \text{при} \quad s - s_0 > 0$$

Продолжение

Отсюда следует оценка модуля изображения

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|\,dt \le \frac{M}{s-s_0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{p\to\infty} F(p) = 0$$

при $p \to \infty$ по любой прямой составляющей острый угол с осью (т.е. с выполнением условия $\operatorname{Re} p = s \to \infty$)

Второе утверждение теоремы следует из возможности дифференцирования интеграла $F(p)$ по параметру и того факта, что для оригинала $f(t)$ функция $-t\,f(t)$ также является оригиналом с тем же показателем роста

$$F'(p) = \int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt$$

Следствие

Если $f(t) \div F(p) \Rightarrow \lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$

$F(p)$ - аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, то $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$ по любому направлению, образующему по модулю острый угол с осью s

Например, функции $F(p) = 5$, $F(p) = p^2$ не являются изображениями

Замечание

- Из аналитичности функции $F(p)$ следует, что все ее особые точки должны лежать левее прямой $Re\,p = s_0$ или на самой этой прямой. Функция $F(p)$, не удовлетворяющая этому условию, не является изображением

- Не является изображением, например, функция $F(p) = \mathrm{tg}\,p$ (ее особые точки расположены на всей оси s)

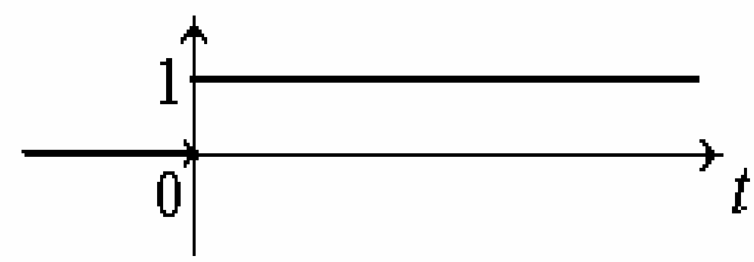
Теорема о единственности оригинала

Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны

Пример

Найти изображение
единичной функции Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$s = \operatorname{Re} p > 0 \quad (s_0 = 0)$$

Решение

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt=\lim_{B\to\infty}\int\limits_0^{B} e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{B\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^B=-\frac{1}{p}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-pB}-1\right)=\frac{1}{p}$$

т.к. $\left|e^{-pB}\right|=\left|e^{-sB}e^{-i\sigma B}\right|=e^{-sB}\left|\cos\sigma B-i\sin\sigma B\right|=$

$$=e^{-sB}\sqrt{\cos^2\sigma B+\sin^2\sigma B}=e^{-sB}\to 0,\ B\to\infty,\ s>0$$

$$\eta(t)\div\frac{1}{p}\quad\left(\operatorname{Re}p>0\right)$$

Пример. Найти изображение функции

$f(t) = e^{at}$, $a - const$ (комплексное число)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(p-a)t}\, dt =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)\cdot b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a}$$

$$(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a)$$

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$$

Пример. Найти изображение функции $f(t)=t$

$$\int_0^\infty t\cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}\,dt & v=-\frac{1}{p}e^{-pt} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^b - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{p}e^{-pb} - 0 - \frac{1}{p^2}e^{-pb} + \frac{1}{p^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty} be^{-pb} + \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\frac{b'}{(e^{pb})'} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$t \div \frac{1}{p^2}$$