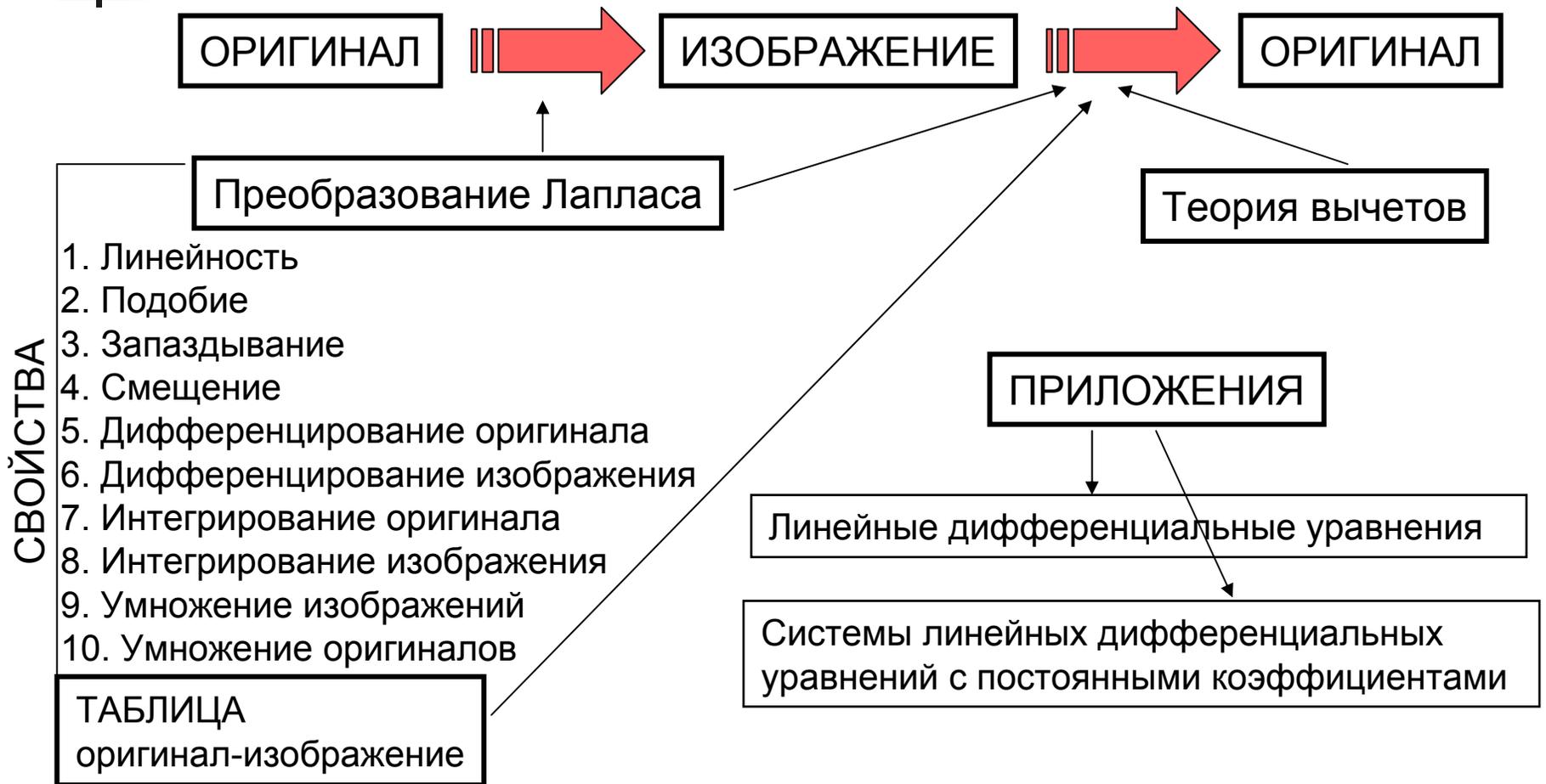


Приложения операционного исчисления

- Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений
- Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Элементы операционного исчисления

Схема курса



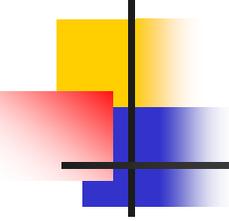
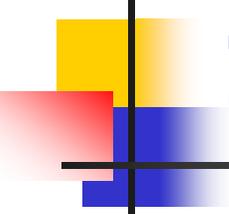


Схема решения задачи Коши с помощью преобразования Лапласа

- Преобразуют исходное дифференциальное уравнение из пространства оригиналов в пространство изображений
- Составляют для преобразованного уравнения операторное решение
- Восстанавливают оригинал – искомое решение заданного уравнения

... решения линейных дифференциальных уравнений



Задача Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Найти решение уравнения

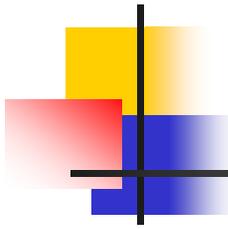
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, c_1, \dots, c_{n-1} — заданные числа

... решения линейных дифференциальных уравнений



Решение задачи Коши операционным методом

Запишем соответствие

$$y(t) \div Y(p), \quad f(t) \div F(p)$$

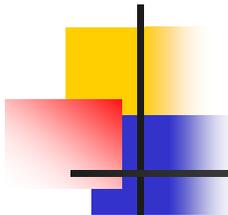
$$y'(t) \div pY(p) - y(0)$$

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) \quad \dots$$

$$y^{(n)}(t) \div p^n Y(p) - p^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

(по теореме об изображении производных)

... решения линейных дифференциальных уравнений



Продолжение

Используя теорему о дифференцировании оригинала, свойства линейности преобразования, начальные условия перейдем от исходного уравнения к операторному

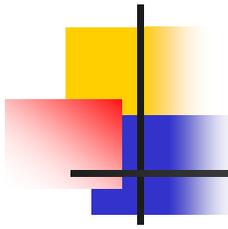
$$\left(p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \right) + \dots + \\ + a_{n-1} (pY(p) - y(0)) + a_n Y(p) = F(p)$$

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \right) Y(p) + G(p) = F(p)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$

$G(p)$ - многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных условий

... решения линейных дифференциальных уравнений



Операторное уравнение (продолжение)

Операторное уравнение

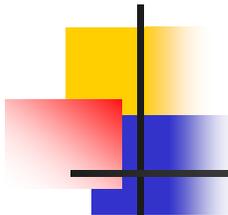
$$L(p)Y(p) + G(p) = F(p)$$

имеет решение $Y(p) = \frac{F(p) - G(p)}{L(p)}$

обращая которое, найдем оригинал – искомое решение задачи Коши

- если $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$, то $Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)}$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Пример

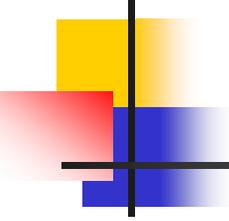
Решить операционным методом дифференциальное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 2, y'(0) = 6.$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Решение

Найдем изображение для каждого из слагаемых уравнения

$$y(t) \div Y \quad y'(t) \div pY - y(0) = pY - 2, \quad e^{3t} \div \frac{1}{p-3}.$$

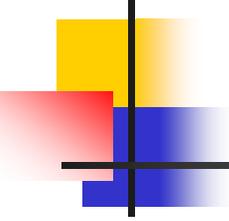
$$y''(t) \div p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

Запишем решение уравнения в операторной форме

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Переход к оригиналам. Способ 1

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Запишем разложение дроби на простейшие

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$$

$$2p^2 - 6p + 12 = A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-2)(p-1)$$

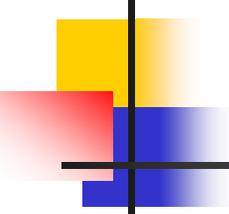
$$p=1 \Rightarrow 8 = 2A \Rightarrow A = 4$$

$$p=2 \Rightarrow 8 = -B \Rightarrow B = -8$$

$$p=3 \Rightarrow 12 = 2C \Rightarrow C = 6$$

$$y(t) = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Переход к оригиналам. Способ 2

Вторая теорема разложения $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$

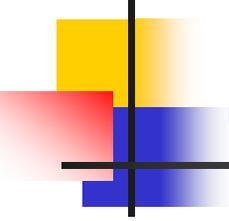
$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12$$

$$B'(p) = (p - 2)(p - 3) + (p - 1)(p - 3) + (p - 1)(p - 2)$$

$$y(t) = \frac{8}{(-1) \cdot (-2)} e^{1 \cdot t} + \frac{8}{1 \cdot (-1)} e^{2 \cdot t} + \frac{12}{2 \cdot 1} e^{3 \cdot t} =$$

$$= 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Применение свёртки к интегрированию дифференциальных уравнений

Решить задачу Коши для уравнения

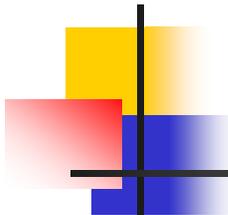
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t)$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Пусть $y(t) \div Y(p)$, $f(t) \div F(p)$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Продолжение

Используя теорему о дифференцировании оригинала, свойства линейности преобразования, перейдем от исходного уравнения к операторному

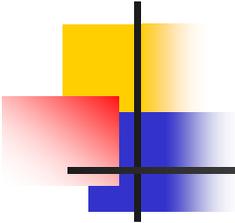
$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \right) Y(p) = F(p)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$

или

$$L(p)Y(p) = F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot F(p)$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Продолжение

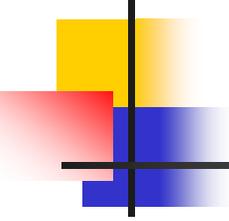
Пусть $\frac{1}{L(p)} \div R(t)$

Получим решение задачи Коши в виде

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot F(p) \div \int_0^t R(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau = y(t)$$

Формула позволяет записать **решение задачи Коши при нулевых начальных условиях**, не определяя изображение правой части $f(t)$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Пример

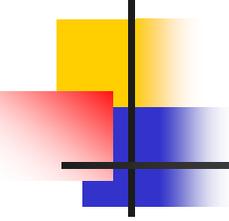
Найти решение $y(t)$ дифференциального уравнения

$$y'' = \operatorname{arctg} t$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = 0$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Решение

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме

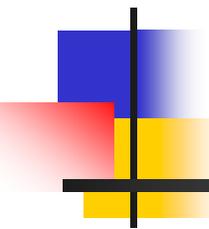
$$L(p)Y(p) = F(p)$$

где $L(p) = p^2 \Rightarrow \frac{1}{L(p)} = \frac{1}{p^2} \div R(t) = t$

Получим решение задачи Коши при нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * R(t) = \operatorname{arctg} t * t = \int_0^t \operatorname{arctg} \tau \cdot (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{t^2 - 1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2} \ln |1 + t^2| + \frac{t}{2} \end{aligned}$$

... решения линейных дифференциальных уравнений



Приложения операционного исчисления

- Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений
- Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Элементы операционного исчисления

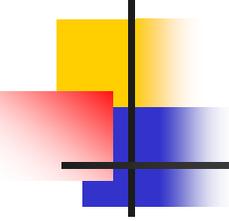
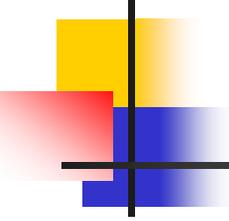


Схема решения систем дифференциальных уравнений

- Для заданной системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями составляется система линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций
- Из системы операторных уравнений определяются неизвестные изображения
- От найденных при решении операторных уравнений изображений переходят к оригиналам, используя методы и формулы, полученные для обращения изображения

... решения систем линейных дифференциальных уравнений



Пример

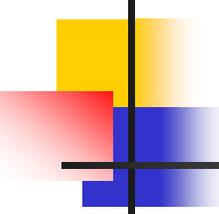
Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - x - y = -e^{2t}, \\ y' + 2x + 2y = e^t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

... решения систем линейных дифференциальных уравнений



Решение

Запишем соответствие

$$x = x(t) \div X(p) = X$$

$$x' \div pX - 0$$

$$y = y(t) \div Y(p) = Y$$

$$y' \div pY - 0$$

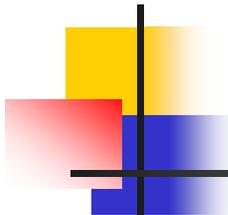
$$e^{2t} \div \frac{1}{p-2}$$

$$e^t \div \frac{1}{p-1}$$

$$\begin{cases} pX - X - Y = -\frac{1}{p-2} \\ pY + 2X + 2Y = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

Записав систему в операторной форме, после преобразований получим

... решения систем линейных дифференциальных уравнений



Продолжение

$$\begin{cases} (p-1)X - Y = -\frac{1}{p-2}, \\ 2X + (p+2)Y = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

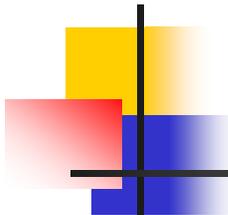
Решим систему по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 2 & p+2 \end{vmatrix} = (p-1)(p+2) + 2 = p^2 + 2p - p - 2 + 2 = p(p+1)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \frac{-1}{p-2} & -1 \\ \frac{1}{p-1} & p+2 \end{vmatrix} = -\frac{p+2}{p-2} + \frac{1}{p-1} = \\ &= \frac{-(p+2)(p-1) + p-2}{(p-1)(p-2)} = \frac{-p^2}{(p-1)(p-2)} \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{-1}{p-2} \\ 2 & \frac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p-1}{p-1} + \frac{2}{p-2} = \frac{p}{p-2}$$

... решения систем линейных дифференциальных уравнений



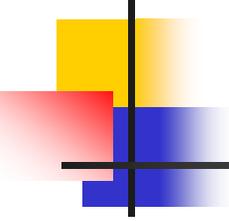
Продолжение

Определяется изображения

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-p^2}{(p-2)(p-1)p(p+1)} = \frac{-p}{(p-2)(p-1)(p+1)}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p}{(p-2)(p+1)p} = \frac{1}{(p-2)(p+1)}$$

... решения систем линейных дифференциальных уравнений



Продолжение

Находим оригиналы – решение задачи Коши для заданной системы

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{-pe^{pt}}{(p-1)(p+1)} + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{-pe^{pt}}{(p-2)(p+1)} + \\ + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{-pe^{pt}}{(p-2)(p-1)} = -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t}$$

$$y(t) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt}}{p+1} + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{e^{pt}}{p-2} = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

... решения систем линейных дифференциальных уравнений