Приложения операционного исчисления

- Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений
- Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема курса

ОРИГИНАЛ

ИЗОБРАЖЕНИЕ

ОРИГИНАЛ

Преобразование Лапласа

Теория вычетов

СВОЙСТВА

1. Линейность
2. Подобие
3. Запаздывание
4. Смещение
5. Дифференцирование оригинала
6. Дифференцирование изображения
7. Интегрирование оригинала
8. Интегрирование изображения
9. Умножение изображений
10. Умножение оригиналов

ТАБЛИЦА
оригинал-изображение

ПРИЛОЖЕНИЯ

Линейные дифференциальные уравнения

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема решения задачи Коши с помощью преобразования Лапласа

- Преобразуют исходное дифференциальное уравнение из пространства оригиналов в пространство изображений
- Составляют для преобразованного уравнения операторное решение
- Восстанавливают оригинал – искомое решение заданного уравнения

Задача Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Найти решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — заданные числа

Решение задачи Коши операционным методом

Запишем соответствие

$$y(t) \div Y(p), \qquad f(t) \div F(p)$$

$$y'(t) \div pY(p) - y(0)$$

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) \qquad \ldots$$

$$y^{(n)}(t) \div p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)$$

(по теореме об изображении производных)

… решения линейных дифференциальных уравнений

Продолжение

Используя теорему о дифференцировании оригинала, свойства линейности преобразования, начальные условия перейдем от исходного уравнения к операторному

$$\left(p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)\right) + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}\left(pY(p) - y(0)\right) + a_n Y(p) = F(p)$$

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) Y(p) + G(p) = F(p)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$

$G(p)$ - многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных условий

Операторное уравнение
(продолжение)

Операторное уравнение

$$L(p)Y(p)+G(p)=F(p)$$

имеет решение $Y(p)=\dfrac{F(p)-G(p)}{L(p)}$

обращая которое, найдем оригинал – искомое решение задачи Коши

- если $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$, то $Y(p)=\dfrac{F(p)}{L(p)}$

Пример

Решить операционным методом дифференциальное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 2, y'(0) = 6.$$

Решение

Найдем изображение для каждого из слагаемых уравнения

$$y(t) \div Y \qquad y'(t) \div pY - y(0) = pY - 2, \qquad e^{3t} \div \frac{1}{p-3}.$$

$$y''(t) \div p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

Запишем решение уравнения в операторной форме

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Переход к оригиналам. Способ 1

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Запишем разложение дроби на простейшие

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$$

$$2p^2 - 6p + 12 = A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-2)(p-1)$$

$$p = 1 \;\Rightarrow 8 = 2A \;\Rightarrow A = 4$$

$$p = 2 \;\Rightarrow 8 = -B \;\Rightarrow B = -8$$

$$p = 3 \;\Rightarrow 12 = 2C \;\Rightarrow C = 6$$

$$y(t) = 4e^{t} - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

Переход к оригиналам. Способ 2

Вторая теорема разложения $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$

$$A(p)=2p^2-6p+12$$

$$B'(p)=(p-2)(p-3)+(p-1)(p-3)+(p-1)(p-2)$$

$$y(t)=\frac{8}{(-1)\cdot(-2)}e^{1\cdot t}+\frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t}+\frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t}=$$

$$=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}$$

Применение свёртки к интегрированию дифференциальных уравнений

Решить задачу Коши для уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Пусть $y(t) \div Y(p), \qquad f(t) \div F(p)$

Продолжение

Используя теорему о дифференцировании оригинала, свойства линейности преобразования, перейдем от исходного уравнения к операторному

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) Y(p) = F(p)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$

или

$$L\left(p\right) Y(p) = F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{L\left(p\right)} \cdot F(p)$$

Продолжение

Пусть $$\frac{1}{L(p)} \div R(t)$$

Получим решение задачи Коши в виде

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot F(p) \div \int_0^t R(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau = y(t)$$

Формула позволяет записать решение задачи Коши при нулевых начальных условиях, не определяя изображение правой части *f(t)*

Пример

Найти решение $y(t)$ дифференциального уравнения

$$y'' = \operatorname{arctg} t$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Решение

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме

$$L(p)Y(p)=F(p)$$

где $L(p)=p^2 \Rightarrow \dfrac{1}{L(p)}=\dfrac{1}{p^2}\div R(t)=t$

Получим решение задачи Коши при нулевых условиях

$$y(t)=f(t)*R(t)=\operatorname{arctg}t*t=\int_0^t \operatorname{arctg}\tau\cdot(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2}\ln\left|1+t^2\right|+\frac{t}{2}$$

Приложения операционного исчисления

- Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений
- Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема решения систем дифференциальных уравнений

- Для заданной системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями составляется система линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций
- Из системы операторных уравнений определяются неизвестные изображения
- От найденных при решении операторных уравнений изображений переходят к оригиналам, используя методы и формулы, полученные для обращения изображения

Пример

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - x - y = -e^{2t}, \\ y' + 2x + 2y = e^{t}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

Решение

Запишем соответствие

$$x = x(t) \div X(p) = X \qquad x' \div pX\text{-}0$$

$$y = y(t) \div Y(p) = Y \qquad y' \div pY\text{-}0$$

$$e^{2t} \div \frac{1}{p-2}$$

$$e^{t} \div \frac{1}{p-1}$$

$$\begin{cases} pX - X - Y = -\dfrac{1}{p-2} \\ pY + 2X + 2Y = \dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

Записав систему в операторной форме, после преобразований получим

$$\begin{cases}(p-1)X-Y=-\dfrac{1}{p-2},\\ 2X+(p+2)Y=\dfrac{1}{p-1}\end{cases}$$

Продолжение

Решим систему по правилу Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-1 & -1\\ 2 & p+2\end{vmatrix}=(p-1)(p-2)+2=p^2+2p-p-2+2=p(p+1)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\dfrac{-1}{p-2} & -1\\ \dfrac{1}{p-1} & p+2\end{vmatrix}=-\frac{p+2}{p-2}+\frac{1}{p-1}=$$

$$=\frac{-(p+2)(p-1)+p-2}{(p-1)(p-2)}=\frac{-p^2}{(p-1)(p-2)}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}p-1 & \dfrac{-1}{p-2}\\ 2 & \dfrac{1}{p-1}\end{vmatrix}=\frac{p-1}{p-1}+\frac{2}{p-2}=\frac{p}{p-2}$$

Продолжение

Определяется изображения

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-p^2}{(p-2)(p-1)p\left(p+1\right)}=\frac{-p}{(p-2)(p-1)\left(p+1\right)}$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p}{(p-2)(p+1)p}=\frac{1}{(p-2)(p+1)}$$

Продолжение

Находим оригиналы – решение задачи Коши для заданной системы

$$x(t)=\lim_{p\to 2}\frac{-pe^{pt}}{(p-1)(p+1)}+\lim_{p\to 1}\frac{-pe^{pt}}{(p-2)(p+1)}+$$

$$+\lim_{p\to -1}\frac{-pe^{pt}}{(p-2)(p-1)}=-\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-t}$$

$$y(t)=\lim_{p\to 2}\frac{e^{pt}}{p+1}+\lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}}{p-2}=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}$$