

# Типовые задачи для подготовки к экзамену в 3-м семестре

## Квантовая оптика (черное излучение, давление света, фотоэффект, эффект Комптона)

### Черное излучение

1. Электрическая лампочка, потребляющая мощность 25 Вт заключена в бумажный абажур, имеющий форму шара радиусом  $R=15$  см. До какой температуры нагреется абажур? Считать, что вся потребляемая лампой мощность идет на излучение, абажур и лампочка излучают как серое тело с коэффициентом поглощения  $a=0.8$
2. Вследствие изменения температуры тела максимум его спектральной энергетической светимости переместился с длины волны  $\lambda_1=2.5$  мкм до  $\lambda_2=0.125$  мкм. Считая тело абсолютно черным, определить во сколько раз изменилась: а) температура тела; б) максимальное значение спектральной энергетической светимости; в) интегральная энергетическая светимость.
3. Имеются две полости 1 и 2 с малыми отверстиями одинакового радиуса  $r = 5,0$  мм и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Полости отверстиями обращены друг к другу, причём расстояние между этими отверстиями  $l= 100$  мм. В полости 1 поддерживают температуру  $T_2 = 1250$  К. Найти установившуюся температуру в полости 2.
4. Шарик радиусом  $R=1$  см нагрет до температуры  $T=1000$  К. Считая излучение шарика черным определить до какой температуры нагреется другой такой же шарик, находящийся на расстоянии  $L=10$  м от первого, если температура первого шарика поддерживается постоянной.
5. Вычислить с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн, отличающихся не более чем на 0.5 % от наиболее вероятной длины волны при  $T=2000$  К.
6. При увеличении термодинамической температуры  $T$  абсолютно черного тела в два раза длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на  $\Delta\lambda_m =400$  нм. Определить начальную и конечную температуры  $T_1$  и  $T_2$ .
7. Распределение (по частотам) энергии в спектре излучения абсолютно черного тела было эмпирически установлено Вином  $r(\omega, T) = \alpha\omega^3 \exp(-\beta\omega/T)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные ( $\beta= 7,61 \cdot 10^{-12}$  сК). Используя эту формулу найти частоту  $\omega_m$ , на которую приходится максимум энергии излучения при температуре  $T = 1000$  К.
8. Вином была получена эмпирическая формула распределения (по длинам волн) энергии в спектре излучения абсолютно черного тела  $r(\lambda, T) = C_1\lambda^{-5} \exp(-C_2/(\lambda T))$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные ( $C_2 = 1,43 \cdot 10^{-2}$  мК). Получить, используя приведенную формулу, закон смещения Вина и определить постоянную  $b$  в законе смещения.

9. Температура  $T$  абсолютно черного тела равна 2000 К. Определить: 1) спектральную плотность энергетической светимости  $r(\lambda, T)$  для длины волны  $\lambda = 600$  нм; 2) энергетическую светимость  $R$  в интервале длин волн от  $\lambda_1 = 590$  нм до  $\lambda_2 = 610$  нм. Принять, что средняя спектральная плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для длины волны  $\lambda = 600$  нм.

10. Радиус земной орбиты в 215 раз больше радиуса Солнца. Солнечная освещенность земной поверхности составляет  $1400 \text{ Вт/м}^2$ . Считая Землю и Солнце черными телами, найти: а) температуру поверхности Солнца; б) температуру поверхности Земли.

### Давление света

1. Монохроматический пучок света ( $\lambda = 4900 \text{ \AA}$ ), падая нормально на поверхность, производит давление на нее, равное  $5 \times 10^{-7} \text{ Дж/м}^3$ . Сколько квантов света падает каждую секунду на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света  $\rho = 0.25$ .

2. Параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 662 \text{ нм}$ ) падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление  $p = 0,3 \text{ мкПа}$ . Определить концентрацию  $n$  фотонов в световом пучке.

3. Монохроматическое излучение с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$  падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой  $F = 10^{-8} \text{ Н}$ . Определить число  $N$  фотонов, каждую секунду падающих на эту поверхность.

4. Лазерное излучение длиной волны  $\lambda = 550 \text{ нм}$ , интенсивности  $I = 10 \text{ Вт/м}^2$  освещает под углом  $\theta = 30^\circ$  зеркальце площадью  $S = 5 \text{ мм}^2$ . Сколько фотонов каждую секунду падает на поверхность зеркальца? Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, испытываемую зеркальцем.

5. Некоторая поверхность поочередно освещается синим ( $\lambda_1 = 400 \text{ нм}$ ) и красным ( $\lambda_2 = 700 \text{ нм}$ ) светом. Во сколько раз давление синего света больше давления красного света, если число фотонов в обоих пучках одинаково? Чему равно отношение интенсивностей обоих пучков.

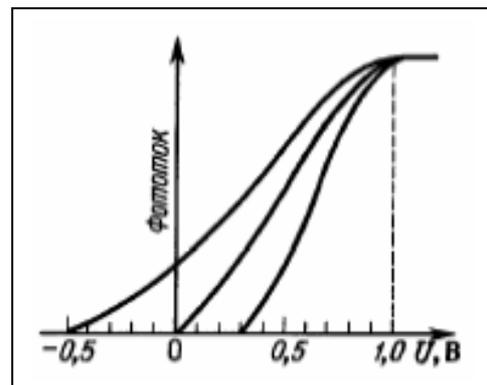
6. Мощность точечного источника монохроматического света  $P_0 = 10 \text{ Вт}$  на длине волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток 60 фотонов в секунду? Диаметр зрачка  $d_{\text{зр}} = 0,5 \text{ см}$ .

7. В идеальных условиях порог чувствительности глаза человека к излучению длиной волны  $540 \text{ нм}$  составляет 100 фотонов/с. Какой поглощаемой мощности это соответствует? Какой минимальной мощностью должен обладать точечный источник света, чтобы его можно было увидеть с расстояния  $1000 \text{ м}$ ? Диаметр зрачка глаза принять  $d_{\text{зр}} = 0,5 \text{ см}$ .

## Фотоэффект

1. Максимальная скорость  $v_{max}$  фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его  $\gamma$ -фотонами, равна  $2,91 \times 10^8$  м/с. Определить энергию  $\varepsilon$   $\gamma$ -фотонов.

2. Никелевый шарик, играющий роль внутреннего электрода сферического вакуумного фотоэлемента, освещают моноэнергетическим электромагнитным излучением различных длин волн. Полученные графики зависимости фототока от подаваемого напряжения  $U$  показаны на рисунке. Найти с помощью этих графиков: а) соответствующие длины волн; б) контактную разность потенциалов; в) полярность контактной разности потенциалов (знак заряда фотоэлектрода)



3. При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемой электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda_0$ , прекращается. Изменив длину волны в 1,5 раза, установили, что для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в 2 раза. Вычислить  $\lambda_0$ .

4. Найти работу выхода с поверхности некоторого металла, если при поочерёдном освещении его электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 0,35$  мкм и  $\lambda_2 = 0,54$  мкм максимальные скорости фотоэлектронов отличаются в 2 раза.

5. При последовательном освещении катода светом с частотой  $\nu = 1,0 \times 10^{15}$  Гц и  $\nu' = 1,4 \times 10^{15}$  Гц показания вольтметра, при которых фототок прекращался, оказались  $V_1 = -0,40$  В и  $V' = -2,0$  В. Найти из этих данных постоянную Планка.

6. Ток, возникающий в цепи вакуумного фотоэлемента при освещении цинкового электрода электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda = 262$  нм, прекращается, когда внешняя разность потенциалов (показания вольтметра) достигает значения  $V_1 = -1,5$  В. Имея в виду, что работа выхода электрона с поверхности цинка  $A = 3,74$  эВ, определить значение и полярность внешней контактной разности потенциалов между катодом и анодом данного фотоэлемента.

## Эффект Комптона

1. Энергия  $\varepsilon$  падающего фотона равна энергии покоя электрона. Определить энергию, полученную электроном отдачи, если угол рассеяния  $\theta$  равен  $180^\circ$ .

2. Угол рассеяния  $\theta$  фотона на свободном электроне равен  $90^\circ$ . Угол отдачи  $\varphi$  электрона равен  $30^\circ$ . Определить энергию  $\varepsilon$  падающего фотона.

3. Фотон с энергией  $\varepsilon$  рассеялся под углом  $\theta$  на покоившемся свободном электроне. Определить угол  $\varphi$ , под которым вылетел электрон отдачи относительно направления налетевшего фотона.

4. При облучении вещества рентгеновским излучением с некоторой длиной волны  $\lambda$  обнаружили, что максимальная кинетическая энергия релятивистских электронов отдачи равна  $K_m$ . Определить  $\lambda$ . Указание: все импульсы должны быть коллинеарны.

5. Фотон с длиной волны  $\lambda$  рассеялся на движущемся свободном электроне, после чего электрон остановился, а фотон отклонился от первоначального направления движения на угол  $\theta$ . Найти изменение длины волны фотона  $\Delta\lambda$ .
6. Фотон с энергией  $\varepsilon$  рассеялся на движущемся свободном электроне, после чего электрон остановился, а фотон стал двигаться в обратном направлении. Найти энергию  $\varepsilon'$  рассеянного фотона.

## Квантовая механика

### Теория Бора водородоподобных атомов

1. Атом водорода, находившийся первоначально в состоянии покоя, испустил фотон при переходе из первого возбужденного состояния в основное. Найти изменение длины волны испущенного фотона, обусловленное движением атома.
2. Атом водорода, находившийся первоначально в состоянии покоя, испустил фотон при переходе из первого возбужденного состояния в основное. Найти скорость атома водорода, обусловленную отдачей испущенного фотона.
3. Для атомарного водорода вычислить минимальную разрешающую способность  $\delta\lambda/\lambda$  спектрального прибора, при которой можно разрешить первые  $N=15$  линий серии Бальмера
4. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только шесть спектральных линий. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
5. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией 12.5 эВ?
6. В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108,5 нм. Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов.
7. Энергия связи электрона в атоме He равна 24.6 эВ. Найти энергию, необходимую для последовательного удаления обоих электронов из этого атома.
8. Найти квантовое число  $n$ , соответствующее возбужденному состоянию иона  $\text{He}^+$ , если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длинами волн 108.5 и 30.4 нм.
9. В спектре некоторых водородоподобных ионов известны длины волн трех линий, принадлежащих одной и той же серии: 99.2, 108.5 и 121.5 нм. Какие еще спектральные линии можно предсказать с помощью этих линий?
10. Вычислить длину волны  $\lambda$  спектральной линии атомарного водорода, частота которой равна разности частот следующих двух линий серии Лаймана:  $\lambda_1 = 102,60$  нм и  $\lambda_2 = 97,27$  нм. Какой серии принадлежит данная линия?

11. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями Бальмера и Пашена равна 148 нм?
12. Ионы атома гелия облучаются фотонами длиной волны 24 нм. В результате поглощения этих фотонов ионы гелия переходят в возбужденное состояние. Сколько спектральных линий и каких длин волн будет наблюдаться при переходе ионов гелия в основное состояние?
13. При каком наименьшем значении приращения внутренней энергии иона  $\text{He}^+$ , находящегося в основном состоянии, он смог бы испустить фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера?
14. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями Бальмера и Лаймана равна 59.3 нм?
- 15.

### Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Волны де Бройля.

1. О траектории квантовой частицы можно говорить, если ее продольный импульс  $p$  много больше неопределенности поперечного импульса  $\Delta p$  ( $p \gg \Delta p$ ). С помощью принципа неопределенности покажите, что при выполнении этого условия область локализации частицы в поперечном направлении  $\Delta x \gg \lambda/2\pi$ , где  $\lambda = h/p$  — дебройлевская длина волны частицы. Покажите, что оба эти условия ( $p \gg \Delta p$  и  $\Delta x \gg \lambda/2\pi$ ) выполняются для электрона в камере Вильсона, прямолинейная траектория которого представляет цепочку малых капелек тумана размером  $d = 1$  мкм. Кинетическую энергию электрона принять равной  $K = 1$  кэВ.
2. Найти ширину дифракционного пятна  $\Delta x$  и разброс поперечного импульса  $\Delta p$  при дифракции молекул фуллерена  $\text{C}_{60}$ , ( $d = 1$  нм,  $m = 720 m_p$ ), скорость которых соответствует температуре  $T = 1000$  К, на щели, ширина которой составляет 0.05 мкм. Расстояние от щели до экрана  $L = 1.5$  м.
3. Используя соотношение неопределенностей  $\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$ , найти расстояние электрона от ядра и энергию связи электрона в основном состоянии.
4. Пусть в начальный момент времени квантовая частица заперта в кубе со стороной  $a = 0.1$  нм. С помощью соотношения неопределенностей оценить минимальный разброс по скоростям  $\Delta v$  этой частицы. Оценить область локализации этой частицы через время  $t = 1$  с после того как стенки куба будут удалены и частица станет свободной. Расчеты провести для протона.
5. Протон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна  $a = 10^{-15}$  м. С помощью соотношения неопределенностей оцените наименьшую кинетическую энергию протона.
6. Используя соотношение неопределенностей  $\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$ , оценить минимальную кинетическую энергию протона в ядре. Принять линейные размеры ядра  $a \approx 5 \times 10^{-15}$  м, соответственно.
7. Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку малых капелек тумана, размер которых  $d = 10$  мкм. Считая, что траектория образована электроном с энергией  $K = 100$  эВ, определить его дебройлевскую длину

волны и отношение  $\Delta p/p$ , где  $\Delta p$ - неопределенность импульса электрона,  $p$ - импульс электрона.

8. С какой скоростью движется электрон, если его дебройлевская длина волны  $\lambda$  равна его комптоновской дине волны  $\lambda_c$ ?
9. Во сколько раз изменилась кинетическая энергия электрона, если его дебройлевская длина волны  $\lambda$  уменьшилась  $n=2$  раза? Расчет провести в двух случаях: а) электрон нерелятивистский; б) электрон релятивистский.
10. Параллельный пучок нерелятивистских электронов, ускоренных разностью потенциалов  $V=1$  кВ, падает на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми  $d=1$  мкм. Определить расстояние между соседними максимумами интерференционной картины на экране, расположенном на расстоянии  $L=1$  м от щелей.
11. Вычислить длину волны де Бройля для: электрона в ускорительном пучке, энергия которого равна  $10^9$  эВ.
12. С помощью соотношения неопределенностей оценить энергию основного состояния электрона в двукратно ионизированном атоме лития.
13. Вычислить длину волны де Бройля для электрона ( $m_e=0.9 \times 10^{-30}$  кг), прошедшего разность потенциалов  $V=10$  кВ, 500 кВ;
14. Ускоряющее напряжение на электронно лучевой трубке  $U=10$  кВ. Расстояние от электронной пушки до экрана  $l=20$  см. След электронного луча на экране имеет диаметр  $d=0.5$  мм. Оценить неопределенность: а) поперечного импульса электрона; б) координаты электрона на экране.
15. Вычислить длину волны де Бройля для: теплового нейтрона ( $r_n \approx 10^{-15}$  м;  $m_n=1.67 \times 10^{-27}$  кг) скорость которого соответствует температуре  $T=300$  К;
16. При каком значении кинетической энергии  $K$  дебройлевская длина волны  $\lambda$  релятивистского электрона равна его комптоновской длине волны  $\lambda_c$ ?

## Уравнение Шредингера

### Частица в одномерном потенциальном поле

1. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 \leq x \leq a$ ) находится частица массой  $m$  в состоянии  $\psi(x) = A(1 - \cos(2\pi x/a))$ . Чему равно среднее значение импульса в этом состоянии?  
Какова вероятность того, что энергия в этом состоянии равна  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ ?
2. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 \leq x \leq a$ ) находится частица массой  $m$ . Определить вероятность нахождения частицы с энергией  $8\pi^2 \hbar^2 / ma^2$  в области  $a/3 \leq x \leq 2a/3$ .

3. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 \leq x \leq a$ ) находится частица массой  $m$  в состоянии  $\Psi = Ax(a-x)$ . Чему равно среднее значение импульса в этом состоянии? Какова вероятность того, в этом состоянии энергия равна  $2\pi^2\hbar^2 / ma^2$ ?
4. Частица находится в состоянии, характеризующимся квантовым числом  $n=4$  в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $a=3 \times 10^{-10}$  м с бесконечно высокими стенками. Вычислить средние значения следующих величин:  $x^2$ ,  $p$ ,  $x$ ,  $p^2$ .
5. Частица массы  $m$  находится в некотором одномерном потенциальном поле  $U(x)$  в стационарном состоянии, для которого волновая функция при  $x > 0$  имеет вид  $\psi(x) = Ax \exp(-\alpha x)$ , где  $A$  и  $\alpha > 0$  - заданные постоянные. Имея в виду, что  $\psi = 0$  при  $x < 0$  и считая постоянной  $\alpha$  заданной, найти постоянную  $A$  и точку, в которой вероятность обнаружить частицу максимальна.
6. Частица массы  $m$  находится в некотором одномерном потенциальном поле  $U(x)$  в стационарном состоянии, для которого волновая функция имеет вид  $\psi(x) = A \exp(-\alpha x^2)$ , где  $A$  и  $\alpha > 0$  - заданные постоянные. Имея в виду, что  $U(0) = 0$ , найти с помощью уравнения Шредингера  $U(x)$  и энергию  $E$  частицы.
7. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Найти вероятность пребывания частицы в области  $l/3 < x < 2l/3$ .
8. Определить ширину  $a$  одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона со второго энергетического уровня на первый излучается энергия 1 эВ. Как изменится излучаемая энергия, если ширину барьера увеличить в 10 раз?
9. В одномерной потенциальной яме ширины  $L=1$  нм с непроницаемыми стенками находятся три электрона. Пренебрегая взаимодействием электронов между собой и пользуясь принципом Паули, вычислить энергию основного и первого возбужденного состояния этой системы. Чему равен полный спин системы в этих состояниях?
10. Найти решение временного уравнения Шредингера  $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$  для свободной частицы массы  $m$ , движущейся с импульсом  $p$  в положительном направлении оси  $x$ .
11. Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы в этом состоянии равно  $P_m$ . Найти ширину ямы  $l$  и энергию  $E$  частицы.
12. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна  $l$  и такова, что энергетические уровни расположены весьма густо. Найти плотность этих уровней  $dN/dE$ , т. е. их число на единичный интервал энергии, в зависимости от  $E$ . Вычислить  $dN/dE$ , если  $E = 1,0$  эВ и  $l = 1,0$  см.

13. Частица массы  $m$  находится в двумерной квадратной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона ямы равна  $l$ . Уровни энергии в такой яме определяются выражением  $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2)$ , где  $n_1, n_2$  - положительные целые числа. Определите каким значениям  $n_1, n_2$  и энергиям (в единицах  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$ ) соответствуют первые семь уровней энергии в этой яме. Какое максимальное число электронов может находиться на этих семи уровнях.
14. Частица массы  $m$  находится в трехмерной кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна  $l$ . Уровни энергии в такой яме определяются выражением  $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$ , где  $n_1, n_2, n_3$  - положительные целые числа. Определите каким значениям  $n_1, n_2, n_3$  и энергиям (в единицах  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$ ) соответствуют первые семь уровней энергии в этой яме. Какое максимальное число электронов может находиться на этих семи уровнях.

#### Атом водорода. Волновые функции.

- Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода имеет вид  $\Psi(r) = \left(1/\sqrt{\pi a^3}\right) e^{-r/a}$ , где  $a=0.53 \times 10^{-8}$  см- первый борковский радиус. Найти в этом состоянии среднее значение кулоновской силы между электроном и ядром.
- Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(r) = A e^{-r/a}$ . Найти: а) нормировочный коэффициент  $A$ ; б) энергию  $E$  электрона и  $a$  (с помощью уравнения Шредингера).
- Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(r) = A e^{-r/a}$ . Найти: а) постоянную  $A$ ; б) наиболее вероятное расстояние электрона от ядра  $r_0$ ; в) среднее расстояние электрона от ядра  $\langle r \rangle$ ; г) нарисовать качественный график зависимости плотности вероятности от расстояния до ядра.
- Вычислить расстояние электрона  $r_1$  от ядра на которых вероятность обнаружить электрон имеет максимумы, если его волновая функция есть:  $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$ , где  $a$ -радиус первой борвской орбиты. Построить качественный график распределения плотности вероятности  $r^2 |\Psi(r)|^2$  от  $r$ .

5. В возбужденном состоянии атома водорода волновая функция электрона имеет вид  $\psi(r) = (32\pi a^3)^{-1/2} (r/a) \exp(-r/2a) \cos\theta$ , где  $a$  - первый боровский радиус. Найти: а) наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром в направлении  $\theta = 45^\circ$ ;
6. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(r) = Ae^{-r/a}$ . Найти: а) наиболее вероятное расстояние электрона от ядра  $r_0$ ; б) вероятность нахождения электрона в области  $r < r_0$ ; в) вероятность нахождения электрона вне классических границ поля; ж) нарисовать качественный график зависимости плотности вероятности от расстояния до ядра.
7. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(r) = A(1 + br)e^{-\alpha r}$ . Найти: а) нормировочный коэффициент  $A$ ; б) энергию  $E$  электрона и постоянные  $b$  и  $\alpha$  (с помощью уравнения Шредингера); в) расстояние электрона  $r_1$  от ядра на которых вероятность обнаружить электрон имеет максимумы; г) расстояние электрона  $r_2$  от ядра на которых вероятность обнаружить электрон равна нулю; д) построить графики зависимости  $|\Psi(r)|^2$  и  $r^2 |\Psi(r)|^2$  от  $r$ .

### Рассеяние на потенциальной ступеньке и на потенциальном барьере

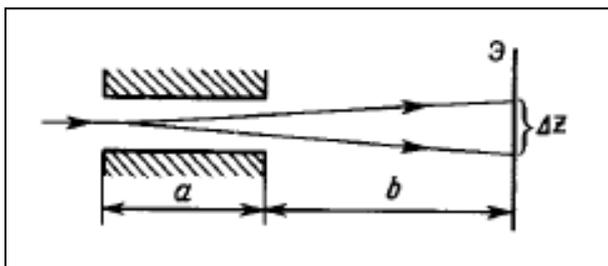
1. Частица с массой  $m$  и энергией  $E$  падает на абсолютно непроницаемый потенциальный барьер:  $U=0$  при  $x < 0$ ,  $U=\infty$  при  $x \geq 0$ . Найти распределение плотности вероятности нахождения частицы в пространстве.
2. Частица с кинетической энергией  $E=100$  эВ рассеивается на потенциальной ступеньке: 
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$
 где  $U_0=30$  эВ. Какой вид (зависимость от  $x$ ) будет иметь волновая функция частицы при  $x > 0$  и при  $x < 0$ ? Какой вид (зависимость от  $x$ ) будет иметь плотность вероятности обнаружения частицы при  $x > 0$  и при  $x < 0$ . Чему будет равна кинетическая энергия частицы при  $x > 0$ ?
3. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину  $d=0.7$  нм. Протон с энергией  $E=5$  эВ падает на барьер, высота которого  $U_0=6$  эВ. Вычислить: а) длину волны де Бройля падающего протона; б) коэффициент прохождения протона сквозь барьер.
4. Электрон с энергией  $E=10$  эВ падает на потенциальную ступеньку высотой  $U=6$  эВ. Вычислить коэффициенты отражения и прохождения электрона. Во сколько раз изменится скорость электрона и его длина волны де Бройля при прохождении ступеньки?
5. Частица с кинетической энергией  $E=100$  эВ рассеивается на потенциальном барьере: 
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < d \\ 0 & x < 0; x > d \end{cases},$$
 где  $U_0=150$  эВ. Какой вид (зависимость от  $x$ ) будет иметь волновая функция частицы при  $x < 0$ , под барьером, при  $x > d$ ? Какой вид (зависимость от  $x$ ) имеет вероятность обнаружить частицу в области  $x < 0$ , в области  $0 < x < d$ , в области  $x > d$ ?. Чему будет равна кинетическая энергия частицы при  $x > d$ ?

6. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину  $d=0.7$  нм. Электрон с энергией  $E=5$  эВ падает на барьер, высота которого  $U_0=6$  эВ. Вычислить: а) длину волны де Бройля падающего электрона; б) коэффициент прохождения электрона сквозь барьер.
7. Электрон с энергией  $E=100$  эВ падает слева на потенциальный барьер высотой  $U_0=200$  эВ и шириной  $d=0.1$  нм. Вычислить вероятность прохождения электрона сквозь барьер. Нарисовать качественный график зависимости от координаты плотности вероятности волновой функции слева от барьера, под барьером и справа от барьера.
8. Электрон с энергией  $E=10$  эВ движется в положительном направлении оси  $x$  в потенциальном поле:  $U=0$  при  $x<0$ ,  $U=U_0=9$  эВ при  $x>0$ . Определить коэффициент отражения  $R$ . Чему равна плотность вероятности обнаружить частицу при  $x>0$ ?
9. Пусть на прямоугольный барьер шириной  $d=0.7$  нм и высотой  $U_0=6$  эВ падает поток электронов с энергией  $E=5$  эВ и скоростью соответствующую току в 1 кА. Сколько времени (в среднем) вам придется ждать пока через барьер пройдет хотя бы одна частица.

### Атом в магнитном поле

1. Атом находится в магнитном поле с индукцией  $B = 3,00$  кГс. Определить: полное расщепление в электронвольтах термина  $^1D$ .
2. Нарисовать схему возможных переходов и определить расщепление в магнитном поле спектральной линии перехода  $^1F \rightarrow ^1D$ .
3. Нарисовать схему возможных переходов и определить расщепление в магнитном поле спектральной линии перехода  $^1D \rightarrow ^1P$ .

### Опыт Штерна-Герлаха



1. Узкий пучок атомов рубидия ( $Z=37$ ,  $M=85 m_p$ ) в основном состоянии пропускают по методу Штерна-Герлаха через поперечное резкое неоднородное магнитное поле протяженностью  $a=10$  см. На экране, отстоящем от магнита на расстоянии  $b=20$  см, наблюдают расщепление пучка на два. Расстояние между крайними компонентами расщепленного пучка  $\Delta z=4$  мм. Скорость атомов рубидия равна 500 м/с. Определить силу  $F$  (с выводом соответствующей формулы), действующую на атомы рубидия.

- Узкий пучок атомов цезия ( $Z=55$ ,  $M=133 m_p$ ) в основном состоянии пропускают по методу Штерна-Герлаха через поперечное резко неоднородное магнитное поле протяженностью  $a=10$  см. Расщепление пучка на две компоненты наблюдают на экране, отстоящем от магнита на расстоянии  $b=10$  см. Скорость атомов цезия равна 300 м/с. При каком значении градиента индукции магнитного поля расстояние между компонентами расщепленного пучка будет составлять  $\Delta z = 6$  мм? Дать вывод соответствующей формулы.
- В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов водорода ( $Z=1$ ,  $M=m_p$ ) (в нормальном состоянии) проходит через поперечное резко неоднородное магнитное поле и попадает на экран Э (см. Рис). Определить расстояние  $\Delta z$  на экране, если  $dV/dz=2 \times 10^3$  Тл/м,  $a=10$  см,  $b=20$  см и скорость атомов  $v = 1000$  м/с. Дать вывод соответствующей формулы.
- Узкий пучок атомов серебра ( $Z=47$ ,  $M=108 m_p$ ) в основном состоянии пропускают по методу Штерна-Герлаха через поперечное резко неоднородное магнитное поле протяженностью  $a=5$  см. Расщепление пучка на две компоненты наблюдают на экране, отстоящем от магнита на расстоянии  $b=15$  см. Кинетическая энергия атомов  $K=20$  мэВ. При каком значении градиента индукции магнитного поля расстояние между крайними компонентами расщепленного пучка будет составлять  $\Delta z=2$  мм? Дать вывод соответствующей формулы.

## Твердое тело

### Электроны в металлах. Распределение Ферми.

- Определить отношение концентрации  $n_{\max}$  электронов в металле (при  $T = 0$  К), энергия которых отличается от максимальной не более чем на  $\Delta \epsilon$ , к концентрации  $n_{\min}$  электронов, энергии которых не превышают значения  $\epsilon = \Delta \epsilon$ ;  $\Delta \epsilon$  принять равным  $0,01 E_F$ .
- Вычислить среднюю кинетическую энергию  $\langle \epsilon \rangle$  электронов в металле при температуре  $T=0$  К, если уровень Ферми  $E_F = 7$  эВ.
- Определить вблизи уровня Ферми интервал энергий  $\Delta \epsilon$  (в эВ) между соседними энергетическими уровнями электронов в кристаллике цезия объемом  $V = 1$  мм<sup>3</sup> при температуре  $T=0$  К. При расчетах принять, что на каждый атом цезия приходится один свободный электрон.
- Вычислить наиболее вероятную и среднюю скорости свободных электронов в меди при температуре 0 К, если известно, что их концентрация равна  $8,5 \times 10^{22}$  см<sup>-3</sup>.
- Выразить среднюю скорость  $\langle v \rangle$  электронов в металле при  $T = 0$  К через максимальную скорость  $v_{\max}$ . Вычислить  $\langle v \rangle$  для металла, уровень Ферми  $E_F$  которого при  $T = 0$  К равен 6 эВ.

6. Выразить среднюю квадратичную скорость  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  электронов в металле при  $T = 0$  К через максимальную скорость  $v_{max}$  электронов. Функцию распределения электронов по скоростям считать известной.
7. Найти при температуре 0 К суммарную кинетическую энергию свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$  золота, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон.
8. Металл находится при температуре  $T = 0$  К. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от  $v_{max}/2$  до  $v_{max}$  больше числа электронов со скоростями от 0 до  $v_{max}/2$ .
9. Найти при температуре 0 К суммарную кинетическую энергию свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$  золота, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон.
10. Найти при температуре 0 К: а) среднюю кинетическую энергию свободных электронов в металле, если известна их максимальная кинетическая энергия  $K_{max}$ .
11. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре  $T = 0$  К. Уровень Ферми  $E_F$  для натрия равен 3,12 эВ. Плотность  $\rho$  натрия равна  $970 \text{ кг/м}^3$ .
12. Металл находится при температуре  $T=0$  К. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от  $E_F/2$  до  $E_F$  больше числа электронов с энергией от 0 до  $E_F/2$ .

### Электроны в полупроводниках. Эффект Холла.

1. Найти минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон — дырка в чистом теллуре при температуре 0 К, если известно, что его электропроводимость возрастает в  $\eta=5,2$  раза при увеличении температуры от  $T_1=300$  К до  $T_2=400$  К.
2. Вычислить разность подвижностей электронов и дырок в чистом беспримесном германии, если известно, что в магнитном поле с индукцией  $B = 0,3$  Тл отношение поперечной напряженности электрического поля  $E_t$  к продольной  $E$  равно  $\eta = 0,060$ .
3. При  $T=300$  К некоторый образец германия n-типа имеет удельное сопротивление  $\rho = 1,70$  Ом-см и постоянную Холла  $R_H = 6,3 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$ . Найти концентрацию и подвижность электронов проводимости.
4. Образец из чистого беспримесного германия, у которого ширина запрещенной зоны 0,72 эВ, а подвижности электронов и дырок 3600 и  $1800 \text{ см}^2/(\text{В-с})$ , соответственно, находится при температуре 300 К. Найти удельное сопротивление образца.
5. Тонкая пластина из кремния шириной  $l = 2$  см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ( $B = 0,5$  Тл). При плотности тока  $j = 2 \times 10^{-6}$

$\text{А}/\text{мм}^2$ , направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов  $U_H$  оказалась равной 2,8 В. Определить концентрацию  $n$  носителей заряда.

6. Пластинку из полупроводника  $p$ -типа шириной  $d=10\text{мм}$  и длиной  $l=50\text{мм}$  поместили в магнитное поле с индукцией  $B=0.5\text{ Тл}$ . К концам пластинки приложили постоянное напряжение  $U=10,0\text{ В}$ . При этом холловская разность потенциалов оказалась  $U_H = 50\text{ мВ}$  и удельное сопротивление  $\rho = 2,5\text{ Ом}\cdot\text{см}$ . Определить постоянную Холла, концентрацию и подвижность дырок.

7. На рис. 6.4 показан график зависимости логарифма электропроводимости от обратной температуры ( $T$ , К) для кремния с примесью бора (полупроводник  $n$ -типа). Объяснить характер этого графика. Найти с его помощью ширину запрещенной зоны кремния и энергию активации атомов бора.

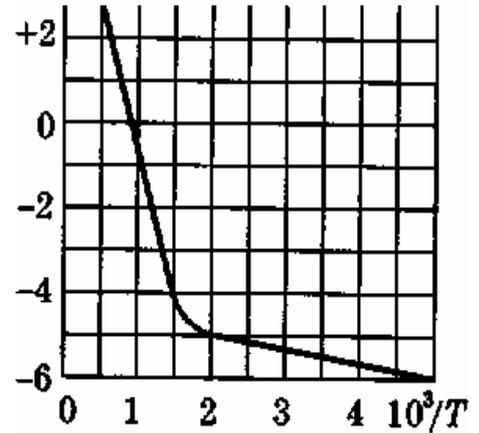


Рис. 6.4

8. Концентрация свободных электронов в полупроводнике  $n$ -типа при достаточно низких температурах равна

$$n_e = \sqrt{2n_0} \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-\Delta E / 2k_B T}$$

где  $n_0$  — концентрация донорных атомов,  $\Delta E$  — их энергия активации. Вычислить с помощью этой формулы энергию активации донорных атомов в полупроводнике  $n$ -типа, если известно, что подвижность электронов  $500\text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , концентрация донорных атомов  $5 \times 10^{17}\text{ см}^{-3}$  и удельное сопротивление при температуре  $50\text{ К}$  равно  $1,5\text{ кОм}\cdot\text{см}$ .

9. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление  $\rho = 0,48\text{ Ом}\cdot\text{м}$ . Определить концентрацию  $n$  носителей заряда, если подвижности  $b_n$  и  $b_p$  электронов и дырок соответственно равны  $0,36$  и  $0,16\text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .
10. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной  $l = 1\text{ см}$  и длиной  $L = 10\text{ см}$  помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,2\text{ Тл}$ . Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению  $L$ ) приложено постоянное напряжение  $U = 300\text{ В}$ . Определить холловскую разность потенциалов  $U_H$  на гранях пластины, если постоянная Холла  $R_H = 0,1\text{ м}^3/\text{Кл}$ , удельное сопротивление  $\rho = 0,5\text{ Ом}\cdot\text{м}$ .
11. Удельная проводимость  $\gamma$  кремния с примесями равна  $112\text{ См}/\text{м}$ . Определить подвижность  $b_p$  дырок и их концентрацию  $n_p$ , если постоянная Холла  $R_H = 3,66 \times 10^{-4}\text{ м}^3/\text{Кл}$ . Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.