

Базисный минор матрицы.

Ранг матрицы.

Как было сказано [выше](#), минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n .

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными**.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $Rg A$.

Очень важным свойством [элементарных преобразований](#) матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными**.

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg A = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удастся найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор. Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если A - квадратная матрица и $\det A = 0$, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равно нулю.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

[illegible]

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; & M_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; & M_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; & M_{22} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; & M_{32} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; & M_{23} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; & M_{33} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30}; \end{aligned} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Находим матрицу $\mathbf{X}$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.