7. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Определение

Точка $z = a$ называется нулем m -го порядка аналитической функции $f(z)$, если

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a), \qquad f^{m}(a) \neq 0$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Пример

$$f(z) = \operatorname{tg} z - \sin z$$

$z = 0$ - нуль функции. Найдем порядок нуля $z = 0$

$$f'(z) = \cos^{-2} z - \cos z\Big|_{z=0} = 0$$

$$f''(z) = 2\cos^{-3} z \cdot \sin z + \sin z\Big|_{z=0} = 0$$

$$f'''(z) = 6\cos^{-4} z \cdot \sin^2 z + 2\cos^{-2} z + \cos z\Big|_{z=0} = 3 \neq 0$$

Точка $z = 0$ нуль третьего порядка

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Теорема

Для того, чтобы аналитическая в точке $z = a$ функция имела в этой точке нуль m -го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки выполнялось равенство

$$f(z) = \left(z - a\right)^m \varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Следствие

Пусть $P(z)=\left(z-z_1\right)^{m_1}\ldots\left(z-z_n\right)^{m_n}$ есть разложение многочлена $P(z)$ на множители.
Тогда z_k нули многочлена $P(z)$ кратности m_k, $k=1,\ldots,n$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Определение

Особой точкой функции *f(z)* называется точка, в которой функция не является аналитической.

Особая точка $z = z_0$ функции *f(z)* называется изолированной, если в некоторой окрестности ее функция *f(z)* не имеет других особых точек

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Разложение в ряд Лорана

Если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое число $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической и, следовательно, разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где L - произвольная замкнутая кривая с центром в точке z_0 , лежащая внутри кольца

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Определение

Изолированная особая точка $z=a$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки отсутствует главная часть

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Определение

Изолированная особая точка $z=a$ называется полюсом функции $f(z)$, если главная часть разложения ее в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит конечное число членов

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Определение

Изолированная особая точка *z=a* называется
существенно особой точкой функции *f(z)*,
если главная часть разложения ее в ряд Лорана
в окрестности этой точки содержит
бесконечное число членов

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Замечание

Классификацию изолированных особых точек можно распространить на случай, когда особой точкой функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка $z=\infty$. При этом окрестностью точки $z=\infty$ называют внешность какого-либо круга с центром в точке $z = 0$ и достаточно большим радиусом R (чем больше R, тем меньше окрестность точки $z = \infty$)

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Замечание

Изучение функции *f(z)* в окрестности точки $z = \infty$ можно свести путем подстановки

$$z = \frac{1}{w}$$

к изучению функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности точки $z = 0$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Классификация особых точек (в зависимости от поведения функции в их окрестности)

- Изолированные особые точки
  - Устранимая особая точка
  - Полюс
  - Существенно особая точка

Ряд Лорана не содержит главной части

Ряд Лорана содержит в главной части конечное число членов

Ряд Лорана содержит в главной части бесконечное число членов

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Теорема

Для того, чтобы изолированная особая точка $z = a$ была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \qquad (A \neq \infty)$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Разложение в ряд Лорана

Если z_0 — устранимая особая точка,
то в окрестности точки z_0 ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Это разложение справедливо
во всех точках круга $|z - z_0| < R$, кроме точки $z = z_0$.

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Правильная точка функции

Если положить $f(z_0) = c_0$, где $c_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

то функция $f(z)$ станет аналитической
во всем круге $|z - z_0| < R$, (включая его центр $z = z_0$);
особенность точки z_0 устраняется,
точка z_0 становится правильной точкой функции $f(z)$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Замечание

Из равенства $$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0 \ (c_0 \neq \infty)$$

следует, что в достаточно малой окрестности устраняемой особой точки z_0 функция *f(z)* является ограниченной

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Теорема

Для того, чтобы изолированная особая точка $z = a$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Разложение в ряд Лорана

Если z_0 — полюс, то в окрестности точки z_0 ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

В этом случае полюс z_0 называется полюсом *m*-го порядка функции $f(z)$; если $m = 1$, то полюс z_0 называется простым

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Разложение в ряд Лорана

Запишем последнее равенство в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\left((z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \right.$$

$$\left. + c_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \ldots + c_{-m}\right)$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

$$(z-z_0)^m f(z) = g(z).$$

где *g(z)* — аналитическая функция, $g(z_0) = c_{-m} \neq 0.$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Способ определения порядка полюса

Если

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \quad (c_{-m} \neq 0,\ c_{-m} \neq \infty),$$

то точка z_0 есть полюс *m*-го порядка

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Теорема (связь между нулем и полюсом)

Если точка z_0 - нуль m-го порядка функции $f(z)$,
то z_0 является полюсом m-го порядка функции $1/f(z)$;

если точка z_0 - полюс m-го порядка функции $f(z)$,
то z_0 является нулем m-го порядка функции $1/f(z)$.

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Доказательство

Пусть $z = z_0$ есть нуль m-го порядка для функции $f(z)$. Тогда имеет место равенство

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

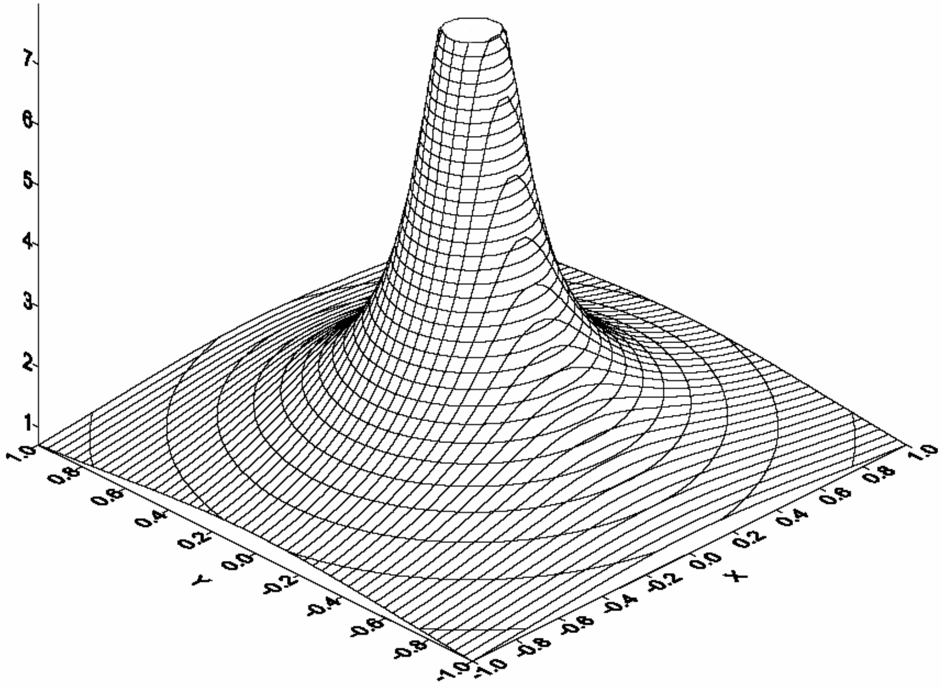
$$(z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\varphi(z)}$$

$$\lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} \right) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0 \ (\neq \infty).$$

Это и означает что точка $z = z_0$ является полюсом m-го порядка.
Вторая часть теоремы доказывается аналогично

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Простой полюс

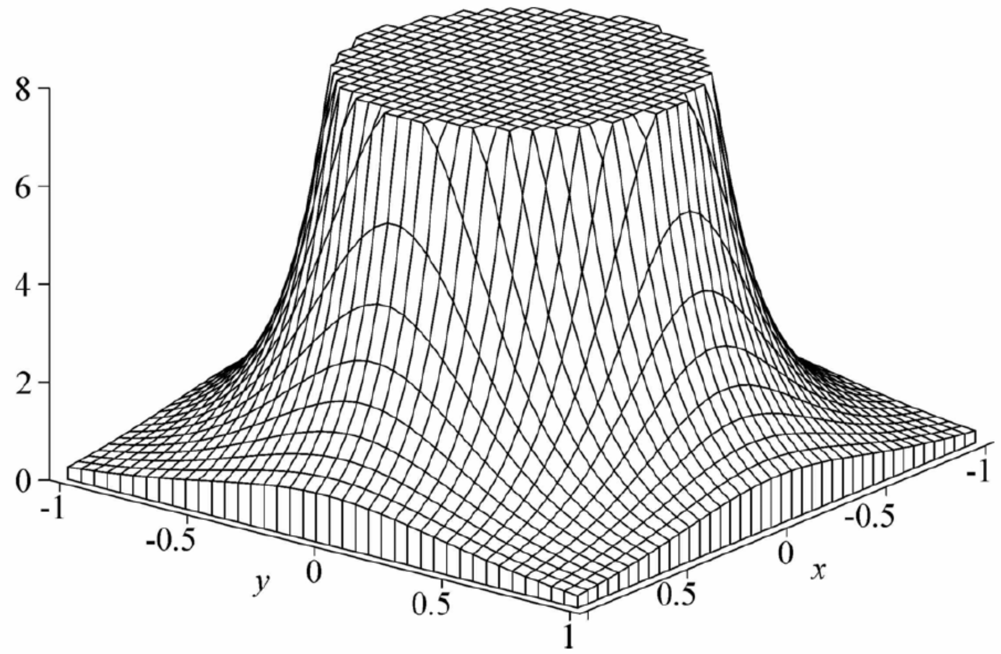


$$F(z) = \frac{1}{z}.$$

Модуль функции

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Полюс четвертого порядка

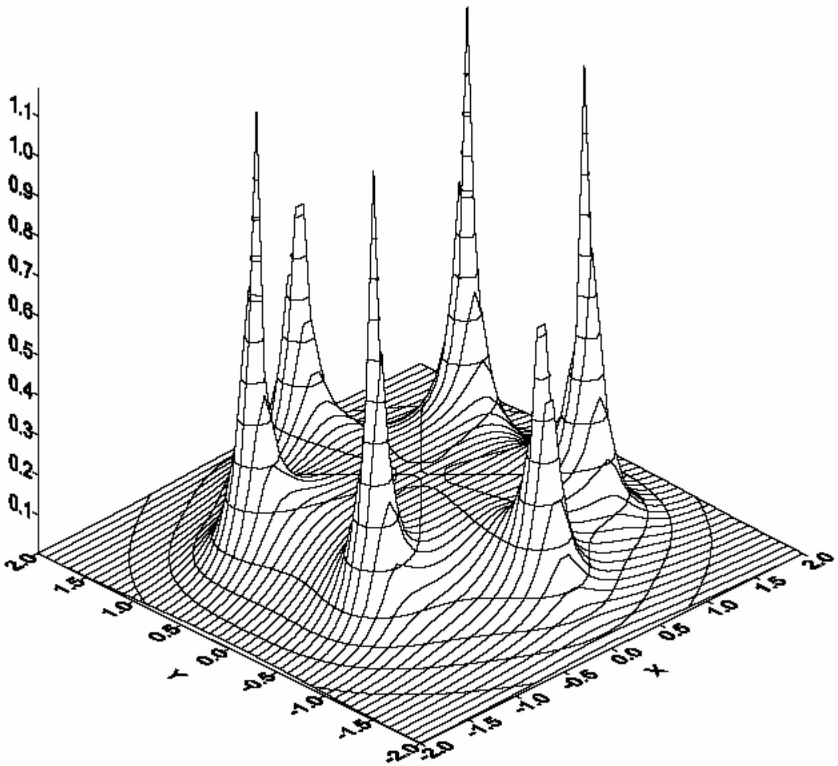


$$F(z) = \frac{1}{z^4}.$$

Модуль функции

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

6 простых полюсов

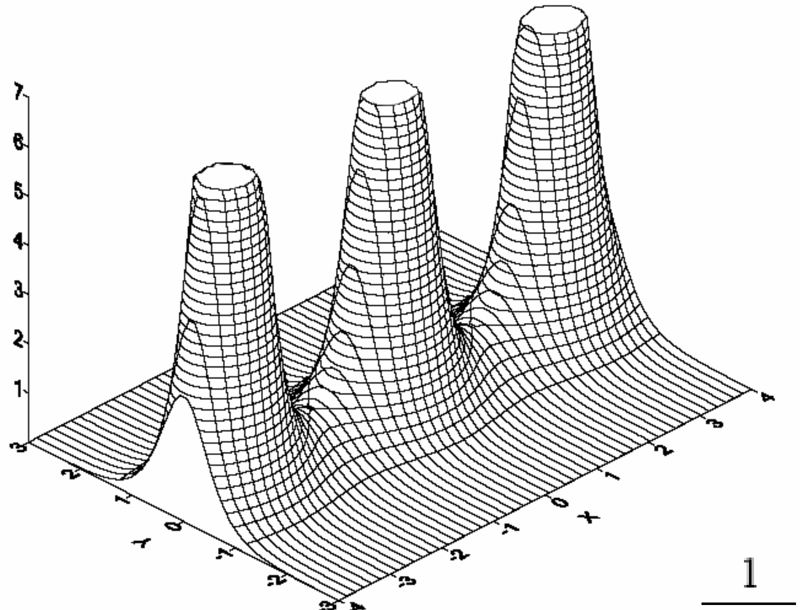


$$F(z) = \frac{1}{a + z^6}.$$

Модуль функции

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Косеканс в кубе



Модуль функции

$$F(z)=\frac{1}{\sin^3 z}.$$

$$\frac{1}{\sin^3 z}=(-1)^k\left[\frac{1}{(z-z_0)^3}+\frac{1}{2(z-z_0)}+\frac{17}{120}(z-z_0)+\ldots\right].$$

$$z_0=\pi k,\ k=0,\pm 1,\ \ldots$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса

Пусть $z=a$ существенно особая точка функции *f(z)*. Тогда для всякого *A* существует последовательность $\{z_n\} \to a$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Пример

Определить тип особенности функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $\boldsymbol{z = 0}$

Решение

Разложение функции *f(z)* в окрестности точки $z = 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

Точка $z = 0$ является существенно особой точкой. Если $z \to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty;$$

Если $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Пример

Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$.

Решение

Особой точкой функции *f(z)* является *z* = 0.
Найдем предел функции при $z \to 0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^3}=\infty.$$

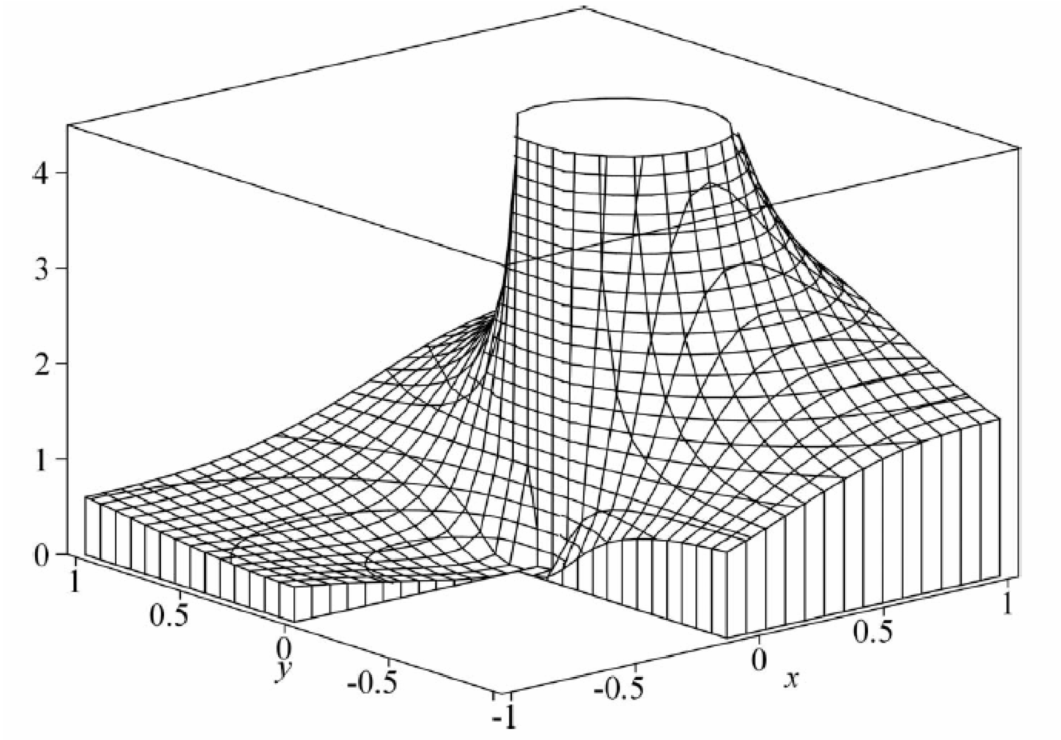
Следовательно, точка $z = 0$ является полюсом.

$$\lim_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^4}=\infty, \qquad \lim_{z\to 0} z^3\frac{\sin z}{z^4}=1\neq 0.$$

Следовательно, точка $z = 0$ - полюс третьего порядка

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Существенно особая точка



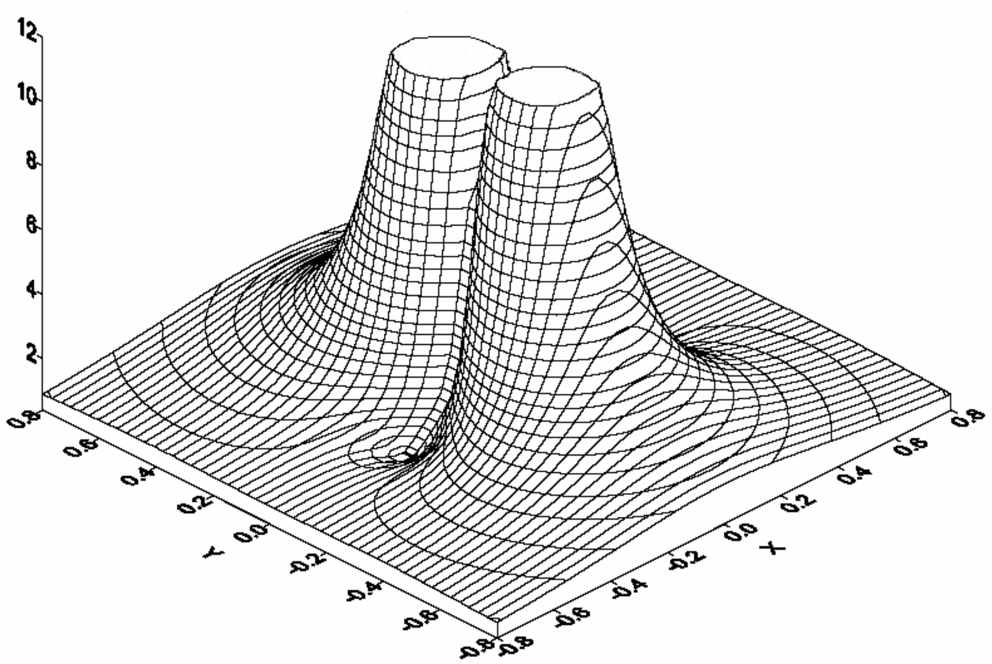
Модуль функции

$$F(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,z^k}.$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Тригонометрическая функция с существенно особой точкой



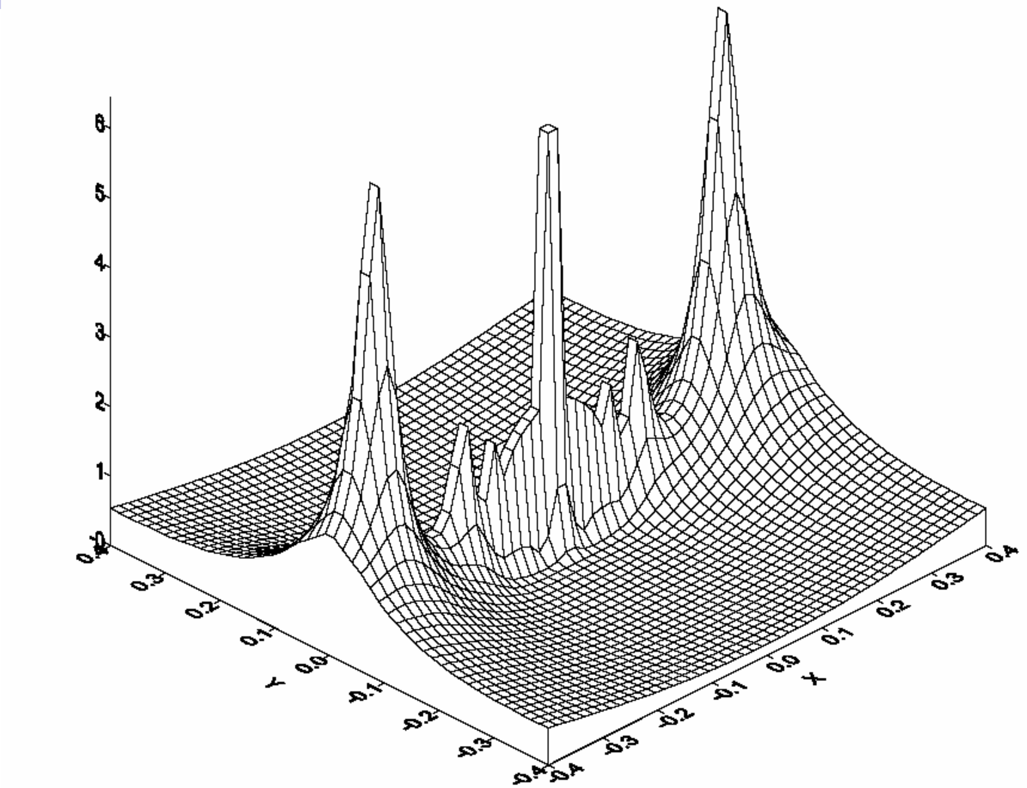
Модуль функции

$$F(z) = \sin\frac{1}{z}.$$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!}.$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010

Существенно особая точка у функции, обратной функции с существенно особой точкой



Модуль функции

$$F(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

© В.В. Филатов, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2010