6. Ряды в комплексной плоскости

Определение

Выражение $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

членами которого являются комплексные числа, называется **числовым рядом** (в комплексной области).

Ряд с комплексными членами $u_n = a_n + ib_n$ можно записать в виде
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

где a_n и b_{n} $(n = 1,2,3,\ldots)$ действительные числа

Определение

Сумма первых n членов

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{n} \left(a_n + ib_n \right)$$

называется n-й частичной суммой ряда

Определение

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

то ряд называется сходящимся, а S — суммой ряда;
если предел не существует, то ряд называется расходящимся

Замечание

Ряд комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

$S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда (1), а S_2 — сумма ряда (2).

Это означает, что исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости рядов с действительными членами

Теорема
(необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд сходится,
то его общий член u_n при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

Замечания

- В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами

- При исследовании на абсолютную сходимость рядов с комплексными членами применимы все известные из действительного анализа признаки сходимости знакопостоянных рядов

Признак Даламбера

Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l,$$

то при $l < 1$ ряд абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится

Определение

Степенным рядом в комплексной области называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

где c_n — комплексные числа (коэффициенты ряда),
$z = x + iy$ — комплексная переменная

Определение

Рассматривают также и степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

который называют рядом по степеням разности $z - z_o$, где z_0 - комплексное число.
Подстановкой $z - z_0 = t$ данный ряд сводится к рассмотренному ряду

Определение

Степенной ряд при одних значениях аргумента *z* может сходиться, при других — расходиться.

Совокупность всех значений *z*, при которых ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда

Теорема (Абель)

Если степенной ряд сходится при $z = z_0 \neq 0$ (в точке z_0), то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию

$$|z| < |z_0|$$

Следствие

Если степенной ряд расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| > |z_0|$ (т.е. вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат)

Следствие

Из теоремы Абеля следует существование числа R такого, что при всех значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд абсолютно сходится.

Неравенству $|z| < R$ удовлетворяют точки комплексной области, лежащие внутри круга радиуса R с центром в точке $z = 0$

Определение

Величина R называется радиусом сходимости ряда, а круг $|z| < R$ кругом сходимости ряда.
В круге $|z| < R$ ряд сходится, вне этого круга расходится; на окружности $|z| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда.

Круг сходимости степенного ряда можно найти с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши, примененных к ряду из модулей его членов

Радиус сходимости

В частности, для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{pn+s}$

радиус сходимости можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[pn]{|c_n|}}$$

получаемой после применения признака Даламбера или радикального признака Коши к ряду из модулей членов исходного ряда

Свойства степенного ряда

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости есть аналитическая функция.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд

Пример

Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение

$$c_n = \frac{1}{n!}, \; c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

Следовательно, областью сходимости является вся комплексная плоскость

Пример

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$.

Решение

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)2^n}\right| = 2.$$

Данный ряд сходится в области $|z-i| < 2$.

Пример

Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$

исследовать сходимость ряда в точке $z = i$

Решение

Воспользуемся признаком Даламбера.

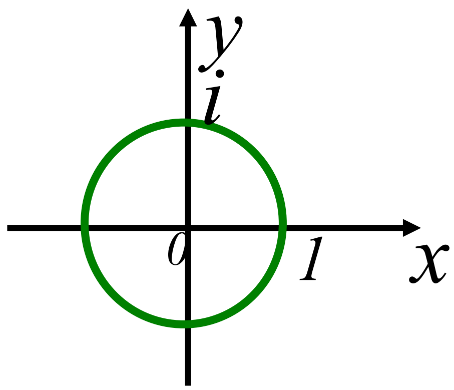
$$|u_n| = \frac{|z^{2n}|}{\sqrt{n}}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|z^{2n+2}|}{\sqrt{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z^{2n+2}|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}|z^{2n}|} = |z|^2.$$

Решение

Ряд сходится при всех *z*, удовлетворяющих неравенству $|z|^2<1$, т.е. $|z|<1$. Кругом сходимости является внутренность круга с центром в точке $z = 0$ и радиусом 1

Точка $z = i$ лежит на границе круга сходимости, в этой точке ряд может сходиться (абсолютно или условно) или расходиться



Решение

Подставляя значение $z = i$ в выражение общего члена ряда, получим

$$(-1)^{n+1}\frac{(i)^{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Числовой ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

расходится согласно интегральному признаку Коши.

Следовательно, в точке $z = i$ степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$$ расходится

Теорема

Всякая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$,

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

где l_r — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга

Определение

Такой ряд называется рядом Тейлора для функции *f(z)* в рассматриваемом круге

Разложения однозначных элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена) аналогичны уже известным разложениям функций действительного переменного

Разложение в ряд Маклорена

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in C$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C$$

Разложение в ряд Маклорена

Примеры разложения в ряд Маклорена однозначных ветвей (элементарных) многозначных функций

$$w = \mathrm{Ln}(1+z)$$

однозначную ветвь определим условием $w(0) = \mathrm{Ln}(1) = 0$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

Разложение в ряд Маклорена $w = \mathrm{Arctg} z$

однозначную ветвь определим условием $w(0) = \mathrm{Arctg} 0 = 0$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

Разложение в ряд Маклорена $w = (1+z)^{\alpha}$

однозначную ветвь определим условием $w(0) = 1$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^{n}, \qquad |z| < 1,\ \alpha \in R$$

Формула Эйлера

Заменив *z* на *iz* в разложении функции e^z, получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

т. е. формулу Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Определение

Всякая функция $f(z)$, аналитическая в окрестности точки z_0, разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора

Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.
В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд не содержит нулевого члена, т.к. $c_0 = f(z_0) = 0$.
Если не только $c_0 = 0$, но и $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$,

то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots,$$

а точка z_0 называется нулем кратности m (нулем m-го порядка).
Если $m = 1$, то z_0 называется простым нулем

Следствие

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

следует, что если z_0 является нулем кратности m функции $f(z)$, то

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Утверждение

В этом случае представление функции степенным рядом

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots, \quad (1)$$

можно переписать в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$

где $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots$

Для функции $\varphi(z)$ точка $z = z_0$ уже не является нулем, т.к. $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: если функция $f(z)$ имеет вид (1), и m — натуральное число, а $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, то точка z_0 есть нуль кратности m функции $f(z)$

Пример

Найти нули функции $f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z$
и определить их порядки

Решение

$$(z^2+1)^3 \operatorname{sh} z = 0$$

$$\begin{cases} z^2+1=0, \\ \operatorname{sh} z = 0 \end{cases}$$

$$z = \pm i, \;\; z = n\pi i, \qquad n \in Z$$

Решение $z=-i$

$$f(z)=(z^2+1)^3\operatorname{sh}z$$

$$f(z)=(z+i)^3\underbrace{(z-i)^3\ \operatorname{sh}z}_{\varphi(z)}=(z+i)^3\varphi(z)$$

$$\varphi(-i)=\left(-2i\right)^3\operatorname{sh}i=-8\,i^3\,\underbrace{i\sin 1}_{\operatorname{sh}i}=-8\sin 1\neq 0$$

$z=-i$ - нуль третьего порядка

Решение $z = n\pi i$

$$f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z$$

$$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z$$

$$f'(n\pi i) = 6n\pi i\left((n\pi i)^2+1\right)^2 \underbrace{\operatorname{sh} n\pi i}_{i\sin n\pi} + \left((n\pi i)^2+1\right)^3 \underbrace{\operatorname{ch} n\pi i}_{\cos n\pi} =$$

$$= \left(-(n\pi)^2+1\right)^3 (-1)^n \neq 0$$

$z = n\pi i$ - простые нули функции

Теорема

Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R \ (0 \leqslant r < R \leqslant \infty)$ функция *f(z)* может быть разложена в этом кольце в ряд,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где *L* - произвольная окружность с центром в точке z_0 , лежащая внутри кольца

Теорема

Функция *f(z)*, аналитическая в данном кольце разлагается в ряд Лорана единственным образом

Ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Первая часть ряда Лорана, т. е. ряд $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$

называется **правильной частью ряда Лорана*;***
этот ряд сходится к аналитической функции $f_1(z)$
внутри круга $|z - z_0| < R$

Ряд Лорана

Вторая часть ряда Лорана, т. е. ряд $$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

называется главной частью ряда Лорана;
этот ряд сходится к аналитической функции f_2 (z)
вне круга $|z - z_0| > r$.

Внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ряд $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Замечание

Если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$, то ее разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора

Замечание

На практике при разложении функции в ряд Лорана используют известные разложения основных элементарных функций;

• дробь вида $\dfrac{1}{z - z_0}$ разлагается в ряд, являющийся рядом геометрической прогрессии;

• дробь вида $\dfrac{1}{(z - z_0)^k}$,

где *к* > 1 — целое, разлагается в ряд, который получается из ряда геометрической прогрессии последовательным дифференцированием (*к* — 1) раз

Пример

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение

Воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots ,$$

Тогда

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots \qquad |z| > 1$$

Пример

Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$$

в окрестности точки $z_0 = 0$

Решение

Функция имеет две особые точки $z_1 = -2$ и $z_2 = 3$.

Она аналитична в областях

$$\text{а) } 0 \leqslant |z| < 2;\ \text{б) } 2 < |z| < 3;\ \text{в) } |z| > 3.$$

Решение а) $0 \leqslant |z| < 2$;

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right)$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right)$$

$$\left|\frac{z}{3}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 3$$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \ldots\right)$$

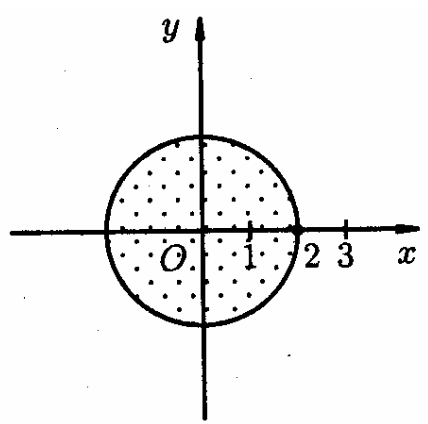
$$\left|-\frac{z}{2}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 2$$

Решение

$$f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=$$

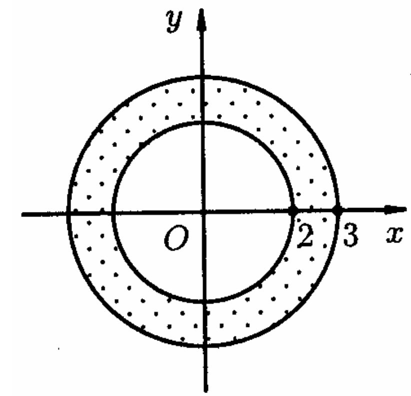
$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}z-\frac{7}{27\cdot 8}z^2+\dots,$$

ряд Лорана функции $f(z)$ обращается в ряд Тейлора



Решение б) $2 < |z| < 3$;

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right) \quad (|z| < 3),$$



$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \ldots\right) =$$

$$+\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} - \ldots \quad (|z| > 2).$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$

Решение в) $|z| > 3$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots\right) \quad (|z|>3),$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\ldots\right) \quad (|z|>2).$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2-z-6} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$