5. Интегрирование функции комплексного переменного

5.1. Интеграл от функции комплексного переменного (ФКП)

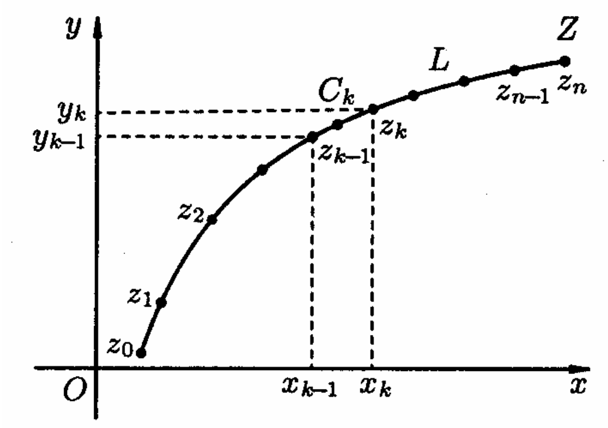
5.2. Интегральная теорема Коши

5.3. Первообразная и неопределенный интеграл от ФКП

5.4. Интегральная формула Коши

Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой *L* *с* началом в точке z_0 и концом в точке *Z* определена непрерывная функция *f(z).* Разобьем кривую *L* на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к *z* точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$



В каждой «элементарной дуге»

$$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

Определение

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю максимального диаметра разбиения $\max\left|\Delta z_k\right|$,
если он существует, называется
интегралом от функции *f(z)* по кривой (по контуру) L

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k .$$

Теорема

Если L — гладкая кривая (в каждой точке кривой существует касательная) , а $f(z)$ — непрерывная и однозначная функция, то интеграл по контуру существует

Доказательство

Пусть

$$f(z) = u(x;y) + iv(x;y), z = x + iy, C_k = \widehat{x}_k + i\widehat{y}_k.$$

Тогда

$$f(C_k) = u(\widehat{x}_k; \widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k; \widehat{y}_k),$$

$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Доказательство

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\right)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k - v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\right) + i\sum_{k=1}^{n}\left(v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k + u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\right).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов.

При сделанных предположениях о кривой *L* и функции *f(z)* пределы этих сумм существуют

Доказательство

Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\max|\Delta z_k| \to 0$ получим:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy.$$

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy. \qquad (1)$$

Параметрическое задание кривой

Если $x = x(t), y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$ — параметрические уравнения кривой *L*, то $z = z(t) = x(t)+iy(t)$ называют комплексно-параметрическим уравнением кривой *L*

Если *x=x(t), y=y(t)* непрерывно дифференцируемые на (t_1, t_2), то существует интеграл

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt.$$

Основные свойства интеграла от функции комплексного переменного

1. $\displaystyle\int_L dz = z - z_0.$

2. $\displaystyle\int_L \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)\,dz = \int_L f_1(z)\,dz \pm \int_L f_2(z)\,dz.$

3. $\displaystyle\int_L af(z)\,dz = a\int_L f(z)\,dz,$

a — комплексное число

Основные свойства интеграла от функции комплексного переменного

4. $\int\limits_{L} f(z)\,dz = -\int\limits_{L^-} f(z)\,dz,$ $\qquad \int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$

5. $\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$, где $L = L_1 + L_2$

Основные свойства интеграла от функции комплексного переменного

6. Если $|f(z)| \leq M$ во всех точках кривой L, то

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant Ml,$$ где l — длина кривой L

Доказательство

Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)\Delta z_k| \leqslant M\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant Ml,$$

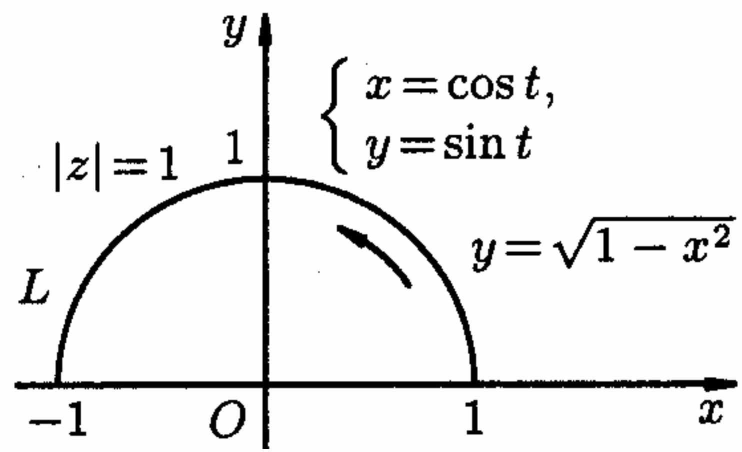
где $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ длина ломаной, вписанной в кривую *L*

Все приведенные свойства интеграла функции комплексного переменного непосредственно вытекают из его определения

Пример

Вычислить $$I = \int_L \operatorname{Im} z\, dz,$$

где L — полуокружность $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$



Решение

Используя формулу (1), имеем

$$I = \int\limits_L y(dx + i\,dy) = \int\limits_L y\,dx + i\int\limits_L y\,dy =$$

$$= \int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,dx + i\int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_1^{-1} - i\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_C \left(1 - i + \overline{z}\right) \operatorname{Im} \overline{z} dz,$

$$C: \quad y = x, \ z_1 = 0, \ z_2 = 1 + i$$

Решение

$$\operatorname{Im}\overline{z} = -y$$

$$-\int_C (1-i+x-iy)\,y\,dz = \int_C \left(-y-xy+i\left(y+y^2\right)\right)dz =$$

$$= \int_C (-y-xy)\,dx - \left(y+y^2\right)dy + i\int_C \left(y+y^2\right)dx - (y+xy)\,dy$$

Решение

$$\int_C \left(-y-xy\right)dx-\left(y+y^2\right)dy+i\int_C \left(y+y^2\right)dx-\left(y+xy\right)dy$$

$$y=x,\qquad dy=dx,\qquad 0\le x\le 1$$

$$\int_0^1\left(-x-x^2-x-x^2\right)dx+i\int_0^1\left(x+x^2-x-x^2\right)dx=$$

$$=-2\int_0^1\left(x+x^2\right)dx=-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}$$

Теорема Коши для односвязной области

Если функция *f(z)* аналитична в односвязной области *D*, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру *L*, лежащему в области *D*, равен нулю, т.е.

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

Доказательство

Докажем теорему, предполагая непрерывность производной $f'(z)$

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L u\,dx - v\,dy + i\oint_L v\,dx + u\,dy.$$

В силу аналитичности $f(z) = u + iv$ и непрерывности $f'(z)$ в односвязной области D, функции $u = u(x;y)$ и $v = v(x;y)$ непрерывно дифференцируемы в этой области и удовлетворяют условиям Эйлера-Даламбера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Доказательство

Эти условия означают равенство нулю интегралов

$$\oint\limits_L u\,dx - v\,dy \text{ и } \oint\limits_L v\,dx + u\,dy$$

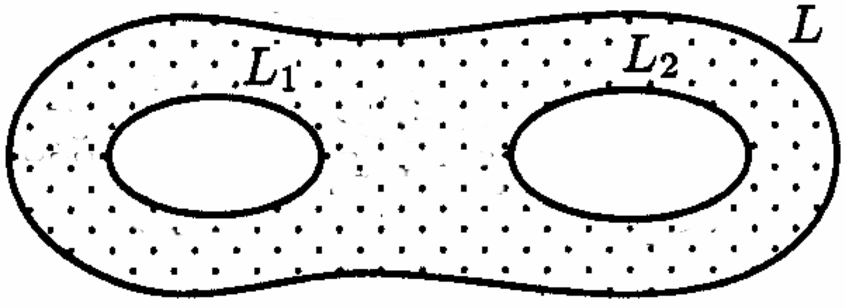
Следовательно,

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0.$$

Теорема Коши для многосвязной области

Рассмотрим для определенности трехсвязную область *D*, ограниченную внешним контуром *L* и внутренними контурами L_1 и L_2.

Выберем **положительное направление** обхода контуров: **при обходе область *D* остается слева**



Определение

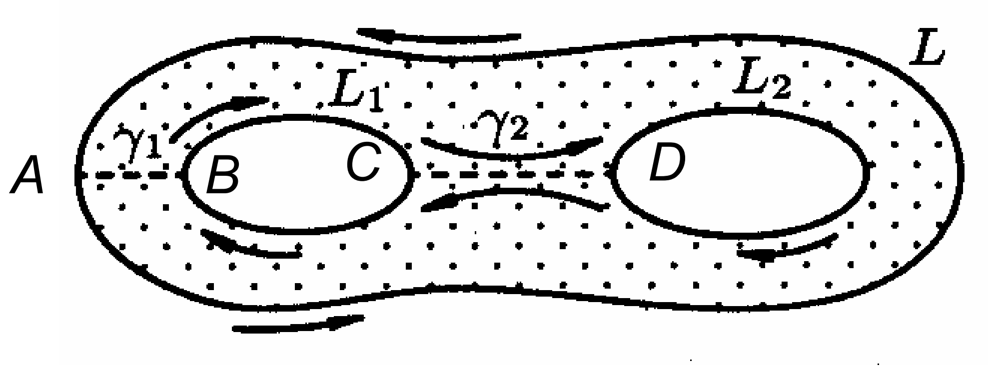
Пусть функция *f(z)* аналитична в области D и на контурах L, L_1 и L_2 (т. е. в замкнутой области *D)*;
функция называется аналитической в замкнутой области *D* , если она аналитична в некоторой области, содержащей внутри себя область *D* и ее границу *L*

Теорема Коши для многосвязной области

Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области *D* получим новую односвязную область D_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром *Г*,
состоящим из контуров L, L_1, L_2 и разрезов γ_1 и γ_2

$$\Gamma = L + \gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2 + \gamma_2^- + \gamma_1^- .$$

$$\gamma_1^+ = AB, \quad \gamma_1^- = BA, \quad \gamma_2^+ = CD, \quad \gamma_2^- = DC$$



Теорема Коши для многосвязной области

По теореме Коши для односвязной области $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$

$$\int\limits_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_2^- + \gamma_1^-} = \int\limits_{\gamma_1^+} + \int\limits_{\gamma_1^-} + \int\limits_{\gamma_2^+} + \int\limits_{\gamma_2^-} = 0,$$

т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях

Теорема Коши для многосвязной области

Получаем

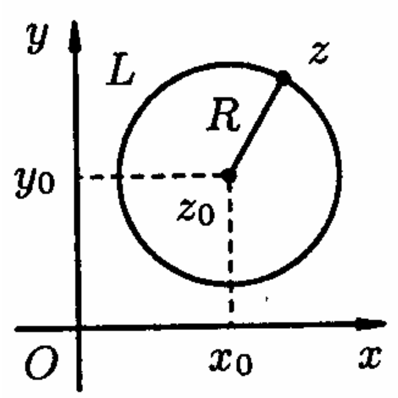
$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{L} f(z)\,dz + \oint_{L_1} f(z)\,dz + \oint_{L_2} f(z)\,dz = 0,$$

т. е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области *D* функции *f(z)* по границе области *D*, проходимой в положительном направлении, равен нулю

Пример

Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0}$;

где L есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки



Решение

Теорема Коши неприменима, т. к. функция - не аналитична в точке z_0. Параметрические уравнения окружности L есть

$$x = x_0 + R\cos t,\quad y = y_0 + R\sin t,\quad \text{где}\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Следовательно,

$$z = x + iy = x_0 + R\cos t + iy_0 + iR\sin t =$$

$$(x_0 + iy_0) + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + R\cdot e^{it}.$$

Решение

Комплексно-параметрическое уравнение окружности есть

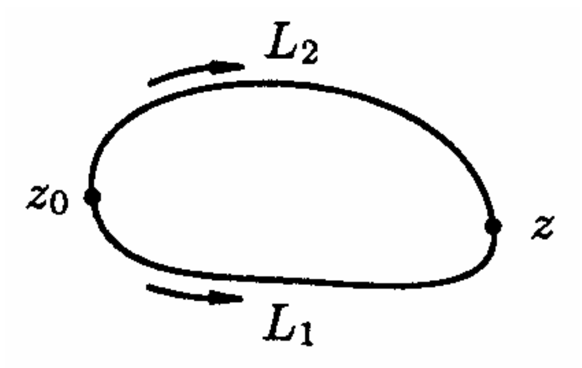
$$z = z_0 + R \cdot e^{it}$$

Получим

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i \cdot R \cdot e^{it}}{R \cdot e^{it}} dt = i \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Следствие из теоремы Коши

Если *f(z)* — аналитическая функция в односвязной области *D*, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки *z* пути интегрирования



Следствие

В таких случаях, когда интеграл зависит только от начальной точки и конечной точки пути интегрирования, пользуются обозначением

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Если здесь зафиксировать точку z_0, а точку z изменять, то получим функцию от z. Обозначим эту функцию через $F(z)$

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Определение

Можно доказать, что если функция *f(z)* аналитична в односвязной области *D,* то функция *F(z)* также аналитична в *D,* причем

$$F'(z) = \left(\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \right)' = f(z).$$

• Функция *F(z)* называется первообразной для функции *f*(*z*) в области *D,* если *F'(z) = f(z)*

Утверждение

- Совокупность всех первообразных *f(z)* определяется формулой *F(z)* + *C*, где *C* = const.

- Совокупность всех первообразных функций *f(z)* называется неопределенным интегралом от функции *f(z)*

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C, \quad \text{где} \quad F'(z) = f(z).$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

есть первообразная функция для *f(z).* Следовательно,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) + C.$$

Положив здесь $z = z_0$, получим $0 = F(z_0) + C$ (контур замкнется, интеграл равен нулю). Отсюда $C = -F(z_0)$, а значит

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).$$

Таблица интегралов

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе, например

$$\int e^z\,dz = e^z + C;$$

$$\int \sin z\,dz = -\cos z + C;$$

Пример

Вычислить интеграл

$$\int_0^i 3z^2\,dz = 3\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^i = -i$$

Пример

Вычислить интеграл

$$I = \int_0^i z\cos z dz$$

Решение

Применим формулу интегрирования по частям $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$$u = z, \quad dv = \cos z\,dz$$

$$du = dz, \quad v = \sin z$$

$$I = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= i\sin i + \cos i - 1 = -\operatorname{sh}1 + \operatorname{ch}1 - 1 = \frac{1}{e} - 1$$

Теорема

Пусть функция *f(z)* аналитична в замкнутой односвязной области *D* и *L* — граница области *D.* Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

где $z_0 \in D$ любая точка внутри области *D,* а интегрирование по контуру *L* производится в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки).

Интеграл, находящийся в правой части равенства, называется **интегралом Коши**, а сама эта формула называется **интегральной формулой Коши**

Замечания

Отметим, что интегральная формула Коши справедлива и для многосвязной области: каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева.

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать следующие теоремы-следствия

Теорема

Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Таким образом, производная аналитической функции также является аналитической функцией

Теорема

В окрестности каждой точки z_0, где существует производная, функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

Этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0