4. Дифференцирование функции комплексного переменного (ФКП)

4.1. Понятие производной. Условия Коши-Римана

4.2. Понятие дифференциала и аналитической функции

4.3. Геометрический смысл
модуля и аргумента производной

4.4. Конформные отображения

Определение

Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z),$$

если он существует, называется производной функции $f(z)$ в точке z, а функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z

Замечание

Подчеркнем, что Δz стремится к нулю любым образом, т.е. точка $z+\Delta z$ может приближаться к точке z любым образом

Теорема

Из дифференцируемости функции $f(z)$
в некоторой точке z следует ее непрерывность
в этой точке. Обратное утверждение не имеет места

Действительно, $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$

может стремиться к конечному пределу $f'(z)$

лишь при условии $\Delta w \to 0$

Теорема о дифференцируемости ФКП

Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z=x+iy$, причем в точке (x,y) действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

называемые условиями Коши-Римана (или условиями Эйлера-Даламбера)

Доказательство. Необходимость

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, тогда предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

существует и не зависит от способа приближения к точке z

Необходимость (продолжение)

а) Пусть $\Delta z = \Delta x \to 0$, тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Необходимость (продолжение)

б) Пусть $\Delta z = i\Delta y \to 0$, тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} =$$

$$= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Необходимость (продолжение)

Сравнив найденные пределы, получим

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

т.е. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Доказательство. Достаточность

Пусть выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Докажем, что функция *f(z)* дифференцируема

Доказательство. Достаточность

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $z = x+iy$, то по определению дифференциала функций двух действительных переменных имеют место равенства

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(|\Delta z|)$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(|\Delta z|)$$

$$\alpha, \beta \to 0 \quad \Delta x, \Delta y \to 0$$

Достаточность (продолжение)

Тогда приращение функции *f(z)* принимает вид

$$\Delta w = f\left(z+\Delta z\right) - f\left(z\right) = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \gamma\left(\left|\Delta z\right|\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + i\Delta y\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma\left(\left|\Delta z\right|\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\Delta x + i\Delta y\right) + \gamma\left(\left|\Delta z\right|\right)$$

Достаточность (продолжение)

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\gamma\left(\left|\Delta z\right|\right)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Предел существует, т.е. функция дифференцируема

Вычисление производной ФКП *f(z)*

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \xRightarrow{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}} \quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Big\Downarrow \ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad \Big\Downarrow \ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Правила дифференцирования ФКП

- Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z

- Если $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верны следующие правила дифференцирования

Правила дифференцирования ФКП

1. $\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z)$

2. $\left(f(z) \cdot g(z)\right)' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

3. $\left(Cf(z)\right)' = Cf'(z), \quad C - const$

4. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}, \quad g(z) \neq 0$

Правила дифференцирования ФКП

5. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, а функция $F(w)$ дифференцируема в точке $w = f(z)$, то функция $F(f(z))$ дифференцируема в точке z, при этом

$$F'\left(f(z)\right) = F'_w \cdot f'_z\left(z\right) \qquad w = f\left(z\right)$$

Правила дифференцирования ФКП

6. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $g(w)$, обратная функции $f(z)$ и дифференцируемая в точке $w=f(z)$, причем $(g(w))'\neq 0$, то

$$f'_z(z)=\frac{1}{g'_w(w)}$$

Таблица производных

Производные от элементарных ФКП
в области их аналитичности вычисляются
с помощью тех же формул, что и в действительном анализе,
например

$$\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbf{N}$$

$$\left(e^{z}\right)' = e^{z};$$

$$(\sin z)' = \cos z;$$

$$(\cos z)' = -\sin z;$$

Теорема о дифференцируемости основных элементарных ФКП

Функции $w=e^z$, $w=\sin z$, $w=\cos z$, $w=\operatorname{sh} z$, $w=\operatorname{ch} z$, $w=z^n$ $(n \in N)$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости

Функции $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{th} z$ дифференцируемы в любой точке плоскости, кроме точек

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ и } z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cdot i \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

соответственно

Теорема (продолжение)

Для функций $w = Ln\, z$, $w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией

Определение

- Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической (голоморфной) в точке z, если она дифференцируема (выполнены условия Коши-Римана) в некоторой окрестности этой точки

- Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$

Замечание

Условие аналитичности в точке не совпадает с условием дифференцируемости функции в этой же точке (первое условие — более сильное)

Определение

- Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются правильными точками $f(z)$

- Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками этой функции

Условие дифференцируемости функции

Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в точке z

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \Rightarrow \frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)+\alpha, \quad \alpha\to 0, \quad \Delta z\to 0,$$

тогда приращение функции можно записать так

$$\Delta w = f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z$$

Определение

Дифференциалом dw аналитической функции $w=f(z)$ в точке z называется главная часть ее приращения, т.е. $dw = f'(z)\Delta z$

Поскольку дифференциал независимой переменной z равен $w = z \Rightarrow dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z$, тогда

$$dw = f'(z)dz$$

Определение

Производная функции $w=f(z)$ равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной

$$f'(z)=\frac{dw}{dz}$$

Пример

Проверить, является ли функция $w = z^2$ аналитической

Решение

Пусть $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$

Проверяем условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Функция $w = z^2$ дифференцируема, следовательно, аналитична во всех точках комплексной плоскости

Решение

Найдем производную функции $w = z^2$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

$$(z^2)' = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + i\frac{\partial}{\partial x}(2xy) =$$

$$= 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

Решение

Найдем производную функции $w = z^2$
по определению

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

Определение

Если функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

Уравнение Лапласа для мнимой части функции

Для функции *v(x,y)*, дифференцируя первое из условия Коши-Римана по *y*, а второе по *x*, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Определение

- Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются **гармоническими функциями**

- Если, кроме того, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана, то они называются **сопряженными гармоническими функциями**

Теорема

Для того, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были соответственно действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряженными гармоническими функциями

Замечание

Пользуясь условиями Коши-Римана аналитическая функция может быть восстановлена по своей действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ части

Пример

Найти аналитическую функцию $w = u+iv$ по ее заданной действительной части

$$u = x^3 - 3xy^2 + 2$$

Решение

Отметим, что функция u является гармонической функцией

$$u''_{xx} = 6x,\ u''_{yy} = -6x, \quad \Rightarrow \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Для определения мнимой части v воспользуемся условиями Коши-Римана

Решение

Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_x = 3x^2 - 3y^2;$$

тогда согласно первому условию, получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

Отсюда, интегрируя по *y*, находим

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int (3x^2 - 3y^2)\,dy = 3x^2y - y^3 + \varphi(x).$$

Решение

Для определения функции $\varphi(x)$ воспользуемся вторым условием Коши-Римана. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_y = -6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2y - y^3 + \varphi(x))'_x = 6xy + \varphi'(x),$$

то $-6xy = -(6xy + \varphi'(x))$.

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C, \quad C - const$$

Поэтому $v = 3x^2y - y^3 + C$.

Решение

Находим функцию $w = u + iv$

$$w = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2 + i(3x^2y - y^3 + C) =$$

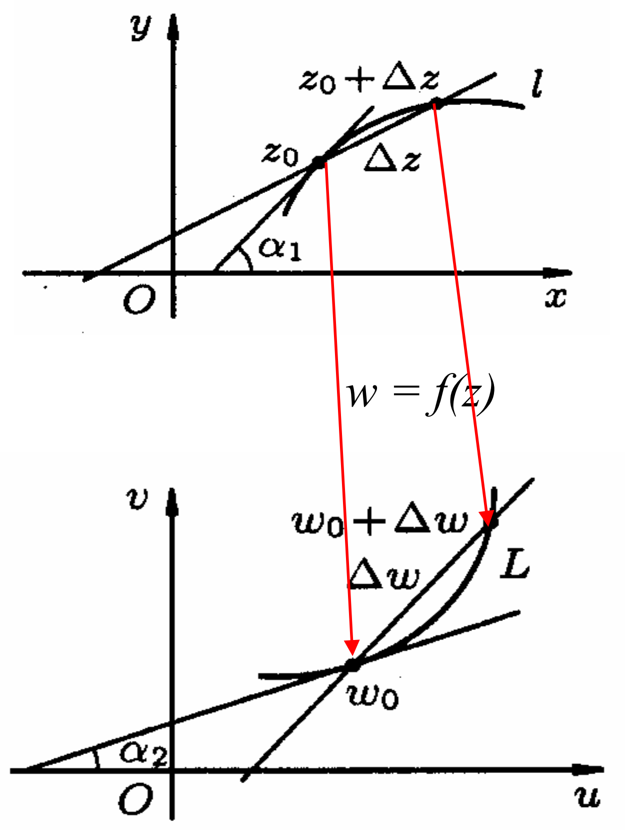
$$= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 + 2 + Ci =$$

$$= (x + iy)^3 + 2 + iC = z^3 + 2 + iC$$

Определим отображение

Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f\,'(z_o) \neq 0$

Отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, преобразует кривую l в кривую L на плоскости w



Геометрический смысл модуля производной

Из определения производной получим

$$\left|f'(z_0)\right| = \lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{z \to z_0}\left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right| = \lim_{z \to z_0}\frac{\left|w - w_0\right|}{\left|z - z_0\right|},$$

т.к. функция аналитическая в точке z_0, то предел не зависит от вида кривой l, и величину $\left|f'(z_0)\right|$ можно рассматривать как коэффициент растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$

Определение

Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ и называется

- коэффициентом растяжения, если $|f'(z_0)| > 1;$
- коэффициентом сжатия, если $|f'(z_0)| < 1$

Пример

Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $w = z^2/2$ в точке $z_0 = 3 - 4i$

Решение

Функция $w = z^2/2$ является аналитической в точке $z_0 = 3 - 4i$, при этом $w' = z$.
Вычислим коэффициент растяжения

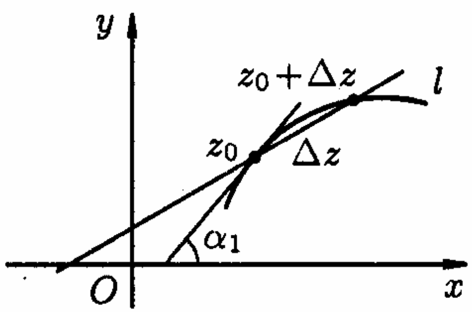
$$\left|f'(z_0)\right| = \left|z_0\right| = \left|3 - 4i\right| = 5 > 1$$

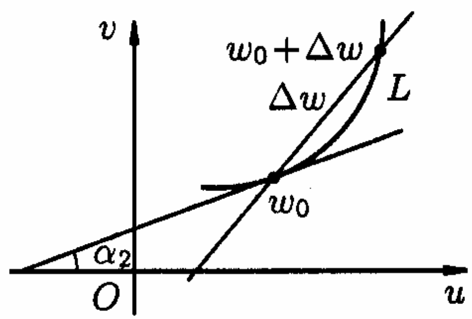
Аргумент производной в точке z_0

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Здесь α_1, α_2 можно рассматривать как углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и w





Геометрический смысл аргумента производной

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$$

Это означает, что $arg\, f'(z_0)$ — это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0

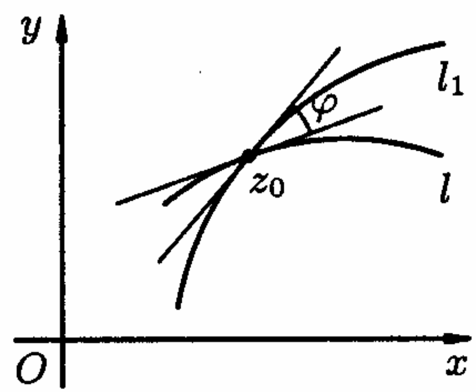
Свойство сохранения углов

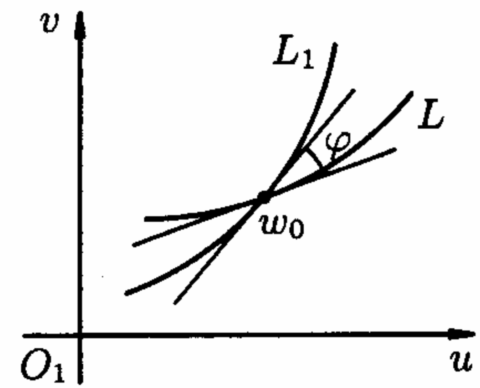
В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 (мы предположили, что $f'(z_0) \neq 0$) угол поворота $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0.

Для другой пары кривых l_1 и L_1 в тех же точках z_0 и w_0 будем иметь $\alpha_2' - \alpha_1' = \arg f'(z_0) = \varphi$

$$\arg f'(z_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2' - \alpha_1' = \varphi$$

т.е. если кривые l и l_1 образуют в точке z_0 на плоскости z угол $\varphi = \arg f'(z_0)$, то такой же угол $\varphi = \arg f'(z_0)$ будут образовывать в точке w_0 кривые L и L_1, являющиеся отображениями кривых l и l_1 на плоскости w





Определения

Это свойство отображения $w = f(z)$ называется свойством сохранения (консерватизма) углов в точке z_0.

Отображение $w = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0, называется конформным, т.е. отображением, сохраняющим форму

Определения

- Если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то такое отображение называется конформным отображением 1-го рода

- если направление отсчета углов изменяется на противоположное — конформным отображением 2-го рода

Замечание

Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой точке z_0 комплексной плоскости z и в этой точке ее производная отлична от нуля, то отображение $w = f(z)$ конформно в этой точке

Определение

Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D, если оно конформно в каждой точке этой области

Утверждение

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D, причем во всех точках области $f'(z) \neq 0$, то отображение конформно в D.

Если отображение $w = f(z)$ конформно в области D, то функция $w = f(z)$ аналитична в D и во всех точках этой области

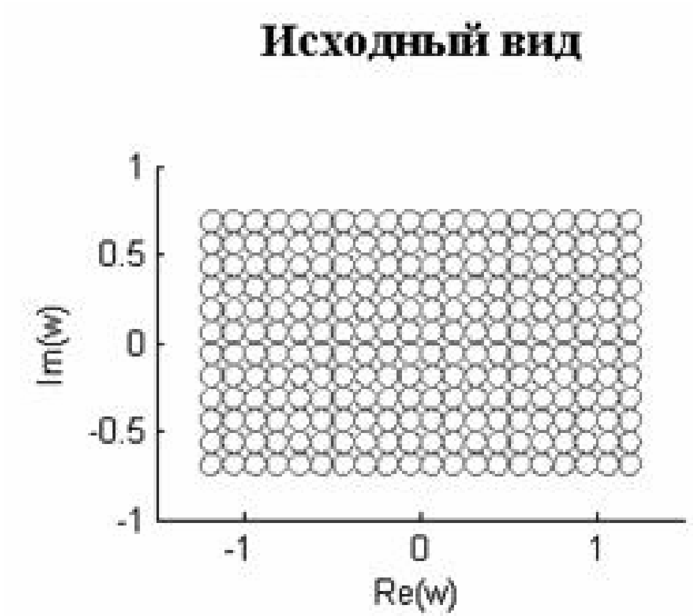
Пример

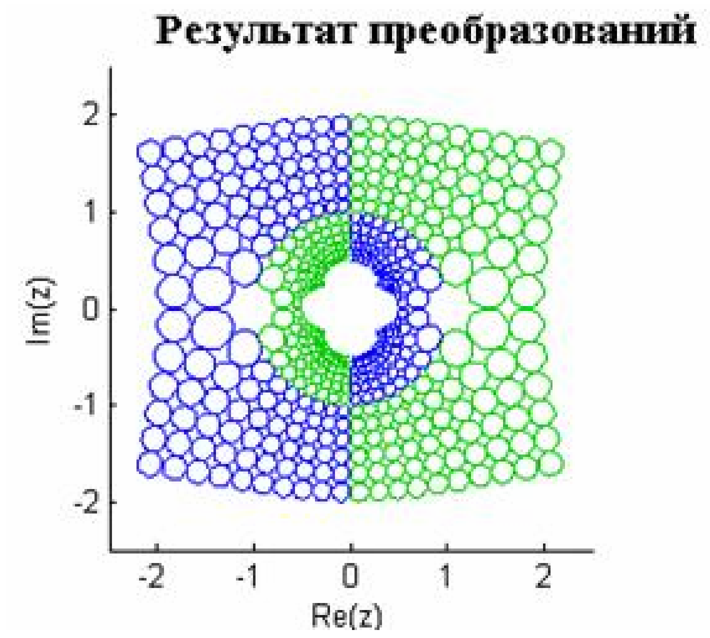
Выясним геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 2z$

Решение

Отображение $w = 2z$ конформно во всех точках плоскости, т.к. $w' = 2 \neq 0$.
Коэффициент растяжения в любой точке плоскости z равен 2. Так как $\arg w' = \arg 2 = 0$, то направление при отображении не меняется

Пример конформного преобразования





Пример

Пример отображения, преобразующего прямоугольный рисунок в этикетку для компакт-диска

Рассмотрим отображение, задаваемое функцией

$$w = e^z, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv,$$

т.к. функция периодическая, то рассмотрим ее в полосе

$$0 < y < 2\pi.$$

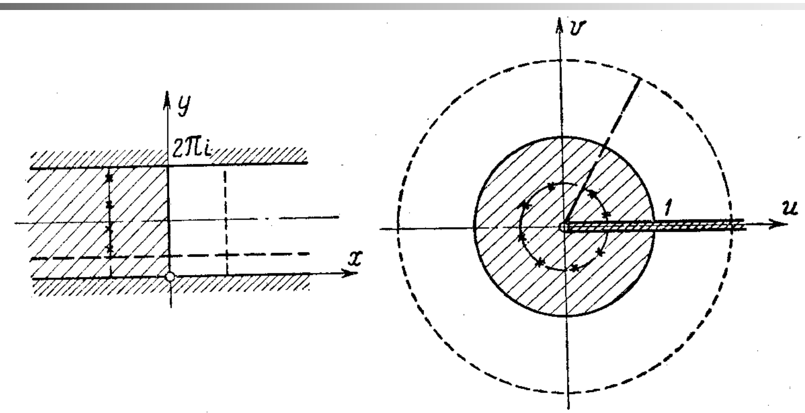
Введем в плоскости w полярные координаты $w = \rho e^{i\theta}$,

$$\rho e^{i\theta} = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow \rho = e^x, \theta = y,$$

т.о. отображение преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $\theta = y_0$

отрезки $x = x_0, 0 \le y < 2\pi$ – в окружности $\rho = e^{x_0}$

Преобразование полосы $0<y<2\pi$ в плоскость w с разрезом вдоль положительной полуоси



Исходное изображение

Результат преобразований