Лекция профессора Полевского В.И.(5)

1. Электрические цепи синусоидальных токов

Цель лекции: ознакомиться с основными определениями и способами представления синусоидальных функций времени, а также с явлением резонанса, видами резонанса и основными характеристиками колебательных контуров.

1.1 Основные определения

Переменным называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени. Наибольшее распространение получили сигналы напряжения и тока, мгновенные значения которых изменяются во времени по синусоидальному закону.

Синусоидальная функция является *гармонической*, так как сама функция, скорость ее изменения (первая производная) и ускорение (вторая производная) изменяются по одинаковому синусоидальному закону одной частоты.

Область применения синусоидального тока намного шире, чем постоянного. Это объясняется тем, что напряжение, изменяющееся по синусоидальному закону можно легко понижать или повышать с помощью трансформатора, практически в любых пределах. Это важно, так как транспортировать электроэнергию на большие расстояния выгодно при высоком напряжении, а потреблять – при низком. Однако физические процессы, происходящие в цепях переменного тока сложнее, чем в цепях постоянного тока из-за наличия переменных магнитных и электрических полей.

Значение переменного тока или напряжения в любой момент времени называют ***мгновенным значением*** и обозначают *строчной* буквой ***i*** или ***u*** *(рис. 1)*.

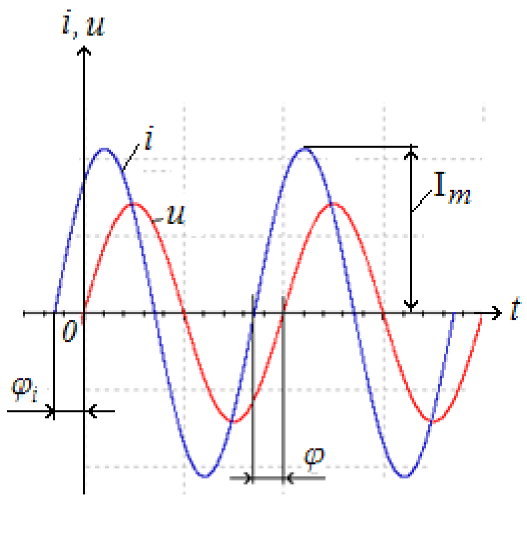

Рис. 1

Функция времени называется периодической, если ее значения повторяются через одинаковый промежуток времени, называемый ***периодом*** *T*.

$$i(t) = i(t+T).$$

Период *T* измеряется в секундах. Периодические токи и напряжения, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются *синусоидальными*.

Мгновенные значения синусоидального тока определяется по формуле

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

где I_m – максимальное, или *амплитудное*, значение тока;

$\omega = 2\pi f$ – угловая или циклическая частота, радиан в секунду (*рад*/*с*);

$f = 1/T$ – линейная частота, Герц (*Гц*);

φ_i – начальная фаза радиан (*рад*).

Если у синусоидальных тока и напряжения одной частоты начальные фазы одинаковы, говорят, что они совпадают по фазе. Если неодинаковы, говорят, что они сдвинуты по фазе относительно друг друга. Сдвиг фаз φ измеряется разностью начальных фаз напряжения φ_u и тока φ_i $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

С помощью осциллографа можно увидеть кривую мгновенных значений синусоидального напряжения и измерить его *амплитудное* значение.

Амперметры и вольтметры *электромагнитной* системы позволяют измерить *действующие* значения переменного тока и напряжения.

Действующим значением переменного тока или напряжения называется среднеквадратическое значение функции за период. Действующие значения синусоидальных напряжения $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \cdot dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и тока $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, т.е. в $\sqrt{2}$ раз меньше их амплитудных значений.

Получение синусоидального напряжения

Почти вся электрическая энергия вырабатывается электрическими машинами - генераторами переменного тока.

Схема устройства простейшего генератора переменного тока представлена на рис. 2, где 1 и 2 - проводники, 3 – щетка.

В магнитном поле электромагнита **NS**, возбуждаемом постоянным током в его обмотке, помещен виток из проводников **1** и **2**. Концы витка соединены с металлическими кольцами, изолированными друг от друга и от корпуса и вращающимися вместе с витком.
На кольцах установлены неподвижные щетки **3**, с помощью которых виток может быть замкнут на сопротивление внешней нагрузки.

Предположим, что магнитноё поле между полюсами **N** и **S** равномерно, т. е. магнитная индукция по величине и направлению всюду одинакова.

За время одного оборота плоскость витка описывает угол в **360°**. Разобьем этот угол на восемь равных частей, по **45°** каждая, и рассмотрим, как будет изменяться магнитный поток, пронизывающий контур витка, при его переходе из одного положения в другое в процессе вращения. Отдельные положения витка относительно магнитного поля показаны в верхней части рисунка.

Начнем рассматривать с момента, когда плоскость витка расположена перпендикулярно направлению магнитных линий (рис. 3, временная диаграмма) (положение *I*). В этот момент контур витка пронизывается наибольшим магнитным потоком, величину которого обозначим **Ф1**.

*Движение проводников витка происходит в вертикальном направлении, совпадающем с направлением магнитных силовых линий, следовательно, проводники не пересекают магнитных линий, а потому магнитный поток, пронизывающий контур витка, не изменяется и **эдс равна нулю**.*

Начиная с этого положения, проводники **1** и **2** витка, двигаясь по окружности, перемещаются под углом к направлению магнитных линий и пересекают их.

*При переходе плоскости витка из положения I в положение II, т. е. при повороте на угол **45°**, **эдс** самоиндукции возрастает до некоторой величины, определяемой отношением изменения магнитного потока от **Фх** до **Ф2**, т. е. **Ф1—Ф2**, к времени **At**, в течение которого происходит изменение.*

При переходе плоскости витка из положения *II* в положение *III*, т. е. при повороте еще на угол **45°**, магнитный поток, пронизывающий контур витка, уменьшившись до нуля, изменится на величину **Ф2 — 0 = Ф2**.

*Этот отрезок, как и предыдущий, отложен на диаграмме выше горизонтальной оси потому, что в обоих проводах **1** и **2** электродвижущая сила имеет положительное направление, т. е. в проводе **1** - за плоскость рисунка, а в проводе **2** - из-за плоскости рисунка, в чем нетрудно убедиться, применив правило **правой руки**.*

Во время дальнейшего вращения плоскости витка эдс в нем будет уменьшаться, оставаясь положительной. Когда плоскость витка повернется на **180°** от начального положения и займет положение *V*, **эдс** в нем уменьшится до нуля, несмотря на то что магнитный поток, пронизывающий контур витка, так же как и при положении *I*, имеет наибольшую величину.

После перехода плоскости витка через положение *V* направление **эдс** самоиндукции в нем изменяется: в проводе **1** - из-за плоскости рисунка, а в проводе **2** - за плоскость рисунка.

По мере поворота витка **эдс** в нем по абсолютной величине увеличивается. В момент прохода витка через положение *VII* **эдс** имеет наибольшее значение, равное по абсолютной величине, но противоположное по знаку эдс в витке при положении *III*.

При дальнейшем вращении витка **эдс** в нем по абсолютной величине уменьшается и, наконец, при повороте плоскости витка на **360°** от начального положения становится равной нулю. С этого момента процесс изменения эдс повторяется аналогично описанному выше.

Соединив вершины отрезков, выражающих величины ***эдс*** для отдельных положений плоскости витка, плавной линией, получим так называемую временную диаграмму, представляющую собой ***синусоиду***.

Переменная эдс и ток, изменяющиеся согласно указанной кривой, называются ***синусоидальными***.

Таким образом, величина ***эдс****, индуктируемой в проводнике, перемещающемся с равномерной скоростью в однородном магнитном поле, зависит от угла между направлением магнитных линий и направлением движения этого проводника.* $e = E_{max} \sin\alpha; \quad \alpha = 0^0 \div 360^0$**.**

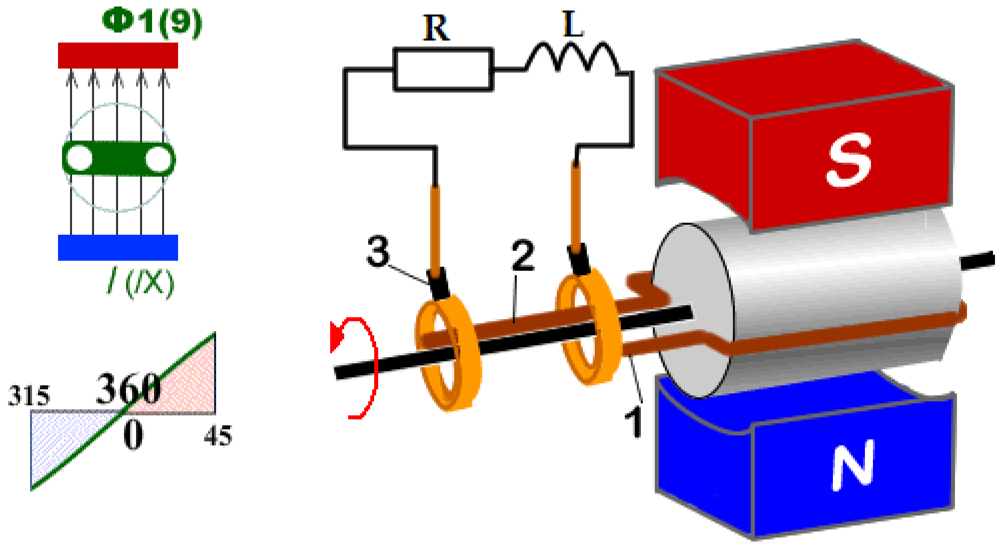

Рис. 2

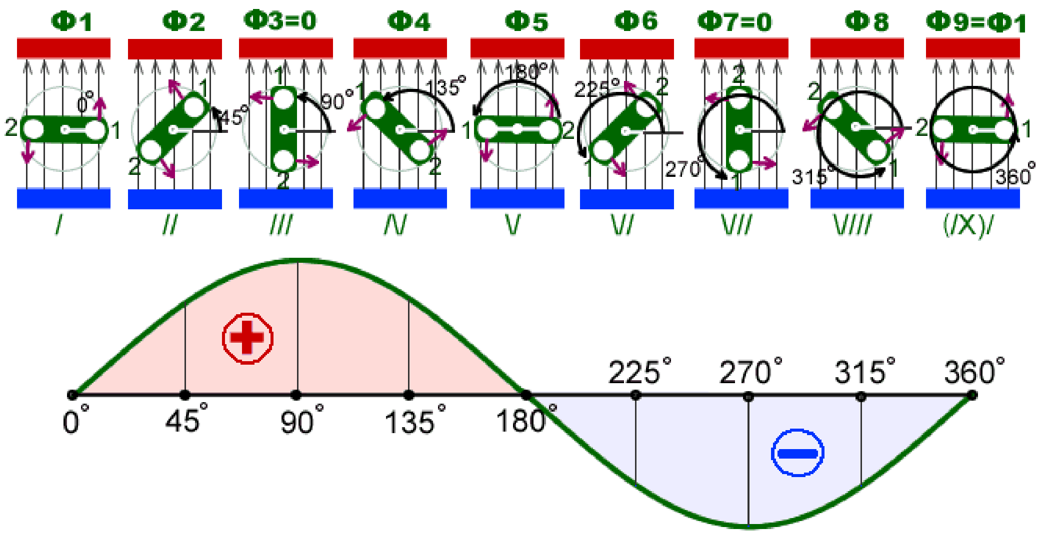

Рис. 3

2. Резистор, индуктивность и конденсатор в цепи синусоидального тока. Волновые и векторные диаграммы

Резистор

Рассмотрим явления, происходящие во внешней цепи с некоторым ***резистором.***

Если сопротивление проводника постоянному току, например, равно R1, то при протекании по этому проводнику переменного тока его сопротивление возрастает и становится равным некоторой величине R. Т.о. R > R1. Это явление обусловлено поверхностным эффектом, возникающим за счет неравномерного распределения магнитного поля по сечению проводника с током.

С увеличением частоты переменного тока сопротивление R *возрастает.*

При частоте тока 50 Гц поверхностный эффект незначительно увеличивает сопротивление проводника, потому практически его активное сопротивление приравнивается к сопротивлению в цепи постоянного тока.

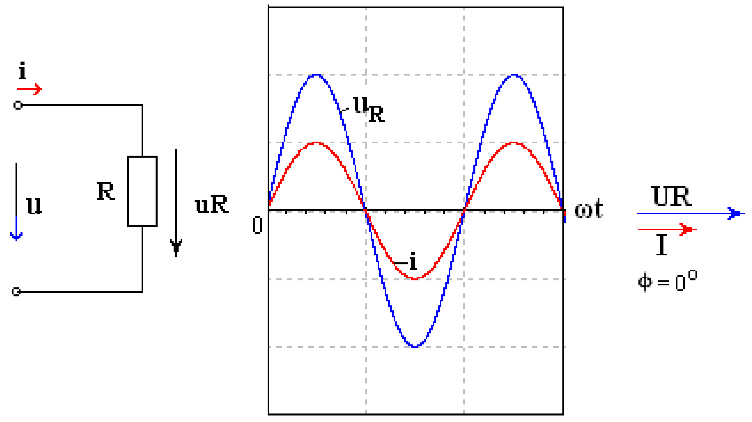

Рис. 4

Если $i = I_m \sin \omega t$, *то* $u_R = RI_m \sin \omega t$, (рис. 4).

Угол сдвига между током и напряжение равен нулю ($\varphi = 0^0$)!

Индуктивность

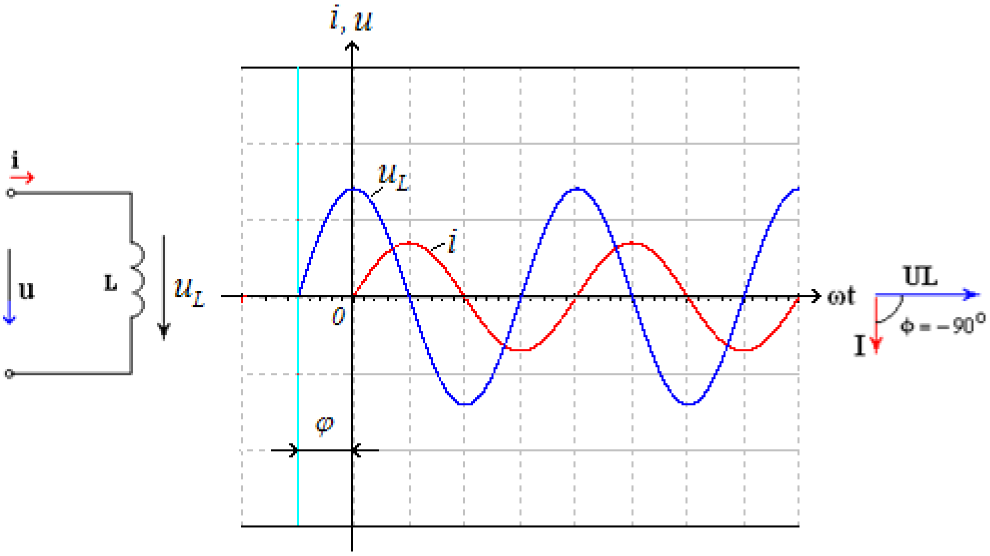

Рис. 5

Если $i = I_m \sin \omega t$, то $u_L = \boldsymbol{\omega L} I_m \sin(\omega t + \pi/2)$, т.к. $u_L = L\frac{\boldsymbol{di}}{\boldsymbol{dt}}$

Напряжение опережает ток на 90^0!

Конденсатор

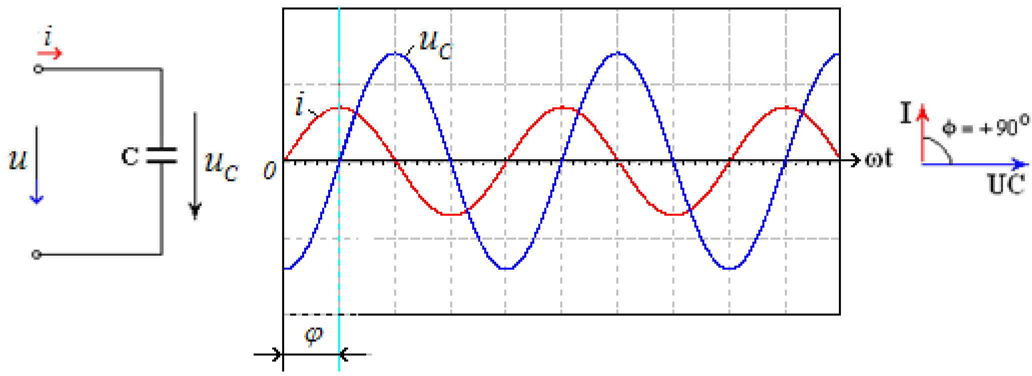

Рис. 6

Если $i = I_m \sin \omega t$, *то* $u_C = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega C}} I_m \sin(\omega t - \pi/2)$,

т.к. $u_C = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C}} \int \boldsymbol{I_m} \sin \boldsymbol{\omega t} \cdot \boldsymbol{dt}$

Ток опережает напряжение на 90^0!

3. Резонанс в линейных электрических цепях однофазного синусоидального тока

Явление резонанса, условия возникновения резонанса и определение основных характеристик резонансных контуров

Резонанс это *значительное увеличение* амплитуды колебаний напряжения или тока в элементах электрической цепи. Колебательный процесс в электрических цепях можно сравнить с механическими колебаниями маятника, качелей или стального шарика, подвешенного на длинной пружине. Колебательный процесс в механике связан с преобразованием потенциальной энергии в кинетическую и наоборот. Колебательный процесс в электрических цепях также связан с преобразованием энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот. В связи с этим можно сделать вывод, что колебательный процесс, а, следовательно, и резонанс может возникнуть в электрических цепях, содержащих накопители энергии двух видов: в электрическом поле – емкость ***C*** и в магнитном поле – индуктивность ***L***. В реальной электрической цепи часть электромагнитной энергии безвозвратно теряется в связи с потерями. Этот процесс моделируется активным сопротивлением ***R***. Таким образом, электрическая цепь, содержащая элементы ***R***, ***L*** и ***C*** называется ***колебательным контуром***.

Резонанс в колебательном контуре, также как и в механической колебательной системе, возникает при *совпадении частоты* вынужденных колебаний с частотой свободных колебаний контура.

При резонансе обмен энергией между электрическим и магнитным полями происходит только внутри контура между емкостью и индуктивностью. Энергия внешнего источника расходуется только на покрытие потерь в контуре. Поэтому, по отношению к источнику энергии колебательный контур в режиме резонанса представляет собой активное сопротивление или активную проводимость. *Ток и напряжение источника при резонансе совпадают по фазе.*

Резонанс напряжений. Частотные характеристики последовательного колебательного RLC контура

Последовательное соединение элементов RLC в цепи синусоидального тока (рис.7).

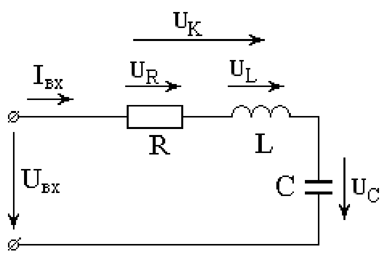

Рис. 7.

Если $i_{вх} = I_{mвх} \sin \omega t$, а $u = u_R + u_L + u_C = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$

то: $u_R = RI_{mвх} \sin \omega t$; $u_L = \omega L I_{mвх} \sin(\omega t + \pi/2)$; $u_C = \frac{1}{\omega C} I_{mвх} \sin(\omega t - \pi/2)$.

Тогда входное напряжение $U = I_{mвх} [R \cdot \sin \omega t + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cos \omega t]$

Где: $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – суммарное реактивное сопротивление.

Полное сопротивление (рис. 8) $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Векторы $\bar{U}_a; \bar{U}_p; \bar{U}$ образуют треугольник напряжений (рис. 9). Для этого треугольника справедливы выражения:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{U_p}{U_a} = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = arctg\frac{X}{R}.$$

$U_a = U_R$ - напряжение на активном сопротивлении.
$U_p = U_x$ – напряжение на суммарном реактивном сопротивлении.

Прямоугольные треугольники сопротивлений, напряжений и мощностей представлены соответственно на рис. 8, рис. 9 и рис. 10.

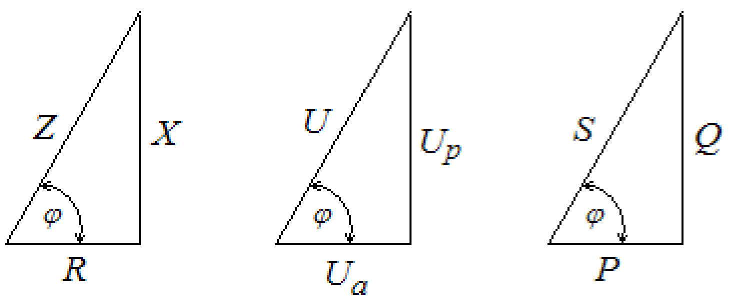

Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10.

$$U_{вх} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Где: S, [ВА] – полная мощность; P, [Вт] – активная мощность; Q, [ВАр] – реактивная мощность (рис. 10).

Если $X_L > X_C$ или $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, ***то цепь носит индуктивный характер***. На рис. 11 представлена векторная диаграмма этого режима.

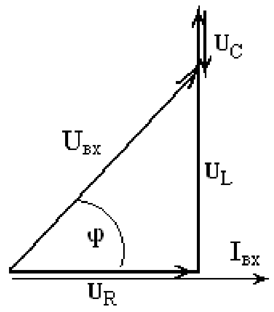

Рис. 11.

Если $X_L < X_C$ или $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, ***то цепь носит ёмкостный характер***. На рис. 12 представлена векторная диаграмма этого режима.

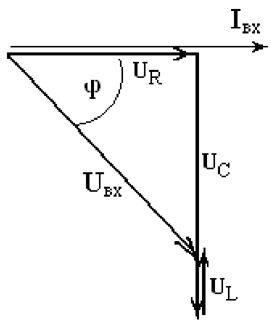

Рис. 12.

При $X_L = X_C$ или наступает ***резонанс напряжений*** (векторная диаграмма этого режима работы цепи приведена на рис.13).

При резонансе напряжений происходит значительное увеличение амплитуды колебаний напряжения на индуктивности U_{mL0} и емкости U_{mC0} по отношению к входному напряжению контура $U_{mвх}$.

Напряжения U_{mL0} и U_{mC0} равны между собой и находятся в противофазе. Напряжение на резисторе U_{mR} равно входному напряжению $U_{mвх}$.

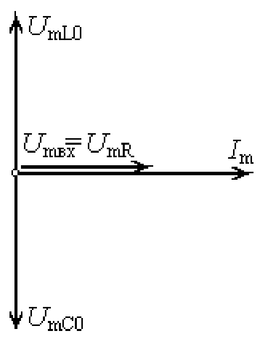

Рис. 13.

Частотные зависимости напряжений на элементах контура $U_L(f)$ $U_C(f)$ $U_R(f)$ приведены на рис. 14.

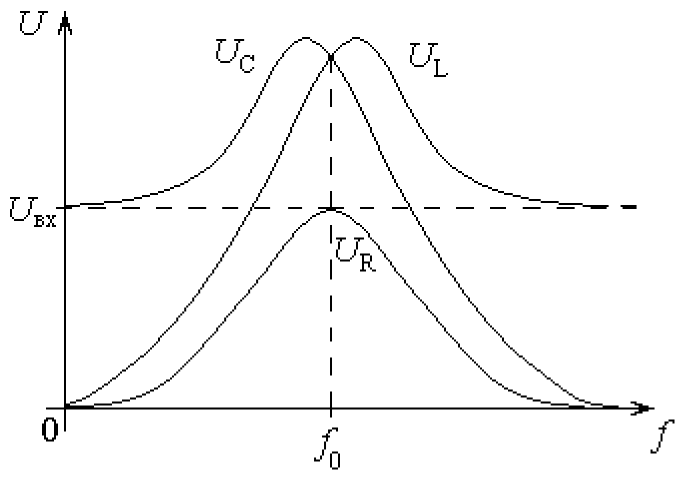

Рис. 14.

Величина $\frac{\omega_0 L}{R} = Q$ называется ***добротностью*** и может принимать значение десятков и сотен единиц. *Значит, падение напряжения на реактивных элементах схемы (индуктивности и ёмкости) может в десятки и сотни раз превышать напряжение источника питания.*

На рис. 15 и рис. 16 представлены соответственно амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики последовательного колебательного контура.

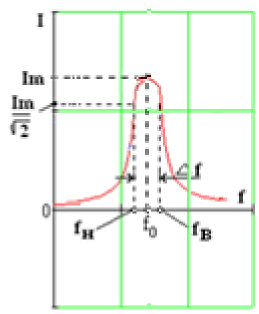

Рис. 15.

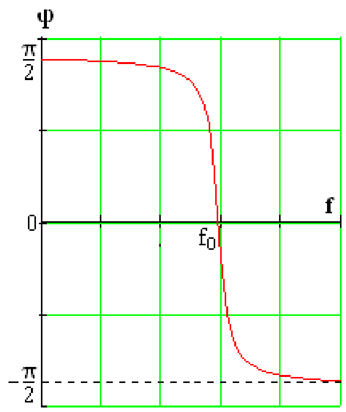

Рис.16.

Резонансная частота ***$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ для идеального колебательного* контура** (без учёта активного сопротивления катушки, R) рассчитывается из уравнения

$$\omega_0 L = 1/\ \omega_0 C.$$

Настроить контур в резонанс можно двумя способами:

1. *С помощью изменения частоты питающего напряжения;*
2. *С помощью изменения ёмкости конденсатора.*

Экспериментальное исследование резонанса напряжений

На рис. 17 представлена схема экспериментальной установки программы **Multisim.**

Где: 1- входной источник однофазного синусоидального напряжения с параметрами (Uвх = 100 В; f = 50 Гц; $\Psi_u = 0^0$); 2- вольтметр входа; 3- амперметр входа; 4- ваттметр (рис. 18); 5- осциллограф двухканальный (рис. 19); 6- графопостроитель (Bode Plotter) (рис. 20, рис. 21); 7- вольтметр для измерения напряжения на конденсаторе (U_C); 8- вольтметр для измерения напряжения на индуктивности катушки (U_{Lk}); 9- вольтметр для измерения напряжения на активном сопротивлении катушки (U_{Rk}). Активное сопротивление R_0 предназначено для подключения осциллографа и графопостроителя.

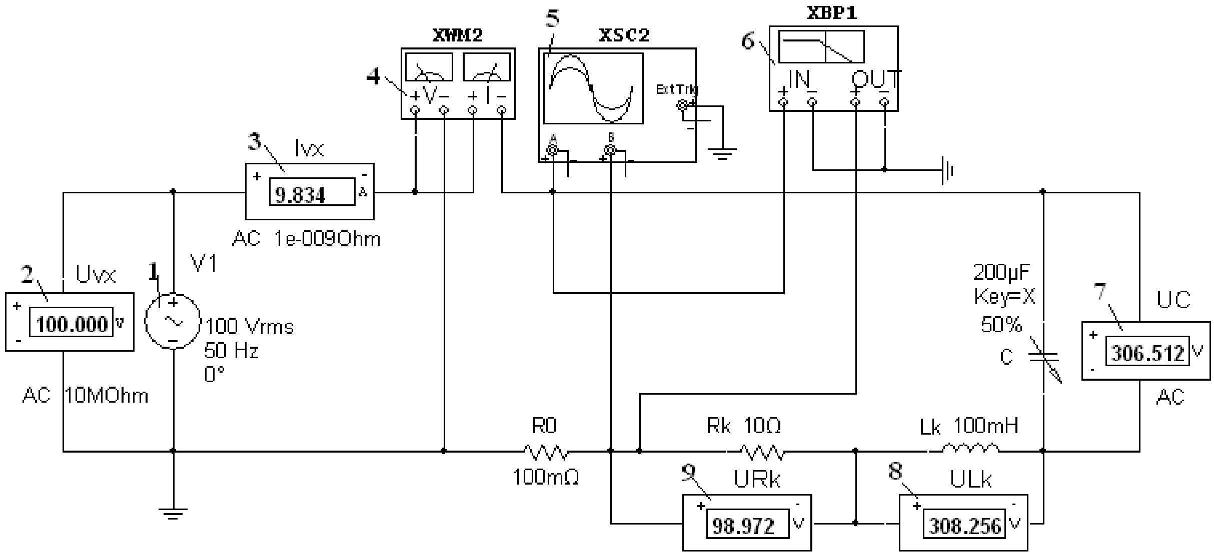

Рис. 17.

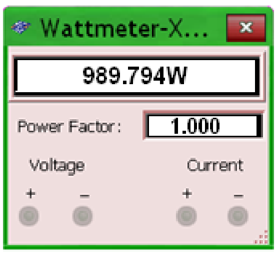

Рис. 18.

В резонансе входной ток ($I_{вх}$) совпадает по фазе с входным напряжением ($U_{вх}$), рис. 19.

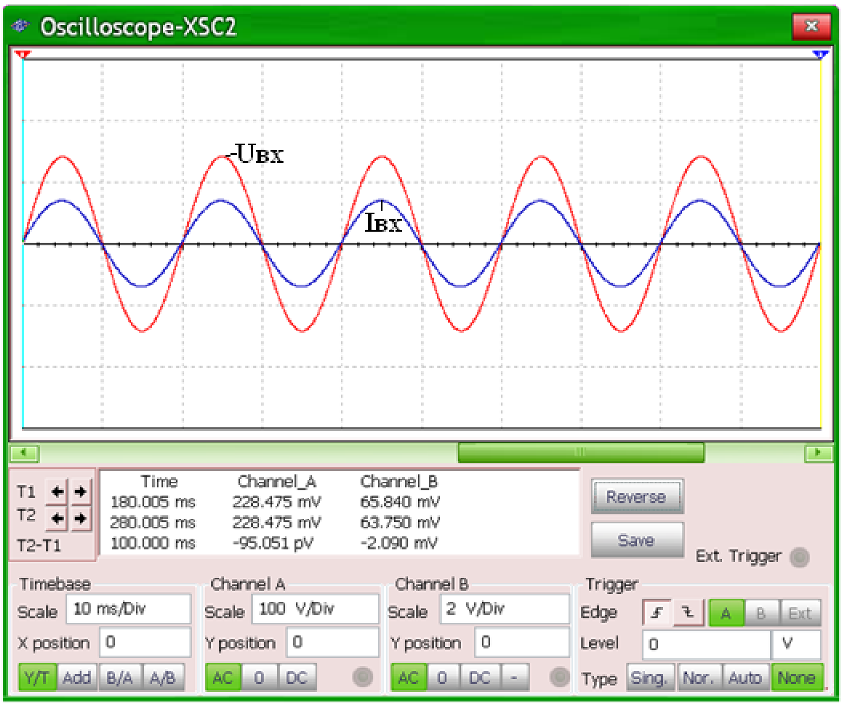

Рис. 19.

Амплитудно-частотная характеристика с резонансной частотой f_0 = 49.823 Гц в линейном масштабе, рис. 20.

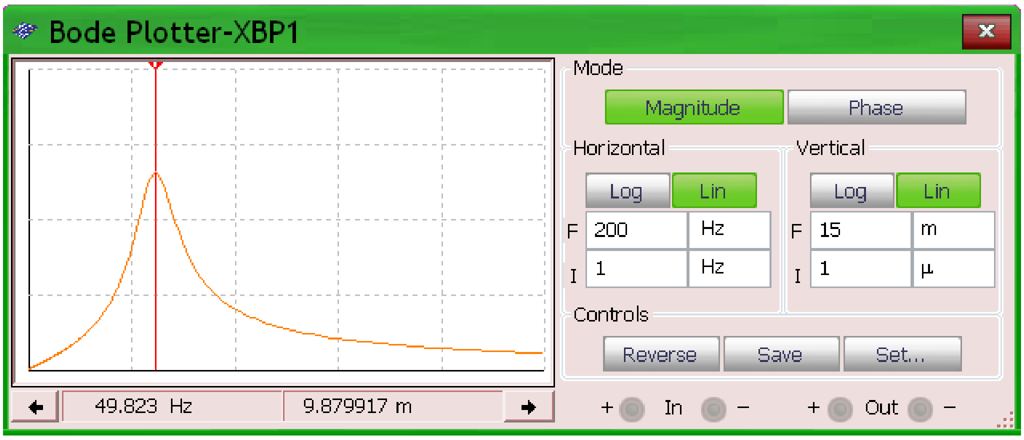

Рис.20.

Фазочастотная характеристика с резонансной частотой f_0 = 49.823 Гц в линейном масштабе, рис. 21.

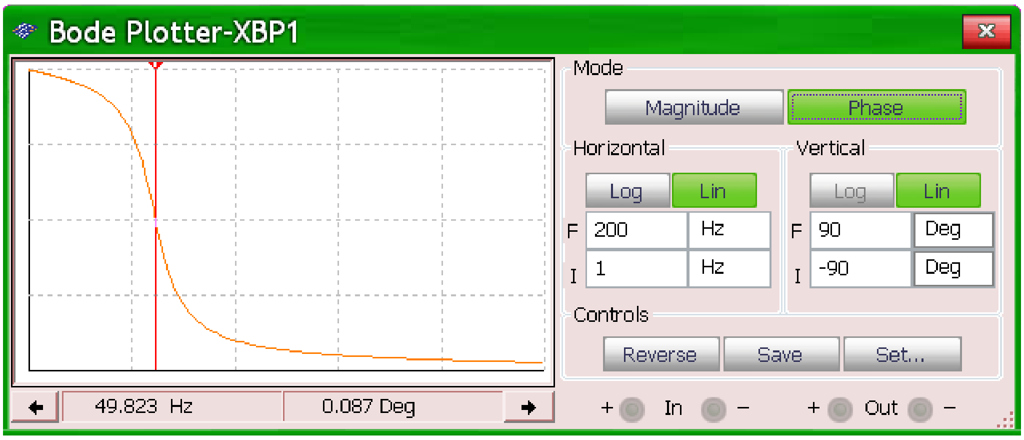

Рис. 21.

Резонанс токов. Частотные характеристики параллельного колебательного *RLC* контура.

Параллельное соединение элементов RLC в цепи синусоидального тока (рис.22).

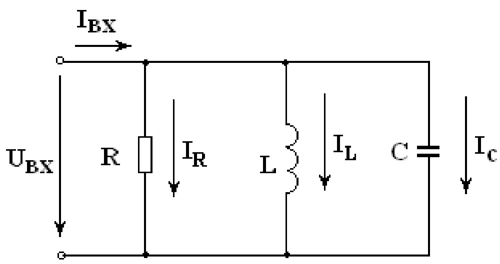

Рис. 22.

Если на вход схемы рис. 22 подать напряжение $u_{вх} = U_{mвх} \sin \omega t$,

то токи в ветвях имеют вид:

$$i_R = \frac{U_{m\text{вх}}}{R} \sin \omega t; \quad i_L = \frac{U_{m\text{вх}}}{\omega L} \sin (\omega t - \pi/2); \quad i_C = U_{mвх}\, \omega C \sin (\omega t + \pi/2).$$

Тогда входной *ток* $i_{вх} = i_R + i_L + i_C = U_{mвх} [\frac{1}{R} \sin \omega t - (\frac{1}{\omega L} - \omega C) \cos \omega t] =$

$= U_{mвх} [q \sin \omega t - b \cos \omega t]$.

Где: $q = 1/R$ - активная проводимость; $b = b_C - b_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}$ – суммарная реактивная проводимость.

Полная проводимость $y = \sqrt{q^2 + b^2} = \sqrt{q^2 + (b_C - b_L)^2}$

Векторы $\bar{I}_a; \bar{I}_p; \bar{I}$ образуют треугольник токов. Для этого треугольника справедливы выражения:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = U\sqrt{q^2 + b^2}.$$

$$\varphi = arctg\frac{I_p}{I_a} = arctg\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = arctg\frac{b}{q}.$$

Прямоугольные треугольники проводимостей, токов и мощностей представлены соответственно на рис. 23, рис. 24 и рис. 25.

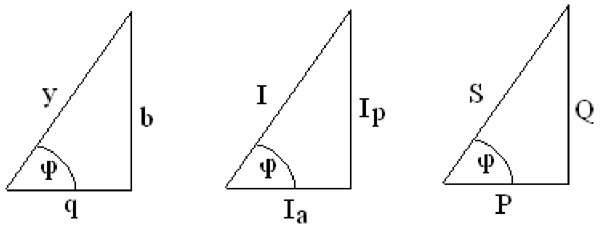

Рис. 23. Рис. 24. Рис. 25.

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_{\text{р}}^2}\,; \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

При $b_L = b_C$ ***наступает резонанс токов*** (векторная диаграмма этого режима работы цепи). *Способы настройки контура в резонанс токов аналогичны способам настройки контура в резонанс напряжений.*

Резонансная частота ***для идеального колебательного контура***
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ *рассчитывается из уравнения* ***$1/\omega_0 L = \omega_0 C$.***

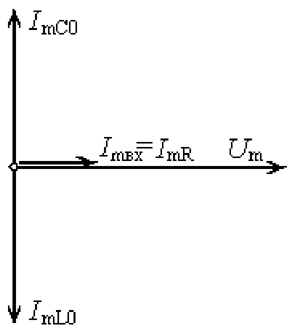

Рис. 26.

Для схемы рис. 27 резонансная частота ***(для реального колебательного контура)*** может быть рассчитана по формуле:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{\left(L - R2^2 \cdot C\right) \cdot \left(L - R1^2 \cdot C\right)}}{\left(L - R2^2 \cdot C\right)}$$

Здесь учитываются активные сопротивления катушки и конденсатора *(R1 и R2).*

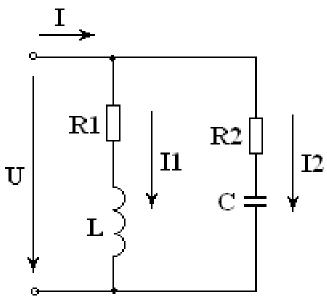

Рис. 27.

На рис. 28 представлены амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики параллельного колебательного контура.

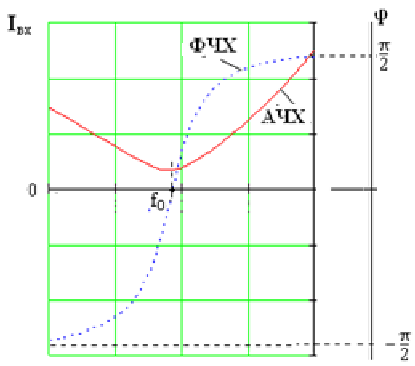

Рис. 28.

Величина равная $\dfrac{R}{\omega_0 L} = R\omega_0 C = Q$ может быть больше единицы, в специальных устройствах достигает несколько десятков и сотен единиц и называется *добротностью.*

Еще раз подчеркнем замечательную особенность цепи в режиме резонанса. Токи, протекающие в ветвях реактивных элементов, могут принимать значения в десятки раз больше общего тока цепи. Поэтому резонанс цепи называют резонансом токов. Очень важно и то, что они противофазны. Именно это указывает на то, что в цепи происходит колебательный процесс с частотой $\boldsymbol{\omega_0}$ *по передаче электрической энергии конденсатора в магнитную энергию индуктивности и наоборот. Энергия источника на этот процесс не затрачивается (при идеальных L и C).*

Экспериментальное исследование резонанса токов

На рис. 29 представлена схема экспериментальной установки программы **Multisim.**

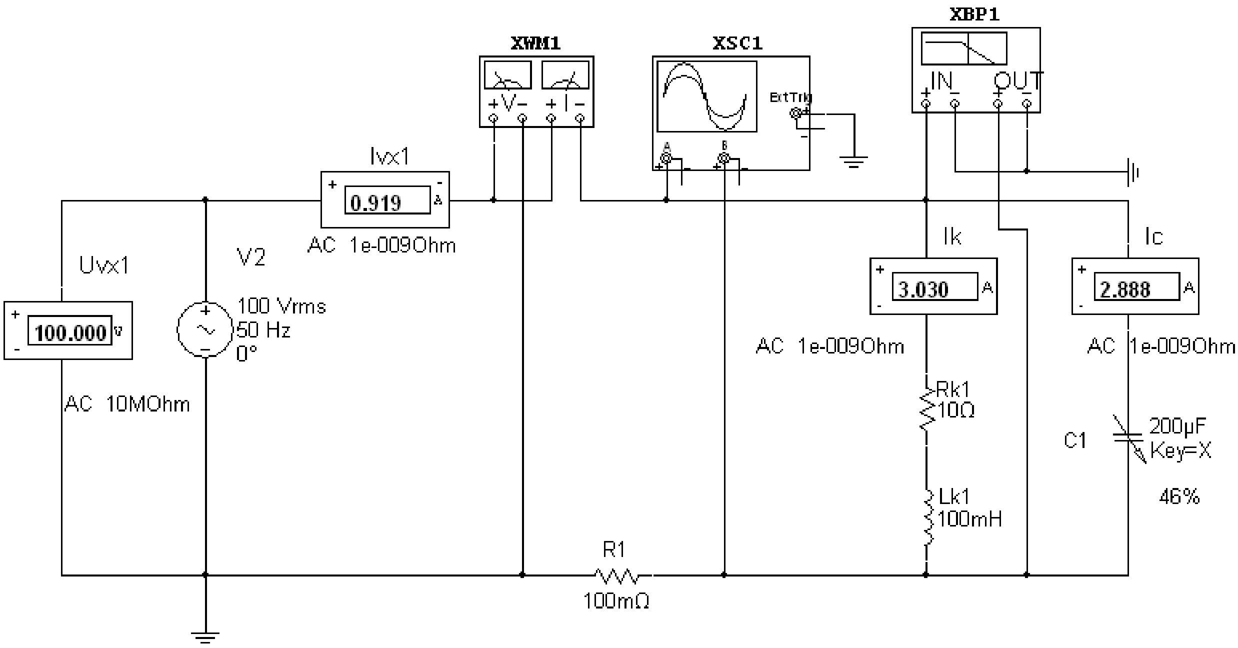

Рис. 29.

Параллельный колебательный контур представлен катушкой Rk1= 10 Ом; Lk1 = 100 мГн и конденсатором переменной ёмкости C1 = 0 ÷ 200 мкФ. С помощью клавиши «X» можно изменять ёмкость конденсатора. При изменении параметра в 46% ёмкость конденсатора составит приблизительно 92 мкФ. При этих параметрах контур настроен в резонанс токов. Входной ток снизился до минимального уровня I_{BX} = 0,919 А. Коэффициент мощности в условиях резонанса ***cos φ = 1*** (Power Factor, рис. 30). Ток входа $\boldsymbol{I_{BX}}$ совпадает по фазе с входным напряжением $\boldsymbol{U_{BX}}$ (Рис. 31.).

На рис. 32 и рис. 33 на экране графопостроителя представлены соответственно амплитудно-частотная характеристика и фазочастотная характеристика с резонансной частотой f_0 = 50 Гц в линейном масштабе.

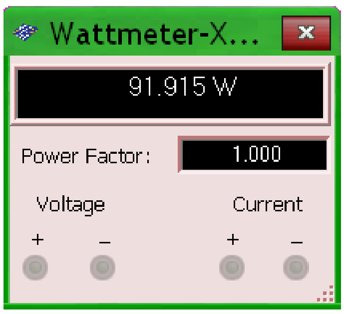

Рис. 30.

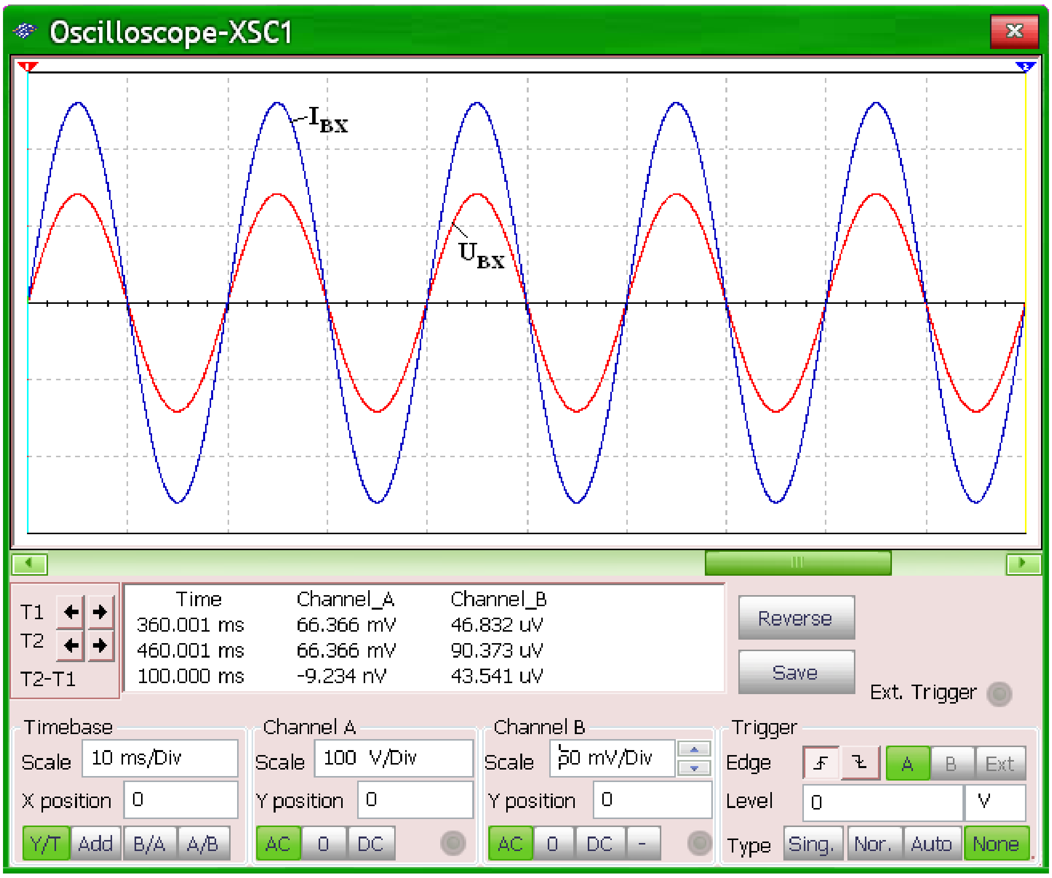
Oscilloscope-XSC1
I_{BX}
U_{BX}
Time
Channel_A
Channel_B
T1
T2
T2-T1
360.001 ms
460.001 ms
100.000 ms
66.366 mV
66.366 mV
-9.234 nV
46.832 uV
90.373 uV
43.541 uV
Reverse
Save
Ext. Trigger
Timebase
Scale
10 ms/Div
X position
0
Y/T
Add
B/A
A/B
Channel A
Scale
100 V/Div
Y position
0
AC
0
DC
Channel B
Scale
50 mV/Div
Y position
0
AC
0
DC
-
Trigger
Edge
A
B
Ext
Level
0
V
Type
Sing.
Nor.
Auto
None

Рис. 31.

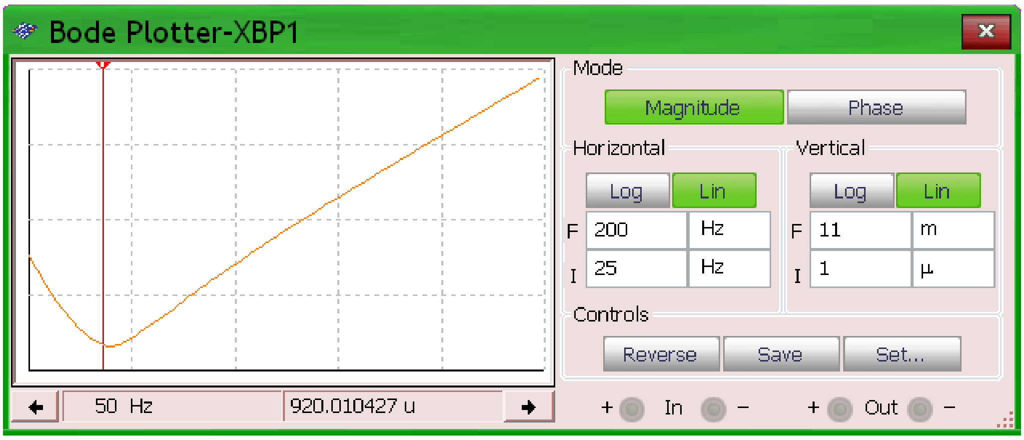
Bode Plotter-XBP1
Mode
Magnitude
Phase
Horizontal
Log
Lin
F
200
Hz
I
25
Hz
Vertical
Log
Lin
F
11
m
I
1
µ
Controls
Reverse
Save
Set...
50 Hz
920.010427 u
+ In −
+ Out −

Рис. 32.

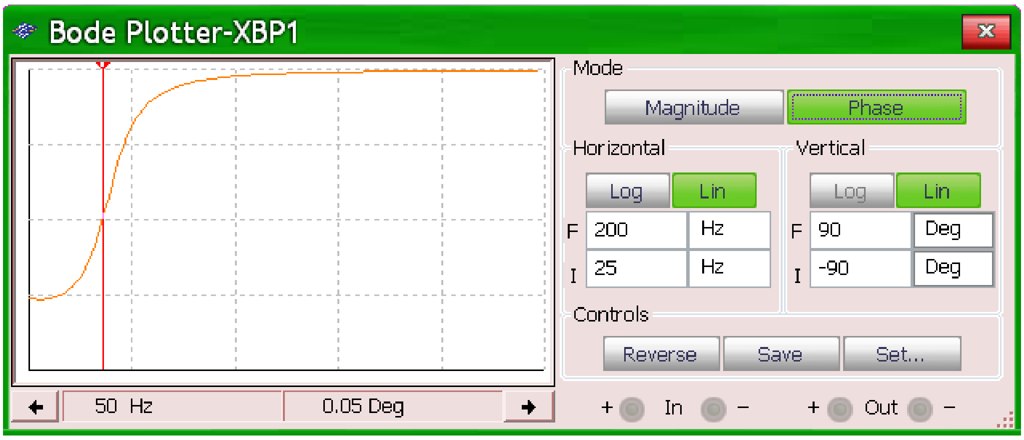

Рис. 33.

Если изменить ёмкость конденсатора, например, до величины C = 130 мкФ (65%) то ток входа возрастёт (I_{BX} = 1,505 А), изменятся и другие параметры, см. рис. 34; рис. 35; рис. 36.

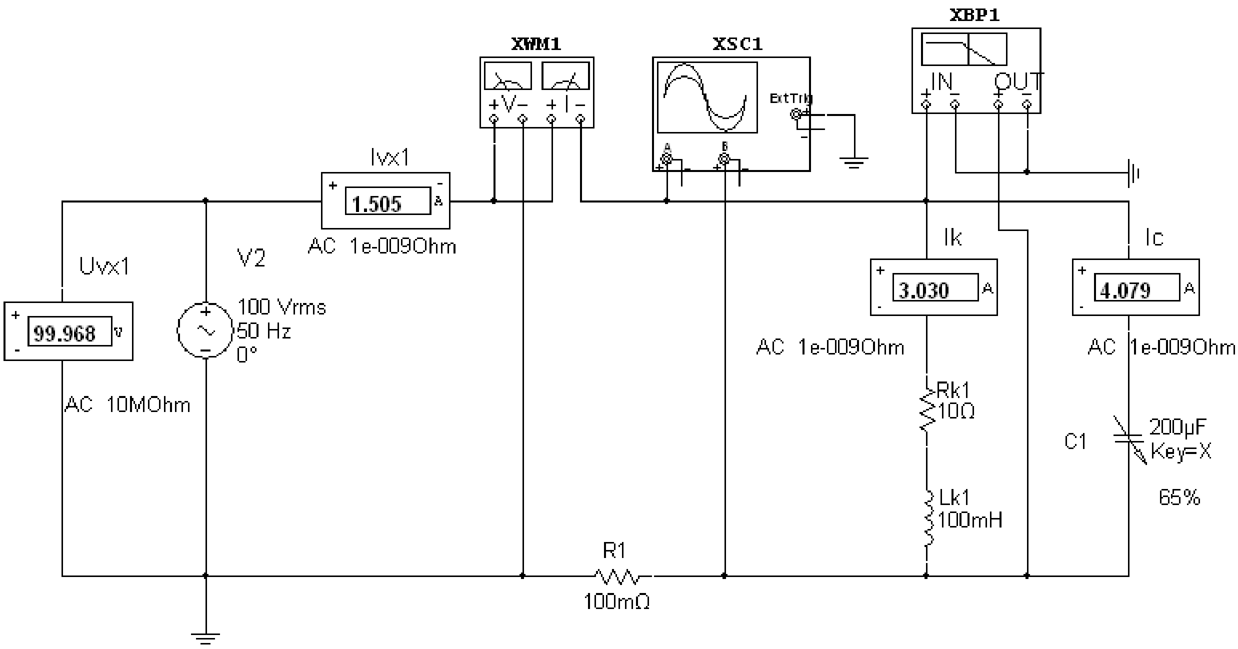

Рис. 34.

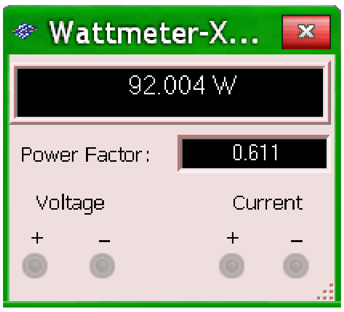

Рис. 35.

На экране осциллографа хорошо видно возрастание входного тока и смещение его относительно входного напряжения (в сторону опережения) на угол «**φ**».

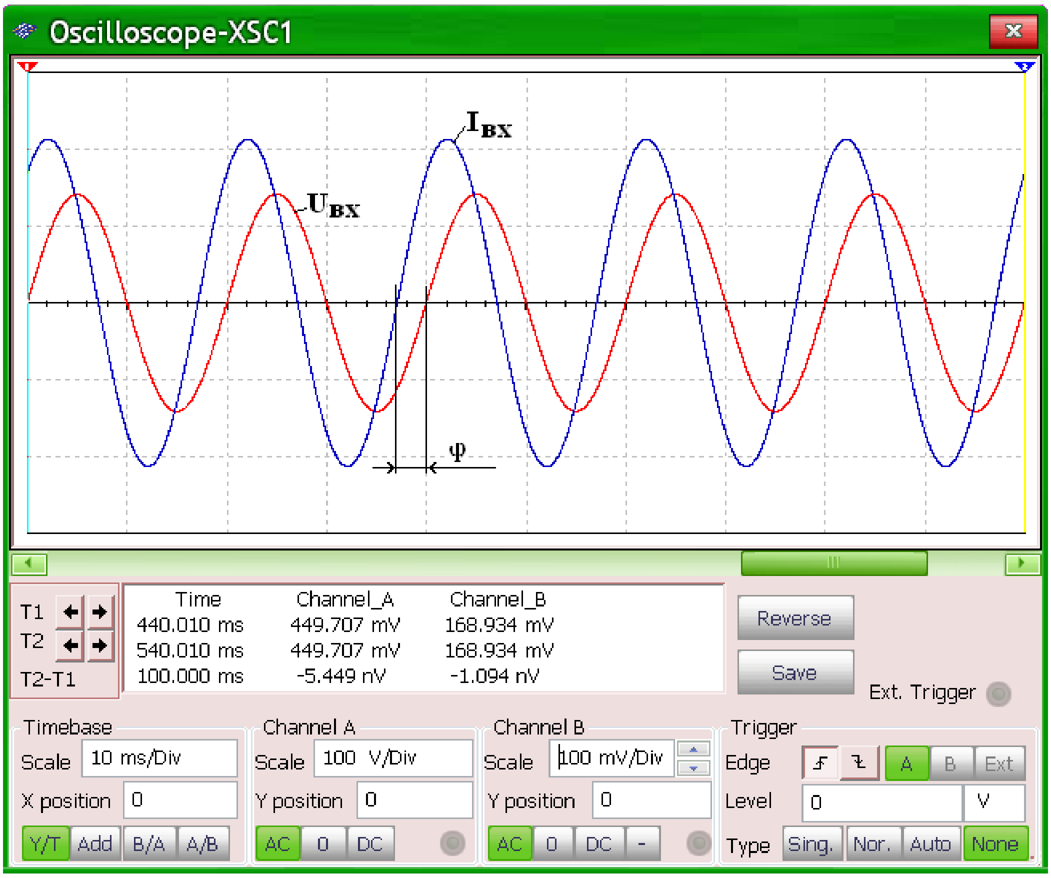

Рис. 36.

Резонансы напряжений и токов широко используются в технике.

В генераторах импульсных напряжений, в удвоителях напряжений, работающих на высокоомную нагрузку, в полосовых фильтрах, реагирующих на определенную частоту, фильтрах как электрическая «пробка», задерживающая определенную частоту, в радиоприемниках для выделения сигнала конкретной радиостанции. Колебательный контур, работающий в режиме резонанса токов, является одним из основных узлов электронных генераторов и т. п.