

Лекция 3. Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников теплоты

Плотность объемного тепловыделения

В рассматриваемых ранее задачах внутренние источники теплоты отсутствовали. Однако в ряде случаев внутри объектов исследования могут протекать процессы, в результате которых будет выделяться или поглощаться тепло, например, выделение джоулевой теплоты при протекании электрического тока; выделение теплоты в ТВЭЛах атомных реакторов; выделение или поглощение теплоты при протекании химических реакций.

Количественно интенсивность объемного выделения (поглощения) теплоты характеризуется плотностью объемного тепловыделения q_v – тепловым потоком, выделившимся в единице объема $[\text{Вт/м}^3]$. Величина q_v также имеет два названия: удельная производительность внутренних источников теплоты или объемная плотность теплового потока. В зависимости от знака q_v говорят об источниках или стоках теплоты; в зависимости от особенностей изменения величины q_v в пространстве различают точечные, линейные, поверхностные и объемные источники теплоты.

Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений

Рассмотрим температурное поле в плоской стенке, когда внутренние источники теплоты равномерно распределены по всему объему.

В одномерном случае при стационарном режиме теплообмена дифференциальное уравнение энергии запишется в виде

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.17)$$

После интегрирования получим

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + c_1; \quad (1.18)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2. \quad (1.19)$$

Постоянные интегрирования определяются в зависимости от условий охлаждения на поверхности пластины.

Случай 1. Симметричные условия отвода теплоты от пластины

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой 2δ – величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 1.12). Источники равномерно распределены по всему объему и равны q_v . Заданы постоянные коэффициенты теплоотдачи α и температура жидкости вдали от пластины t_f . Благодаря симметричному отводу теплоты температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси x , направленной нормально к поверхности тела. Температуры на оси пластины t_0 и на ее поверхности t_w неизвестны. Кроме этих температур, необходимо найти распределение температуры в пластине и количество теплоты, отданной в окружающую среду.

Дифференциальное уравнение (1.17) и его решения (1.18) и (1.19) описывают распределение температуры в пластине. Граничные условия на поверхностях пластины при $x = \pm\delta$ определяются из уравнения теплоотдачи

$$\alpha(t_w - t_f) = \mp \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\pm\delta}.$$

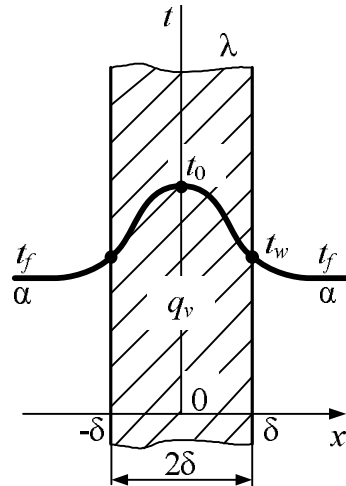


Рис. 1.12. Температурное поле в плоской стенке при наличии внутренних источников теплоты

Поскольку граничные условия для обеих сторон пластины одинаковые, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости $x = 0$. В этой точке плотность теплового потока равна нулю. Теплота с одинаковой интенсивностью отводится через левую и правую поверхности тела. Одинаково и тепловыделение в обеих половинах пластины. Это означает, что можно далее рассматривать лишь одну половину пластины, например, правую, и записать для нее граничные условия в следующем виде:

а) так как при $x = 0$, значение температуры максимальное, то

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = 0;$$

Подставляя последнее выражение в (1.18), получим:

$$0 = -\frac{q_v \cdot 0}{\lambda} + c_1, \text{ следовательно, } c_1 = 0.$$

б) так как при $x = \pm\delta$ $t = t_w$, то из (1.19) следует

$$t_w = -\frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 + c_2, \text{ следовательно, } c_2 = t_w + \frac{q_v}{\lambda} \frac{\delta^2}{2}.$$

Подстановка постоянных интегрирования c_1 и c_2 в (1.19) приводит к следующему выражению, определяющему температурное поле в плоской стенке с объемным тепловыделением:

$$t(x) = t_f + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2), \quad (1.20)$$

из которой следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

Так как $t_w = t(\delta) = t_f + \frac{q_v \delta}{\alpha}$, то

$$t(x) = t_w + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2).$$

Максимальная температура на оси симметрии стенки (при $x = 0$):

$$t_0 = t_w + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2.$$

Перепад температур между осью симметрии стенки и ее поверхностью

$$t_0 - t_w = \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2.$$

Если коэффициент теплопроводности материала стенки является линейной функцией температуры $\lambda = \lambda_0 (1 + b \cdot t)$, то уравнение температурной кривой определяется выражением

$$t(x) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}.$$

Случай 2. Пластина с одной теплоизолированной поверхностью

Пусть одна из поверхностей пластины, рассмотренной в предыдущем случае, будет теплоизолированной (рис. 1.13), а на другой ее поверхности заданы условия охлаждения: коэффициент теплоотдачи α и температура жидкости вдали от пластины t_f .

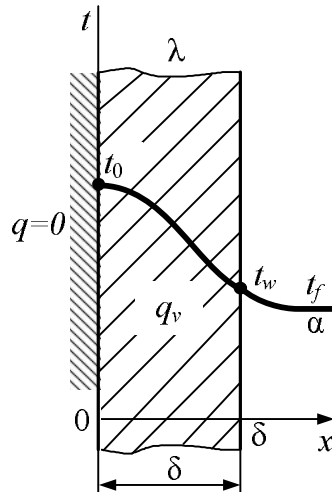


Рис. 1.13. Температурное поле в плоской стенке с теплоизолированной поверхностью

Источники равномерно распределены по всему объему и равны q_v . Обозначим толщину пластины δ и воспользуемся решением предыдущей задачи (1.20) для половины симметрично охлаждаемой пластины. Здесь максимальное значение температуры пластины t_0 будет соответствовать ее левой поверхности, через которую отсутствует поток теплоты.

Случай 3. Пластина с разными температурами поверхностей

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой δ величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 1.14). Источники равномерно распределены по всему объему и равны q_v . Температуры стенок поддерживаются постоянными: при $x = 0$ $t = t_{w1}$; при $x = \delta$ $t = t_{w2}$. Температура пластины будет изменяться только вдоль оси x . Необходимо найти распределение температуры в пластине.

Дифференциальное уравнение (1.17) и его решение (1.19) такие же. Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{w1};$$

$$\text{при } x = \delta \quad t = t_{w2}.$$

Тогда распределение температуры в пластине описывается уравнением:

$$t(x) = t_{w1} + \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} \cdot x + \frac{q_v \delta}{2\lambda} \cdot x - \frac{q_v}{2\lambda} \cdot x^2.$$

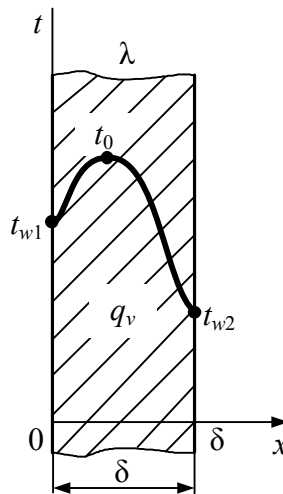


Рис. 1.14. Плоская пластина с неодинаковыми температурами стенок

Или после преобразований

$$t(x) = t_{w1} - \frac{x}{\delta}(t_{w1} - t_{w2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Отнимем от правой и левой частей уравнения температуру стенки t_{w2} , тогда

$$t(x) - t_{w2} = t_{w1} - t_{w2} - \frac{x}{\delta}(t_{w1} - t_{w2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Разделив правую и левую части на $(t_{w1} - t_{w2})$, получим

$$\Theta = \frac{t(x) - t_{w2}}{t_{w1} - t_{w2}} = 1 - \frac{x}{\delta} + \frac{Po}{2} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right),$$

где $Po = \frac{q_v \delta^2}{\lambda(t_{w1} - t_{w2})}$ – число Померанцева, характеризующее отношение мощности внутреннего источника теплоты q_v к мощности теплового потока, переносимого в единице объема за счет теплопроводности при передаче температур $(t_{w1} - t_{w2})$.

Обозначим $X = x/\delta$ как безразмерную координату, тогда

$$1 - X + \frac{Po}{2}(X - X^2) = (1 - X) + X \frac{Po}{2}(1 - X) = (1 - X) \left(1 + \frac{Po}{2} X \right).$$

Окончательно распределение температуры в безразмерном виде описывается выражением

$$\Theta = (1 - X) \left(1 + \frac{1}{2} Po \cdot X \right). \quad (1.21)$$

В зависимости от величины числа Померанцева распределение температуры может иметь вид выпуклой или вогнутой кривой, причем максимальная температура может лежать либо внутри пластины, либо на одной из ее поверхностей. В случае отсутствия внутренних источников теплоты ($Po = 0$) распределение температуры, описываемое уравнением (1.21), совпадает с формулой (1.15).

Случай 4. Несимметричные условия охлаждения пластины

Рассмотрим пластину толщиной δ с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты, условия отвода теплоты от которой различны (рис. 1.15): с одной стороны пластины находится одна жидкость с коэффициентом теплоотдачи α_1 и температурой вдали от пластины t_{f1} , а с другой стороны – другая жидкость с коэффициентом теплоотдачи α_2 и температурой вдали от пластины t_{f2} . Необходимо найти распределение температуры в пластине.

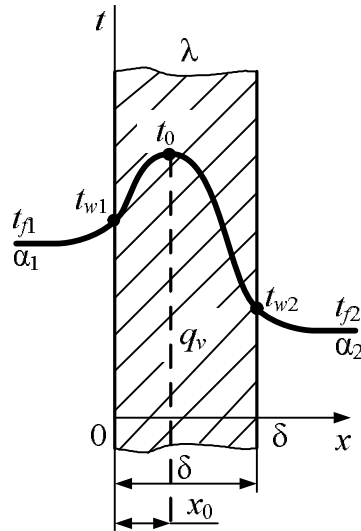


Рис. 1.15. Плоская пластина с несимметричными условиями отвода теплоты

В случае несимметричных условий отвода теплоты от пластины плоскость, через которую тепловой поток отсутствует, сместится из центра пластины к одной из ее поверхностей в некоторую точку x_0 . Решения следует искать отдельно для левой половины пластины и для ее правой половины (воспользовавшись общим решением (1.19) дифференциального уравнения (1.17)), в которых будут разными граничные условия и, следовательно, изменятся значения постоянных интегрирования.

Граничные условия для правой половины пластины:

- 1) при $x = x_0$ плотность теплового потока

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=x_0} = 0;$$

- 2) на поверхности пластины при $x = \delta$ из уравнения теплоотдачи

$$-\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=\delta} = \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}).$$

Подставляя значения постоянных интегрирования из таких граничных условий в уравнение (1.19) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в правой части пластины для $x_0 \leq x \leq \delta$:

$$t^{\text{прав}}(x) = t_{f2} + \frac{q_v}{\alpha_2} (\delta - x_0) - \frac{q_v x_0}{\lambda} (\delta - x) + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2). \quad (1.22)$$

Температура правой поверхности пластины

$$t_{w2} = t(x = \delta) = t_{f2} + \frac{q_v}{\alpha_2}(\delta - x_0).$$

Граничные условия для левой половины пластины:

1) при $x = x_0$ плотность теплового потока:

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=x_0} = 0;$$

2) на внешней границе при $x = 0$ из уравнения теплоотдачи

$$\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} = \alpha_1 (t_{w1} - t_{f1}).$$

Подставляя значения постоянных интегрирования из данных граничных условий в уравнение (1.19) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в левой части пластины для $0 \leq x \leq x_0$:

$$t^{\text{лев}}(x) = t_{f1} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1} + \frac{q_v x_0}{\lambda} x - \frac{q_v}{2\lambda} x^2. \quad (1.23)$$

Температура левой поверхности пластины

$$t_{w1} = t(x = 0) = t_{f1} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1}.$$

Для определения координаты x_0 необходимо приравняем решения для правой и левой частей пластины в этой точке

$$t^{\text{прав}}(x_0) = t^{\text{лев}}(x_0),$$

получим

$$x_0 = \frac{\frac{t_{f2} - t_{f1}}{q_v} + \delta \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{2\lambda} \right)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Значение температуры в данном сечении (максимальная температура) можно определить по (1.22) или (1.23):

$$t_0 = t(x_0).$$