

Лекция 2. Теплопроводность плоской стенки без внутренних источников теплоты

Температурное поле в плоской стенке при граничных условиях первого рода

Рассмотрим стационарный процесс переноса теплоты через бесконечную плоскую стенку (рис. 1.4) [9, 10, 15, 17, 19].

Решим дифференциальное уравнение теплопроводности для плоской стенки при следующих условиях однозначности:

- 1) толщина стенки равна δ ;
- 2) коэффициент теплопроводности стенки не зависит от температуры и равен λ ;
- 3) внутренние источники (стоки) теплоты в стенке отсутствуют ($q_v = 0$);
- 4) на обеих поверхностях плоской стенки задано значение температуры (ГУ I рода):

$$t|_{x=0} = t_{w1}; \quad t|_{x=\delta} = t_{w2}.$$

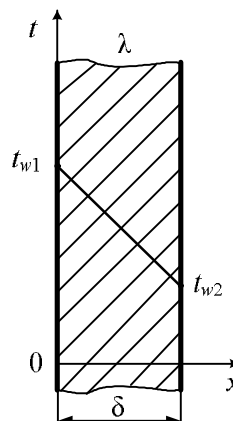


Рис. 1.4. Стационарное температурное поле в плоской стенке

При этом изотермические поверхности в стенке будут представлять собой плоскости, перпендикулярные оси Ox . Таким образом, $\partial t / \partial y = 0$, $\partial t / \partial z = 0$ и $\partial t / \partial \tau = 0$. С учетом всех допущений уравнение теплопроводности (1.7) приобретает вид:

$$\int \frac{d^2 t}{dx^2} = 0,$$

откуда следует:

$$\frac{dt}{dx} = c_1 \text{ или } \int dt = \int c_1 dx.$$

И окончательно получаем общее решение температурного поля в виде

$$t = c_1 x + c_2,$$

Из анализа, которого следует, что в плоской стенке при стационарном режиме теплопроводности температура линейно изменяется по ее толщине (см. рис. 1.4).

Постоянные интегрирования находим, используя граничные условия путем решения системы из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} t_{w1} = c_1 0 + c_2; \\ t_{w2} = c_1 \delta + c_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $c_2 = t_{w1}$, а из второго уравнения системы находим постоянную c_1

$$c_1 = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} = -\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta}.$$

Подставляя значение постоянных интегрирования в общее решение, окончательно получаем:

$$t = t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} x \quad (1.14)$$

или

$$t = t_{w1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x$$

откуда следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Зная температурное поле, несложно рассчитать плотность теплового потока в плоской стенке, воспользовавшись законом Фурье

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} x \right) = -\lambda \left(-\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \right) = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}}$$

или

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}},$$

где λ / δ – *тепловая проводимость* плоской стенки, Вт/(м²·К);

$R = \delta / \lambda$ – *термическое сопротивление теплопроводности* плоской стенки, (м²·К)/Вт.

Из анализа формулы для расчета плотности теплового потока следует, что тепловой поток не изменяется по толщине плоской стенки $q \neq f(x)$ или $\frac{dq}{dx} = 0$ в любой точке плоской стенки.

Если отсчет избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры t_{w2} , то уравнение (1.14) можно привести к безразмерному виду. Обозначим

$\Delta t = t - t_{w2}$ – текущий температурный напор или избыточная температура;

$\Delta t_0 = t_{w1} - t_{w2}$ – полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

После введения этих обозначений уравнение (1.14) запишется в виде:

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} \cdot x$$

или

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta}.$$

Обозначим

$$\Theta = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} - \text{безразмерный температурный напор или безразмерная избы-}$$

точная температура;

$$X = \frac{x}{\delta} - \text{безразмерная координата,}$$

тогда получим:

$$\Theta = 1 - X. \quad (1.15)$$

Уравнение температурного поля (1.15) является универсальным, так как распределение температуры в стенке можно представить единой прямой для любых заданных значений температур стенки t_{w1} , t_{w2} и ее толщины δ (рис. 1.5).

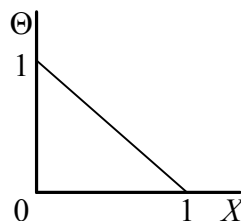


Рис. 1.5. Теплопроводность через плоскую стенку в безразмерных координатах

Выражения (1.14) и (1.15) получены в предположении, что коэффициент теплопроводности является постоянной величиной. В действительности это не всегда бывает так. Рассмотрим зависимость коэффициента теплопроводности только от температуры, которая для многих материалов близка к линейной $\lambda = \lambda_0(1 + b \cdot t)$, где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при 0°C [1, 7, 18]. Тогда плотность теплового потока на поверхности пластины

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}),$$

где $\lambda_{cp} = \lambda_0 \left(1 + b \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2} \right)$ – коэффициент теплопроводности при средне-арифметическом значении температуры в стенке.

Тогда выражение для температурного поля примет вид:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{w1} \right)^2 - \frac{2q \cdot x}{\lambda_0 b} - \frac{1}{b}}. \quad (1.16)$$

Из последнего выражения следует, что температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер температурной кривой определяется знаком и численным значением коэффициента b .

Теплопроводность через многослойную плоскую стенку

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, состоящей из n слоев (рис. 1.6). Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

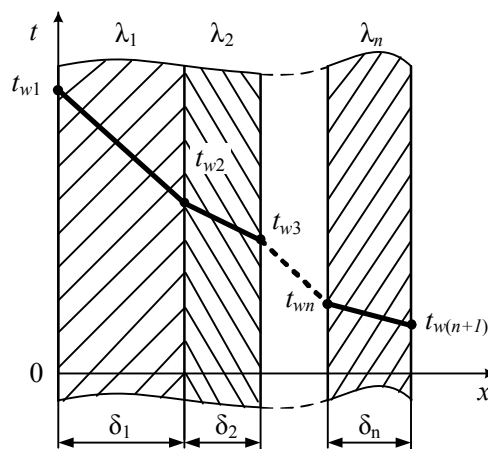


Рис. 1.6. Стационарное температурное поле в многослойной плоской стенке

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же, т.е.

$$\frac{dq}{dx} = 0.$$

При заданных температурах внешних поверхностей такой стенки, размерах слоев и, соответственно, коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений для плотности теплового потока каждого из слоев, из которых выразим температурные напоры:

$$\begin{aligned} t_{w1} - t_{w2} &= q\delta_1 / \lambda_1, \\ t_{w2} - t_{w3} &= q\delta_2 / \lambda_2, \\ &\dots \\ t_{wn} - t_{w(n+1)} &= q\delta_n / \lambda_n. \end{aligned}$$

Сложив левые и правые части уравнений, получим:

$$t_{w1} - t_{w(n+1)} = q(\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \dots + \delta_n / \lambda_n).$$

Отсюда плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}.$$

Величина $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, равная сумме тепловых сопротивлений всех n слоев,

называется *полным тепловым или термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки*.

Температуры на границе соприкосновения двух соседних слоев равны:

$$\begin{aligned} t_{w2} &= t_{w1} - q\delta_1 / \lambda_1, \\ t_{w3} &= t_{w2} - q\delta_2 / \lambda_2, \\ &\dots \\ t_{w(n+1)} &= t_{wn} - q\delta_n / \lambda_n. \end{aligned}$$

Для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет ломаную линию.

При сравнении переноса теплоты через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности для многослойной стенки $\lambda_{\text{экв}}$. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой Δ равна толщине многослойной стенки $\sum_{i=1}^n \delta_i$, а тепловое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Откуда следует

$$\lambda_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Таким образом, эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$ зависит не только от теплофизических свойств слоев стенки, но и от их толщины.

Рассмотрим процесс теплопроводности плоской многослойной стенки, состоящей из n слоев. На границе разделения соседних слоев возникает *контактное термическое сопротивление*, обусловленное неплотным соприкосновением поверхностей. Термическое сопротивление контакта в некоторых случаях может быть пренебрежимо малым, но иногда общее тепловое сопротивление многослойной стенки благодаря сопротивлению в местах контакта увеличивается в несколько раз.

Тепловой поток через поверхность контакта можно выразить формулой

$$q = \frac{1}{R_k} (t' - t''),$$

где R_k – контактное термическое сопротивление; t' и t'' – температуры контактирующих поверхностей.

Оценим температурное поле и тепловой поток теплопроводностью через многослойную стенку с учетом контактных сопротивлений. Каждый слой имеет заданную толщину δ_i и коэффициент теплопроводности λ_i (рис. 1.7).

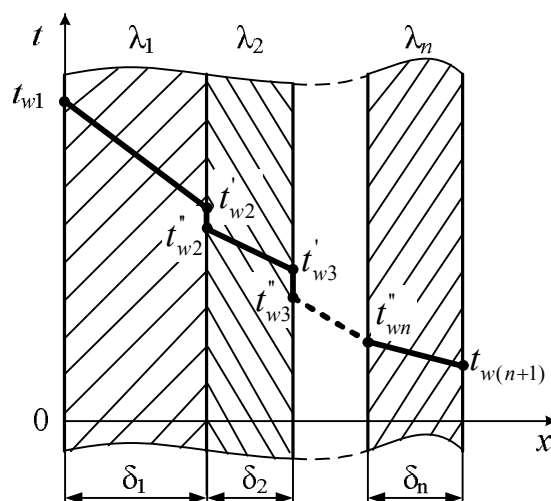


Рис. 1.7. Стационарное температурное поле в многослойной плоской стенке с учетом термического сопротивления контакта

При стационарном тепловом режиме тепловые потоки через каждый из слоев, а также через зоны контактов будут одинаковыми, так как только при этом условии температурное поле не изменяется во времени.

Запишем плотности тепловых потоков через i -й слой стенки и i -ю поверхность контакта:

$$q = \frac{t''_{w_i} - t'_{w(i+1)}}{\frac{\delta_i}{\lambda_i}};$$

$$q = \frac{1}{R_k} (t'_{w_i} - t''_{w_i}).$$

Выразив с помощью этих формул разности температур для каждого из n слоев стенки и $(n-1)$ поверхностей контакта и просуммировав правые и левые части этих равенств, получим

$$t_{w1} - t_{w_{n+1}} = q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + R_{k1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right),$$

откуда

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki}}.$$

Передача теплоты при граничных условиях третьего рода

Передача теплоты от одной жидкой среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется теплопередачей.

Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.

Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис. 1.8). Заданы коэффициент теплопроводности λ , температуры окружающей среды t_{f1} и t_{f2} , а также коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Будем считать, что t_{f1} и t_{f2} , α_1 и α_2 постоянны и не меняются вдоль поверхности. Это позволяет рассматривать изменение температуры жидкостей и стенки только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной, а также температуры на поверхностях стенки.

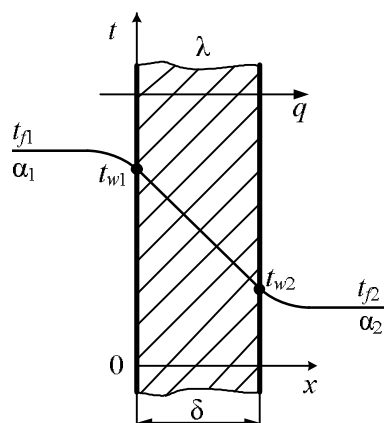


Рис. 1.8. Теплопередача через плоскую стенку

Удельный тепловой поток от горячей жидкости к стенке определяется из закона Ньютона-Рихмана уравнением:

$$q = \alpha_1 (t_{f1} - t_{w1}).$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}).$$

Этот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи:

$$q = \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}).$$

Тогда:

$$t_{f1} - t_{f2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Выразим плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k (t_{f1} - t_{f2}),$$

где $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ – коэффициент теплопередачи, характеризующий интен-

сивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку, имеет ту же размерность, что и коэффициент теплоотдачи, численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один Кельвин.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи и для однослойной стенки запишется как:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Из последнего выражения видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных термических сопротивлений: $R_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ – термического сопротивления теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; $R_w = \frac{\delta}{\lambda}$ – термического сопротивления теплопроводности стенки; $R_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ – термического сопротивления теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление теплопроводности каждого слоя. Тогда полное термическое сопротивление теплопередачи через многослойную стенку:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2},$$

отсюда коэффициент теплопередачи через многослойную стенку:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Удельный тепловой поток через многослойную стенку, состоящую из n слоев:

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k(t_{f1} - t_{f2}).$$

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти как

$$t_{w1} = t_{f1} - \frac{q}{\alpha_1},$$

$$t_{w2} = t_{f1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right) = t_{f2} + \frac{q}{\alpha_2}.$$

Для многослойной стенки температура на границе соприкосновения двух слоев i и $(i+1)$ при граничных условиях третьего рода может быть найдена из уравнения:

$$t_{w(n+1)} = t_{f1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{j=1}^i \frac{\delta_j}{\lambda_j} \right).$$

Внутри любого слоя распределение температуры может быть найдено по уравнениям (1.14) или (1.16), в которых координата отсчитывается от начала соответствующего слоя.

При наличии термического сопротивления контакта, удельный тепловой поток следует рассчитывать по выражению

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Тогда выражение для расчета коэффициента теплопередачи через многослойную плоскую стенку при наличии термического сопротивления контакта при граничных условиях третьего рода примет вид

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Передача теплоты при граничных условиях второго и третьего рода

Рассмотрим случай, когда при передаче теплоты через однородную и изотропную стенку на одной ее поверхности заданы граничные условия второго рода в виде $q_w = \text{const}$ при $x=0$; на другой ее поверхности заданы коэффициент теплоотдачи α_2 и температура окружающей среды t_{f2} , это есть граничные условия третьего рода (рис. 1.9). Внутренние источники теплоты в стенке отсутствуют [10, 16, 19].

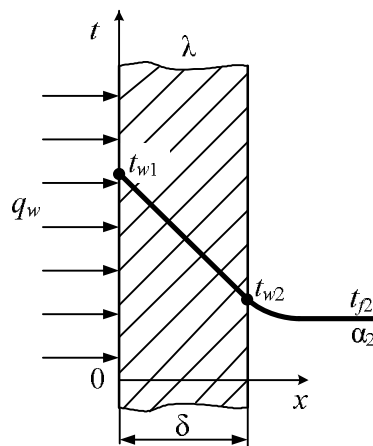


Рис. 1.9. Теплопередача через плоскую стенку при граничных условиях второго и третьего рода

Такая задача сводится к нахождению распределения температуры в стенке и определению температур на ее поверхностях. В силу стационарности теплового режима можно записать следующую систему уравнений:

$$q_w = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}}, \quad q_w = \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}),$$

из которой следует, что при заданном значении q_w :

$$t_{w2} = t_{f2} + q_w / \alpha_2,$$

$$t_{w1} = t_{w2} + q_w \cdot \frac{\delta}{\lambda} = t_{f2} + q_w \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right).$$

Графические методы определения температур в плоской стенке

Кроме аналитических существуют графические методы определения распределения температур в плоских стенках [7, 11, 18].

Способ 1. Определение температур в местах соприкосновения слоев в многослойной плоской стенке

Пусть стенка состоит из трех разнородных, плотно прилегающих друг к другу слоев (рис. 1.10,а). Толщины δ_1 , δ_2 , δ_3 и коэффициенты теплопроводности слоев – заданы. Кроме того, известны температуры наружных поверхностей стенки t_{w1} и t_{w4} . Благодаря хорошему контакту между слоями соприкасающиеся поверхности имеют одну и ту же температуру, но значения этих температур неизвестны; обозначим их через t_{w2} и t_{w3} .

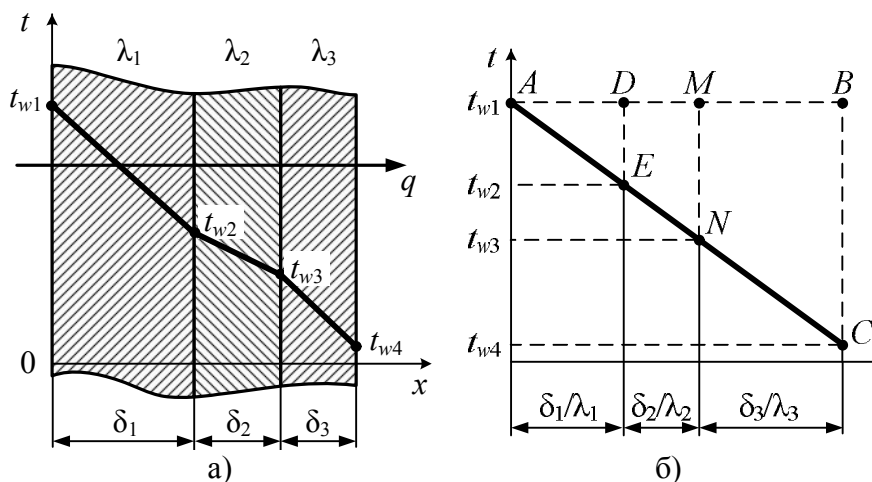


Рис. 1.10. Графический метод определения промежуточных температур в многослойной плоской стенке

Для определения t_{w2} и t_{w3} необходимо построить графическую зависимость, по оси абсцисс которого в любом масштабе, но в порядке расположения слоев, откладываются значения термических сопротивлений δ_1/λ_1 , δ_2/λ_2 и δ_3/λ_3 , и восстанавливаются перпендикуляры (рис. 1.10,б). На крайних из них также в произвольном, но одинаковом масштабе откладываются значения наружных температур t_{w1} и t_{w4} . Полученные точки A и C соединяются прямой. Точки пересечения этой прямой со средними перпендикулярами дают значения искомых температур t_{w2} и t_{w3} .

В самом деле, треугольники ABC и ADE подобны. Следовательно,

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ и } DE = \frac{BC}{AB} AD.$$

Подставляя значения отрезков, получаем:

$$DE = \frac{t_{w1} - t_{w4}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = q \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1},$$

С другой стороны $DE = t_{w1} - t_{w2}$. Таким образом

$$DE = q \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = t_{w1} - t_{w2}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$MN = q \cdot \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) = t_{w1} - t_{w3}.$$

Способ 2. Определение температур поверхности плоской стенки

Данный способ основан на замене термического сопротивления теплоотдачи горячей и холодной жидкости термическим сопротивлением твердой стенки, с таким же коэффициентом теплопроводности, как и действительная стенка.

Пусть температуры наружных поверхностей «воображаемой» стенки соответственно равны температурам горячей и холодной жидкости t_{f1} и t_{f2}

(рис. 1.11,а). Количество передаваемой теплоты остается без изменения. Тогда общая толщина Δ этой воображаемой стенки определяется из соотношения

$$q = k(t_{f1} - t_{f2}) = \frac{\lambda}{\delta}(t_{f1} - t_{f2}),$$

откуда

$$\Delta = \lambda \frac{1}{k} = \lambda \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{\lambda}{\alpha_1} + \delta + \frac{\lambda}{\alpha_2}, \text{ м.}$$

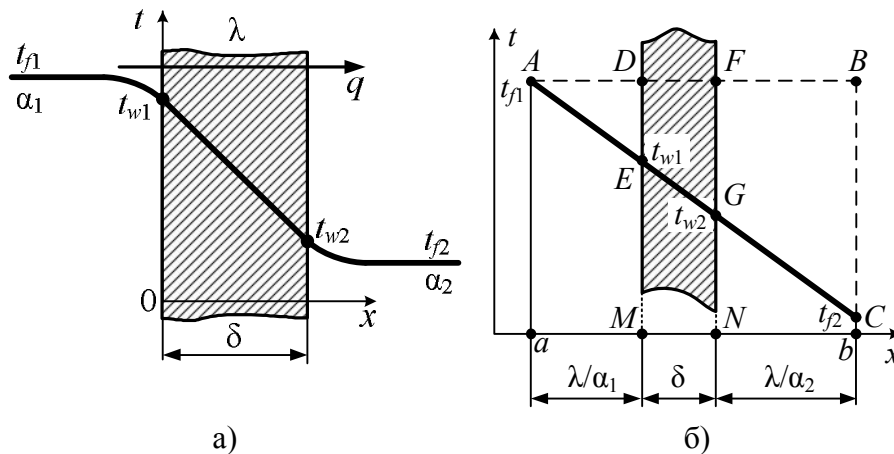


Рис. 1.11. Графический способ определения температур на поверхностях стенки

Так как величины λ/α_1 и λ/α_2 определяют эквивалентные толщины, то они имеют линейную размерность.

При графическом построении сначала строится реальная стенка толщиной δ (в любом масштабе), затем по одну сторону от нее (в том же масштабе) откладывается значение $\frac{\lambda}{\alpha_1}$, а по другую – значение $\frac{\lambda}{\alpha_2}$ (рис. 1.11,б).

Из крайних точек a и b по вертикали в некотором масштабе откладываются значения температур t_{f1} и t_{f2} . Полученные точки A и C соединяются прямой линией. Точки пересечения этой прямой с поверхностями действительной стенки дают значения искомых температур t_{w1} и t_{w2} .

Действительно, из подобия треугольников ABC и ADE имеем

$$DE / BC = AD / AB ,$$

откуда

$$DE = BC \frac{AD}{AB} = (t_{f1} - t_{f2}) \frac{\frac{\lambda}{\alpha_1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + \delta + \frac{\lambda}{\alpha_2}} = k \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\alpha_1} = q \frac{1}{\alpha_1} .$$

Величины отрезков

$$EM = DM - ED = t_{f1} - (t_{f1} - t_{w1}) = t_{w1} ,$$

$$GN = FN - GF = t_{f1} - (t_{f1} - t_{w2}) = t_{w2}$$

соответствуют искомым значениям температур на поверхностях стенок.

Одним из главных недостатков графических методов определения температур является невозможность учесть влияние температуры на коэффициент теплопроводности материала стенки