Глава 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Криволинейные интегралы первого рода (криволинейные интегралы по длине)

2.1.1. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода сведем к вычислению определенного интеграла.

Если кривая AB задана уравнением $y=y(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $A(\alpha,\,y(\alpha))$, $B(\beta,\,y(\beta))$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (2.1)$$

где $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}$ – дифференциал дуги кривой $y=y(x)$.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует значение параметра $t=\alpha$, точке B – $t=\beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),\,y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt, \qquad (2.2)$$

где $dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$ – дифференциал дуги кривой.

Если кривая AB задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ в полярных координатах, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi\right)\sqrt{\rho(\varphi)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi, \qquad (2.3)$$

где $dl=\sqrt{\rho(\varphi)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$ – дифференциал дуги кривой.

Задача 2.1. Вычислить $I=\int\limits_{l}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где l – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Решение. Определим уравнение прямой, проходящей через точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$ из канонического уравнения $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}$, т.е. $y=2x$, $x\in[0,1]$. Дифференциал дуги равен $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{1+(2x)'^2}\,dx=\sqrt{1+4}\,dx=\sqrt{5}\,dx$. Подставляя полученные выражения в (2.1) вычисляем интеграл:

$$I=\int\limits_{l}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1=\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $I=\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 2.2. Вычислить $I=\int\limits_{l}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, где l – часть спирали Архимеда $\rho=2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в точке $O(0,0)$.

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы (2.3). Найдем пределы интегрирования, для этого приравняем правые части уравнений спирали Архимеда $\rho=2\varphi$ и окружности $\rho=R$: $2\varphi=R$, откуда $\varphi=\frac{R}{2}$. Дифференциал дуги $\rho=2\varphi$ равен $dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=\sqrt{4\varphi^2+4}\,d\varphi$. Подынтегральную функцию выразим в полярных координатах, связанных с декартовыми координатами соотношениями: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и вычислим интеграл:

$$I=\int\limits_{0}^{R/2}\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\sqrt{(2\varphi)^2+2^2}d\varphi=2\int\limits_{0}^{R/2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=\int\limits_{0}^{R/2}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\left(\varphi^2+1\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\varphi^2+1\right)^{3/2}\Bigg|_0^{R/2}=\frac{2}{3}\left(\frac{R^2}{4}+1\right)^{3/2}-\frac{2}{3}=\frac{\left(R^2+4\right)-8}{12}.$$

О т в е т. $I = \dfrac{\left(R^2+4\right)-8}{12}$.

Задача 2.3. Вычислить $I = \int\limits_{l} y\,dl$, где l – дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Р е ш е н и е. Вычислим интеграл с помощью формулы (2.2), учитывая, что $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int\limits_0^{\pi} \sin t\, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2.$$

О т в е т. $I = 2$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3770 – 3775.*

2.1.2. Применение криволинейных интегралов I рода

Длина L кривой AB вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{AB} dl, \tag{2.4}$$

где dl – дифференциал дуги кривой.

Если функция $\mu(x,y)$ определяет плотность вещества в точке (x,y) кривой AB, то масса M кривой AB вычисляется по формуле:

$$M = \int\limits_{AB} \mu(x,y)\, dl. \tag{2.5}$$

Задача 2.4. Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$ между точками ее пересечения с прямой $x + y = 2$.

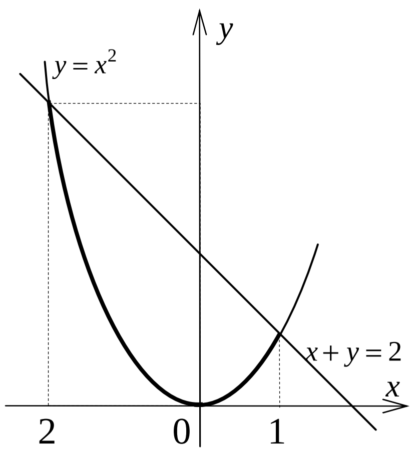

Рис. 2.1.

Р е ш е н и е. Вычислим длину дуги с помощью формулы (2.4). Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Дифференциал дуги параболы $y = x^2$ равен

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx = \sqrt{1 + \left(x^2\right)'^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx,$$

следовательно, $L = \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\ d(2x) =$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right|\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{17} + \ln\sqrt[4]{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{17} - 4}}.$$

Ответ. $L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{17} + \ln\sqrt[4]{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{17} - 4}}$.

Задача 2.5. Найти массу четверти окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, расположенной в первом квадранте, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату ординаты этой точки.

Решение. Для вычисления массы кривой воспользуемся формулой (2.5). Если $M(x, y)$ – точка на кривой l, то по условию задачи плотность вещества в точке M равна $\mu(x, y) = y^2$. Параметр t для четверти окружности изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\ dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\ dt = dt$.

Вычислим интеграл:

$$m = \int\limits_{l} y^2 dl = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} (1 - \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $m = \frac{\pi}{4}$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3784 – 3788.*

2.2. Криволинейные интегралы второго рода (криволинейные интегралы по координатам)

2.2.1. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода также сведем к вычислению определенного интеграла. Предположим, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой AB, тогда имеют место следующие утверждения.

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $A(\alpha, y(\alpha))$, $B(\beta, y(\beta))$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'_x\right)dx. \qquad (2.6)$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует значение параметра $t = \alpha$, точке B – $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'_t + Q(x(t), y(t)) \cdot y'_t\right)dt\ . \qquad (2.7)$$

Если кривая AB задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, для вычисления криволинейного интеграла II рода по кривой AB применяется формула (2.7) при следующей параметризации кривой: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$.

Если AB – пространственная кривая, которая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, то криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

вычисляется по формуле:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'_t+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'_t+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'_t\Big)dt\ . \quad (2.8)$$

Задача 2.6. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{AB}(xy-1)dx+x^2ydy$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$: *а)* по дуге эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$; *б)* по прямой $2x+y=2$; *в)* по дуге параболы $4x+y^2=4$.

Решение. *а)* Вычислим интеграл по дуге эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ (рис. 2.2, а) от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$, применяя формулу (2.7). Координаты точек A и B соответствуют значениям параметра $t_1=0$ и $t_2=\dfrac{\pi}{2}$, соответственно. Учитывая, что $x'_t=-\sin t$, $y'_t=2\cos t$, получим:

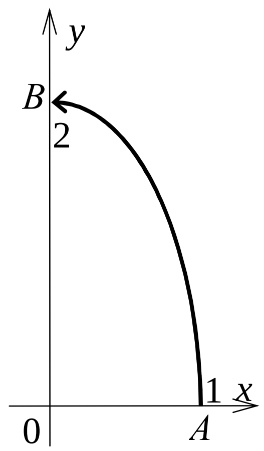

Рис. 2.2 а

$$I=\int_0^{\pi/2}\Big(\big(\cos t\cdot 2\sin t-1\big)\big(-\sin t\big)+\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot 2\cos t\Big)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\Big(-2\cos t\sin^2 t+\sin t+4\cos^3 t\sin t\Big)dt=$$

$$=-2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,d(\sin t)+\int_0^{\pi/2}\sin t dt-4\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,d(\cos t)=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\sin^3 t-\cos t-\cos^4 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{3}.$$

б) Кривая интегрирования задана уравнением $2x+y=2$ (рис. 2.2, б), откуда $y=2-2x$ и $y'=-2$. Вычислим интеграл, применяя формулу (2.6):

$$I=\int_1^0\Big(x(2-2x)-1+x^2(2-2x)(-2)\Big)dx=\int_1^0\Big(4x^3-6x^2+2x-1\Big)dx=$$

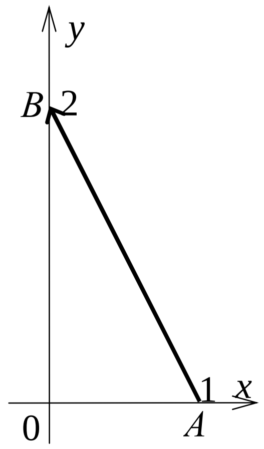

Рис. 2.2.б

$$=\left(x^4-2x^3+x^2-x\right)\Big|_1^0=1.$$

в) Вычислим криволинейный интеграл I по дуге параболы $4x+y^2=4$ (рис. 2.2, в). Разрешим уравнение параболы относительно переменной x: $x=1-\dfrac{y^2}{4}$ и $dx=-\dfrac{y}{2}dy$. Пределы интегрирования

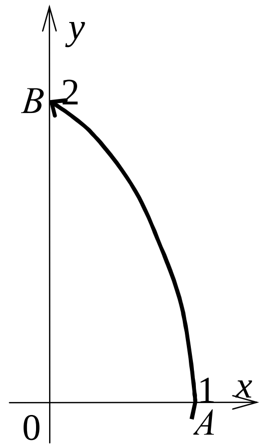

Рис. 2.2.в

определим из ординат точек A и B: $y_A=0$, $y_B=2$:

$$I=\int_0^2\left(\left(y\left(1-\frac{y^2}{4}\right)-1\right)\left(-\frac{y}{2}\right)+\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2 y\right)dy=\int_0^2\left(\frac{y^5}{16}+\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{3y}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^6}{96}+\frac{y^5}{40}-\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{1}{5}.$$

Ответ. *а)* $I=\dfrac{4}{3}$; *б)* $I=1$; *в)* $I=-\dfrac{1}{5}$.

Задача 2.7. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_l ydx+zdy+xdz$, если l *а)* отрезок CO; *б)* ломаная $OABC$ (рис. 2.3), где $A(a,0,0)$, $B(a,a,0)$, $C(a,a,a)$, $O(0,0,0)$.

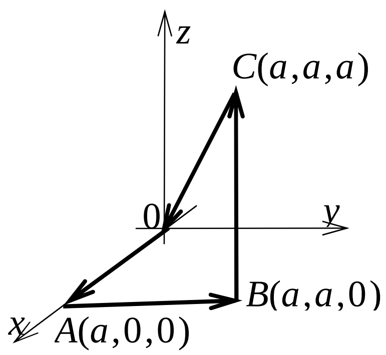

Рис. 2.3

Решение. *а)* Запишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $C(a,a,a)$ и $O(0,0,0)$:

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y-a}{-a}=\frac{z-a}{-a}=t\ \Rightarrow$$

$$x=-at+a,\ y=-at+a,\ z=-at+a.$$

Координаты точки C соответствуют значению параметра $t_1 = 1$, точки O – значению $t_2 = 0$. Заметим, что, $x(t) = y(t) = z(t) = -at + a$ и $x'(t) = y'(t) = z'(t) = -a$, следовательно,

$$I = -3a\int_1^0 (a - at)\,dt = -3a^2\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{3}{2}a^2.$$

б) Ломаная $OABC$ (рис. 2.3) и состоит из трех отрезков:

$$OA = \{y = 0,\ z = 0,\ 0 \le x \le a\};\ AB = \{x = a,\ z = 0,\ 0 \le y \le a\};$$

$$BC = \{x = a,\ y = a,\ 0 \le z \le a\}.$$

Применив свойство аддитивности криволинейного интеграла, вычислим интеграл I на каждом из участков ломаной $OABC$:

$$I_{OA} = \int_{OA} ydx + zdy + xdz = \int_0^a 0dx = 0, \qquad I_{AB} = \int_{AB} ydx + zdy + xdz = \int_0^a 0dy = 0,$$

$$I_{BC} = \int_{BC} ydx + zdy + xdz = \int_0^a (a \cdot 0 + a \cdot 0 + a\,dz) = az\Big|_0^a = a^2.$$

Таким образом, $I = I_{OA} + I_{AB} + I_{BC} = 0 + 0 + a^2 = a^2$.

О т в е т. *а)* $I = \frac{3}{2}a^2$; *б)* $I = a^2$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3806 – 3821.*

2.2.2. Формула Остроградского – Грина

Теорема 2.1. *Пусть: 1) функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в открытой односвязной области* $G \subset Oxy$; *2)* l *– кусочно-гладкий контур, ограничивающий область* $D \subset G$, *и при положительном обходе* l *ближайшая часть области* D *находится слева от наблюдателя. Тогда справедлива формула:*

$$\oint\limits_{l} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (2.9)$$

(2.9) – формула Остроградского – Грина.

Задача 2.8. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_{l} \left(y + x^5 \right) dx + \left(3x + y^8 \right) dy$, где контур l образован линиями $x^2 + y^2 = R^2$ и $y = 0$ ($y > 0$), контур обходится *а)* по движению часовой стрелки, *б)* против движения часовой стрелки.

Решение. По условию задачи $P(x, y) = y + x^5$, $Q(x, y) = 3x + y^8$, так как $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 3$, то функции P и Q дифференцируемы и их частные производные непрерывны на всей плоскости Oxy, следовательно, для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой (2.9). Контур l ограничивает область D, являющуюся верхней половиной круга радиуса R с центром в точке $(0, 0)$:

$$D = \left\{ (x, y) \middle| -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

Если контур обходится против движения часовой стрелки, то

$$I = \iint\limits_{D} (3 - 1) dxdy.$$

Полученный интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, в которых область D примет вид:

$$\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \rho \le R \right\}.$$

Итак,

$$I = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} 2\rho\, d\rho = \pi\rho^2 \Big|_0^R = \pi R^2.$$

Если контур l обходится по движению часовой стрелки (контур не будет положительно-ориентированным), то $I = -\pi R^2$, так как при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на противоположный.

О т в е т . *а)* $I=-\pi R^2$; *б)* $I=\pi R^2$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3822 – 3827.*

2.2.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Теорема 2.2. *Если функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой односвязной области V, то равносильны следующие четыре утверждения:*

1) $\int\limits_l Pdx+Qdy+Rdz=0$, *где l – замкнутый контур, лежащий внутри V;*

2) $\int\limits_l Pdx+Qdy+Rdz$ *не зависит от выбора пути интегрирования;*

3) подынтегральное выражение $Pdx+qdy+Rdz$ *есть полный дифференциал некоторой функции* $u(x,y,z)$;

4) выполняются равенства: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$.

Функцию $u(x,y,z)$ *можно найти, используя формулу*

$$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz+C, \qquad (2.10)$$

где (x_0,y_0,z_0) *– некоторая фиксированная точка области V, C – произвольная постоянная.*

Задача 2.9. Убедиться, что выражение $4\left(x^2-y^2\right)x\,dx-4\left(x^2-y^2\right)y\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ и найти ее.

Р е ш е н и е . Проверим выполнение равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(4\left(x^2-y^2\right)x\right)=-8xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-4\left(x^2-y^2\right)y\right)=-8xy.$$

Следовательно, $4\left(x^2-y^2\right)x\,dx-4\left(x^2-y^2\right)y\,dy=dU(x,y)$. Для определения функции $U(x,y)$ воспользуемся формулой (2.10), принимая $x_0=0$, $y_0=0$:

$$U(x,y)=\int_0^x 4\left(x^2-0\right)xdx+\int_0^y(-4)\left(x^2-y^2\right)ydy=\int_0^x 4x^3dx-4\int_0^y\left(x^2y-y^3\right)dy=$$

$$=x^4-2x^2y^2+y^4+C.$$

О т в е т. $U(x,y)=x^4-2x^2y^2+y^4+C$.

Задача 2.10. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_l y\cos x\,dx+\sin x\,dy$ по дуге окружности с центром в начале координат и радиусом $R=2$.

Р е ш е н и е. Здесь $P=y\cos x$, $Q=\sin x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos x$, следовательно, согласно теореме 2.2, $I=0$.

О т в е т. $I=0$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3845 – 3852, 3855 – 3860.*

Задача 2.11. Вычислить $I=\int\limits_{(1;\,1)}^{(2;\,3)}(2x+3y)dx+(y+3x)dy$.

Р е ш е н и е. Интеграл не зависит от пути интегрирования, так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+3y)=3$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(y+3x)=3$ на всей плоскости Oxy. Выберем в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны осям координат (рис. 2.4). Имеем на первом участке $y=1$, $dy=0$, $1\le x\le 2$, на втором участке $x=2$, $dx=0$, $1\le y\le 3$. Следовательно,

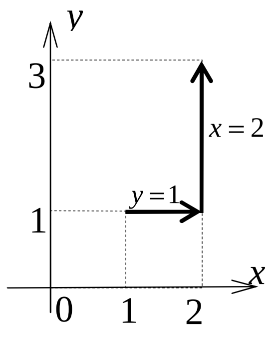

Рис. 2.4

$$I=\int_1^2(2x+3\cdot 1)dx+\int_1^3(y+3\cdot 2)dy=\left(x^2+3x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{y^2}{2}+6y\right)\Bigg|_1^3=22.$$

Решим задачу другим способом. Так как подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, то

$$I = U(x,y)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)} = U(2,3) - U(1,1).$$

Найдем функцию $U(x,y)$, используя формулу (2.10), в которой $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$U(x,y) = \int_0^x (2x+0)\,dx + \int_0^y (y+3x)\,dy = x^2\Big|_0^x + \left(\frac{y^2}{2} + 3xy\right)\Bigg|_0^y + C = x^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy + C.$$

Таким образом, $I = \left(x^2 + \dfrac{y^2}{2} + 3xy + C\right)\Bigg|_{(1,1)}^{(2,3)} = 4 + \dfrac{9}{2} + 18 - 1 - \dfrac{1}{2} - 3 = 22$.

Ответ. $I = 22$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3810 – 3812, 3820.*

2.2.4. Применение криволинейных интегралов второго рода

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой кривой l, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint_l x\,dy - y\,dx, \qquad (2.11)$$

при этом кривая l обходится против часовой стрелки.

Переменная сила $\mathbf{F} = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ при перемещении материальной точки вдоль пространственной кривой l производит работу, которая вычисляется по формуле

$$A = \int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (2.12)$$

Задача 2.12. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $x = a\sin^3 t$.

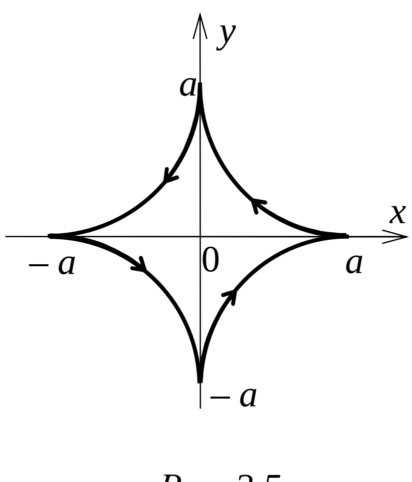

Рис. 2.5

Решение. При прохождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до

2π (рис. 2.5). Применим формулу (2.11), учитывая, что $dx = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $dy = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\cos^2 t\;dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\;dt = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Ответ. $S = \dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Задача 2.13. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = \{z,\, x,\, y\}$ вдоль кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$.

Решение. Работа силового поля $\mathbf{F} = \{z,\, x,\, y\}$, согласно формуле (2.12) равна криволинейному интегралу $A = \int_l z\,dx + x\,dy + y\,dz$, который приводим к определенному интегралу по параметру t при $0 \le t \le 1$ и $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2 dt$:

$$A = \int_0^1\left(t^3 + t\cdot 2t + t^2\cdot 3t^2\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{91}{60}.$$

Ответ. $A = \dfrac{91}{60}$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3861 – 3868, 3869 – 3875.*