

Расчет разветвленных линейных электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками энергии.

Цель лекции: ознакомиться с основными методами расчета разветвленных линейных электрических цепей постоянного тока.

1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.

На рисунке 4.1 изображена схема разветвленной электрической цепи. Известны величины сопротивлений и ЭДС, необходимо определить токи.

Количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов минус единица: $m = y - 1$, где y – количество узлов схемы.

Количество независимых уравнений по второму закону Кирхгофа равно количеству ветвей с неизвестными токами минус число уравнений, записываемых по первому закону Кирхгофа: $n = v - m$, где v – количество ветвей схемы с неизвестными токами.

Уравнения по второму закону составляют для независимых контуров. Независимым является контур, в который входит хотя бы одна ветвь, не вошедшая в другие контуры. Ветви с источниками тока не должны входить в эти контуры, так как они содержат неизвестные напряжения на источниках. Эти напряжения можно определить позднее, после решения системы уравнений для неизвестных токов.

Исследуемая схема (рис. 4.1) имеет $m = 3 - 1 = 2$ независимых узлов и $n = 4 - 2 = 2$ независимых контуров. Укажем произвольно направления токов в ветвях схемы и положительные направления обхода контуров.

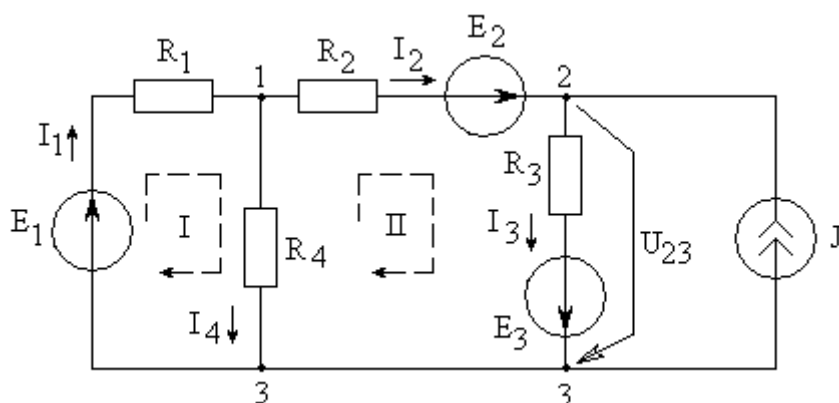


Рис. 4.1

Запишем систему четырёх уравнений, составленных по *первому* закону Кирхгофа (для узлов 1 и 2) и *второму* закону Кирхгофа (для контуров I] и II]):

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 + J - I_3 = 0 \\ I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 = E_1 \\ I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 = E_2 + E_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

Решив систему уравнений, можно определить искомые токи в схеме. Другие методы расчета (метод контурных токов и метод узловых потенциалов), позволяющие сократить число уравнений, решаемых в системе, за счет введения промежуточных новых неизвестных, количество которых меньше чем количество неизвестных токов в ветвях схемы.

Решение системы уравнений (4.1) с использованием программы Mathcad.

Для схемы рис. 4.1: $E_1 := 100 \text{ В}$; $E_2 := 200 \text{ В}$; $E_3 := 300 \text{ В}$; $J := 1 \text{ А}$;
 $R_1 := 100 \text{ Ом}$; $R_2 := 100 \text{ Ом}$; $R_3 := 100 \text{ Ом}$; $R_4 := 100 \text{ Ом}$;

Решение

Обозначим:

$$I_1 := 1 \quad I_2 := 1 \quad I_3 := 1 \quad I_4 := 1$$

Given

$$I_1 - I_4 - I_2 = 0$$

$$I_2 + J - I_3 = 0$$

$$I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 = E_1$$

$$I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 = E_2 + E_3$$

$$I := \text{Find}(I_1, I_2, I_3, I_4)$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad I = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.8 \\ 2.8 \\ -0.4 \end{pmatrix} \quad I_1 = 1.4 \quad I_2 = 1.8 \quad I_3 = 2.8 \quad I_4 = -0.4 \quad \text{А}$$

$$\text{Баланс мощности:} \quad U_{23} := -E_3 + I_3 \cdot R_3 = -20 \quad \text{В}$$

$$P_{\text{и}} := E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + U_{23} \cdot J = 1320 \quad \text{ВА}$$

$$P_{\text{п}} := (I_1)^2 \cdot R_1 + (I_2)^2 \cdot R_2 + (I_3)^2 \cdot R_3 + (I_4)^2 \cdot R_4 = 1320 \quad \text{Вт}$$

2. Метод контурных токов (МКТ)

МКТ позволяет сократить количество уравнений, решаемых в системе, до числа уравнений записываемых по второму закону Кирхгофа. Предполагается, что в каждом независимом контуре протекает свой *контурный ток* J_{kk} . Контурные токи обозначим двойными индексами, чтобы их отличать от токов ветвей. Направления контурных токов выбираем в одну сторону (для удобства в написании уравнений). Необходимо, чтобы через ветви с источниками тока (либо с известными токами) протекал только один контурный ток. В этом случае его величина равна току источника тока. Уравнения для этих контуров в систему уравнений не входят.

Обозначим реальные токи через контурные по схеме рис. 4.2:

$$I_1 = I_{11}; I_2 = I_{22}; I_3 = I_{22} + J; I_4 = I_{11} - I_{22}.$$

С учетом контурных токов (I_{11} , I_{22}) запишем систему уравнений на основании второго закона Кирхгофа для отмеченных контуров (рис. 4.2). Количество неизвестных контурных токов равно количеству уравнений.

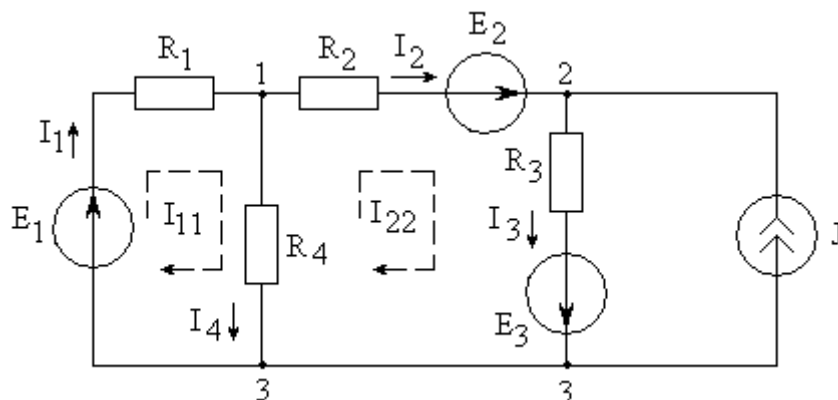


Рис. 4.2

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4) - I_{22} \cdot R_4 = E_1 \\ -I_{11} \cdot R_4 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) = E_2 + E_3 - J \cdot R_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

Решив систему уравнений, рассчитаем неизвестные контурные токи, а затем реальные токи ветвей схемы.

Решение системы (4.2) с использованием программы Mathcad.

Для схемы рис. 4.2: $E_1 := 100 \text{ В}$; $E_2 := 200 \text{ В}$; $E_3 := 300 \text{ В}$; $J := 1 \text{ А}$;
 $R_1 := 100 \text{ Ом}$; $R_2 := 100 \text{ Ом}$; $R_3 := 100 \text{ Ом}$; $R_4 := 100 \text{ Ом}$;

Решение

Обозначим:

$$I_{11} := 1 \quad I_{22} := 1$$

Given

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_4) - I_{22} \cdot R_4 = E_1$$

$$-I_{11} \cdot R_4 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) = E_2 + E_3 - J \cdot R_3$$

$$I := \text{Find}(I_{11}, I_{22})$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad I = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.8 \end{pmatrix} \quad I_1 = 1.4 \quad I_2 = 1.8 \quad I_{11} := I_1 \quad I_{22} := I_2 \quad \text{A}$$

$$I_{11} = 1.4 \quad I_{22} = 1.8$$

$$I_1 := I_{11} = 1.4 \quad I_2 := I_{22} = 1.8 \quad I_3 := I_{22} + J = 2.8 \quad I_4 := I_{11} - I_{22} = -0.4 \quad \text{A}$$

Баланс мощности: $U_{23} := -E_3 + I_3 \cdot R_3 = -20 \quad \text{В}$

$$P_{\text{и}} := E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + U_{23} \cdot J = 1320 \quad \text{ВА}$$

$$P_{\text{п}} := (I_1)^2 \cdot R_1 + (I_2)^2 \cdot R_2 + (I_3)^2 \cdot R_3 + (I_4)^2 \cdot R_4 = 1320 \quad \text{Вт}$$

3. Метод узловых потенциалов (МУП)

МУП позволяет сократить количество уравнений, решаемых в системе, до числа уравнений записываемых по первому закону Кирхгофа. В уравнениях, составленных на основании первого закона Кирхгофа, токи выражают через потенциалы узлов и проводимости ветвей схемы с помощью закона Ома для участка цепи. Количество неизвестных потенциалов узлов схемы оказывается равным количеству уравнений в системе. Затем, по найденным значениям потенциалов узлов рассчитывают токи ветвей схемы с помощью закона Ома для участка цепи.

Применим метод узловых потенциалов для расчета токов в ветвях схемы, приведенной на рисунке 4.3.

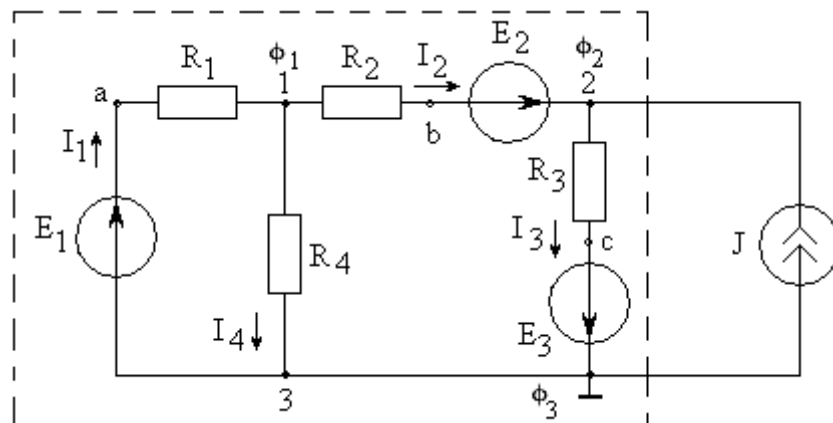


Рис. 4.3

Сначала, примем, например, потенциал узла «3» равным нулю, то есть $\varphi_3 = 0$ и обозначим проводимости резисторов схемы через $g_k = 1/R_k$. Для оставшихся потенциалов после группировки коэффициентов получим систему уравнений, составленную на основании первого закона Кирхгофа.

Эта система уравнений представляет собой по сути *метод узловых потенциалов*:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot (g_1 + g_2 + g_4) - \varphi_2 \cdot g_2 = E_1 \cdot g_1 - E_2 \cdot g_2 \\ -\varphi_1 \cdot g_2 + \varphi_2 \cdot (g_2 + g_3) = E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3 + J \end{cases} \quad (4.3)$$

Решив систему уравнений, рассчитаем неизвестные потенциалы узлов, а затем на основании закона Ома для участка цепи искомые токи ветвей схемы:

$$I_1 = (-\varphi_1 + \varphi_3 + E_1) \cdot g_1; I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_2) \cdot g_2; I_3 = (\varphi_2 - \varphi_3 + E_3) \cdot g_3; I_4 = (\varphi_1 - \varphi_3) \cdot g_4$$

Результаты расчета можно проверить подстановкой в уравнения, составленные на основании первого закона Кирхгофа.

Примечание:

1. Если ток источника тока или ЭДС источника напряжения направлены к узлу, то слагаемые J или $E \cdot g$ записывают в правую часть уравнения со знаком "плюс", если от узла – со знаком "минус".
2. Если в какой-либо ветви содержится только идеальный источник ЭДС, необходимо потенциал одного из двух узлов, между которыми включена эта ЭДС, принять равным нулю. Тогда потенциал другого узла окажется известным и равным величине ЭДС. При этом количество уравнений, которые необходимо составить становится на одно меньше.

Решение системы (4.3) с использованием программы Mathcad.

Для схемы рис. 4.3: $E_1 := 100 \text{ В}; E_2 := 200 \text{ В}; E_3 := 300 \text{ В}; J := 1 \text{ А};$
 $R_1 := 100 \text{ Ом}; R_2 := 100 \text{ Ом}; R_3 := 100 \text{ Ом}; R_4 := 100 \text{ Ом};$

Решение

$$g_1 := \frac{1}{R_1} \quad g_2 := \frac{1}{R_2} \quad g_3 := \frac{1}{R_3} \quad g_4 := \frac{1}{R_4}$$

Обозначим:

$$\phi_1 := 1 \quad \phi_2 := 1$$

Given

$$\phi_1 \cdot (g_1 + g_2 + g_4) - \phi_2 \cdot g_2 = E_1 \cdot g_1 - E_2 \cdot g_2$$

$$-\phi_1 \cdot (g_2) + \phi_2 \cdot (g_2 + g_3) = E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3 + J$$

$$\phi := \text{Find}(\phi_1, \phi_2)$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \phi = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = -40 \quad \phi_2 = -20 \quad \phi_3 := 0$$

$$I_1 := (-\phi_1 + \phi_3 + E_1) \cdot g_1 = 1.4 \quad A$$

$$I_2 := (\phi_1 - \phi_2 + E_2) \cdot g_2 = 1.8 \quad A$$

$$I_3 := (\phi_2 + \phi_3 + E_3) \cdot g_3 = 2.8 \quad A$$

$$I_4 := (\phi_1 - \phi_3) \cdot g_4 = -0.4 \quad A$$

3.1. Построение потенциальной диаграммы

Для контура **3-a-1-b-2-c-3** (рис. 4.3.), с использованием программы *Mathcad*, построим потенциальную диаграмму.

$$E_1 := 100 \quad E_2 := 200 \quad E_3 := 300 \quad B \quad J := 1 \quad A$$

$$R_1 := 100 \quad R_2 := 100 \quad R_3 := 100 \quad R_4 := 100 \quad \text{Om}$$

$$g_1 := \frac{1}{R_1} \quad g_2 := \frac{1}{R_2} \quad g_3 := \frac{1}{R_3} \quad g_4 := \frac{1}{R_4}$$

$$\phi_a := E_1 \quad \phi_c := -E_3 \quad \phi_3 := 0$$

$$\text{Обозначим:} \quad \phi_1 := 1 \quad \phi_2 := 1 \quad \phi_b := 1$$

Given

$$\phi_1 \cdot (g_1 + g_2 + g_4) - \phi_2 \cdot g_2 = E_1 \cdot g_1 - E_2 \cdot g_2$$

$$-\phi_1 \cdot (g_2) + \phi_2 \cdot (g_2 + g_3) = E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3 + J$$

$$\phi_b = \phi_2 - E_2$$

Уравнения можно составлять не только для узлов но и для любой точки схемы!

$$A := \text{Find}(\phi_1, \phi_2, \phi_b) \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad A = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ -220 \end{pmatrix} \quad A_1 = -40 \quad A_2 = -20 \quad A_3 = -220$$

$$\phi_a = 100 \quad \phi_1 := A_1 = -40 \quad \phi_b := A_3 = -220 \quad \phi_2 := A_2 = -20 \quad \phi_c = -300 \quad B$$

Проверка

$$I_1 := (-\phi_1 + \phi_3 + E_1) \cdot g_1 = 1.4 \quad A$$

$$I_2 := (\phi_1 - \phi_2 + E_2) \cdot g_2 = 1.8 \quad A$$

$$I_3 := (\phi_2 + \phi_3 + E_3) \cdot g_3 = 2.8 \quad A$$

$$I_4 := (\phi_1 - \phi_3) \cdot g_4 = -0.4 \quad A$$

$$\phi_a := \phi_3 + E_1 = 100 \quad B$$

$$\phi_1 := \phi_a - I_1 \cdot R_1 = -40 \quad B$$

$$\phi_b := \phi_1 - I_2 \cdot R_2 = -220 \quad B$$

$$\phi_2 := \phi_b + E_2 = -20 \quad B$$

$$\phi_c := \phi_2 - I_3 \cdot R_3 = -300 \quad B$$

$$\phi_3 := \phi_2 - I_3 \cdot R_3 + E_3 = 0 \quad B$$

data :=

	1	2
1	0	0
2	100	0
3	-40	100
4	-220	200
5	-20	200
6	-300	300
7	0	300

$$\phi := \text{data}^{(1)} \quad R := \text{data}^{(2)}$$

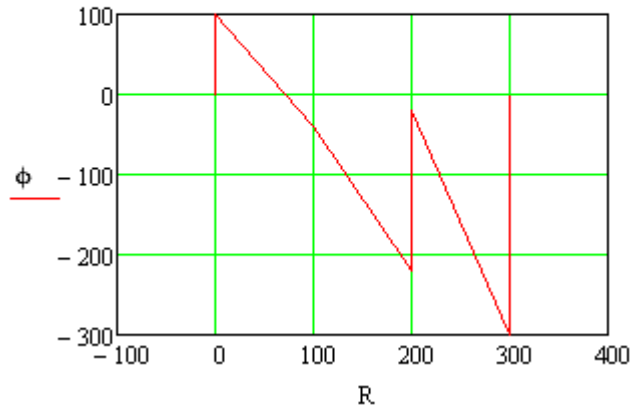


Рис. 4.3а

После графической обработки в редакторе Ms Paint потенциальная диаграмма для искомого контура примет вид, рис. 4.3б.

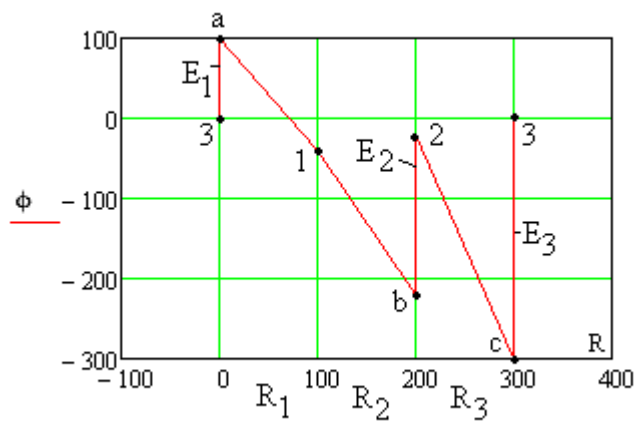


Рис. 4.3б

4. Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов. Этот метод применяют в схеме с двумя узлами. Он позволяет рассчитать напряжение между ними по формуле

$$U_{12} = \frac{\sum_{i=1}^m E_i \cdot g_i + \sum_{i=1}^n J_i}{\sum_{i=1}^q g_i} \quad (4.4)$$

где m – количество ветвей, содержащих источники ЭДС E_i ;
 n – количество ветвей, содержащих источники тока J_i ;
 q – количество ветвей схемы.

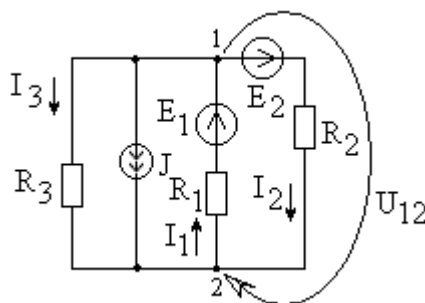


Рис. 4.4

Для схемы рис. 4.4 напряжение U_{12} можно определить из выражения:

$$U_{12} = \frac{E_1 \cdot g_1 - E_2 \cdot g_2 - J}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Токи: $I_1 = (-U_{12} + E_1) \cdot g_1$; $I_2 = (U_{12} + E_2) \cdot g_2$; $I_3 = (U_{12}) \cdot g_3$.

5. Метод эквивалентного генератора (МЭГ)

МЭГ используется, когда необходимо определить ток только в одной ветви сложной схемы.

Согласно этому методу выделяют ветвь, или часть ветви, в которой надо определить ток, а оставшуюся часть схемы заменяют активным двухполюсником. *Активным двухполюсником* называют часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами, содержащую источники энергии. Согласно теореме об активном двухполюснике, любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором (источником напряжения) с ЭДС, равной напряжению холостого хода U_{xx} на зажимах этого двухполюсника и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению $R_{вх}$ того же двухполюсника.

Схема эквивалентного генератора (ЭГ) приведена на рис. 4.5.

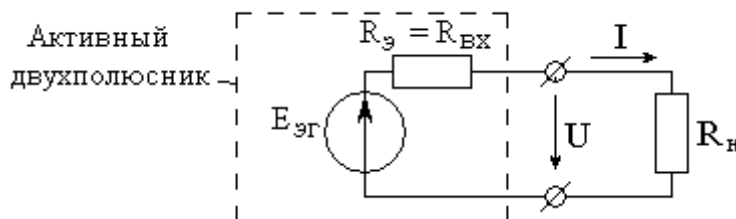


Рис. 4.5

Параметры ЭГ (ЭДС, равное напряжению холостого хода и входное сопротивление) определяют экспериментально или расчетным путем. В качестве нагрузки ЭГ служит выделенная ветвь. Далее, по закону Ома в схеме на рис. 4.5 определяют ток.

Применим метод эквивалентного генератора для расчета тока I_2 в схеме, приведенной на рис. 4.1. Составим схему для расчета напряжения холостого хода U_{xx} , рис. 4.7, где для обозначенного контура запишем уравнение по второму закону Кирхгофа.

$$U_{xx} + I'_3 \cdot R_3 - I'_4 \cdot R_4 = E_2 + E_3,$$

$$\text{где } I'_3 = J; I'_4 = \frac{E_1}{R_1 + R_4}, \text{ тогда } U_{xx} = E_2 + E_3 - J \cdot R_3 + \frac{E_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4}.$$

Входное сопротивление эквивалентного генератора (R_9) можно определить из схемы, приведенной на рис. 4.7.

При расчете входного сопротивления эквивалентного генератора источники ЭДС – замыкаются, а источники тока – размыкаются.

$$R_9 = R_2 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4}.$$

Искомый ток:

$$I_2 = \frac{U_{xx1}}{R_9}.$$

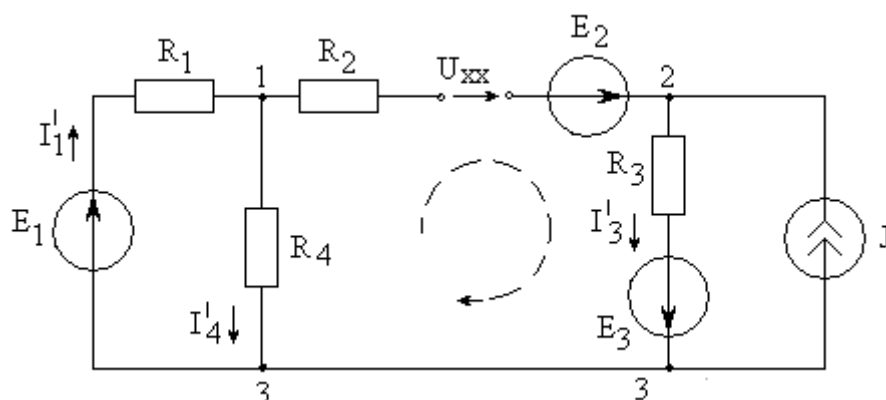


Рис. 4.6

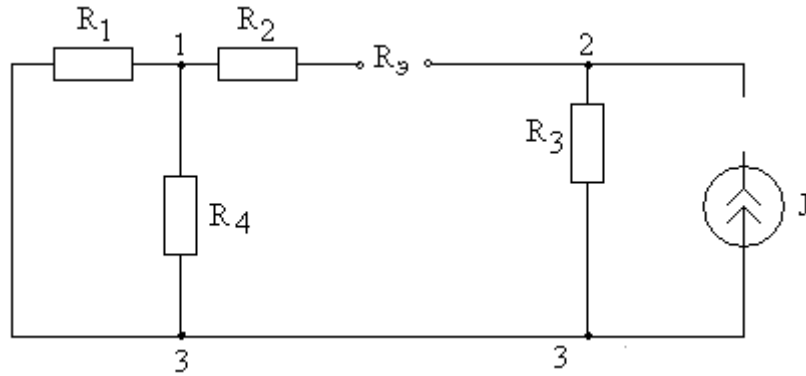


Рис. 4.7

Пример расчёта с использованием программы Mathcad.

Для схем рис. 4.1; 4.6; 4.7: $E_1 := 100 \text{ В}$; $E_2 := 200 \text{ В}$;
 $E_3 := 300 \text{ В}$; $J := 1 \text{ А}$; $R_1 := 100 \text{ Ом}$; $R_2 := 100 \text{ Ом}$; $R_3 := 100 \text{ Ом}$;
 $R_4 := 100 \text{ Ом}$;

Решение

$$I_3 := J \quad I_4 := \frac{E_1}{R_1 + R_4}$$

Обозначим:

$$U_{xx} := 1 \quad R_3 := 1 \quad I_2 := 1$$

Given

$$U_{xx} + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 = E_2 + E_3$$

$$R_3 = R_2 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4}$$

$$I_2 = \frac{U_{xx}}{R_3}$$

$$A := \text{Find}(U_{xx}, R_3, I_2)$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad A = \begin{pmatrix} 450 \\ 250 \\ 1.8 \end{pmatrix} \quad A_1 = 450 \quad A_2 = 250 \quad A_3 = 1.8$$

$$U_{xx} := A_1 = 450 \text{ В} \quad R_3 := A_2 = 250 \text{ Ом} \quad I_2 := A_3 = 1.8 \text{ А}$$

6. Расчет мощности. Баланс мощностей.

При постоянном токе существует только активная мощность $P = UI$.

Расчетные формулы для мощности источников энергии и нагрузки:

– *мощность источника напряжения* $P_E = E \cdot I$, берется со знаком *плюс*, если направления ЭДС и тока в нем *совпадают* (напряжение на источнике равно по величине ЭДС и противоположно ему по направлению, поэтому напряжение, в этом случае, не совпадает с током источника), и со знаком *минус*, если ЭДС и ток источника *не совпадают*;

– *мощность источника тока* $P_J = U_J \cdot J$, берется со знаком *плюс*, если направления напряжения на источнике U_J и тока источника J *не совпадают*, и со знаком *минус*, если *совпадают*, так как источник в этом случае не отдает, а потребляет энергию;

– *мощность нагрузки* $P_n = U_R \cdot I = R \cdot I \cdot I = R \cdot I^2$ берется со знаком *плюс*, так как в резисторах ток и напряжение всегда совпадают.

Уравнение баланса мощностей $P_{ист} = P_n$ является универсальной проверкой результатов расчета любым методом. (Подробно, расчёт **уравнения баланса мощностей, с использованием программы Mathcad**, представлен в предыдущих параграфах).