

Вопросы для самопроверки

1. Как называются величины a, b, x , выражения $f(x)$, $f(x)dx$ в символе $\int_a^b f(x)dx$ определенного интеграла? [Ссылка на теорию](#)
2. Всегда ли ограниченные функции интегрируемы на отрезке $[a, b]$? Перечислите классы интегрируемых на отрезке функций. [Ссылка на теорию](#)
3. Как определяется площадь криволинейной трапеции через определенный интеграл? Может ли значение определенного интеграла быть отрицательным? [Ссылка на теорию](#)
4. В чем состоят свойства аддитивности и сохранения знака определенного интеграла? [Ссылка на теорию](#)
5. Какими свойствами обладает интеграл с переменным верхним пределом – функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, если: а) $f(x)$ есть интегрируемая функция; б) $f(x)$ есть непрерывная функция? [Ссылка на теорию](#)
6. Сформулируйте основную теорему интегрального исчисления. [Ссылка на теорию](#)
7. В чем состоит метод интегрирования по частям в определенном интеграле? [Ссылка на теорию](#)
8. В чем состоит метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле? [Ссылка на теорию](#)
9. Как вычисляется определенный интеграл от четной и нечетной функции по отрезку интегрирования, симметричному относительно начала координат? [Ссылка на теорию](#)
10. Как распространяется понятие определенного интеграла в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций? [Ссылка на теорию](#)
11. Как формулируется теорема сравнения (в предельной форме) для несобственного интеграла первого и второго рода? [Ссылка на теорию](#)
12. Как вычисляются интегралы от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке отрезка интегрирования? Как они называются? [Ссылка на теорию](#)
13. Как применяется основная формула интегрального исчисления к вычислению несобственных интегралов? [Ссылка на теорию](#)
14. В чем заключается метод приближенного вычисления определенных интегралов? [Ссылка на теорию](#)
15. Сформулируйте методы приближенного вычисления определенных интегралов: правило треугольников и трапеций; метод Симпсона. Насколько точно можно вычислять определенные интегралы с помощью этих методов? [Ссылка на теорию](#)

Теоретический материал к вопросу 1. Как называются величины a, b, x , выражения $f(x)$, $f(x)dx$ в символе $\int_a^b f(x)dx$ определенного интеграла?

Символ $\int_a^b f(x)dx$ определенного интеграла читается: «интеграл от a до b функции $f(x)$ по x », где $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 2. Всегда ли ограниченные функции интегрируемы на отрезке $[a, b]$? Перечислите классы интегрируемых на отрезке функций.

Условие ограниченности функций на отрезке $[a, b]$ является *необходимым условием интегрируемости функций*, т. е. справедлива следующая теорема.

Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$.

Достаточные условия интегрируемости функций описывают классы функции, для которых определенный интеграл всегда существует:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. существует $\int_a^b f(x)dx$.

Более широкий класс интегрируемых функций описывает следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Приведем теорему, описывающую еще один простой класс интегрируемых функций.

Теорема. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 3. Как определяется площадь криволинейной трапеции через определенный интеграл? Может ли значение определенного интеграла быть отрицательным?

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная графиком AB функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 1), называется *криволинейной трапецией*.

Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ численно равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотой $f(\xi_i)$, а сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, составленной из таких прямоугольников и изображенной на рис. 1, а. Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_i .

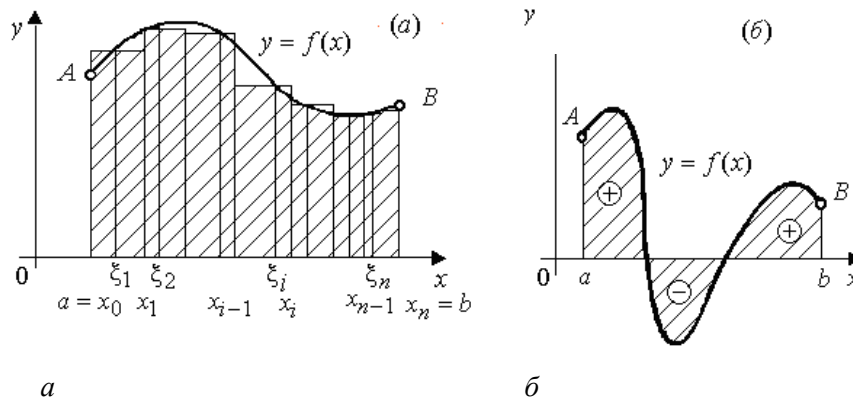


Рис. 1

Чем меньше Δx_i , $i = \overline{1, n}$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Принимая за точную площадь S криволинейной трапеции предел интегральной суммы S_n при $\lambda \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda = \max_{[a,b]} \{\Delta x_k\},$$

получим, что с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади, соответствующей криволинейной трапеции.

В случае, когда $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$, определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур (криволинейных трапеций), составляющих данную криволинейную трапецию $aABb$, причем площади частей, расположенных выше и ниже оси Ox , берутся со знаком «+» и «-» соответственно (рис. 1, б).

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 4. В чем состоят свойства аддитивности и сохранения знака определенного интеграла?

Свойство аддитивности определенного интеграла. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ (и обратно) и для любых чисел a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство сохранения знака определенного интеграла. Если функция $f(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сохраняет ее знак, т.е. если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$)

$$\forall x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0, \quad \left(\int_a^b f(x)dx \leq 0 \right), \quad a < b.$$

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 5. Какими свойствами обладает интеграл с переменным верхним пределом – функция

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, если: а) $f(x)$ есть интегрируемая функция; б) $f(x)$ есть непрерывная функция?

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 2. Если $f(t)$ непрерывна в точке $t=x$, то в этой точке существует производная функции $\Phi(x)$, причем

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x). \quad (1)$$

Теорема 3. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то производная от интеграла из равенства (1) по переменному верхнему пределу всюду в $[a, b]$ существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела, т.е. имеет место равенство (1) $\forall x \in [a, b]$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 6. Сформулируйте основную теорему интегрального исчисления.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 7. В чем состоит метод интегрирования по частям в определенном интеграле?

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

или

$$\int_a^b u dv = u v \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v du.$$

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 8. В чем состоит метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле?

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем значения $\varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$, когда t изменяется в $[t_1, t_2]$; $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (1)$$

называемая формулой замены переменной в определенном интеграле. Чтобы вычислить определенный интеграл по этой формуле, необходимо сделать замену $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция, вычислить $dx = \varphi'(t)dt$, решить уравнения $\varphi(t_1) = a$ и $\varphi(t_2) = b$ и найти пределы t_1 и t_2 интегрирования по t .

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 9. Как вычисляется определенный интеграл от четной и нечетной функции по отрезку интегрирования, симметричному относительно начала координат?

Если $f(x)$ – нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Если $f(x)$ – четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 10. Как распространяется понятие определенного интеграла в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций?

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что:

1) пределы интегрирования a и b являются конечными;

2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограничена (в частности, непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода).

В этом случае определенный интеграл называется *собственным*. Если хотя бы одно из двух указанных условий не выполняется, то интеграл называется *несобственным*.

Несобственные интегралы являются обобщением определенных интегралов в случаях бесконечных промежутков интегрирования и (или) неограниченных функций.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 11. Как формулируется теорема сравнения (в предельной форме) для несобственного интеграла первого и второго рода?

Теорема сравнения в предельной форме для несобственного интеграла первого рода. Если на промежутке $[a, \infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a, b]$, и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ($0 < A < \infty$), то несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема сравнения в предельной форме для несобственного интеграла второго рода. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на промежутке $[a, b)$, b – точка бесконечного разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$. Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ($0 < A < \infty$), то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, т. е., или оба эти интеграла сходятся, или оба расходятся.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 12. Как вычисляются интегралы от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке отрезка интегрирования? Как они называются?

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$ и не ограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка разрыва второго рода), т. е. $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$. Пусть $f(x)$

интегрируема на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. существует интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (зависящий от переменного верхнего предела интегрирования).

Несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $[a, b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x = b$, или несобственным интегралом второго рода, называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если он существует:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (2)$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в некоторой внутренней точке $c \in (a, b)$ отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл на отрезке $[a, b]$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx, \quad (3)$$

т. е. представляет собой сумму двух несобственных интегралов второго рода. В формуле (3) предполагается, что ε_1 и ε_2 стремятся к предельным значениям независимо друг от друга, т. е. «по разным законам». Если же ε_1 и ε_2 стремятся по одному закону:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

то имеем несобственный интеграл второго рода в смысле главного значения. Если пределы в правых частях формул (1) – (3) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке a , или b , или c , называются *сходящимися*, в противном случае – *расходящимися*.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 13. Как применяется основная формула интегрального исчисления к вычислению несобственных интегралов?

В случае сходящегося интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ основная формула интегрирования Ньютона–

Лейбница имеет вид $\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$, где через $F(\infty)$ обозначен $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в $[a, b)$ и не ограничена в левосторонней окрестности точки b , $F(x)$ – какая-либо ее первообразная в $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a), \quad \text{где} \quad F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x), \quad \text{так что сходимостью}$$

несобственного интеграла равносильна существованию конечного предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b-\varepsilon)$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 14. В чем заключается метод приближенного вычисления определенных интегралов?

Определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$, может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница с помощью первообразной $F(x)$.

Однако $F(x)$ может не выражаться в конечном виде (через элементарные функции) либо может выражаться, но довольно сложно. Кроме того, $f(x)$ часто задается таблично и тогда $F(x)$ не может быть определена.

В этих случаях применяют методы приближенного вычисления. С геометрической точки зрения в их основе лежит замена площади криволинейной трапеции, выражаемой интегралом I , площадью более простой фигуры. Эти методы дают приближенное значение интеграла I через значения подынтегральной функции $f(x)$, вычисленные для ряда значений x . При этом данную функцию $f(x)$ на $[a, b]$ заменяют более простой функцией.

При постоянных пределах определенный интеграл представляет собой некоторое постоянное число. Любой приближенный метод интегрирования основан на вычислении приближенного значения этого числа. Пусть I – искомое число, $\hat{I}$ – его приближенное значение. Тогда $|\hat{I} - I| = \Delta$ – абсолютная погрешность вычисления интеграла I . При вычислении определенных интегралов приближенными методами можно сформулировать две задачи: 1) найти приближенное значение числа I и оценить погрешность вычислений; 2) найти приближенное значение числа I с заданной погрешностью Δ , т. е. подобрать метод вычислений таким образом, чтобы $|\hat{I} - I| < \Delta$.

[Вернуться к вопросам](#)

Теоретический материал к вопросу 15. Сформулируйте методы приближенного вычисления определенных интегралов: правило треугольников и трапеций; метод Симпсона. Насколько точно можно вычислять определенные интегралы с помощью этих методов?

Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x) \geq 0$. В основе приближенного вычисления определенного интеграла I лежит его геометрический смысл: I выражает площадь криволинейной трапеции.

В методе средних прямоугольников площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с основаниями

$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ и высотой y_k , в методе трапеций – площади ступенчатой фигуры, составленной из «прямолинейных» трапеций, в методе параболических трапеций (метод Симпсона) – сумме площадей фигур, лежащих под параболами.

Формула Симпсона имеет четвертый порядок точности (у методов средних прямоугольников и в методе трапеций – второй) и обладает повышенной точностью при сравнительно малом числе узлов x_k .

[Вернуться к вопросам](#)