Занятие 9

Прямая линия на плоскости

При успешном изучении темы студент будет

***знать*:**

- Вид уравнения прямой
  - с угловым коэффициентом,
  - с направляющим вектором,
  - через две точки,
  - с перпендикулярным вектором,
  - общее уравнение прямой.
- Условие параллельности двух прямых на плоскости.
- Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости.
- Способы определения угла между прямыми на плоскости.

***уметь*:**

- Определять принадлежит или нет точка данной прямой.
- Составлять уравнение прямой, если известны
  - координаты точки, принадлежащей прямой, и угловой коэффициент;
  - координаты точки, принадлежащей прямой, и координаты направляющего вектора;
  - координаты точки, принадлежащей прямой, и координаты нормального вектора;
  - координаты двух точек, принадлежащих прямой.
- Записывать уравнение прямой, проходящей через данную точку

- параллельно данной прямой;

- перпендикулярно данной прямой.

- Приводить уравнение прямой от одного вида к другому.
- Вычислять угол между прямыми.
- Вычислять расстояние от точки до прямой.

9.1. Виды уравнения прямой на плоскости.

Положение прямой на плоскости относительно заданной системы координат однозначно определяется, если известны:

1. Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и вектор $\bar{n}=\left(A;B\right)$, перпендикулярный этой прямой. Вектор $\bar{n}=\left(A;B\right)$ называют ***нормальным вектором прямой.***

2. Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и вектор $\bar{s}=\left(m;n\right)$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{s}=\left(m;n\right)$ называют ***направляющим вектором прямой.***

3. Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и тангенс угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс, т.е. ***угловой коэффициент прямой.***

Рассмотрим каждый случай:

1. Пусть известны точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$, лежащая на прямой l и вектор $\bar{n}=\left(A;B\right)$, перпендикулярный этой прямой. Обозначим $M\left(x;y\right)$ текущую точку прямой. Тогда уравнение прямой имеет вид

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0.$$

Уравнение первой степени с двумя переменными

$$Ax+By+C=0$$

задает на плоскости прямую с нормальным вектором $\bar{n}=\left(A;B\right)$. Это уравнение называется ***общим уравнением*** прямой.

2. Пусть известны точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и вектор $\bar{s}=\left(m;n\right)$, параллельный этой прямой. Обозначим $M\left(x;y\right)$ текущую точку прямой. Тогда уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением*** прямой.

Введем параметр *t*: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$, получим ***параметрические уравнения*** прямой:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}.$$

Если на прямой заданы две точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$ и $M_2\left(x_2;y_2\right)$, то вектор $\overline{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)$ можно рассматривать как направляющий вектор этой прямой и каноническое уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Это уравнение прямой, ***проходящей через две точки.***

3. В школьном курсе математики широко использовалось ***уравнение прямой с угловым коэффициентом***

$$y=kx+b,$$

где $k=tg\alpha$- тангенс угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс.

Очевидно, что и от общего, и от канонического уравнения прямой легко перейти к уравнению с угловым коэффициентом, для этого достаточно данное уравнение разрешить относительно переменной y.

Пример 1. Заданы вершины треугольника $A\left(2;4\right), B\left(-4;0\right), C\left(1;-1\right)$. Составить уравнения:

а) прямой, на которой лежит медиана *CD*, проведенная из вершины *C*;

б) прямой на которой лежит высота BP, проведенная из вершины B к стороне AC.

Решение. а) Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты середины AB:

$D\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow D(-1;2)$. Вектор $\overline{CD} = \{-2;3\}$ является направляющим вектором прямой CD. Каноническое уравнение медианы CD имеет вид: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3}$. От этого уравнения легко перейти к общему уравнению этой прямой: $3(x-1) = -2(y+1) \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0$.

б) Чтобы составить уравнение высоты из вершины B, воспользуемся тем, что вектор $\overline{AC} = \{-1;-5\}$ является нормальным вектором прямой. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку B, с нормальным вектором $\overline{n} = \{-1;-5\}$ имеет вид:

$$-1(x+4) - 5(y-0) = 0 \Rightarrow -x - 5y - 4 = 0 \Rightarrow x + 5y + 4 = 0$$

$x + 5y + 4 = 0$ - уравнение высоты из вершины B к стороне AC.

Замечание. В качестве нормального вектора можно использовать любой вектор коллинеарный вектору $\overline{AC} = \{-1;-5\}$, т.е. вектор с пропорциональными координатами, например, $\overline{n_1} = \{1;5\}$.

Пример 2. Прямая задана уравнением $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{4}$.

а) Среди векторов

$$\overline{a} = \{2;-8\}; \overline{b} = \{4;-1\}; \overline{c} = \left\{\frac{1}{2};-2\right\}; \overline{d} = \left\{1;\frac{1}{4}\right\}; \overline{e} = \{4;-1\}$$

выбрать векторы параллельные данной прямой, перпендикулярные данной прямой;

б) Указать угловой коэффициент данной прямой;

в) Определить, принадлежат ли точки $A(2;-13)$, $B(-4;0)$ данной прямой.

Решение. а) Данное каноническое уравнение прямой содержит координаты направляющего вектора $\bar{s}=\{-1;4\}$. Любой вектор, параллельный этой прямой коллинеарен вектору $\bar{s}$, т.е. имеет пропорциональные координаты. Среди указанных векторов это $\bar{a}=\{2;-8\}$ и $\bar{c}=\left\{\frac{1}{2};-2\right\}$.

Чтобы определить координаты нормального вектора, приведем уравнение прямой к общему виду:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{4}\Rightarrow 4(x+2)=-1(y-3)\Rightarrow 4x+y+5=0,$$

Координаты нормального вектора $\bar{n}=\{4;1\}$. Любой вектор, перпендикулярный этой прямой коллинеарен вектору $\bar{n}$, т.е. имеет пропорциональные координаты. Среди указанных векторов это $\bar{d}=\left\{1;\frac{1}{4}\right\}$ и $\bar{e}=\{-4;-1\}$.

б) Чтобы определить угловой коэффициент данной прямой, выразим из уравнения прямой y:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{4}\Rightarrow 4(x+2)=-1(y-3)\Rightarrow 4x+y+5=0\Rightarrow y=-4x-5$$

Значит $k=-4$.

в) Если точка принадлежит прямой, то ее координаты обращают уравнение прямой в верное равенство. Подставим координаты точки

$A(2;-13)$ в уравнение прямой: $\frac{2+2}{-1}=\frac{-13-3}{4}$ - получили верное равенство, значит, точка A лежит на прямой.

Для точки B: $\frac{-4+2}{-1}\neq\frac{0-3}{4}$. Значит, точка B не лежит на этой прямой.

Пример 3. Найти точку пересечения двух прямых $2x+y-1=0$, $3x+2y+3=0$.

Решение. Точка пересечения – общая точка двух прямых, значит, ее координаты удовлетворяют одновременно уравнениям обеих прямых и могут быть найдены как решение системы уравнений: $\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ 3x+2y+3=0. \end{cases}$

Решая систему любым способом (методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы), найдем $x=5, y=-9$.

Пример 4. Дана прямая $2x+3y-5=0$.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1;-2)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой.

Решение. а) Нормальный вектор $\bar{n}=\{A;B\}=\{2;3\}$ данной прямой будет являться нормалью и для любой параллельной ей прямой. Следовательно, множество прямых линий, параллельных данной прямой, можно записать как $2x+3y+C=0$.

Для определения свободного члена C подставим координаты точки $M_1(1;-2)$: $2\cdot 1+3\cdot(-2)+C=0$, т.е. $C=4$. Следовательно, $2x+3y+4=0$ и есть уравнение искомой прямой.

б) Нормальный вектор $\bar{n} = \{A; B\} = \{2; 3\}$ данной прямой будет являться направляющим для любой параллельной ей прямой.

Следовательно, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$ и есть каноническое уравнение искомой прямой. Из этого уравнения можно получить общее уравнение прямой:

$$3(x-1) = 2(y+2) \Rightarrow 3x - 3 = 2y + 4 \Rightarrow 3x - 2y - 7 = 0.$$

Пример 5. Найти проекцию точки $M_1(-3; 2)$ на прямую $x - 4y + 1 = 0$.

Решение. Искомая точка (обозначим Р) является пересечением данной прямой и прямой, проходящей через точку M_1 (-3; 2) перпендикулярно данной прямой. (Сделайте рисунок, он поможет иллюстрировать решение задачи). Нормальный вектор данной прямой -3x + 2y = 7 является направляющим вектором перпендикулярной прямой, проходящей через точку M_1.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-3; 2)$, перпендикулярно данной, имеет вид:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-4} \quad \text{или} \quad 4x - y + 14 = 0.$$

Координаты точки пересечения найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + 14 = 0, \\ x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -\frac{11}{3}, y = -\frac{2}{3}.$$

Итак, точка $P\left(-\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ является проекцией точки $M_1(-3; 2)$ на прямую $x - 4y + 1 = 0$.

9.2. Основные задачи на тему «Прямая на плоскости».

1. *Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.*

Пусть две прямые заданы в некоторой системе координат уравнениями:

l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0 \Rightarrow \overline{n_1} = (A_1; B_1)$ - нормальный вектор прямой l_1

l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow \overline{n_2} = (A_2; B_2)$ - нормальный вектор прямой l_2.

Вычисление угла между прямыми сводится к вычислению угла между их нормальными векторами:

$$\cos\alpha = \cos(\overline{n_1}; \overline{n_2}) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}.$$

Условие ***параллельности*** прямых:

$$l_1 \| l_2 \quad \Rightarrow \overline{n}_1 \| \overline{n_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условие ***перпендикулярности*** прямых:

$$l_1 \perp l_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Замечание. Аналогичные условия можно получить, если прямые заданы каноническими уравнениями. Тогда ***вычисление угла между прямыми сводится к вычислению угла между их направляющими векторами.***

Угол между прямыми можно вычислить, если известны угловые коэффициенты этих прямых k_1 *и* k_2:

$$tg\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

В этом случае условие ***параллельности*** прямых: $k_1 = k_2$, условие ***перпендикулярности:*** $k_1k_2 = -1$.

Пример 6. Определить угол α между двумя прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$.

Решение. Из общего уравнения каждой прямой определим координаты нормальных векторов: $\overline{n_1} = \{5; -1\}$ и $\overline{n_2} = \{3; 2\}$. Угол α между двумя прямыми равен углу между нормальными векторами данных прямых. Воспользуемся скалярным произведением векторов:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{5 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

2. *Вычисление расстояния от точки до прямой.*

Пусть в некоторой системе координат прямая задана уравнением: $Ax + By + C = 0$. Точка $M_1(x_1; y_1)$ не принадлежит этой прямой. Для вычисления расстояния от точки $M_1(x_1; y_1)$ до данной прямой выберем на этой прямой любую точку $M_0(x_0; y_0)$(сделайте рисунок, он поможет иллюстрировать решение задачи). Очевидно, что искомое расстояние может быть определено как модуль проекции вектора $\overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0\}$ на нормальный вектор $\overline{n} = \{A; B\}$.

$$d = \left|Пр_{\overline{n}}\overline{M_0M_1}\right| \Rightarrow d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 7. Найти расстояние между прямыми $3x + 2y - 1 = 0$ и $6x + 4y + 4 = 0$.

Решение. Данные прямые параллельны, т.к. их нормальные векторы коллинеарны. Выберем на первой прямой любую точку, например, $M_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Расстояние между прямыми равно расстоянию от выбранной точки до второй прямой:

$$d=\left|\frac{6\cdot 0+4\cdot\frac{1}{2}+4}{\sqrt{6^2+4^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{52}}=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Прямая на плоскости задана уравнением

а). $-2x+3y+7=0$ б). $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-2}$ в). $y=-7x+4$

1) Указать любую точку, лежащую на этой прямой.
2) Указать любую точку, не лежащую на этой прямой.
3) Вычислить угловой коэффициент прямой.
4) Указать любой вектор, перпендикулярный прямой.
5) Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1;-2) параллельно данной прямой.
6) Составить уравнение прямой, проходящей через точку B(-2;3) перпендикулярно данной прямой.
7) Вычислить угол между данной прямой и прямой, заданной уравнением $y=2x-3$.
8) Вычислить расстояние от точки C (5; -1) до данной прямой.

9.2. Построить прямые $x+2y=6$; $y=2x$; $\mathrm{x}=4$. Заштриховать геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющее неравенствам $y\geq 3-\frac{x}{2}$; $y\leq 2x$; $x<4$.

9.2. Определить координаты точки A, симметричной точке B(9;4) относительно прямой, проходящей через точки C(2;3) и D(-1;4).

9.3. Даны уравнения двух сторон ромба $3x-10y+37=0$ и $9x+2y-17=0$ и уравнение одной из диагоналей $3x-2y-19=0$. Найти уравнение второй диагонали и уравнения двух других сторон.

9.4. Даны вершины треугольника A(-5;2), B(7;6), C(5;-4) . Составить

1) уравнение высоты, проведенной из вершины C;
2) уравнение медианы, проведенной из вершины A;
3) уравнение биссектрисы угла при вершине B.

9.5. Определить под каким углом пересекаются прямые $3x-2y+7=0$ и $x-2y+5=0$.

9.6. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение его гипотенузы $x-2y-3=0$, а вершина прямого угла находится в точке C(1;6).