

Теория поверхностей в дифференциальной геометрии

Элементарная поверхность

Определение. Область на плоскости называется элементарной областью, если она является образом открытого круга при гомеоморфизме, т.е. при взаимно однозначном и непрерывном отображении.

Таким образом, внутренность квадрата, прямоугольника, эллипса – всё это элементарные области.

Пусть Φ – элементарная поверхность и G – элементарная область на плоскости, являющаяся образом Φ при гомеоморфизме.

Определение. Поверхностью F в пространстве называется множество точек пространства, которое можно покрыть конечным или счётным множеством элементарных поверхностей.

Из этого определения следует, что для любой точки M поверхности F существует элементарная поверхность Φ , такая, что $M \in \Phi \subset F$, т.е. у каждой точки поверхности существует окрестность, являющаяся элементарной.

Введем понятие координат на поверхности.

Пусть на некоторой поверхности F задано однопараметрическое семейство линий, т.е. каждая линия этого семейства характеризуется определенным значением некоторого параметра. Назовем это семейство

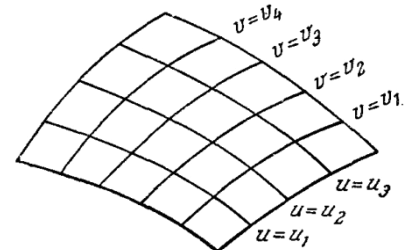


Рисунок 1

правильным, если через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия из данного семейства. Если на поверхности даны два правильных семейства, такие, что каждая из линий первого семейства пересекается без касания с каждой линией второго семейства не более чем в одной точке, то говорят, что на поверхности задана *координатная сеть*. Пусть линии первого из семейств, образующих координатную сеть, определяются значениями некоторого параметра u . А

линии второго семейства – значениями некоторого параметра v . Так как по условию через каждую точку поверхности проходит единственная кривая из первого семейства и единственная кривая второго семейства, то положение точки на поверхности однозначно определяется соответствующими этим линиям значениями u_0 и v_0 параметров u и v (рис.6). Параметры u и v , значениями которых определяются линии, составляющие координатную сеть, называются *координатами на данной поверхности*.

Если на поверхности введены каким-либо образом координаты u, v , то говорят, что эта поверхность *параметризована* параметрами u и v . Каждая точка такой поверхности может быть задана значениями параметров u и v . Но эта же точка может быть задана и своими декартовыми координатами. Следовательно, декартовы координаты точек параметризованной поверхности представляют собой функции координат на поверхности.

Пусть u, v – декартовы координаты произвольной точки, принадлежащей G , а x, y, z – координаты соответствующей точки поверхности. Тогда координаты x, y, z есть функции координат u, v при отображении f , т.е.

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) . \quad (1)$$

Эту систему равенств, задающих отображение f области G в пространство, называют *уравнениями поверхности* в параметрической форме. Здесь u, v называются *криволинейными координатами на поверхности*. Параметрические уравнения (1) при фиксированных значениях u, v задают кривую, лежащую на поверхности. Будем также пользоваться векторной записью уравнения поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ или $\vec{r} = f_1(u, v)\vec{i} + f_2(u, v)\vec{j} + f_3(u, v)\vec{k}$.

Последняя запись есть *векторная функция двух скалярных аргументов u, v* .

Замечание.. Уравнение $z = f(x, y)$ можно рассматривать как частный случай параметрического уравнения, если принять x и y за параметры и положить $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, заданные именно параметрическими уравнениями, причем функцию $\bar{r}(u, v)$ будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные по u и v . В некоторых случаях, нам придется потребовать также существования и непрерывности ее частных производных второго порядка.

Регулярная поверхность

Пусть Φ – элементарная поверхность, заданная уравнением $\bar{r} = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}$.

Определение. Поверхность Φ называется регулярной (k раз дифференцируемой), если функции x, y, z имеют непрерывные, частные производные до порядка k включительно, причём в каждой точке $M(u, v) \in G$

ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ равен двум.

При $k = 1$ поверхность называется *гладкой*.

Замечание . Частные производные $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ и т.д. функций x ,

y, z будем обозначать $x_u, y_u, \dots$. Таким образом, $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$, $\frac{\partial x}{\partial v} = x_v$.

Найдём частные производные радиус–вектора $\bar{r}$ по u и v :

$$\bar{r}_u = x_u\bar{i} + y_u\bar{j} + z_u\bar{k}, \quad \bar{r}_v = x_v\bar{i} + y_v\bar{j} + z_v\bar{k}.$$

Тогда матрица A примет вид $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ и состоит из координат векторов $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$. Условие, что ранг A равен двум означает, что векторы $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ не коллинеарны. Далее будем рассматривать только такие векторы.

Как известно, из курса математического анализа, если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ удовлетворяют условию $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$, то вблизи данных значений u, v и соответствующих им значений x и y уравнения $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ могут быть разрешены относительно u, v . Таким образом, $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ и получаем $z = z(u(x, y), v(x, y))$ или $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности в явном виде.

Кривые на поверхности

Рассмотрим на поверхности F множество точек, криволинейные координаты которых определяются уравнениями: $u=u(t)$, $v=v(t)$, где t – независимая переменная. Тогда векторная функция каждой точки поверхности может быть записана в виде: $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$. При изменении параметра, вектор $\bar{r}$ описывает своим концом некоторую кривую γ в пространстве, тем самым кривую γ на поверхности F .

Таким образом, построена, так называемая сеть кривых на поверхности или координатная сеть.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности, проходящие через данную точку M , и касательные векторы к ним в этой точке (рис. 2). Каждый из этих векторов представляет собой

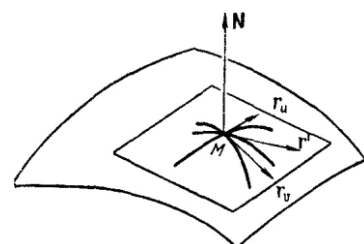


Рисунок 2

линейную комбинацию векторов $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$, т. е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M . Напишем уравнение касательной плоскости. Поскольку векторы $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ лежат в касательной плоскости, вектор $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ нормален к ней и уравнение этой плоскости имеет вид:

$$(\bar{\rho} - \bar{r}, \bar{N}) = 0, \quad (2)$$

здесь $\bar{r}$ – радиус-вектор точки касания, $\bar{\rho}$ – радиус-вектор текущей точки касательной плоскости.

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, т. е. в векторной форме $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$. Напишем уравнение касательной плоскости для такой поверхности. Имеем $\bar{r}_x = \bar{i} + f'_x\bar{k}$, $\bar{r}_y = \bar{j} + f'_y\bar{k}$ и, следовательно,

$$\bar{N} = [\bar{r}_x, \bar{r}_y] = -f'_x\bar{i} - f'_y\bar{j} + \bar{k}. \quad (3)$$

Подставив в уравнение касательной плоскости (2) вместо $\bar{\rho} - \bar{r}$ вектор $(x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$, а вместо нормального вектора $\bar{N}$ его выражение (3), получим *уравнение касательной плоскости* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) :

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0). \quad (4)$$

где значения производных f'_x и f'_y берутся в точке касания (x_0, y_0) .

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (4), получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (5)$$

Здесь значения F'_x , F'_y и F'_z берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0) .

Нормаль к поверхности. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – неявное уравнение поверхности. *Нормаль* к поверхности (перпендикулярная прямая к касательной плоскости в точке касания) имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Вычислим направляющие косинусы вектора $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$, нормального к поверхности, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Так как

$$\bar{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{и} \quad \bar{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

то вектор $[\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ имеет координаты

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

а его направляющие косинусы соответственно равны

$$\cos(N, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(N, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(N, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Измерение на поверхности длин, углов, площадей.

Первая квадратичная форма поверхности

Для решения многих физических, технических и геометрических задач нужно уметь вычислять длины дуг, лежащих на поверхности, углы между такими дугами, площади тех или иных частей поверхности.

Основная идея всех излагаемых в этом параграфе рассуждений состоит в замене бесконечно малого элемента гладкой поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Поэтому полезно начать с некоторых формул и понятий, относящихся к вычислению длин, углов и площадей на плоскости.

Перейдем к изучению поверхности в бесконечно малом, вблизи какой-нибудь её точки $M(x, y)$.

Вычислим дифференциал вектора $\bar{r}$ вдоль кривой. Тогда $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, где $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Найдём скалярные квадраты левой и правой частей этого равенства: $(d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)^2$ или

$$(d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u)^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + (\bar{r}_v)^2 dv^2. \quad (7)$$

Введём для этих скалярных произведений сокращённые обозначения:

$$\begin{cases} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = E; \\ \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = F; \\ \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = G; \end{cases}$$

или в координатах

$$\begin{cases} E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2; \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \\ G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2. \end{cases}$$

Тогда формула (7) перепишется в виде:

$$(d\bar{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv I. \quad (8)$$

Выражение (8), называется *первой квадратичной формой* на поверхности и играет важную роль в теории поверхностей.

Первая квадратичная форма служит прежде всего для измерения бесконечно малых дуг на поверхности. Далее посредством интегрирования, нетрудно перейти к точному вычислению *длин на поверхности*.

Пусть задана часть кривой на поверхности: $u=u(t)$, $v=v(t)$, где $t_1 \leq t \leq t_2$.

Тогда длина части кривой на поверхности выражается формулой:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u,v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F(u,v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u,v) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

Зная первую квадратичную форму на поверхности, можно находить и углы между кривыми.

Определение. Углом между кривыми γ_1 и γ_2 называется угол между касательными к этим линиям в их общей точке M .

Пусть $\bar{dr}_1$ и $\bar{dr}_2$ – векторы касательных к линиям γ_1 и γ_2 в точке M .

Тогда $\cos \varphi = \frac{\bar{dr}_1 \bar{dr}_2}{|\bar{dr}_1| |\bar{dr}_2|}$ или, в координатах, учитывая, что $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ для

произвольного вектора $\bar{x}$, имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\bar{r}_u)^2 (du)_1 (du)_2 + \bar{r}_u \bar{r}_v ((du)_1 (dv)_2 + (dv)_1 (du)_2) + (\bar{r}_v)^2 (dv)_1 (dv)_2}{\sqrt{(\bar{r}_u)^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + (\bar{r}_v)^2 dv^2} \sqrt{(\bar{r}_u)^2 \bar{du}^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{du} \bar{dv} + (\bar{r}_v)^2 \bar{dv}^2}} \quad \text{или} \\ \cos \varphi &= \frac{E du \bar{du} + F(du \bar{dv} + dv \bar{du}) + G dv \bar{dv}}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \bar{du}^2 + 2F \bar{du} \bar{dv} + G \bar{dv}^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Площадь поверхности

Через первую квадратичную форму можно определить площади любых участков поверхности. Пусть f – гладкая поверхность, заданная уравнениями

$$x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v)$$

и D – область на ней, ограниченная конечным числом кусочно-гладких кривых.

Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Заметим, что если $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – векторная функция, т.е.

$\bar{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, то в любой точке $M(u, v)$ поверхности имеем:

$$\sqrt{EG - F^2} = \left| \begin{vmatrix} \bar{r}_u & \bar{r}_v \end{vmatrix} \right|.$$

Следовательно, *площадь поверхности* можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \iint_D \|\bar{r}_u, \bar{r}_v\| du dv. \quad (10)$$

Задача. Найти первую квадратичную форму поверхностного вращения $x = \varphi(u) \cos v$, $y = \varphi(u) \sin v$, $z = \psi(u)$, где φ, ψ – функции, имеющие непрерывные производные.

Решение. Имеем $x_u = \varphi_u \cos v$, $x_v = -\varphi \sin v$, $y_u = \varphi_u \sin v$, $y_v = \varphi \cos v$.

Тогда

$$E = (\varphi_u' \cos v)^2 + (\varphi_u' \sin v)^2 + (\psi_u')^2 = (\varphi_u')^2 + (\psi_u')^2,$$

$$F = -\psi_u' \cos v \varphi \sin v + \varphi' \sin v \varphi \cos v + 0 = \sin v \cos v (\varphi' \varphi - \varphi' \varphi) = 0,$$

$$G = (-\varphi \sin v)^2 + (\varphi \cos v)^2 + 0 = \varphi^2.$$

Таким образом, первая квадратичная форма имеет вид

$$I = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 = (\varphi_u'^2 + \psi_u'^2) du^2 + \varphi^2 dv^2. \blacksquare$$

Мы видим, что зная первую квадратичную форму, можно решать *метрические задачи*, т.е. задачи на вычисления.

В связи с этим говорят, что первая квадратичная форма задаёт *метрику* поверхности и её часто называют *линейным элементом поверхности*. Первая квадратичная форма описывает поверхность в первом приближении, когда малый участок поверхности заменяется на участок касательной плоскости.

Все факты, которые могут быть получены путём измерения на поверхности с помощью первой квадратичной формы, относятся к так называемой *внутренней геометрии поверхности*.

Вторая квадратичная форма поверхности

Вторая квадратичная форма описывает поверхность во втором приближении. Она показывает, как отклоняется поверхность от касательной плоскости и полностью определяет кривизну поверхности. Можно было бы само понятие второй квадратичной формы ввести, исходя из задачи о

вычислении расстояния от точки поверхности до касательной плоскости, проведенной через близкую точку.

Пусть f – регулярная поверхность, заданная уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, а γ – линия на этой поверхности. Имеем $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$. Введём вектор нормали $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$, тогда единичный вектор нормали в точке M к поверхности f имеет вид $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|}$. Найдём квадратичную форму

$d\bar{r} \cdot d\bar{n} = \bar{r}_u \cdot \bar{n}_u du^2 + (\bar{r}_u \cdot \bar{n}_v + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_u) du dv + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_v dv^2$. Так как $d\bar{r} \perp \bar{n}$, то скалярное произведение $d\bar{r} \cdot \bar{n} = 0$ и, следовательно, $d(d\bar{r} \cdot \bar{n}) = d^2\bar{r} \cdot \bar{n} + d\bar{r} \cdot d\bar{n} = 0$.

Отсюда

$$d^2\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{n} \cdot (\bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} du dv + \bar{r}_{vv} dv^2) = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} du dv + \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} dv^2. \quad (11)$$

Здесь учтено, что $\bar{n} \cdot \bar{r}_u = 0$, $\bar{n} \cdot \bar{r}_v = 0$, т.е. отсутствуют слагаемые с этими произведениями.

$$\text{Введём обозначения } \begin{cases} \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = L; \\ \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = M; \\ \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} = N. \end{cases}$$

$$\text{или в координатах: } L = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \text{ и аналогично,}$$

$$M = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uv}}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vv}}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Замечание. Здесь d^2u – дифференциал второго порядка и $du^2 = (du)^2 = du du$ – квадрат дифференциала.

Тогда равенство (11) принимает вид:

$$d^2 \bar{r} \cdot \bar{n} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \equiv II. \quad (12)$$

В формуле (12) правая часть равенства называется *второй квадратичной формой поверхности*.

Замечание. В частности, если поверхность задана явным уравнением

$$z = z(x, y), \text{ то } L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Кривизна кривой, лежащей на поверхности

Пусть f – регулярная поверхность и γ – регулярная кривая на поверхности f , проходящая через точку M .

Предположим, что вдоль этой кривой за параметр принята длина дуги s , так что текущие координаты u и v выражаются как функции от s (естественная параметризация кривой): $u=u(s)$, $v=v(s)$ и, следовательно, кривая γ может быть представлена в виде $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s))$.

Рассмотрим скалярное произведение $\bar{r}'' \cdot \bar{n}$, где $\bar{r}'' = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2}$ и $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности. Тогда $\bar{r}'' \cdot \bar{n} = |\bar{r}''| |\bar{n}| \cos \theta$, где θ есть угол между главной нормалью $\bar{v}$ кривой и нормалью $\bar{n}$ к поверхности.

Так как $|\bar{r}''| = k$, где k – кривизна кривой, то имеем $\bar{r}'' \cdot \bar{n} = k \cos \theta$. С другой стороны, учитывая, что $\bar{r}' = \bar{r}_u \cdot u' + \bar{r}_v \cdot v'$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{r}'' \cdot \bar{n} &= (\bar{r}_{uu} u'^2 + \bar{r}_{u''} u'' + \bar{r}_{uv} v' u' + (\bar{r}_{vu} u' + \bar{r}_{vv} v') v' + \bar{r}_{vv} v'') \cdot \bar{n} = \\ &= (\bar{r}_{uu} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} u' v' + v'^2 + \bar{r}_{u''} u'' + \bar{r}_{vv} v'') \cdot \bar{n} = \\ &= (\bar{r}_{uu} \cdot \bar{n}) u'^2 + 2(\bar{r}_{uv} \cdot \bar{n}) u' v' + (\bar{r}_{vv} \cdot \bar{n}) v'^2 + (\bar{r}_{u''} \cdot \bar{n}) u'' + (\bar{r}_{vv} \cdot \bar{n}) v'' = \end{aligned}$$

$$= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{ds^2}.$$

Следовательно, учитывая, что $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, имеем

$$k \cos \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I}.$$

Правая часть этого равенства зависит только от направления кривой в точке $M(u, v)$. Таким образом, $k \cos \theta = k_n = \text{const}$ в точке $M(u, v)$ для всех кривых γ , проходящих через эту точку и имеющую в ней одну и ту же касательную плоскость.

Величину k_n называют *нормальной кривизной* линии γ в точке M . Если γ – *нормальное сечение* поверхности, т.е. сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке M , то тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Нормальная кривизна любой линии поверхности, проходящей через точку M , с точностью до знака равна кривизне нормального сечения, имеющего с данной линией общую касательную (знак зависит от направления векторов $\bar{n}$ и $\bar{v}$).

Главные направления и кривизны поверхности

Исследуем теперь вопрос, как меняется нормальная кривизна в зависимости от направления её вектора скорости. Как и для всякой квадратичной формы, для второй квадратичной формы найдётся ортонормированный базис в касательной плоскости, в котором форма имеет диагональный вид $II(du, dv) = \lambda_1 du^2 + \lambda_2 dv^2$.

Определение. Направления, задаваемые векторами этого базиса, называются *главными направлениями*, а числа λ_1, λ_2 – *главными кривизнами*.

Определение. Произведение $K = \lambda_1 \lambda_2$ называется гауссовой или полной кривизной поверхности в данной точке, полусумма $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – средней кривизной.

Знание значения главной кривизны и главных направлений позволяет найти нормальную кривизну в произвольном направлении по формуле

$$k_n = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ – угол между данным направлением и направлением первого базисного вектора (формула Эйлера).

Из формулы Эйлера следует экстремальное свойство главных направлений: это те направления, где нормальная кривизна принимает наибольшее или наименьшее значение. Это свойство помогает находить главные направления: вектор с координатами du, dv задаёт главное направление, если выполнено условие:

$$(E du + F dv)(M du + N dv) - (L du + M dv)(M du + N dv) = 0.$$

Главные кривизны ищутся из условия $d \in \mathbb{H} \setminus \lambda I = 0$, т.е. из уравнения $(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0$.

Внутренняя геометрия поверхности

Утверждение. Две поверхности являются изгибаемыми одна в другую, если в некоторых параметризациях их первые квадратичные формы совпадают.

Совокупность тех свойств поверхности, которые не меняются при ее изгибании, называется внутренней геометрией поверхности. Две поверхности изгибаемы друг в друга в том и только том случае, если на них можно ввести одну и ту же первую квадратичную форму. Две различные поверхности могут иметь одну и ту же внутреннюю геометрию. Например, плоскость и параболический цилиндр.

Следовательно, к внутренней геометрии поверхности относятся те, и только те ее свойства, которые могут быть выражены через первую

квадратичную форму. Т.е., например, длины линий, лежащих на поверхности; полная кривизна K поверхности. Далее, поскольку угол между линиями на поверхности и площадь поверхности выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы, то эти величины также относятся к внутренней геометрии. В то же время ни средняя кривизна, ни главные кривизны при изгибании не сохраняются.

Внутренняя геометрия плоскости – это обычная планиметрия, которую все изучают в школе. Однако, все теоремы планиметрии останутся верны, если вместо плоскости рассматривать любую накладываемую на нее поверхность, скажем параболический цилиндр. А вот внутренняя геометрия сферы существенно отличается от геометрии плоскости: например, на сфере сумма углов треугольника всегда больше, чем π .