ОПРЕДЕЛЕНИЕ *n*-МЕРНОГО АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

<u>**Определение**</u>**. Аффинное *n*-мерное пространство** A^n над полем F – это множество, состоящее из элементов двух родов: «точек» и «векторов» пространства, о порядке которых мы не делаем никаких предположений. При этом предполагаются выполненными следующие четыре условия – **«аксиомы *n*-мерного аффинного пространства»:**

1°). Множество всех векторов V^n пространства A^n есть n-мерное линейное пространство над полем F;

2°). Каждые две точки A и B (данные в определённом порядке) определяют единственный вектор $a = \overrightarrow{AB}$;

3°). Если даны произвольный вектор a и произвольная точка A, то существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = a$. Точка A называется в этом случае начальной точкой приложенного к ней вектора a, а точка B – концом вектора a;

4°). Если $a_1 = \overrightarrow{AB}$ и $a_2 = \overrightarrow{BC}$, то

$$a_1 + a_2 = \overrightarrow{AC}. \tag{1}$$

Следствия из аксиом аффинного пространства:

1). Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = b$, то $C = B$. Это непосредственно вытекает из аксиомы 3°.

2). При любом выборе точки A вектор $\overrightarrow{AA}$ есть нулевой вектор Θ.

$\triangleright$ Докажем от противного. Если $\Theta = \overrightarrow{AB}$, то $\forall a = \overrightarrow{MA}$
$a + \Theta = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} = a = \overrightarrow{MA}$, т.е. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$. В силу 1) это означает, что $B = A$ и $\Theta = \overrightarrow{AA}$. $\triangleleft$

3). Если $a = \overrightarrow{AB}$, то $(-a) = \overrightarrow{BA}$.

$\triangleright$ $(-a)$ – это единственный вектор, удовлетворяющий условию $a+(-a)=\Theta$. Но $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\Theta$, т.е. $\overrightarrow{BA}=-a$. $\triangleleft$

4). Если дан вектор a и точка B, то существует единственная точка A такая, что $\overrightarrow{AB}=a$.

$\triangleright$ Возьмём вектор $-a$ и приложим его к точке B, т.е. найдём ту единственную точку A, для которой $-a=\overrightarrow{BA}$. Тогда $a=-(-a)=\overrightarrow{AB}$.

Если $\overrightarrow{A'B}=a$, то $-a=\overrightarrow{BA'}$. В силу 1) заключаем, что $A=A'$. $\triangleleft$

Произвольный данный вектор a порождает вполне определённое взаимно однозначное отображение множества всех точек пространства A^n в себя. Это отображение, называемое **сдвигом пространства** A^n на вектор a, состоит в том, что каждой точке $A\in A^n$ ставится в соответствие конец B приложенного к точке A вектора $a=\overrightarrow{AB}$. При сдвиге (в силу аксиомы 4°) сумме векторов соответствует сумма произведённых ими сдвигов пространства.

5). Пусть $a=\overrightarrow{PQ}$ - какой-либо вектор, и пусть при сдвиге на вектор b точки P и Q переходят, соответственно, в точки P' и Q': это значит, что $b=\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{QQ'}$. Докажем, что тогда $\overrightarrow{P'Q'}=\overrightarrow{PQ}=a$.

$\triangleright$ $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{P'Q'}+\overrightarrow{Q'Q}=\overrightarrow{PQ}$, т.е. $b+\overrightarrow{P'Q'}+(-b)=a$, или $\overrightarrow{P'Q'}=a$. $\triangleleft$

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. АРИФМЕТИЧЕСКОЕ АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ

Система координат в n-мерном аффинном пространстве A^n над полем F состоит из некоторой точки O («начало координат») и из базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ пространства V^n.

Координаты какого-либо **вектора** a в этой системе координат – это координаты этого вектора относительно базиса $e_1, e_2, ..., e_n$; они не зависят от выбора начала координат.

Координатами произвольной **точки** M пространства называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$.

Вектор a с координатами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ обозначается через $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$; точка M с координатами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ обозначается через

$$M = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n). \tag{2}$$

Т.о., запись (2) означает то же самое, что и запись

$$\overrightarrow{OM} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}. \tag{2'}$$

Т.к. координаты данного вектора относительно данного базиса определены однозначно, то и координаты данной точки M относительно данной системы координат (совпадая, по определению, с координатами вектора $\overrightarrow{OM}$) также определены однозначно.

Пусть дан какой-либо вектор $a = \overrightarrow{AB}$, причём $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, $A = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $B = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$. Тогда $\overrightarrow{OA} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $\overrightarrow{OB} = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n\}$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Т.к. при сложении векторов их координаты складываются, последнее равенство равносильно системе равенств

$$\xi_i + \alpha_i = \eta_i,\ i = 1, 2, ..., n,$$

т.е.

$$\alpha_i = \eta_i - \xi_i, \qquad i = 1, 2, ..., n; \tag{3}$$

координаты вектора *a* равны разностям между соответствующими координатами концевой и начальной точке вектора.

Другими словами: прилагая вектор $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ к точке $A = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, получим $a = \overrightarrow{AB}$, где $B = (\xi_1 + \alpha_1, \xi_2 + \alpha_2, ..., \xi_n + \alpha_n)$.

Важнейшим примером *n*-мерного аффинного пространства A^n является ***n*-мерное арифметическое пространство** над полем *F*, устроенное следующим образом: и точки, и векторы этого пространства – это наборы из *n* чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, отмеченные дополнительным значком (круглые скобки – для точек, фигурные – для векторов).

I. Векторы $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ образуют арифметическое линейное пространство F^n; это значит, что

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} + \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta n\} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\};$$

$$\lambda\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n\}.$$

$$\Theta = \{0, 0, ..., 0\}.$$

Связь между точками и векторами, описываемая аксиомами 2° – 4°, осуществляется следующим образом:

II. Пара точек $A = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, и $B = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ определяет вектор $a = \overrightarrow{AB} = \{\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2, ..., \eta_n - \xi_n\}$.

III. Точка $A = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, и вектор $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ определяют точку $B = (\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, ..., \alpha_n + \xi_n)$.

При этом аксиомы 1°-4° выполнены.

Рассмотрим преобразование аффинных координат, при переходе от одной системы координат $Oe_1, e_2, ..., e_n$ к другой $O'e_1', e_2', ..., e_n'$. Обозначим вектор $\overrightarrow{OO'}$ через $a = d_q + d_2 + ... + d_n$. Вектор

$$\overrightarrow{O'M} = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + ... + \xi'_n e'_n$$

может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M} &= \xi'_1(p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n) + \xi'_2(p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n) + \\ &+ ... + \xi'_n(p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n) = (p_{11}\xi'_1 + p_{21}\xi'_2 + ... + p_{1n}\xi'_n)e_1 + \\ &+ (p_{21}\xi'_1 + p_{22}\xi'_2 + ... + p_{2n}\xi'_n)e_2 + ... + (p_{n1}\xi'_1 + p_{n2}\xi'_2 + ... + p_{nn}\xi'_n)e_n.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \tag{4}$$

где

$$\overrightarrow{O'M} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\},$$

соотношение (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n + (p_{11}\xi'_1 + p_{12}\xi'_2 + ... + p_{1n}\xi'_n)e_1 + \\ &+ (p_{21}\xi'_1 + p_{22}\xi'_2 + ... + p_{2n}\xi'_n)e_2 + ... + (p_{n1}\xi'_1 + p_{n2}\xi'_2 + ... + p_{nn}\xi'_n)e_n,\end{aligned}$$

т. е.

$$\xi_i = p_{i1}\xi'_1 + p_{i2}\xi'_2 + .. + p_{in}\xi'_{\mathrm{n}} + \alpha_i,$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ ... \\ \xi'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Формула (5) выражает закон преобразования аффинных координат.