Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Том II

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей высших учебных заведений

Новосибирск
2006

УДК 51 (075.8)
В 937

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко,* д-р физ.-мат. наук,
проф. СибУКП.
А. Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов-заочников I курса всех факультетов

Высшая математика
В937 Учеб. пособие/ В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнев, В. В. Хаблов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. — Т.2 — 177 с.

ISBN 5-7782-0422-1

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов I курса очного и заочного отделений всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику в объеме первого курса. При его написании были использованы методические разработки и другие материалы, ранее изданные кафедрами высшей и инженерной математики НГТУ. Эти материалы включены в текст пособия без ссылок, за что мы приносим свои извинения. Все замечания по содержанию данной работы просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

Во втором издании переработаны задания контрольных работ и исправлены замеченные опечатки

УДК 51(075.8)

ISBN 6-7782-0422-1

Оглавление

Глава 1. Неопределенный интеграл **7**

§ 1.1. Определение неопределенного интеграла . . . 7

§ 1.2. Свойства неопределенного интеграла . . . 9

§ 1.3. Таблица основных интегралов . . . 10

§ 1.4. Основные методы интегрирования . . . 12

1.4.1. Непосредственное интегрирование . . . 12

1.4.2. Метод подстановки (замена переменной в неопределенном интеграле) . . . 12

1.4.3. Метод интегрирования по частям . . . 15

§ 1.5. Интегрирование рациональных функций . . . 17

§ 1.6. Интегрирование простейших иррациональностей . . . 24

§ 1.7. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где R — рациональная функция двух переменных . . . 29

Глава 2. Определенный интеграл **32**

§ 2.1. Основные свойства определенных интегралов . . . 36

§ 2.2. Интеграл с переменным верхним пределом . . . 41

§ 2.3. Формула Ньютона—Лейбница . . . 44

§ 2.4. Геометрические и физические приложения определенного интеграла . . . 49

2.4.1. Вычисление площади плоских фигур . . . 49

2.4.2. Вычисление длины кривой . . . 55

2.4.3. Вычисление объема тела вращения . . . 62

2.4.4. Площадь поверхности вращения . . . 64

2.4.5. Работа переменной силы . . . 65

§ 2.5. Несобственные интегралы . . . 67

2.5.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования . . . 67

2.5.2. Несобственные интегралы
от неограниченных функций 75
§ 2.6. Приближенные методы интегрирования 80
2.6.1. Метод трапеций 81
2.6.2. Метод парабол (метод Симпсона) 82

Глава 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных 87
§ 3.1. Вспомогательный раздел.
Вектор-функция скалярного аргумента 87
3.1.1. Первые понятия 87
3.1.2. Пределы и производные. Свойства 88
3.1.3. Касательная к кривой.
Геометрический смысл
производной вектор-функции 90
§ 3.2. Функции нескольких переменных
и их области определения.
Множества на плоскости и в пространстве 92
3.2.1. Область определения 92
3.2.2. Окрестности.
Области на плоскости и в пространстве 93
3.2.3. График функции двух переменных 94
§ 3.3. Предел и непрерывность
функции двух переменных 95
3.3.1. Определения бесконечно малой функции
и предела 95
3.3.2. Непрерывные функции 98
§ 3.4. Приращения независимых переменных
и функции. Частные производные 98
3.4.1. Приращения независимых переменных
и функции 98
3.4.2. Частные производные 99
3.4.3. Геометрический смысл частных
производных функций двух переменных 100
§ 3.5. Дифференцируемость функции
двух переменных 100
3.5.1. Дифференцируемость функции 100
3.5.2. Приближенные вычисления значений
функции с помощью дифференциала 103
3.5.3. Выражение дифференциала функции через
дифференциалы координатных функций 105
3.5.4. Дифференцируемость,
касательная плоскость и нормаль
к графику функции двух переменных 105
3.5.5. Геометрический смысл дифференциала
функции двух переменных 107

§ 3.6. Дифференцируемость сложных и неявных функций . . . 107
3.6.1. Дифференцируемость и производные сложной функции . . . 107
3.6.2. Производные неявных функций . . . 109
§ 3.7. Производная по направлению . . . 111
3.7.1. Определение производной по направлению . . . 111
3.7.2. Производная по направлению. Градиент функции. Геометрический смысл градиента . . . 113
§ 3.8. Линии и поверхности уровня. Уравнения касательной и нормали . . . 114
3.8.1. Линии и поверхности уровня . . . 114
3.8.2. Уравнения касательных и нормалей . . . 115
§ 3.9. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора . . . 116
3.9.1. Частные производные высших порядков . . . 116
3.9.2. Дифференциалы высших порядков . . . 117
3.9.3. Формула Тейлора . . . 118
§ 3.10. Отображения $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ . . . 119
3.10.1. Параметрическое задание поверхностей . . . 119
3.10.2. Криволинейные координаты и замена переменных . . . 121
§ 3.11. Экстремум функции двух переменных . . . 123
3.11.1. Основные определения . . . 123
3.11.2. Необходимое условие экстремума . . . 123
3.11.3. Достаточное условие экстремума функции двух переменных . . . 124
§ 3.12. Условные экстремумы . . . 127
§ 3.13. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области . . . 130
3.13.1. Пример . . . 130
3.13.2. Алгоритм решения задачи нахождения наименьшего и наибольшего значений функции . . . 131
§ 3.14. Метод наименьших квадратов . . . 132
3.14.1. Постановка задачи . . . 132
3.14.2. Решение задачи . . . 133

Глава 4. Кратные интегралы **135**
§ 4.1. Определение двойного интеграла . . . 136
§ 4.2. Геометрический смысл двойного интеграла . . . 138
§ 4.3. Свойства двойного интеграла . . . 139
§ 4.4. Вычисление двойного интеграла . . . 141

§ 4.5. Замена переменных
в двойном интеграле 148
§ 4.6. Применения двойных интегралов 154
4.6.1. Вычисление площадей плоских фигур 154
4.6.2. Вычисление объемов 156
4.6.3. Вычисление площади поверхности 156
4.6.4. Приложения двойного интеграла в механике 159
§ 4.7. Тройные интегралы 163
4.7.1. Определение тройного интеграла,
его свойства, вычисление 163
4.7.2. Замена переменных в тройном интеграле 167
4.7.3. Приложения тройных интегралов 171

Список литературы **175**

Глава 1.

Неопределенный интеграл

§ 1.1. Определение неопределенного интеграла

Нахождение производной, или дифференциала, заданной функции — одна из основных задач дифференциального исчисления. Первой основной задачей интегрального исчисления является обратная к дифференцированию задача — отыскание функции по заданной ее производной. К этой задаче приводят многие проблемы механики, физики и других наук (например, задача об определении закона движения материальной точки по заданной ее скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ускорению).

Займемся поставленной задачей о нахождении функции по ее производной.

Определение 1.1.1. *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке x из интервала (a,b) функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$, т. е. во всех точках $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Иногда говорят, что $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b).

Пример 1.1.1. *Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой $(-\infty,\infty)$, так как в любой точке $x \in (-\infty,\infty)$ выполняется $(\sin x)' = \cos x$.*

Пример 1.1.2. *Функция* $F(x) = \arcsin x$ *является первообразной для функции* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *на интервале* $(-1,1)$, *ибо в каждой точке* $x \in (-1,1)$ *справедливо равенство* $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то и функция $\Phi(x) = F(x)+C$ будет первообразной для $f(x)$ на этом же интервале для любой постоянной C. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Таким образом, у функции $f(x)$ первообразных бесконечно много. Но оказывается, что все они имеют вид $F(x)+C$, где $F(x)$ — некоторая конкретная первообразная.

Теорема 1.1.1. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные функции $f(x)$ на интервале (a,b). Тогда всюду на этом интервале $F_2(x) = F_1(x)+C$, где C — некоторая постоянная.*

Доказательство. Положим $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех точек $x \in (a,b)$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и пусть $x_0 < x < b$. Тогда, по теореме Лагранжа,

$$G(x) - G(x_0) = G'(c) \cdot (x - x_0),$$

где $x_0 < c < x$. Но $G'(c) = 0$ по нашему предположению. Поэтому для всех $x \in (x_0,b)$ $G(x) = G(x_0)$. Рассматривая функцию $G(x)$ на отрезке $[x,x_0]$, где $a < x < x_0$, и снова применяя теорему Лагранжа, получаем, что $G(x) = G(x_0)$ для всех $x \in (a,x_0)$. Полагая $G(x_0) = C$, получаем $G(x) = F_2(x) - F_1(x) = C$ для всех $x \in (a,b)$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, если мы найдем одну какую-нибудь первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то любая первообразная $G(x)$ функции $f(x)$ на этом интервале имеет вид $G(x) = F(x)+C$, где C — некоторая постоянная.

Определение 1.1.2. *Множество всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (на этом интервале) и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx.$$

Знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования.

Таким образом, как следует из определения,

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\}.$$

Но обычно записывают просто

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \tag{1.1.1}$$

если $F'(x)=f(x)$.

Нахождение первообразной для заданной функции, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции, называется интегрированием этой функции.

Часто говорят «вычислить интеграл», или «взять интеграл». Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить правильность интегрирования, достаточно продифференцировать полученный результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Мы сейчас не останавливаемся на вопросе, для каких функций существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл). Отметим без доказательства следующий факт. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то на этом интервале существует первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$.

§ 1.2. Свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad \text{или} \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{1.2.1}$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x)+C \quad \text{или} \quad \int dF(x) = F(x)+C. \tag{1.2.2}$$

Действительно,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x),$$

$$d\int f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx.$$

Далее, из $dF(x) = F'(x)\,dx$ следует $\int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x)+C$.

Следующие два свойства называются линейными свойствами интеграла.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx. \tag{1.2.3}$$

$$\int Cf(x)\, dx = C\int f(x)\, dx, \quad \text{где } C \text{ — постоянная.} \tag{1.2.4}$$

Докажем (1.2.3). Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$. Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ — первообразные функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно, $\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx = [F(x)+C_1] \pm [G(x)+C_2] = [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = \int [f(x) \pm g(x)]\, dx + C$, где $C = C_1 \pm C_2$ — произвольная постоянная.

Отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых. Если

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$$

— первообразные для

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$$

и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные постоянные, то справедливо равенство

$$\int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)]\, dx =$$
$$= A_1 \int f_1(x)\, dx + A_2 \int f_2(x)\, dx + \ldots + A_n \int f_n(x)\, dx.$$

§ 1.3. Таблица основных интегралов

Из определения неопределенного интеграла следует, что если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Исходя из этого и используя таблицу простейших производных, можно составить следующую таблицу неопределенных интегралов, справедливость формул в которой легко проверяется дифференцированием:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1); \tag{1.3.1}$$

$$\int \frac{dx}{x}\,dx = \ln|x| + C; \tag{1.3.2}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \tag{1.3.3}$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C; \tag{1.3.4}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C; \tag{1.3.5}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C; \tag{1.3.6}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C; \tag{1.3.7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C; \tag{1.3.8}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \tag{1.3.9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{1.3.10}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \tag{1.3.11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C. \tag{1.3.12}$$

Проверим, например, формулу (1.3.2). Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Следовательно, на $(-\infty, 0)$ и на $(0,\infty)$ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ и формула (1.3.2) справедлива на $(-\infty,0)\cup\cup(0,-\infty)$.

Интегралы (1.3.1)–(1.3.12) мы далее будем называть табличными.

§ 1.4. Основные методы интегрирования

1.4.1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называют вычисление неопределенных интегралов с помощью непосредственного использования табличных интегралов и линейных свойств неопределенного интеграла.

Пример 1.4.1.

$$\int (\sin 2x - \cos 3x)\, dx =$$
$$= \int \sin 2x\, dx - \int \cos 3x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Пример 1.4.2.

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x}}\, dx =$$
$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

1.4.2. Метод подстановки (замена переменной в неопределенном интеграле)

Часто не удается указать непосредственную $F(x)$, так, что
$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$
Но после введения новой переменной во многих случаях получается либо сразу табличный интеграл, либо интеграл, легко сводящийся к табличному. Такой метод вычисления интеграла называется методом подстановки, или методом замены переменной.

Он основан на следующей теореме.

Теорема 1.4.1 (о замене переменной в неопределенном интеграле). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором интервале (α, β) и пусть X — множество значений этой функции — интервал, полуинтервал или отрезок. И пусть на X определена функция $f(x)$. Тогда,* *если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на интервале (α, β) справедлива формула замены переменной в неопределенном интеграле*

$$\int f(x)\,dx\bigg|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на множестве X. Рассмотрим на интервале (α, β) функцию

$$G(t) = F(\varphi(t)).$$

Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$G'(t) = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Значит, $G(t)$ является первообразной для функции $g(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Следовательно, $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$. Но $F(\varphi(t)) + C = [F(x)+C]\bigg|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx\bigg|_{x=\varphi(t)}$. Теорема доказана.

Пример 1.4.3.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{array}{ccc} x^2+1 & = & t \\ 2x\,dx & = & dt \\ x\,dx & = & \dfrac{dt}{2} \end{array}\right| = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

В приведенных выкладках вертикальными черточками отделены вспомогательные записи. Это позволяет не прерывать цепочку рассуждений. Далее мы будем систематически пользоваться такой формой записи при проведении вычислений или оценок.

Пример 1.4.4.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{lcl} x & = & 2\sin t \\ dx & = & 2\cos t\,dt \\ t & = & \arcsin\dfrac{x}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \cos^2 t\,dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C =$$

$$= 2t+\sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2}+\sin 2\arcsin\frac{x}{2}+C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin 2\arcsin\frac{x}{2} = 2\sin\arcsin\frac{x}{2}\cos\arcsin\frac{x}{2} = 2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Пример 1.4.5.

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{lcl} x^2 & = & t \\ 2x\,dx & = & dt \\ x\,dx & = & \dfrac{1}{2}\,dt \end{array}\right| = \int e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Пример 1.4.6.

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \left|\begin{array}{lcl} \sin x & = & t \\ \cos x\,dx & = & dt \end{array}\right| = \int e^t\,dt =$$

$$= e^t + C = e^{\sin x}+C.$$

Пример 1.4.7.

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^m}\,dx = \left|\begin{array}{lcl} x^2+a^2 & = & t \\ x\,dx & = & \dfrac{1}{2}\,dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^m} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-m)t^{m-1}}+C = \frac{1}{2(1-m)\,(x^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

1.4.3. Метод интегрирования по частям

Метод основан на формуле дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 1.4.2 (интегрирование по частям в неопределенном интеграле). *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале (a,b) и пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на интервале (a,b). Тогда на интервале (a,b) функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx,$$

или, поскольку $u'(x)\,dx = du$, $v'(x)\,dx = dv$,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Доказательство. Из равенства

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

следует, что

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$$

Первообразной для функции $[u(x)v(x)]'$ является функция $u(x)v(x)$. Функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на (a,b) по предположению. Следовательно функция $u(x)v'(x)$ имеет первообразную на интервале (a,b). Интегрируя последнее равенство, получаем формулу. Теорема доказана.

Пример 1.4.8.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x \quad , & du = \dfrac{dx}{x} \\ dx = dv \quad , & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

В некоторых, наиболее простых случаях, можно не вводить явно функции $u(x)$ и $v(x)$.

Пример 1.4.9.

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Иногда приходится использовать формулу интегрирования по частям два раза и более.

Пример 1.4.10.

$$\int x^2e^x\,dx = \left|\begin{array}{cc} x^2=u, & du=2x\,dx \\ e^x\,dx=dv, & v=e^x \end{array}\right| =$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=x, & du=dx \\ e^x\,dx=dv, & v=e^x \end{array}\right| =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Формула интегрирования по частям используется при вычислении интегралов вида

$$\int e^{ax}x^m\,dx, \qquad \int x^m\sin bx\,dx, \qquad \int x^m\cos bx\,dx,$$
$$\int x^m\operatorname{arctg} bx\,dx, \quad \int x^m\arcsin bx\,dx, \quad \int x^m\ln x\,dx.$$

Рассмотрим еще в качестве примера вычисление интеграла

$$J = \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

При его вычислении мы приходим не к табличному интегралу, а к уравнению 1-го порядка, где неизвестным будет интеграл J. Имеем

$$J = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}\,dx \\ \sin bx\,dx=dv, & v=-\dfrac{\cos bx}{b} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{\cos bx}{b}e^{ax} + \frac{a}{b}\int e^{ex}\cos bx\,dx.$$

Получившийся интеграл снова вычислим по частям

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}\,dx \\ \cos bx\,dx=dv, & v=\dfrac{\sin bx}{b} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\sin bx}{b}e^{ax} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Таким образом, получаем

$$I = \left[\frac{\sin bx}{b}e^{ax} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right].$$

Отсюда вытекает равенство

$$J = \frac{a}{b^2}\sin bx\cdot e^{ax} - \frac{\cos bx}{b}e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}J.$$

Выражая из этого равенства J, получаем

$$J = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Аналогично получаем формулу
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$
С помощью этого приема можно вычислить также интегралы
$$\int \sin(\ln x)\,dx \quad \text{и} \quad \int \cos(\ln x)\,dx.$$

§ 1.5. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов, т.е. функция вида $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. В частном случае, когда $Q(x)$ тождественно равен постоянной, рациональная функция $f(x)$ становится многочленом. В этом случае ее иногда называют целой рациональной функцией. Если $Q(x)$ отличен от постоянной, то функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называют дробно-рациональной функцией. Иногда рациональную функцию называют рациональной дробью.

Рациональная функция называется правильной, если степень числителя строго меньше степени знаменателя.

Неправильную рациональную функцию всегда можно свести к правильной, разделив числитель на знаменатель «столбиком» и выделив из дроби целую часть — многочлен.

Пример 1.5.1. *Рассмотрим рациональную функцию*
$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1}.$$
Поделим числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x^4+x^3+x^2 & x^2-x \\ \cline{1-1}
\quad -x^3-x^2+1 & \\
\quad -x^3-x^2-x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad x+1 &
\end{array}$$

Таким образом, целая часть от деления равна x^2-x, остаток — многочлен $x+1$, и мы можем записать
$$\frac{x^4+1}{x^2+x+1} = x^2 - x + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Далее нам понадобятся некоторые сведения из алгебры, которые мы приведем без доказательств.

Теорема 1.5.1 (о разложении многочлена на простейшие действительные множители). *Любой многочлен $Q(x)$ степени n может быть представлен в виде произведения*

$$Q(x)=A_0(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r},$$

где $a_1,\ldots,a_k$ — действительные корни $Q(x)$, а квадратные трехчлены $x^2+p_jx+q_j$, $j=1,2,\ldots,r$, не имеют действительных корней, и $m_1+m_2+\ldots+m_k+2l_1+2l_2+\ldots+2l_r=n$. Числа m_i называются кратностями корней a_i.

Теорема 1.5.2 (о разложении правильной рациональной функции на простейшие дроби). *Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная функция и*

$$Q(x)=A_0(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}.$$

Тогда рациональная функция единственным образом представима в виде

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{(x-a_1)^{m_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{m_1-1}}+\ldots+\frac{A_{m_1}}{x-a_1}+\ldots+\\&+\frac{B_1}{(x-a_k)^{m_k}}+\frac{B_2}{(x-a_k)^{m_k-1}}+\ldots+\frac{B_{m_k}}{x-a_k}+\\&+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\ldots+\\&+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}+\\&+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r-1}}+\ldots+\frac{M_{l_r}x+N_{l_r}}{x^2+p_rx+q_r},\end{aligned}$$

где A_1, $\ldots$, A_{m_1}, B_1, $\ldots$, B_{m_k}, C_1, D_1, $\ldots$, C_{l_1}, D_{l_1}, M_1, N_1, $\ldots$, M_{l_r}, N_{l_R} — некоторые действительные постоянные.

Дроби вида

$$\text{I.}\quad \frac{A}{x-a},\qquad \text{III.}\quad \frac{Cx+D}{x^2+px+q},$$
$$\text{II.}\quad \frac{A}{(x-a)^m},\qquad \text{IV.}\quad \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m},$$

где $m>1$, называются простейшими, или элементарными дробями.

Представление правильной рациональной функции в виде суммы простейших имеет место для всех x, не являющихся корнями знаменателя $Q(x)$. Чтобы определить постоянные $A_1,A_2,\ldots,M_{l_r},N_{l_r}$, умножим обе части равенства на многочлен $Q(x)$. Тогда в левой части равенства будет многочлен $P(x)$, а в правой — многочлен с неизвестными коэффициентами, и оба многочлена равны при всех значениях x.

Теорема 1.5.3. *Если два многочлена равны тождественно, то их коэффициенты при одинаковых степенях равны.*

Теорему мы примем без доказательства. Из этой теоремы следует, что, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у многочлена $P(x)$ и многочлена, который получается в правой части, мы получаем систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов. Такой метод отыскания коэффициентов называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример 1.5.2. *Рассмотрим рациональную функцию*

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Здесь $P(x) = x-1$, $Q(x) = (x-2)(x+1)^2$. *Согласно теореме имеем*

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Отсюда, умножая равенство на $Q(x)$ *(или приводя сумму дробей справа к общему знаменателю и приравнивая числители), получаем*

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x+1),$$

или

$$x-1 = (A+C)x^2 + (2A+B-C)x + (A-2B-2C).$$

Мы получаем систему уравнений

$$\begin{array}{rcr} x^2 & : & 0 = A+C; \\ x & : & 1 = 2A+B-C; \\ 1 & : & -1 = A-2B-2C. \end{array}$$

Решая ее, находим, $A = 1/9$, $B = 2/3$, $C = -1/9$. *Таким образом,*

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Если знаменатель $Q(x)$ имеет различные действительные однократные корни, то удобнее использовать метод, который мы назовем методом подстановки. Проиллюстрируем метод на примере.

Пример 1.5.3. *Найти разложение рациональной функции*

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)(x-1)}$$

на простейшие дроби. Согласно теореме, имеем

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}.$$

Домножим обе части равенства на $(x-2)(x+3)(x-1)$ и, не раскрывая скобок, получаем

$$x+1=A(x+3)(x-1)+B(x-2)(x-1)+C(x-2)(x+3).$$

Это равенство верно для всех x, включая и $x=-3$, $x=1$, $x=2$ — корни знаменателя. Полагая последовательно в этом равенстве $x=-3$, $x=1$, $x=2$, получим, если $x=-3$, $-2 = -20B$ и $B=1/10=0,1$; при $x=1$ получим $2=-4C$, $C = -1/2=-0,5$. Наконец, полагая $x=2$, получим $3=5A$, $A = 3/5=0,6$. Итак,

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)(x-1)}=\frac{0,6}{x-2}+\frac{0,1}{x+3}-\frac{0,5}{x-1}.$$

Из всего вышесказанного следует, что интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию простейших дробей. При этом две дроби I и II типов дают нам табличные интегралы. Точнее, имеем

$$\text{I.}\qquad \int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{A}{(x-a)^m}\,dx=A\int(x-a)^{-m}\,dx=$$
$$=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C\quad\text{при } m\neq 1.$$

Вместо дроби III рассмотрим несколько более общую дробь, а именно $\dfrac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$. Сначала рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Выделяя полный квадрат в трехчлене, получаем

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Сделаем замену переменной $x+\dfrac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ и обозначим $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\pm k^2$ в зависимости от знака b^2-4ac. Тогда

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\mp k^2}.$$

Если $b^2-4ac>0$, то имеем $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=k^2$ и

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{x+\dfrac{b}{2a}-k}{x+\dfrac{b}{2a}+k}\right|+C,\quad k=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}.$$

Если $b^2-4ac<0$, то $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=-k^2$ и

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C=$$
$$=\frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{b}{2a}}{k}+C,\quad k=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Если сделать замену $ax^2+bx+c=t$, то $(2ax+b)\,dx=dt$. Подберем постоянные M и N так, чтобы для всех x выполнялось равенство $Cx+D=M(2ax+b)+N$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $M=\dfrac{1}{2a}C$, $N=D-\dfrac{b}{2a}C$. Тогда, очевидно,

$$\int\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,dx=M\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+N\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$
$$=M\int\frac{dt}{t}+\frac{N}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}},\quad t=ax^2+bx+c.$$

Первый интеграл в получившейся правой части — табличный, а второй мы рассмотрели выше.

Пример 1.5.4. *Вычислить*

$$\int\frac{x+1}{2-x-x^2}\,dx.$$

Если положить $t=2-x-x^2$, *то* $dt=(-1-2x)\,dx$. *Пусть* $x+1=M(-2x-1)+N$. *Тогда* $M=-1/2$, $N=1/2$ *и*

$$\int\frac{x+1}{2-x-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x-1)\,dx}{2-x-x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x-2}=$$
$$=\left|\begin{array}{c}2-x-x^2=t\\(-2x-1)\,dx=dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2\cdot2\cdot\dfrac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}}{x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln|2-x-x^2|-$$
$$-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-2}{2x+4}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\ln|2-x-x^2|+C.$$

Рассмотрим теперь оставшуюся дробь $\displaystyle\int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}\,dx$, где $m>1$, $p^2-4q<0$, то есть, квадратный трехчлен не имеет действительных корней. В этом случае $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4} = t^2+k^2$, где мы положили $t = x+\frac{p}{2}$, $-\frac{p^2-4q}{4} = k^2 > 0$. Мы получаем

$$\int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Ct+D-\frac{p}{2}C}{(t^2+k^2)^m}\,dt = \\ = C\int \frac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m} + \left(D-\frac{p}{2}C\right)\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^m}.$$

Вычислим первый из интегралов в правой части. Сделаем замену переменной $t^2+k^2=z$, $2t\,dt=dz$. Тогда

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^m} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-m)z^{m-1}} + C = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-m)(t^2+k^2)^{m-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл. Точнее, мы получим для него рекуррентную формулу, сводящую вычисление интеграла

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^m}$$

к вычислению I_{m-1}. Сделаем некоторые преобразования в интеграле I_m

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^m} = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2+t^2-t^2}{(t^2+k^2)^m}\,dt = \\ = \frac{1}{k^2}I_{m-1} - \frac{1}{k^2}\int t\cdot\frac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m}.$$

Второй интеграл вычислим по частям

$$\int t\cdot\frac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m} = \\ = \left|\begin{array}{c} u=t, \quad du=dt \\ \dfrac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m} = dv, \quad v = \displaystyle\int \frac{t\,dt}{(t^2+k^2)^m} = \\ = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(t^2+k^2)}{(t^2+k^2)^m} = \dfrac{1}{2(1-m)\,(t^2+k^2)^{m-1}} \end{array}\right| = \\ = \frac{t}{2(1-m)\,(t^2+k^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{m-1}}.$$

Поэтому
$$I_m = \frac{1}{k^2} I_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)\left(t^2+k^2\right)^{m-1} k^2} + \frac{1}{2(m-1)k^2} I_{m-1}.$$
И мы получаем рекуррентную формулу
$$I_m = \frac{2m-1}{2k^2(m-1)} I_{m-1} + \frac{t}{2k^2(m-1)\left(t^2+k^2\right)^{m-1}}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$
$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C$. С помощью рекуррентной формулы можно вычислить I_m для любого заданного $m > 1$, сводя его по формуле сначала к I_{m-1}, затем к I_{m-2} и доходя в конце концов до I_1.

Подведем итог. Для того чтобы проинтегрировать рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нужно проделать следующие шаги:

1. Если степень числителя не меньше степени знаменателя, то выделить целую часть, т.е. представить дробь в виде
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$
где $L(x)$ и $R(x)$ — многочлены и степень R строго меньше степени Q.

2. Правильную дробь $\frac{R}{Q}$ представить в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами и найти эти коэффициенты.

3. Проинтегрировать сумму простейших дробей в разложении дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$ и многочлен $L(x)$.

Пример 1.5.5. *Вычислить*
$$\int \frac{x^4+1}{x^3+27}\, dx.$$
Выделяем целую часть у подынтегральной рациональной функции.
$$\begin{array}{l|l} x^4+1 & x^3+27 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+27x} & x \\ \quad -27x+1 & \end{array}$$

Следовательно,
$$\frac{x^4+1}{x^3+27} = x + \frac{1-27x}{x^3+27}.$$
Далее, поскольку $x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$, *то*
$$\frac{1-27x}{x^3+27} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-3x+9}.$$

Умножая на x^3+27 обе части равенства, после приведения подобных получаем

$$1-27x=(A+B)x^2+(3B+C-3A)x+(9A+3C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений относительно A, B, C

$$\begin{cases} A+B = 0; \\ -3A+3B+C=-27; \\ 9A+3C = 1. \end{cases}$$

Находим коэффициенты: $A=\dfrac{82}{27}$, $B=-\dfrac{82}{27}$, $C=-\dfrac{79}{9}=-\dfrac{237}{27}$. *Итак,*

$$\int\frac{x^4+1}{x^27+27}\,dx=\int x\,dx+\frac{82}{27}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{27}\int\frac{82x+237}{x^2-3x+9}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{82}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{27}\int\frac{82x+237}{x^2-3x+9}\,dx.$$

Вычислим последний интеграл. Сделаем замену переменной x^2- $-3x+9=t$, $2x-3=dt$. *Во втором интеграле выделим полный квадрат в квадратном трехчлене,* $x^2-3x+9=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}$. *Тогда*

$$\int\frac{82x+237}{x^2-3x+9}\,dx=41\int\frac{dt}{t}+360\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}=$$

$$=41\ln|t|+360\frac{2}{\sqrt{27}}\operatorname{arctg}\frac{x-3/2}{\sqrt{27}/2}+C=$$

$$=41\ln|x^2-3x+9|+\frac{240}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно получим

$$\int\frac{x^4+1}{x^3+27}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{82}{27}\ln|x+3|-$$

$$-\frac{41}{27}\ln(x^2-3x+9)-\frac{80}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+C.$$

§ 1.6. Интегрирование простейших иррациональностей

а) Интеграл вида $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$ или $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ в зависимости от знака a.

Если $a > 0$, то, записав $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ и сделав замену $x+\dfrac{b}{2a} = t, dx = dt, \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \pm k^2$ — в зависимости от знака b^2-4ac, получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(t+\sqrt{t^2\pm k^2})+C.$$

Если $a < 0$, то $ax^2+bx+c = -a\left(-\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}x-x^2\right) = -a\left[\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]$. Здесь должно быть $b^2-4ac > 0$, иначе $ax^2+bx+c < 0$ при всех x, а трехчлен у нас стоит под квадратным корнем. Тогда, после замены $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = k^2, x+\dfrac{b}{2a} = t, dx = dt$, мы получим интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{k}+C,$$

где $k = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$.

б) Интегралы вида $\displaystyle\int\frac{Cx+D}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ вычисляются тем же приемом, что и интегралы $\displaystyle\int\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Вычислив коэффициенты M и N из равенства $Cx+D = M(2ax+b)+N$, получим

$$\int\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,dx = M\int\frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+N\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый интеграл в правой части после замены переменной $ax^2+bx+c = t$ приводится к виду $\int\dfrac{dt}{\sqrt{t}}$. Второй интеграл рассмотрен выше.

Пример 1.6.1. *Вычислим интеграл*

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Если сделать замену переменной $x^2+x+1 = t$, *то тогда* $(2x+1)\,dx = dt$. *Поэтому ищем числа* M *и* N *из равенства* $x =$

$= (2x+1)M+N$. *Тогда* $M = \frac{1}{2}$, $N = -\frac{1}{2}$. *Запишем наш интеграл в виде*

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

После замены переменных — в первом интеграле $x^2+x+1 = t$, $(2x+1)\,dx = dt$, *во втором —* $x+\frac{1}{2} = s$, $dx = ds$, *получаем,*

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\int \frac{ds}{\sqrt{s^2+3/4}} =$$

$$= \sqrt{t} - \frac{1}{2}\ln(s+\sqrt{s^2+3/4}) + C =$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$$

Пример 1.6.2. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

Найдем M *и* N *из равенства* $x-1 = M(-2x-2)+N$. *Имеем* $M = -\frac{1}{2}$, $N = -2$. *Выделяя полный квадрат* $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2$, *вычисляем наш интеграл.*

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} - 2\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

в) Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где a, b, c, d — некоторые числа $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$, m — натуральное число, R — рациональная функция от x и от $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Функция $R(u,v)$ двух переменных называется рациональной, если она имеет вид $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — по каждой переменной по отдельности — многочлены. Например, $R(u,v) = \frac{4u^2-uv+2v^2+v-u+1}{u^3+4uv^2-7}$ — рациональная функция двух переменных. Здесь

$P(u,v)=4u^2-uv+2v^2+v-u+1$, $Q(u,v)=u^3+4uv^2-7$. Докажем, что подстановкой

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

вычисление нашего интеграла сводится к вычислению интеграла от рациональной функции одной переменной t. Действительно, $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^m$, откуда $x=\dfrac{b-dt^m}{ct^m-a}$, $dx=\dfrac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}\,dt$, и, следовательно,

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a},t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-1)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где R_1 — рациональная функция от t.

Пример 1.6.3. *Вычислить интеграл*

$$\int\sqrt{x+1}\,\frac{dx}{x}.$$

Делаем замену переменной $x+1=t^2$. Тогда $dx=2t\,dt$ и мы получаем

$$\int\sqrt{x+1}\,\frac{dx}{x}=\int t\cdot\frac{2t\,dt}{t^2-1}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{x+1}+\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C.$$

Пример 1.6.4. *Вычислить интеграл*

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Сделаем замену $\sqrt[6]{x+1}=t$. Тогда $x=t^6-1$, $dx=6t^5\,dt$,

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx=\int\frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt=6\int\frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt.$$

Выделим целую часть у подынтегральной рациональной функции

$$\frac{t^5-t^8}{1+t^2}=-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}.$$

Поэтому

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1\right)dt +$$

$$+\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t+$$

$$+\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}+$$

$$+\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}-\frac{1}{3}(x+1)^{1/2}-\frac{1}{2}(x+1)^{1/3}+\sqrt[6]{x+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left[(x+1)^{-1/3}+1\right] - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

г) Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$, R — рациональная функция двух переменных.

Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней, то знак трехчлена совпадает со знаком a. Значит, $a>0$, так как трехчлен находится под квадратным корнем. В этом случае можно сделать подстановку Эйлера (первая подстановка Эйлера)

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}.$$

Возводя в квадрат обе части равенства $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$, мы получаем $ax^2+bx+c = t^2 - 2xt\sqrt{a} + xa^2$. Откуда следует $x = \dfrac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$, $dx = 2\dfrac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a}+b)^2}\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}$ мы получаем интеграл от рациональной функции:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}, \frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}\right) 2\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a}+b)^2}\,dt.$$

Если квадратичный трехчлен имеет действительные корни x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$, то можно сделать подстановку (вторая подстановка Эйлера)

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Самостоятельно проверьте , что в этом случае мы получаем интеграл от рациональной функции одной переменной.

Пример 1.6.5. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Делаем подстановку $t=\sqrt{x^2+1}+x$. *Тогда* $t^2+2tx+x^2=x^2+1$, $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+1}{2t^2}\,dt$,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(t^2+1)\,dt}{t\cdot 2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int t^{-3}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4t^2} + C = \\ = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C.$$

§ 1.7. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция двух переменных

Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции одной переменной подстановкой $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Данную подстановку называют универсальной. Поскольку $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg}\operatorname{tg} t$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, то

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция одной переменной.

Пример 1.7.1. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x}.$$

Делаем подстановку $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. *Тогда*

$$\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\int\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(a+\dfrac{2b}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{a+at^2+2bt}=$$

$$=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{t^2+2t\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}+\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)}=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}.$$

Положим, например, $a=5$, $b=3$.

$$\int\frac{dx}{5+3\sin x}=2\int\frac{dt}{5t^2+6t+5}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\dfrac{6}{5}t+1}=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{2}{5}\right)^2+1-\dfrac{9}{25}}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{16}{25}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{t+3/5}{4/5}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5t+3}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3}{4}+C.$$

Универсальная подстановка всегда сведет вычисление интеграла

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

к вычислению интеграла от рациональной функции одной переменной, но вычисления при этом могут получиться очень громоздкими. Поэтому в зависимости от конкретного вида интеграла следует искать оптимальные подстановки. Например, для интегралов вида

$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)\,dx,\quad \int R(\sin^2 x)\,dx,\quad \int R(\cos^2 x)\,dx$$

подстановка $t=\operatorname{tg}x$ часто бывает лучше, чем универсальная. Следует также помнить о формулах

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

понижающих степень тригонометрических функций.

В случае интеграла

$$\int\sin^n x\cos^m x\,dx,$$

где хотя бы одно из чисел m или n нечетное, удобнее сделать подстановку $t=\sin x$, если m нечетное, либо $t=\cos x$, если n нечетное.

Пример 1.7.2. *Вычислить интеграл*

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$$

Перепишем интеграл следующим образом:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \, d\cos x,$$

учитывая, что $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ *и* $\sin x \, dx = -d\cos x$.

Тогда, сделав замену переменной $\cos x = t$, *получим*

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int (1-t^2)t^2 \, dt = \int (t^4 - t^2) \, dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

В заключение отметим, что рассмотренные методы и приемы интегрирования не исчерпывают всех классов интегрируемых функций. Но из изложенного выше видно, что техника интегрирования сложнее по сравнению с дифференцированием. И если дифференцирование скорее техническая задача, то интегрирование в некотором роде искусство, требующее навыков и изобретательности.

Отметим еще одно отличие интегрирования от дифференцирования по своим свойствам. Дифференцирование не выводит элементарные функции из своего класса, т.е., производная элементарной функции есть снова элементарная функция. Напомним здесь определение элементарной функции. Функции $f(x) = C$ — постоянная, $f(x) = x^a$ — степенная, $f(x) = a^x$ — показательная, $f(x) = \log_a(x)$ — логарифмическая, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются основными элементарными функциями. Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также суперпозицией (функция от функции, называемая иногда сложной функцией) этих функций, составляют класс элементарных функций.

В отличие от дифференцирования интегрирование элементарной функции может привести к неэлементарной. Доказано, например, что следующие интегралы не являются элементарными функциями:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

В случае если $f(x)$ есть элементарная функция, а $\displaystyle\int f(x)\,dx$ — не элементарная, говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ «не берется» и называют этот интеграл «неберущимся».

Глава 2.

Определенный интеграл

Определенный интеграл является очень важным инструментом при решении многих задач как в математике, так и в механике и физике. Чтобы проиллюстрировать способ рассуждения, приводящий к понятию определенного интеграла, рассмотрим некоторую физическую задачу.

Пусть дан линейный неоднородный стержень, лежащий на числовой оси Ox в пределах отрезка $[a, b]$. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня есть некоторая функция от x: $\rho(x)$. Изменением плотности вдоль поперечного сечения мы пренебрегаем. В этом случае говорят о линейной плотности, но мы далее будем говорить просто о плотности. Вычислим массу стержня. Разобьем стержень (мысленно) произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Выберем на отрезке стержня $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно точку ξ_i. Если размеры частей $[x_{i-1}, x_i]$ малы, то, в силу непрерывности $\rho(x)$, можно считать, что плотность на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ постоянна и равна $\rho(\xi_i)$. Тогда масса части стержня от x_{i-1} до x_i равна приближенно $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складывая массы всех частей, мы получаем, что масса стержня m приближенно равна сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Ясно, что точность в приближенном равенстве

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$$

будет тем больше, чем меньше разбиение стержня на части, т.е. чем меньше величина $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. Точное значение массы стержня мы получим в пределе, когда наибольший частичный отрезок стремится к нулю

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

Данный предел называется определенным интегралом от функции $\rho(x)$ по отрезку $[a,b]$. Далее, рассматривая приложения определенных интегралов, мы увидим, как схожие рассуждения приводят к определенным интегралам в самых разных по содержанию конкретных задачах математики и физики.

Переходим к точным формулировкам.

Определение 2.0.1. *Разбиением $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$ называется любая система его точек x_0, x_1, $\ldots$, x_n такая, что $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ называется частичным отрезком разбиения, его длина обозначается Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Величина $\lambda_{\mathcal{R}} = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$ называется мелкостью разбиения.*

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$. Рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$ и выберем произвольно точку ξ_i в частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Составим сумму

$$S_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение 2.0.2. *Сумма $S_{\mathcal{R}}$ называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.*

Определение 2.0.3. *Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма $S_{\mathcal{R}}$, когда $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$, называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается следующим образом:*

$$\lim_{\lambda_{\mathcal{R}} \to 0} S_{\mathcal{R}} = \lim_{\lambda_{\mathcal{R}} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Понятие предела интегральных сумм в этом определении нуждается в уточнении.

Определение 2.0.4. *Число I называется пределом интегральных сумм $S_{\mathcal{R}}$ при неограниченном измельчении разбиений отрезка $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что неравенство*

$$\left|S_{\mathcal{R}} - I\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

будет выполняться для любого разбиения $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$, у которого $\lambda_{\mathcal{R}} = \max\limits_{i} \Delta x_i < \delta$ при любом выборе точек ξ_i.

Если для функции $f(x)$ существует определенный интеграл на отрезке $[a,b]$, то говорят, что функция интегрируема на отрезке $[a,b]$ (или по отрезку $[a,b]$).

Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интеграла. Выражение $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования. Отметим, что в отличие от неопределенного интеграла в определенном переменная интегрирования «немая». Это означает, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds \quad \text{и т.д.}$$

Это следует из того, что определенный интеграл есть определенное число (а не функция, как неопределенный интеграл), зависящее только от функции $f(x)$ и от отрезка $[a,b]$. Здесь уместна аналогия между интегралом (переменная интегрирования) и суммой (индекс суммирования)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Определенный интеграл существует не для всякой функции, определенной на отрезке $[a,b]$. Он не существует, например, для неограниченной функции.

Теорема 2.0.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем, т.е. существует постоянная M такая, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется $|f(x)| \leqslant M$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка

$$[a,b] : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Допустим, функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда она будет не ограничена на некотором частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Выберем произвольно $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \neq i$, и составим сумму

$$S'_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} + f(\xi_{i+1})\Delta x_{i+1} + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Зададим произвольное число $M > 0$ и выберем $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(\xi_i)| > \frac{|S'_n| + M}{\Delta x_i}.$$

Это всегда можно сделать в силу неограниченности функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Но тогда, если $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$, то

$$
\begin{aligned}
|S_n| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n| \geqslant \\
\geqslant |f(\xi_i)|\Delta x_i - \bigl|f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} + \\
+ f(\xi_{i+1})\Delta x_{i+1} + f(\xi_n)\Delta x_n\bigr| > |S_n'| + M - |S_n'| = M.
\end{aligned}
$$

Мы показали, что за счет выбора точек ξ_i при любом разбиении отрезка $[a, b]$ интегральную сумму S_n всегда можно сделать больше любого наперед заданного числа. Это означает, что не существует конечного предела интегральных сумм, а значит, и функция $f(x)$ не интегрируема на отрезке $[a, b]$. Это противоречит условию теоремы, следовательно, функция $f(x)$ обязана быть ограниченной. Теорема доказана.

Таким образом, интегрируемые функции ограниченны. Но этого недостаточно для интегрируемости. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$:

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}
$$

Очевидно, что функция $f(x)$ ограничена. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Если мы выберем все точки $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ рациональными, то получим

$$
S_n' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.
$$

Если же мы выберем все точки ξ_i'' иррациональными, то получим

$$
S_n'' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\Delta x_i = 0.
$$

Очевидно, что не существует одного предела при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$ интегральных сумм, не зависящего от выбора точек ξ_i. Следовательно, функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

В более подробных курсах приводятся необходимые и достаточные условия интегрируемости функций (см., например, [5], [6], [15]). На основании этих условий доказывается интегрируемость функций из некоторых классов функций. Мы не будем приводить здесь все эти рассуждения и ограничимся указанием классов интегрируемых функций, вполне достаточных для большинства приложений определенных интегралов.

Теорема 2.0.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

Определение 2.0.5. *Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$, если существует такое разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что на каждом частичном интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция $f(x)$ будет непрерывна, а в точках x_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$, у функции могут быть точки разрыва только первого рода («скачки»).*

Теорема 2.0.3. *Если функция $y = f(x)$ ограниченна и кусочно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.*

§ 2.1. Основные свойства определенных интегралов

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

Доказательство. Так как $f(x) \equiv 1$, то для любого разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ мы имеем

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x + 1 + \ldots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

2. Линейные свойства определенного интеграла.

Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и C — произвольная постоянная, то функции $C \cdot f(x)$ и $f(x) + g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и справедливы равенства

$$\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим интегральные суммы. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} [Cf(\xi_i)]\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Равенства следуют из свойств сумм. Поскольку при неограниченном измельчении разбиения отрезка (т.е. при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$) пределы правых частей в равенствах существуют по условию, то существуют пределы интегральных сумм слева. Но это означает, с одной стороны, интегрируемость функций $Cf(x)$ и $f(x)+g(x)$, а с другой — выполнение требуемых равенств.

Следствие 2.1.1. *Если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $C_1, C_2, \dots, C_m$ — произвольные постоянные, то функция $\sum\limits_{j=1}^{m} C_j f_j(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b \sum_{j=1}^{m} C_j f_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_a^b f_j(x)\,dx.$$

Перед тем как сформулировать следующие свойства интеграла, сделаем некоторые замечания.

Нами было введено понятие определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$ — согласно принятым обозначениям. Положим по определению

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0,$$

а для функции $f(x)$ интегрируемой на $[a,b]$

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \quad (a < b).$$

В качестве «оправдания» этих определений заметим: в первом случае, при $a = b$, можно считать, что все отрезки «разбиения отрезка $[a,a]$» — точки, их длины $\Delta x_i = 0$, а значит, и все интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ равны нулю. Следовательно, и интеграл тоже равен нулю. Во втором случае, при $a > b$, разбиение имеет вид $a = x_0 > x_1 > \dots > x_n = b$. Следовательно, все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ будут отрицательными. Для интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ те же точки дают разбиение отрезка $[b,a]$: $b = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = a$, где $x'_0 = x_n$, $x'_1 = x_{n-1}, \dots, x'_n = x_0$. Выберем $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ (тогда $\xi_{n-j+1} \in [x'_{j-1}, x'_j]$) и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и интегральную сумму для интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$

$$S'_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{n-j+1})\Delta x'_j = f(\xi_n)\Delta x'_1 + \ldots + f(\xi_1)\Delta x'_n.$$

Учитывая, что $\Delta x'_1 = -\Delta x_n = x_{n-1} - x_n, \quad \ldots, \quad \Delta x'_n = -\Delta x_1 = = x_0 - x_1$, получаем $S_n = -S'_n$. Отсюда следует, что при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$ мы получим

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следует, однако, помнить, что приведенные рассуждения не являются доказательством. Это всего лишь интуитивные соображения, помогающие «согласиться» с нашими определениями.

Следующее свойство интеграла мы приводим без обоснования, отсылая читателя к более полным курсам математического анализа (см. [6]).

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

4. Аддитивность определенного интеграла.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a < c < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как предел интегральных сумм по определению не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$, то будем рассматривать такие разбиения, в которых точка c является точкой разбиения. Пусть, для определенности, $c = x_k$. Тогда интегральную сумму S_n можно разбить на две суммы

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа стоит сумма интегральных сумм для функции $f(x)$ по отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Пусть $\lambda_{\mathcal{R}}$ — мелкость разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$ мелкости разбиений отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ также стремятся к нулю. Предел интегральных сумм в правой части равенства существует по свойству 3. В пределе при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$ мы получаем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 2.1.2. *Пусть A — наименьшее из трех чисел a,b,c, а B — наибольшее из этих чисел, и пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[A,B]$. Тогда при любом расположении чисел a,b,c справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Всего возможно 6 различных соотношений между числами a, b и c. Мы рассмотрим только случай $c < b < a$, оставляя остальные для самостоятельного рассмотрения.

По доказанному имеем

$$\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx.$$

Меняя пределы интегрирования местами, получаем

$$-\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда легко следует требуемое равенство.

Замечание 2.1.1. *Справедливо следующее утверждение (см., например, [6]). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ ($a < c < b$), то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$. Равенство, фигурирующее в свойстве 4, естественно, выполняется.*

Следующие свойства связаны с оценками определенных интегралов.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Для любого разбиения $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и для любого выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

неотрицательна. Но тогда, переходя к пределу при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_{\mathcal{R}} \to 0} S_n \geqslant 0.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 2.1.3. *Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Действительно, из $g(x) - f(x) \geqslant 0$, из свойств 5 и 2 следует

$$0 \leqslant \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Следствие 2.1.4. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ ($a < b$), то*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Очевидно, что $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ для всех x из $[a,b]$. Тогда из следствия 2.1.3 вытекает

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Следствие 2.1.5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a,b]$ ($a < b$), то*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Действительно, из следствий 2.1.3 и 2.1.4 и условия вытекает

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx = M\int\limits_a^b dx = M(b-a).$$

Следствие 2.1.6. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a < b$, и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $x \in [a,b]$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Доказательство следует из неравенств $m \leqslant f(x) \leqslant M$, следствия 2.1.3 и свойств 1 и 2 интеграла.

Теорема 2.1.1 (теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется такая точка $x_0 \in \in (a,b)$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a,b]$. По следствию 2.1.6 свойства 5 интеграла имеем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Положим

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

тогда $m \leqslant \mu \leqslant M$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) = \mu$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

§ 2.2. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Для каждого $x \in [a,b]$ функция интегрируема на отрезке $[a,x]$ (свойство 3), и мы можем рассмотреть функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

определенную на отрезке $[a,b]$. Переменную интегрирования мы обозначили через t, чтобы не путать с переменной в верхнем пределе интеграла.

Функция $\Phi(x)$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

Рассмотрим некоторые свойства функции $\Phi(x)$.

Теорема 2.2.1. *Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Рассмотрим разность при $x \in [a,b]$
$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt.$$
Используя аддитивное свойство интеграла, получаем
$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int\limits_x^{a} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$
Так как функция $f(x)$ по условию интегрируема, то она ограничена,
$$|f(x)| \leqslant M\,, \quad x \in [a,b].$$
Рассмотрим случаи $\Delta x < 0$ и $\Delta x > 0$. Пусть $\Delta x < 0$. Тогда
$$|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| = \left|-\int\limits_{x+\Delta x}^{x} f(t)\,dt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{x+\Delta x}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{x+\Delta x}^{x} |f(t)|\,dt \leqslant M(-\Delta x) = M|\Delta x|.$$
Если $\Delta x > 0$, то мы имеем
$$|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \leqslant M\cdot(-\Delta x) \leqslant M\Delta x = M|\Delta x|.$$
Таким образом, в любом случае
$$|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)| \leqslant M|\Delta x|.$$
Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Phi(x+\Delta x) = \Phi(x)$, т.е. непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке $x \in [a,b]$.

Отметим, что непрерывность функции $f(t)$ не предполагалась. Функция $f(t)$ может быть разрывной, но если она интегрируема, то функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ будет непрерывной.

Теорема 2.2.2 (дифференцирование интеграла по верхнему пределу). *Если функция $f(x)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$ и непрерывна в точке $x \in [a,b]$, то функция*
$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

дифференцируема в этой точке и выполняется

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Доказательство. Пусть $\Delta x \neq 0$ такое приращение, что $x+$ $+\Delta x \in (a,b)$. Тогда, используя аддитивное свойство интеграла, получаем

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$$

$$= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Из этого равенства следует

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x} f(t)\,dt.$$

По теореме о среднем существует такая точка ξ между x и $x+\Delta x$, что выполняется

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\Delta x.$$

Ясно, что при $\Delta x \to 0$ будет выполняться $\xi \to x$. Мы получаем, таким образом,

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} f(\xi)\Delta x = f(\xi).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 2.2.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для всех $x \in (a,b)$ выполняется*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Замечание 2.2.1. *Пусть, как и выше, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда можно рассмотреть функцию*

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt\ , \text{ —}$$

интеграл с переменным нижним пределом. Опираясь на свойства интеграла и доказанную теорему, можно показать, что

$$\Psi'(x) = \left(\int\limits_x^b f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

Действительно,

$$\Psi'(x) = \left(-\int\limits_b^x f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

Из доказанной теоремы (см. следствие 2.2.1) следует, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция всегда имеет на интервале (a,b) первообразную, а именно функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ будет первообразной для $f(x)$ на (a,b). Отсюда вытекает, что если $F(x)$ — некоторая другая первообразная для $f(x)$ на (a,b), то

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — некоторая постоянная.

§ 2.3. Формула Ньютона—Лейбница

Нахождение определенных интегралов вычислением пределов интегральных сумм — процедура крайне неэффективная. Если бы не было других, более удобных способов вычисления интегралов, то применение интегрального исчисления было бы сильно ограниченно. Но, оказывается, есть тесная связь определенных интегралов с неопределенными, что позволяет вычислять определенные интегралы, опираясь на развитую технику вычисления неопределенных интегралов.

Теорема 2.3.1 (формула Ньютона—Лейбница). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — некоторая первообразная $f(x)$ на (a,b). Тогда справедлива формула Ньютона—Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Как доказано выше, функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной функции $f(x)$ на (a,b). Но тогда

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — некоторая постоянная. Полагая $x = a$, получаем

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt + C = C.$$

Следовательно, для $x \in [a,b]$ имеем

$$F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Устремляя здесь x к b, получаем формулу Ньютона—Лейбница. Теорема доказана.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так: $F(x)\Big|_a^b$. Поэтому формула Ньютона—Лейбница принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Заметим, что в формуле Ньютона—Лейбница можно взять любую первообразную. С помощью этой формулы вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной.

Пример 2.3.1. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3 - x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Вычисляем

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3 - x}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^{5/2} - x^{1/2}\right)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{21}.$$

Пример 2.3.2. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 2.3.2 (замена переменной в неопределенном интеграле). *Пусть функция* $x = \varphi(t)$ *определена на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *имеет производную* $\varphi'(t)$, *непрерывную на* $[\alpha, \beta]$, *и пусть множеством значений функции* $x = \varphi(t)$ *является отрезок* $[a, b]$. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то справедлива формула замены переменной в определенном интеграле*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на (a, b). По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ функцию $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ является первообразной функции

$$f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Формула Ньютона—Лейбница в этом случае нам дает

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.$$

Что и требовалось доказать.

Если функция $x = \varphi(t)$ монотонно растет, то $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, и тогда мы получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Если функция $x = \varphi(t)$ монотонно убывает, то $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, и мы имеем

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. *В отличие от неопределенного интеграла в определенном после замены переменной не нужно возвращаться к старой переменной, так как после замены переменной мы получаем снова определенный интеграл, который является некоторым числом, равным первоначальному интегралу.*

ПРИМЕР 2.3.3. *Вычислить интеграл*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Сделаем замену переменной $x = \sin t$. Тогда при $x = 0$ мы имеем $t = 0$, а при $x = 1$ $t = \dfrac{\pi}{2}$. Учитывая, что $dx = \cos t\,dt$, получаем

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Часто замену переменной в определенном интеграле производят не по формуле $x = \varphi(t)$, а по формуле $t = \psi(x)$, выражающей новую переменную через данную. Новые пределы интегрирования определяются по формулам $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$.

ПРИМЕР 2.3.4. *Вычислить интеграл*

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + \sin x}.$$

Сделаем замену переменной $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. *Тогда при* $x=0$ $t=0$ *и при* $x=\dfrac{\pi}{2}$ $t=1$. *Учитывая, что* $x=2\operatorname{arctg}t$ *и* $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, *получаем*

$$I=\int\limits_0^1\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\limits_0^1\frac{dt}{1+t-t^2}=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{dt}{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{t-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t-1+\sqrt{5}}{2t-1-\sqrt{5}}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln(14+6\sqrt{5}).$$

Теорема 2.3.3 (интегрирование по частям в определенном интеграле). *Если функции* $u(x)$, $v(x)$ *и их производные непрерывны на отрезке* $[a,b]$, *то справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

где $\big[u(x)v(x)\big]\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

Доказательство. Функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $[uv]'=u'v+uv'$. Поэтому по формуле Ньютона—Лейбница и по свойству линейности интеграла,

$$[u(x)v(x)]\Big|_a^b=\int\limits_a^b\big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx+\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Отсюда, очевидно, следует утверждение теоремы.

Поскольку $u'(x)\,dx = du$, $v'(x)\,dx = dv$, то формулу интегрирования по частям можно записать в следующем виде, более удобном для запоминания,

$$\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Пример 2.3.5. *Вычислить интегралы*

$$1)\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx, \qquad 2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$$

Вычисляем:

$$1)\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x,\ du = \dfrac{dx}{a+x^2} \\ dx = dv,\ v = x \end{array}\right| =$$

$$= x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

$$2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{r} u = x,\ du = dx \\ \cos x\,dx = dv,\ v = \sin x \end{array}\right| =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}.$$

§ 2.4. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

2.4.1. Вычисление площади плоских фигур

Мы не будем приводить здесь строгие определения площади плоской фигуры, объема тела, площади поверхности, отсылая к более полным курсам математического анализа (см., например, [6]). Формулы для вычисления площадей и объемов, которые мы ниже получим в рамках наших допущений, вполне могут быть обоснованы строгими формальными рассуждениями.

А. Пусть $y = f(x)$ — непрерывная положительная на $[a,b]$ функция. Рассмотрим на плоскости xOy фигуру G, ограниченную снизу осью Ox, сверху графиком функции $y = f(x)$ и двумя прямыми, параллельными оси Oy: $x = a$ и $x = b$, т.е. $G = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Такую фигуру будем называть криволинейной трапецией (рис. 2.1).

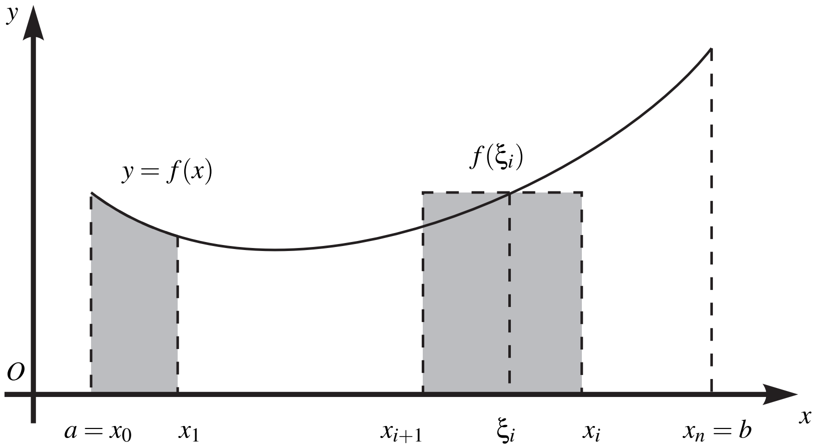


Рис. 2.1

Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$. Проведем через точки x_i прямые, параллельные оси Oy. Они разрежут криволинейную трапецию на n полосок. Выберем произвольно по точке ξ_i в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Площадь каждой полоски приближенно равна площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотой $h_i = f(\xi_i)$. Действительно, если все полоски узкие, то функция $f(x)$ не успевает сильно измениться на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ и приближенно равна $f(\xi_i)$, т. е. мы считаем функцию почти постоянной на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Площадь прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$ и приближенно равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ на оси Ox. Площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей прямоугольников

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

причем, как это видно из наших рассуждений, точность в приближенном равенстве будет тем больше, чем меньше мелкость разбиения $\lambda_{\mathcal{R}} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$. В пределе при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$ мы получаем точное значение площади криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\lambda_{\mathcal{R}}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Формула

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

выражает геометрический смысл определенного интеграла — площадь между осью абсцисс и графиком положительной функции $y = f(x)$.

Б. Теперь рассмотрим фигуру G, заключенную между двумя графиками функций, точнее

$$G = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы предполагаем непрерывными на отрезке $[a,b]$ (рис. 2.2). Вычислим площадь фигуры G (рис. 2.2, а). Пусть C — такое число,

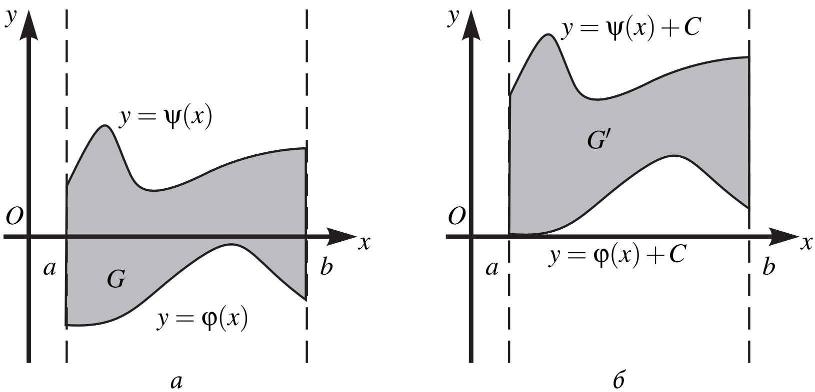


Рис. 2.2

что $\varphi(x) + C \geqslant 0$ при всех $x \in [a,b]$. Тогда фигура $G' = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) + C \leqslant y \leqslant \psi(x) + C\}$ получена из фигуры G параллельным сдвигом вдоль оси Oy (рис. 2.2, б). Следовательно, площади фигур G и G' равны. Пусть S — площадь фигуры G (значит, и площадь G'), очевидно,

$$S = \int\limits_a^b [\psi(x) + C]\,dx - \int\limits_a^b [\varphi(x) + C]\,dx = \int\limits_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx.$$

Пример 2.4.1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями* $x^2 - 3x + 4$, $y = x + 1$ *(рис. 2.3).*

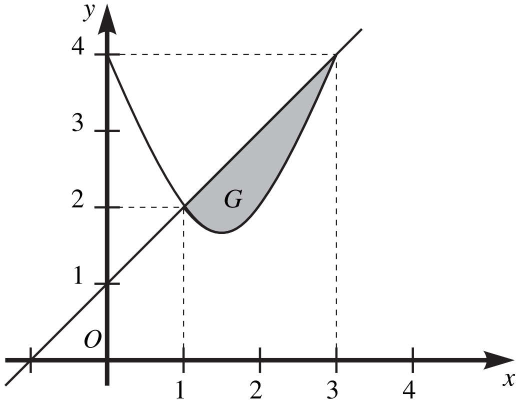


Рис. 2.3

Находим точки пересечения линий. Из $x^2 - 3x + 4 = x + 1$ *следует, что* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. *По формуле вычисляем площадь*

$$S = \int_1^3 \left[(x+1) - (x^2 - 3x + 4)\right]^2 dx =$$

$$= \int_1^3 (4x - x^2 - 3)\, dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x)\Big|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

B. Пусть теперь G — криволинейная трапеция, но кривая задана не уравнением $y = f(x)$, а параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, и пусть $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $x = \varphi(t)$ — монотонная функция на $[\alpha, \beta]$. Допустим, мы решили уравнение $x = \varphi(t)$ относительно t и результат $t = t(x)$ подставим в $y = \psi(t)$. Мы получим уравнение $y = \psi(t(x)) = f(x)$ криволинейной стороны трапеции. Мы считаем, что $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда площадь G находится по известной формуле

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменной

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\, dt, \quad f(\varphi(t)) = \psi(t).$$

Тогда

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 2.4.2. *Найти площадь одной арки циклоиды*

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\quad (\textit{рис. 2.4}).$$

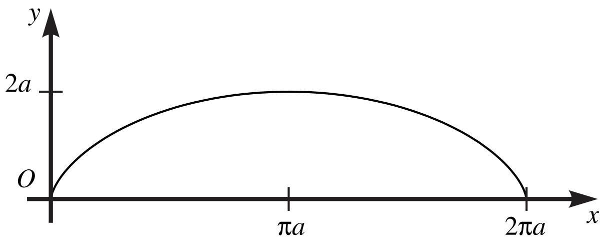


Рис. 2.4

Используя полученную формулу, находим площадь

$$S=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

При вычислении мы используем формулу $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$

г) В этом пункте мы вычислим площадь криволинейного сектора, т. е. фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ и лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ (рис. 2.5). Покажем, что площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

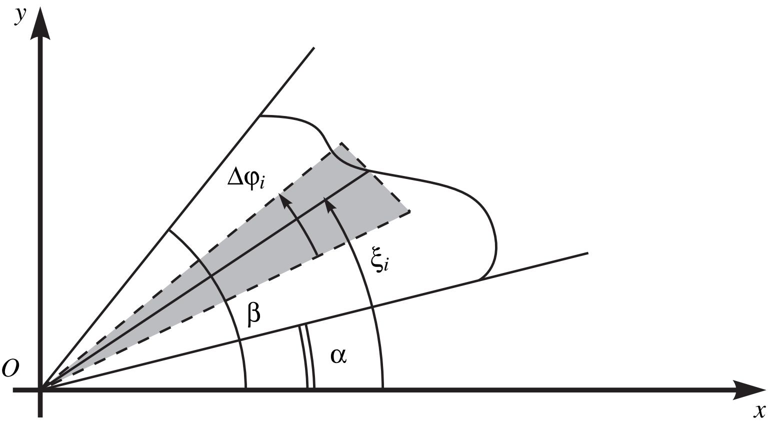


Рис. 2.5

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$: $\alpha = \varphi_0 < < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ произвольную точку ξ_i, и построим круговой сектор радиуса $r(\xi_i)$ и с углом $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Таким образом, криволинейный сектор, соответствующий изменению φ от φ_{i-1} до φ_i, мы заменяем на круговой сектор в этих же пределах изменения угла.

Площадь кругового сектора равна $\dfrac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$. Значит, площадь всего криволинейного сектора приближенно равна

$$S \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i,$$

и точность тем больше, чем мельче разбиение. В пределе, при $\lambda_{\mathcal{R}} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta\varphi_i \to 0$, получаем точное значение площади

$$S = \lim_{\lambda_{\mathcal{R}}\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 2.4.3. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой* $r = a(1+\cos\varphi)$.

В силу того что $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, *фигура будет симметричной относительно полярной оси, или, при нашем выборе полярной системы координат — оси Ox (рис. 2.6). Следовательно, достаточно вычислить площадь*

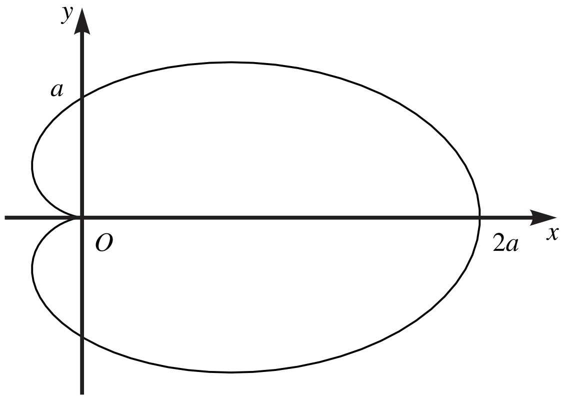


Рис. 2.6

верхней части фигуры (при $y \geqslant 0$) и затем результат удвоить. Вычисляем,

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

2.4.2. Вычисление длины кривой

Пусть кривая $\gamma \subset xOy$ задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Обозначим через A и B концы кривой γ, т. е. $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Разобьем кривую γ на n частей точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$. Соединив точки последовательно, получим ломаную. Эта ломаная называется вписанной в кривую γ (рис. 2.7).

Через $l_i = |M_{i-1}M_i|$ обозначим длину звена ломаной с концами M_{i-1} и M_i. Положим $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$.

Определение 2.4.1. *Число L называется пределом длин вписанных ломаных $P = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$ при $\lambda \to 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любой ломаной такой, что $\lambda < \delta$, будет выполняться*

$$|L - P| < \varepsilon.$$

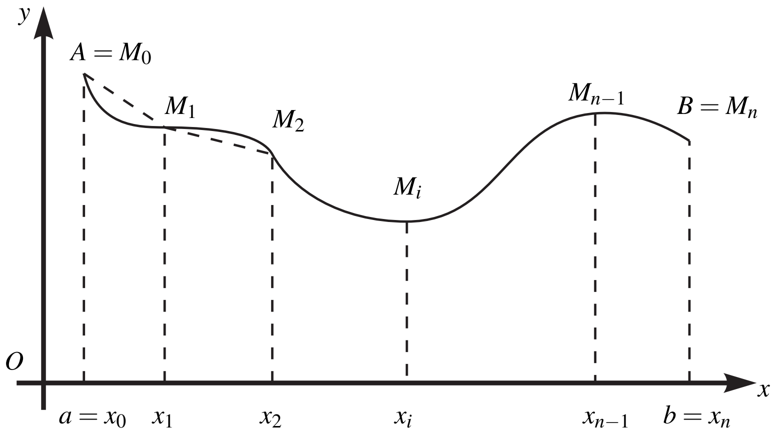


Рис. 2.7

Определение 2.4.2. *Если существует предел* $\lim\limits_{\lambda\to 0} P = L$ *длин вписанных ломаных, то этот предел называется длиной кривой* γ.

Докажем, что если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a,b]$ производную $f'(x)$, то длина кривой γ: $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Пусть точки M_0, M_1, $\ldots$, M_n разбивают кривую γ на n частей. Если x_i — проекция точки M_i на ось Ox, то M_i имеет координаты $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,\ldots,n$. Точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ разбивают отрезок $[a,b]$ на части. Соединим точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ последовательно и сосчитаем длину вписанной ломаной. Длина звена $M_{i-1}M_i$ равна

$$l_i = |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

По теореме Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Тогда

$$l_i = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i,$$

и если через P_n обозначить длину вписанной ломаной, то

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i.$$

Мы видим, что длина вписанной ломаной является интегральной суммой для функции $g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$, получаем

$$L = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Пример 2.4.4. *Вычислить длину дуги кривой $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 5$ (рис. 2.8).*

Согласно формуле имеем

$$L = \int\limits_0^5 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^5 \sqrt{4+9x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int\limits_0^5 \sqrt{9x+4}\,d(9x+4) = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(9x+4)\Big|_0^5 =$$

$$= \frac{1}{27}(7^3-2^3) = \frac{335}{27}.$$

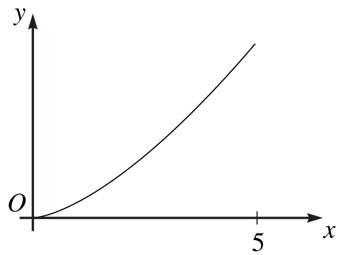


Рис. 2.8

Рассмотрим теперь длину дуги кривой γ: $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, от точки $A(a, f(a))$ — начала кривой γ, до переменной точки $X(x, f(x))$. Тогда, как мы показали, длина этой дуги

$$s(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt.$$

Переменную интегрирования мы обозначили другой буквой, чтобы не путать с переменным верхним пределом. Дифференцируя $s(x)$ по теореме о дифференцировании интеграла по верхнему пределу, получаем

$$s'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

или

$$ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Учитывая, что $y'\,dx = dy$, мы можем дифференциал длины дуги записать в виде

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

где $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$. Отсюда вытекает, что $L = \int\limits_a^b ds$.

Если бы мы рассматривали кривую γ: $x = \mu(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, где $\mu(y)$ имеет непрерывную на $[c,d]$ производную $\mu'(y)$, то получили бы такую формулу для нахождения длины γ:

$$L = \int\limits_c^d \sqrt{1 + [\mu'(y)]^2}\, dy = \int\limits_c^d \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

Если $A(\mu(c), c)$ — начало γ, а $Y(\mu(y), y)$ — переменная точка на γ, то длина дуги $\breve{AY}$ есть величина

$$s(y) = \int\limits_c^y \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\, dt.$$

Откуда находим, как и выше,

$$ds = \sqrt{1 + x'^2}\, dy = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Следовательно, и в этом случае можно записать

$$L = \int\limits_c^d ds.$$

Рассмотрим теперь кривую γ, заданную параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Мы будем предполагать, что функции φ и ψ дифференцируемы и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Допустим сначала, что кривая γ допускает представление в виде графика функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Из дифференциального исчисления известно, что $f(x)$ имеет непрерывную производную

$$y'_x = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Предположим, что при возрастании t от α до β функция $x = \varphi(t)$ монотонно растет от a до b. Тогда $\varphi'(t) \geqslant 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Как мы уже знаем, длина кривой γ равна

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx. \tag{2.4.1}$$

Сделаем в интеграле замену переменной $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)$, $y'_x = \psi'(t)/\varphi'(t)$. Тогда

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'}{\varphi'}\right]^2}\, \varphi'(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{2.4.2}$$

Пусть теперь функция $x = \varphi(t)$ убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Снова сделаем замену переменных в интеграле (2.4.1).

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int\limits_\beta^\alpha \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'}{\varphi'}\right]^2}\, \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_\beta^\alpha \sqrt{(\varphi'())^2 + (\psi'(t))^2} \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}\, dt = -\int\limits_\beta^\alpha \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt$$

и снова приходим к формуле (2.4.2). Поскольку $\varphi'(t) \leqslant 0$, то $\dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \dfrac{\varphi'(t)}{-\varphi'(t)} = -1$.

Меняя ролями x и y и повторяя вышеприведенные рассуждения, несложно показать, что если кривая γ: $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ является графиком функции $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, то ее длина снова будет выражена интегралом (2.4.2)

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt.$$

Графиком функции $y = f(x)$ можно задать только такую кривую, которую прямая, параллельная оси Oy, пересекает только в одной точке. Замкнутую кривую, например окружность или эллипс, нельзя задать как график некоторой функции $y = f(x)$ или $x = g(y)$. Но часто такую линию можно задать параметрически. Например, эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ задается с помощью следующих параметрических уравнений $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Несложно теперь показать, что по формуле

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$

можно вычислить длину кривой γ: $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и в том случае, когда кривая γ не является графиком функции $y = f(x)$ или $x = g(y)$. Правда, мы предполагаем, что кривую γ можно разбить на конечное число частей точками $M_0, M_1, \ldots, M_k$ так, что каждая часть — дуга $M_{i-1}M_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — является графиком некоторой функции $y = f(x)$, либо функции $x = g(y)$.

Мы считаем, что каждой точке M_i соответствует свое значение параметра t: $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, и что $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \beta$. Тогда, если l_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$, то

$$l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда длина всей кривой L есть сумма l_i и мы получаем, в силу аддитивности определенного интеграла

$$L = \sum_{i=1}^{k} l_i = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt.$$

Найдем дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой. Пусть $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ — начало кривой γ: $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а $X = (\varphi(t), \psi(t))$ — переменная точка на кривой. Тогда длина дуги кривой AX равна

$$S(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\,d\tau\,, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Отсюда, применяя теорему о дифференцировании интеграла по верхнему пределу, находим

$$ds = S'(t)\,dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt.$$

Так как из $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ следует $dx = \varphi'(t)\,dt$, $y = \psi'(t)\,dt$, то отсюда получаем

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t)\,dt)^2 + (\psi'(t)\,dt)^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Мы видим, что выражение для дифференциала длины дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ не меняется в зависимости от способа задания кривой. Используя сокращенную запись, видим, что опять можем записать длину кривой в виде

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} ds.$$

Пример 2.4.5. *Найти длину одной арки циклоиды* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Вычислим вначале дифференциал длины дуги ds. Имеем

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt.$$

Так как $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, *то* $0 \leqslant \dfrac{t}{2} \leqslant \pi$ *и, значит,* $\sin\dfrac{t}{2} \geqslant 0$. *Тогда* $ds = 2a\sin(t/2)\,dt$ *и мы получаем*

$$L = \int\limits_0^{2\pi} ds = 2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Частным случаем параметрического задания кривой является задание кривой в полярных координатах: γ: $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Тогда $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Найдем $dx^2 + dy^2$. Имеем

$$dx = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi\,,$$

$$dy = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$dx^2 + dy^2 = (r'^2\cos^2\varphi - 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,d\varphi^2 +$$

$$+ (r'^2\sin^2\varphi + 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2 =$$

$$= (r'^2 + r^2)\,d\varphi^2.$$

Таким образом, $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$ и, следовательно, длина кривой равна

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

Пример 2.4.6. *Вычислить длину кардиоиды* $r = 1 + \cos\varphi$.

Поскольку кривая симметрична относительно оси Ox (см. рис. 2.5), можно найти длину только верхней части кардиоиды ($y \geqslant 0$), а затем удвоить результат. Найдем вначале $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$. *Имеем*

$$r^2 + r'^2 = (1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, $ds = 2\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi$.

$$L = 2\int\limits_0^\pi \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi = 2\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4.$$

При проведении вычислений мы учли, что $\cos(\varphi/2) \geqslant 0$ *при* $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

В заключение этого пункта приведем формулы для вычисления длины кривой и дифференциала длины дуги в зависимости от способа задания кривой.

а) γ: $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

б) γ: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Тогда

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt, \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt.$$

в) γ: $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Тогда

$$ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi, \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

2.4.3. Вычисление объема тела вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим фигуру

$$G = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

которую мы называем криволинейной трапецией.

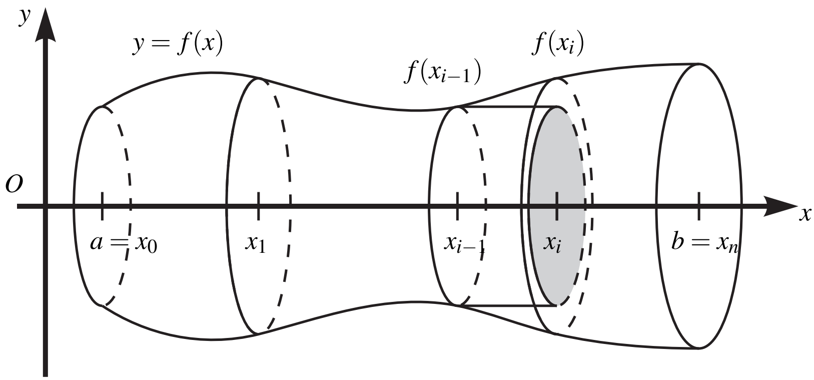


Рис. 2.9

Будем вращать фигуру G вокруг оси Ox, получим трехмерное тело (рис. 2.9). Покажем, что объем полученного тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник, длина основания которого равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а высота равна $f(x_{i-1})$. При вращении прямоугольника вокруг оси Ox мы получаем цилиндр, объем которого равен $\pi f^2(x_{i-1})\Delta x_i$. Объем, полученный при вращении криволинейной трапеции G вокруг оси Ox приближенно равен сумме объемов цилиндров,

$$V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_{i-1})\Delta x_i.$$

Равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$. При $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$ мы получим в пределе точное равенство. Таким образом,

$$V = \lim_{\lambda\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_{i-1})\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Если вокруг оси Oy вращается фигура

$$D = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d, 0 \leqslant x \leqslant g(y)\},$$

то объем полученного тела вращения равен

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy. \qquad (*)$$

Приведем без вывода еще одну полезную формулу для вычисления объемов. Снова рассмотрим фигуру G (рис. 2.10):

$$G = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Будем вращать криволинейную трапецию G вокруг оси Oy. Тогда объем тела, которое заштрихует G, вычисляется по формуле

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xy\,dx.$$

Пример 2.4.7. *Вычислить объем, получаемый при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции $G = \{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$.*

Вычисляем объем

$$V = \pi \int_1^2 y^2\,dx = \pi \int_1^2 x^4\,dx = \pi \frac{x^5}{4}\Big|_1^2 = \frac{31}{5}\pi.$$

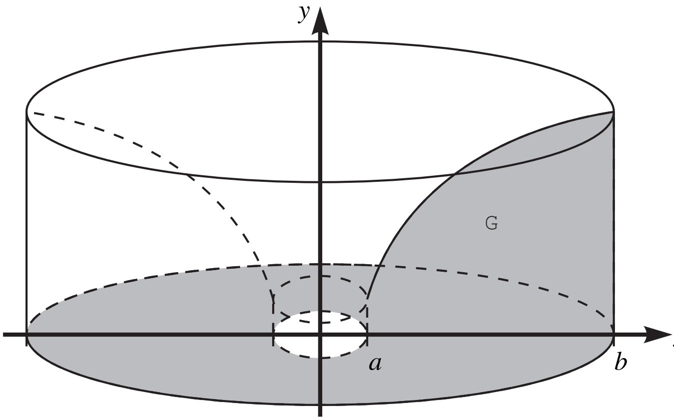


Рис. 2.10

Пример 2.4.8. *Вычислить объем, получаемый при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 1$, $y = 4$, $y = x^2$.*

Согласно формуле (*), имеем

$$V = \pi \int_1^4 x^2\,dy = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2\,dy = \pi \int_1^4 y\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_1^4 = \frac{15}{2}\pi.$$

Пример 2.4.9. *Пусть фигура G из примера 2.4.7 вращается вокруг оси Oy. Найти объем полученного тела вращения.*

Находим

$$V = 2\pi \int_1^2 xy\,dx = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2\,dx = \pi \frac{x^4}{2}\bigg|_1^2 = \frac{15}{2}\pi.$$

2.4.4. Площадь поверхности вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$, которая также непрерывна на $[a, b]$. Тогда площадь поверхности, получаемой вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox, можно вычислить по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

или

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Мы не приводим здесь вывода формулы, отсылая читателя к учебникам [5] или [6].

Отметим, что поскольку $\sqrt{1+y'^2}\,dx = ds$ — дифференциал длины дуги кривой, то формулу для вычисления площади можно записать в виде

$$S = 2\pi\int\limits_a^b |y|\,ds.$$

Приведем формулы для вычисления площади поверхности вращения для случаев, когда кривая задана параметрически и в полярных координатах.

Если кривая задана параметрически γ: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах γ: $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta r(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Пример 2.4.10. *Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 8x$ от $x = 2$ до $x = 7$.*

Поскольку парабола симметрична относительно оси Ox, достаточно рассмотреть только верхнюю ее часть $y = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$. Вычислим площадь согласно формуле

$$S = 2\pi\int\limits_2^7 2\sqrt{2}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}\,dx = 4\pi\sqrt{2}\int\limits_2^7\sqrt{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}(x+2)^{3/2}\Big|_2^7 = \frac{152\pi\sqrt{2}}{3}.$$

2.4.5. Работа переменной силы

Пусть под действием силы $F(x)$ материальная точка M движется по прямой Ox. Мы считаем, что направление силы совпадает с направлением движения. Найдем работу, которую производит сила F при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$. Мы считаем, что сила $F(x)$ является непрерывной функцией от x.

Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda_{\mathcal{R}} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$.

Выберем произвольно точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что сила на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ приближенно равна $F(\xi_i)$. Так можно считать, поскольку $F(x)$ — непрерывная функция и на малом перемещении изменяется мало.

Тогда работа по перемещению точки M из x_{i-1} в x_i приближенно равна $F(\xi_i)\Delta x_i$, а вся работа A по перемещению точки M из точки $x = a$ в точку $x = b$ приближенно равна

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма A_n тем ближе будет к точному значению работы A, чем мельче будет разбиение отрезка $[a, b]$. Следовательно, в пределе при $\lambda_{\mathcal{R}} \to 0$ мы получаем

$$A = \lim_{\lambda_{\mathcal{R}} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Пример 2.4.11. *Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из прямого кругового цилиндра, радиус основания которого равен* 3 *м, а высота равна* 5 *м (рис. 2.11).*

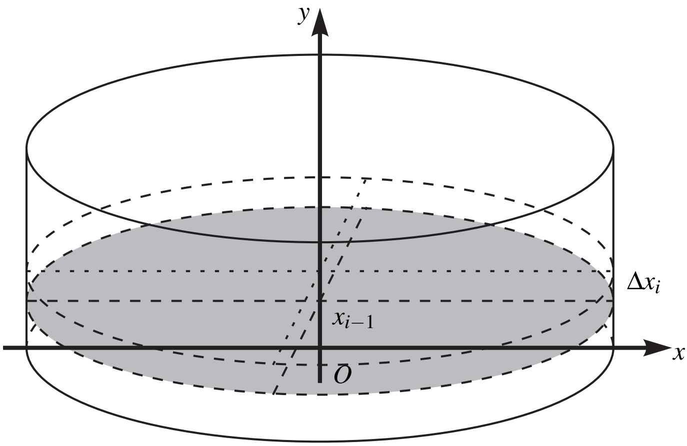


Рис. 2.11

Выберем систему координат, как на рисунке. Работа, необходимая для того, чтобы поднять тело, равна произведению веса тела на высоту подъема. Разобьем отрезок $[0, 5]$ *на* n *частей* $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 5$. *Выберем в каждой части* $[x_{i-1}, x_i]$ *точку* ξ_i. *Воду в части цилиндра, соответствующей* $[x_{i-1}, x_i]$, *нужно поднять прближенно на высоту* $5 - \xi_i$. *Так как удельный* *вес воды равен единице, то вес равен объему, т. е.* $\pi 3^2 \Delta x_i = 9\pi\Delta x_i$. *Тогда* $A_i = (5-\xi_i)9\pi\Delta x_i = 9\pi(5-\xi_i)\Delta x_i$ *и*

$$A \approx 9\pi \sum_{i=1}^{n} (5-\xi_i)\Delta x_i.$$

В пределе, при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$, *получаем*

$$A = 9\pi \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} (5-\xi_i)\Delta x_i = 9\pi \int\limits_0^5 (5-x)\,dx =$$

$$= 9\pi\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{225}{2}\pi = 112,5\pi.$$

§ 2.5. Несобственные интегралы

При определении определенного интеграла предполагалось, что пределы интегрирования конечны. Необходимым условием существования интеграла была ограниченность функции. Определенный интеграл от ограниченной функции по конечному отрезку называется собственным. Но многие важные задачи в математике и физике привели к необходимости расширить понятие интеграла на неограниченные промежутки интегрирования и неограниченные функции. Эти расширения определенного интеграла называются несобственными интегралами.

2.5.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Определение 2.5.1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на промежутке* $[a,\infty)$ *и интегрируема по любому отрезку* $[a,R]$ *при* $R > a$. *Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx,$$

то он называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ *по промежутку* $[a,\infty)$ *и обозначается* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx.$$

Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предела не существует или он бесконечен, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Рассмотрим некоторые примеры. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ определена на $[1, \infty)$. Имеем

$$\int_1^R \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^R = 1 - \frac{1}{R}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_1^R \dfrac{dx}{x^2} = 1$, следовательно, интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ сходится и равен 1. Геометрически это означает, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0, x = 1, y = \dfrac{1}{x^2}$, конечна и равна 1.

Если на том же промежутке $[1, \infty)$ рассмотреть функцию $y = \dfrac{1}{x}$, то для нее

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \ln R \to \infty\,, \quad \text{при } R \to +\infty,$$

и, следовательно, интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ расходится. Причина здесь та, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ недостаточно быстро стремится к нулю при $x \to \infty$.

Рассмотрим еще интеграл $\int\limits_0^\infty \sin x\, dx$. Имеем для $R > 0$

$$\int_0^R \sin x\, dx = -\cos x\bigg|_0^R = 1 - \cos R.$$

В данном случае интеграл по любому отрезку $[0, R]$ ограничен, тем не менее интеграл $\int\limits_0^\infty \sin x\, dx$ расходится, так как не существует предела $\lim\limits_{R\to+\infty}(1 - \cos R)$.

Аналогично интегралу по $[a, \infty)$ вводится интеграл по полуинтервалу $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\, dx.$$

Если функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$ и интегрируема на любом промежутке $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$, то под интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

понимается сумма

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\, dx,$$

где c — любое число. При этом интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ считается сходящимся, только если сходятся оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx$ и $\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\, dx$.

Часто в определении вместо произвольного c берут конкретное число 0, т. е. полагают по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Можно доказать, что оба определения интеграла по $(-\infty, \infty)$ равносильны.

Пример 2.5.1. *Рассмотрим интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x\, dx.$$

По определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^x\, dx.$$

Первый интеграл в сумме справа сходится, так как

$$\lim_{A \to -\infty} \int\limits_{A}^{0} e^x\, dx = \lim_{A \to -\infty} \left(1 - e^A\right) = 1.$$

Но второй интеграл расходится, так как

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{0}^{R} e^x\, dx = \lim_{R \to +\infty} (e^R - 1) = \infty.$$

Значит, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x\, dx$ *расходится.*

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на (a, ∞), то принято записывать

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{\infty},$$

понимая это следующим образом

$$F(x)\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a).$$

Аналогично, если $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на $(-\infty, b)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

В случае всей числовой оси $(-\infty, \infty)$ поступают следующим образом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Здесь для сходимости интеграла необходимо, чтобы оба предела существовали и были конечными.

Пример 2.5.2. *Рассмотрим интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x -$$

$$- \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Часто бывает так, что несобственный интеграл либо неберущийся, либо его технически сложно вычислить и при этом важно знать не точное его значение, а только то, сходится он или нет. Поэтому важно уметь определять, сходится интеграл или нет, не вычисляя его. Мы рассмотрим здесь один из признаков сходимости интеграла. Рассмотрения будут вестись для интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$. Для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ все рассмотрения повторяются либо дословно, либо с очевидными изменениями. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сводится к интегралам $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

Отметим вначале следующий простой факт. Если функция $f(x)$ неотрицательна на $[a,\infty)$, то функция $F(R) = \int\limits_{a}^{R} f(x)\,dx$ не убывает на $[a,\infty)$. Действительно, если $R_1 < R_2$, то по аддитивному свойству интеграла

$$F(R_2) = \int\limits_{a}^{R_2} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{R_1} f(x)\,dx + \int\limits_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{a}^{R_1} f(x)\,dx = F(R_1),$$

так как $\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx \geqslant 0$. Напомним, что монотонно возрастающая на $[a,\infty)$ функция $F(R)$ имеет конечный предел $\lim\limits_{R\to+\infty} F(R)$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. Из этого вытекает

Теорема 2.5.1. *Если функция $f(x)$ неотрицательна на $[a,\infty)$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a,R]$, где $R > a$, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(R) = \int\limits_{a}^{R} f(x)\,dx$ ограничена сверху, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $R \geqslant a$ $F(R) \leqslant M$.*

Опираясь на эту теорему, докажем следующий признак сходимости несобственных интегралов.

Теорема 2.5.2 (признак сравнения несобственных интегралов). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a,\infty)$ и интегрируемы по любому отрезку вида $[a,R]$, где $R \geqslant a$. Тогда если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in [a,\infty)$, то выполняется:*

1) Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

2) Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$.

Доказательство. Рассмотрим две неубывающие функции $F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx$ и $G(R) = \int\limits_a^R g(x)\,dx$. Из условий теоремы и свойств определенного интеграла следует, что $F(R) \leqslant G(R)$ всюду на $[a,\infty)$.

Если интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то по теореме 2.5.1 функция $G(R)$ ограничена. Но тогда ограничена и функция $F(R)$, следовательно, по теореме 2.5.1 сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то по теореме 2.5.1 функция $F(R)$ не ограничена, следовательно, не ограничена и функция $G(R)$. Поэтому по той же теореме 2.5.1 интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ расходится.

Теорема доказана.

Признак сравнения становится полезным и хорошо работает, если есть достаточно большой набор интегралов, про которые доподлинно известно, сходятся они или расходятся. Такие интегралы, удобные для сравнения, дает следующая

Теорема 2.5.3. *Пусть $a > 0$ — некоторое число. Интеграл*

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Доказательство. Если $\alpha < 1$, то для любого $R > a$ имеем

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_a^R = \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right),$$

откуда следует

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_a^R \frac{dx}{x^\alpha} = \infty.$$

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_a^R \frac{dx}{x} = \ln R - \ln a \to \infty$ при $R \to \infty$.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\bigg|_a^R = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)R^{\alpha-1}} <$$

$$< \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} < \infty \quad \forall R.$$

Теорема доказана.

Пример 2.5.3. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}.$$

Оценим подынтегральную функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$. *Имеем*

$$\frac{x^2}{x^4+1} \leqslant \frac{x^2}{x^4} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, $f(x) \leqslant g(x)$, *где* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *и, следовательно, по признаку сравнения наш интеграл сходится, так как по теореме 2.5.3 сходится интеграл*

$$\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Иногда удобнее пользоваться так называемым предельным признаком сравнения. Вместо того чтобы доказывать неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, в этом признаке ищем предел, что иногда бывает легче сделать. Мы приводим признак без доказательства (см., например, [6]).

Теорема 2.5.4 (предельный признак сравнения несобственных интегралов). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *неотрицательны на* $[a,\infty)$ *и интегрируемы на любом отрезке* $[a,R]$, *где* $R > a$. *Тогда, если существует предел*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda,$$

причем, $0 < \lambda < \infty$, *то интегралы*

$$\int\limits_a^{infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2.5.4. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4-x+2}\,dx.$$

Наша подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4-x+2}$ *при больших x ведет себя как* $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$*, так как на поведение числителя при* $x\to\infty$ *постоянное слагаемое влияния не оказывает, а в знаменателе основную роль играет* x^4*. Находим предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)x^2}{x^4-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^2}{1-1/x^3+2/x^4}=1.$$

По теореме 2.5.4 отсюда заключаем, что наш интеграл сходится, так как интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

сходится по теореме 2.5.3.

В несобственных интегралах функция не всегда неотрицательна. Выделим следующий очень важный класс несобственных интегралов.

Определение 2.5.2. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

Теорема 2.5.5. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Рассмотрим неотрицательные функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2} \quad \text{и} \quad \psi(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

Очевидно, что $0\leqslant\varphi(x)\leqslant|f(x)|$ и $0\leqslant\psi(x)\leqslant|f(x)|$. Из абсолютной сходимости интеграла и из признака сравнения (теорема 2.5.2) следует, что интегралы $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty \psi(x)\,dx$ сходятся. Так как $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^\infty \psi(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Пример 2.5.5. *Исследовать на сходимость*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx.$$

Признак сравнения здесь неприменим, так как функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ *не будет всюду неотрицательна. Но, очевидно,*

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, по признаку сравнения наш интеграл сходится абсолютно, значит, по теореме 2.5.5, сходится.

Замечание 2.5.1. *Для сходящихся несобственных интегралов справедливы те же свойства, что и для собственных интегралов: линейные свойства, аддитивное свойство. Справедливы теоремы о замене переменной и об интегрировании по частям. Доказательства можно найти в более полных курсах математического анализа (см., например, [5] или [6]).*

2.5.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 2.5.3. *Точка x_0 называется особой точкой функции $y = f(x)$, если в любой окрестности этой точки функция не ограничена.*

Конкретизируем понятие особой точки. Если функция $y = f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$, то точка b будет особой, если функция не ограничена на любом интервале вида $(b-\varepsilon,b)$, где $\varepsilon > 0$ такое, что $b-\varepsilon > a$. Если функция определена на $(a,b]$, то точка a будет особой, если $f(x)$ не ограничена на любом интервале вида $(a,a+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ и $a+\varepsilon < b$. Наконец, точка $c \in (a,b)$ будет особой для функции $f(x)$, если $f(x)$ определена на $(a,c)\cup(c,b)$ и для любого ε такого, что $a < c-\varepsilon < c+\varepsilon < b$, функция $f(x)$ не ограничена на $(c-\varepsilon,c)\cup(c,c+\varepsilon)$.

Напомним, что неограниченность функции $f(x)$, например на $(b-\varepsilon,b)$, означает, что для любого числа $M > 0$ найдется такая точка $x \in (b-\varepsilon,b)$, что будет выполняться $|f(x)| > M$.

Определение 2.5.4. *Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$, где b — особая точка функции $f(x)$ и пусть функция интегрируема в собственном смысле на любом отрезке вида $[a,b-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ и $b-\varepsilon\geqslant a$. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

то он называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если предел существует и конечен, то интеграл называют сходящимся. Предел из определения иногда записывают в следующем виде

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в том случае, когда особой точкой для функции $f(x)$ является $x=a$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если особой точкой функции $f(x)$ является точка $c\in(a,b)$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

причем интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ считается сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Как и для сходящихся несобственных интегралов по неограниченному промежутку, для сходящихся несобственных интегралов от неограниченных функций справедливы свойства линейности, аддитивности, теоремы о замене переменной и об интегрировании по частям.

Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b) и если особая точка функции — это $x=b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a).$$

Пример 2.5.6. *Вычислить несобственный интеграл*

$$\int_0^1 \ln x\,dx.$$

Особая точка функции: $x=0$. Вычисляем интеграл по частям:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx,\ v=x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx =$$

$$= 1\cdot\ln 1 - \lim_{x\to+0}(x\ln x) - 1 = -1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=0$ *(неопределенность вида* $0\cdot\infty$*).*

Для исследования сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций на сходимость используется, как и для интегралов по неограниченному промежутку, признак сравнения. Мы приведем его без доказательства, так как его можно получить, повторив доказательство признака сравнения для интегралов с бесконечными пределами. Сформулируем теорему для полуинтервала $[a,b)$. Случай, когда особая точка $x=a$, рассматривается аналогично.

Теорема 2.5.6 (признак сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций). *Пусть точка $x=b$ является особой для функций $f(x)$ и $g(x)$, пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы в собственном смысле по любому отрезку вида $[a,b-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ и $b-\varepsilon>a$ и выполняется $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$. Тогда*

1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *2) если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$*.*

Как ранее уже отмечалось, признак сравнения очень полезен, если есть набор интегралов для сравнения, про сходимость которых уже известно.

Теорема 2.5.7. *Пусть* $b > 0$ *— некоторое число. Интеграл*

$$\int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$*.*

Рассуждения приводятся те же, что и при доказательстве теоремы 2.5.3.

Пример 2.5.7. 1) *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$$

Сделаем замену переменной $x - a = t$, $dx = dt$, $x = a \to t = 0$, $x = b \to t = b - a$*. Тогда*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int\limits_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Таким образом, отсюда и из теоремы 2.5.7 вытекает, что наш интеграл сходится только при $\alpha < 1$*.*

Аналогично рассматривается интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$*.*

2) *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Поскольку для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ *особой точкой является* $x = 1$*, то необходимо представить наш интеграл в виде суммы*

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

и исследовать на сходимость каждый из интегралов в сумме справа. Но, переписав эти интегралы в виде

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}} \quad \text{и} \quad \int\limits_1^2 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}},$$

а также использовав выводы предыдущего примера, заключаем, что оба интеграла сходятся, значит, сходится и наш интеграл.

3) *Исследовать на сходимость интегралы*

$$\int\limits_1^3 \frac{2^x\,dx}{(x-3)^4} \quad \text{и} \quad \int\limits_1^3 \frac{2^x\,dx}{\sqrt[4]{3-x}}.$$

Для первого интеграла сравним функцию $f(x)=\dfrac{2^x}{(x-3)^4}$ *с функцией* $g(x)=\dfrac{1}{(x-3)^4}$. *Имеем, очевидно, при* $1\leqslant x\leqslant 3$, $f(x)\geqslant g(x)$. *Так как интеграл* $\int\limits_1^3 g(x)\,dx=\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{(x-3)^4}$ *расходится, то по признаку сравнения расходится и наш интеграл.*

Для исследования второго интеграла сравним функцию $f(x)=\dfrac{2^x}{\sqrt[4]{3-x}}$ *с функцией* $\dfrac{8}{\sqrt[4]{3-x}}=g(x)$. *Очевидно, что при* $1\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. *Поскольку интеграл* $\int\limits_1^3 g(x)\,dx=\int\limits_1^3 \dfrac{8\,dx}{\sqrt[4]{3-x}}$ *сходится, то по признаку сравнения заключаем, что наш интеграл сходится.*

Замечание 2.5.2. *Несобственный интеграл от неограниченной функции по виду ничем не отличим от собственного интеграла. Тем не менее несобственный интеграл требует внимательного обращения. Если с несобственным интегралом обращаться как с собственным, то это может привести к ошибкам.*

Рассмотрим, например, интеграл $I=\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2}$. Если мы используем здесь формулу Ньютона—Лейбница, то получим

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^1 = -2.$$

Уже здесь видно противоречие. Интеграл от неотрицательной функции получился отрицательным. Данный интеграл на самом деле не имеет смысла, так как он расходится. Действительно, по определению имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2},$$

и оба интеграла справа расходятся. Применять к интегралу $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ формулу Ньютона—Лейбница было нельзя.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций, так же как и для интегралов с бесконечными пределами, вводится понятие абсолютно сходящегося интеграла. Точно так же показывается, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится. Это утверждение помогает иногда исследовать на сходимость интегралы от функций непостоянного знака.

Пример 2.5.8. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Поскольку $|f(x)| = \left|\frac{\sin 3x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$, *и интеграл* $\int_{0}^{\pi} g(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *сходится (по теореме 2.5.7), то сходится и наш интеграл.*

§ 2.6. Приближенные методы интегрирования

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, как мы знаем, интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ существует и является некоторым числом. Но вот на пути нахождения этого числа могут встретиться значительные трудности. Во-первых, интеграл $\int f(x)\, dx$ может оказаться неберущимся и мы не сможем найти первообразную $F(x)$, чтобы воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Во-вторых, даже если интеграл берущийся, вычисления могут оказаться очень громоздкими.

На самом деле, в приложениях требуется найти число $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ не абсолютно точно, а с некоторой заданной точностью. В этом случае прибегают к приближенному вычислению интегралов. Мы рассмотрим два простых приближенных метода вычислений — метод трапеций и метод парабол. Второй метод называют еще методом Симпсона.

2.6.1. Метод трапеций

Для простоты рассмотрений ограничимся случаем непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$.

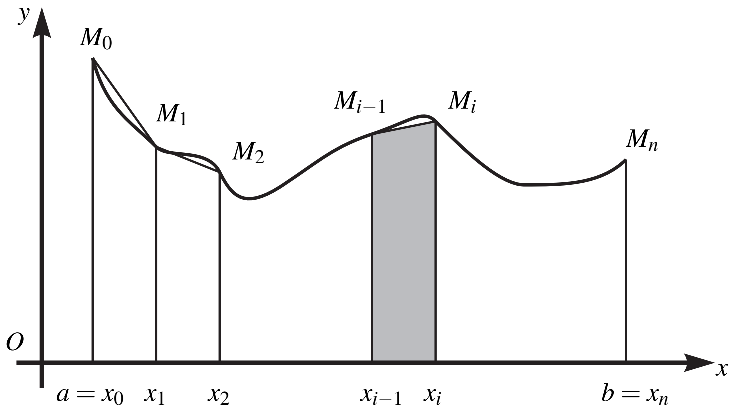


Рис. 2.12

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Проведем через точки x_i прямые, параллельные оси Oy, и последовательно соединим точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, $\ldots$, $M_n(x_n, f(x_n))$. Мы получили n трапеций (рис. 2.12). Площадь i-й трапеции равна

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Положим $f(x_i) = y_i$. Площадь между графиком функции и осью Ox, с одной стороны, равна интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а с другой стороны, приближенно равна сумме площадей трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x_1 + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x_n =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(y_0+y_n+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})\right).$$

Таким образом, мы получили формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(y_0+y_n+2\sum_{j=1}^{n-1} y_j\right),$$

которая называется формулой трапеций. Формула тем точнее, чем больше n. Можно показать (см., например, [6]), что если существует непрерывная на $[a,b]$ вторая производная $f''(x)$, то абсолютная величина погрешности формулы трапеций не больше, чем

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M,$$

где $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$. Зная величины a, b и M, мы можем подобрать n так, чтобы вычислить интеграл с любой заданной наперед точностью.

2.6.2. Метод парабол (метод Симпсона)

Этот метод несколько точнее, чем метод трапеций. В отличие от метода трапеций, где мы приближали график функции ломаной, в этом методе части графика заменяются параболами.

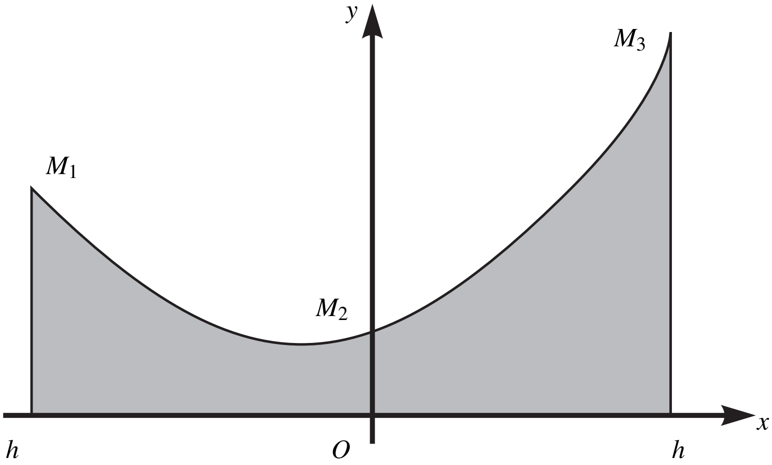
Отметим прежде всего, что через три точки $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ и $P_3(x_3,y_3)$ с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида $y = Ax^2+Bx+C$. Действительно, подстановка координат точек P_1, P_2 и P_3 в уравнение линии дает нам систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B и C:

$$\begin{cases} Ax_1^2+Bx_1+C = y_1; \\ Ax_2^2+Bx_2+C = y_2; \\ Ax_3^2+Bx_3+C = y_3. \end{cases}$$

Определитель системы отличен от нуля,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_3) \neq 0.$$

Следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение A, B, C. Если точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, то $A = 0$ и мы получаем



y

уравнение прямой $y = Bx + C$. Если точки не лежат на одной прямой, то мы получаем параболу.

Теперь вычислим площадь под графиком параболы $y = Ax^2 + Bx + C$, проходящей через точки $M_1(-h, y_1)$, $M_2(0, y_2)$, $M_3(h, y_3)$ в пределах $-h \leqslant x \leqslant h$ (рис. 2.13). Из того, что точки лежат на параболе, следуют три равенства

$$\begin{cases} y_1 = Ah^2 - Bh + C \\ y_2 = C \\ y_3 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Вычисляем площадь

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = (A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx)\Big|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Из системы равенств (2.6.1), складывая 1 и 3 равенства, получаем

$$y_1 + y_3 = 2Ah^2 + 2C\ , \quad y_2 = C.$$

Поэтому

$$S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Если парабола проходит через три точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$, причем $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$, то площадь под параболой (или прямой) на промежутке $x_1 \leqslant x \leqslant x_3$ равна $S = \dfrac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$. Это следует из того, что при параллельном переносе вдоль оси Ox фигуры $\{(x,y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_3, 0 \leqslant y \leqslant \leqslant Ax^2 + Bx + C\}$ так, что точка x_2 переходит в точку $x = 0$, площадь и ординаты точек не меняются, а для случая $-h \leqslant x \leqslant \leqslant h$ площадь уже вычислена.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на четное число равных частей $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1} < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$. Проведем через все точки x_i прямые, параллельные оси Oy и обозначим через M_i точки пересечения этих прямых с графиком функции $y = f(x)$. Через каждую тройку точек $M_0M_1M_2$, $M_2M_3M_4, \ldots, M_{2n-2}M_{2n-1}M_{2n}$, проведем линию вида $y = Ax^2 + Bx + C$ и вычислим площадь под графиком этой линии (рис. 2.14).

На отрезке $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ имеем $(h = \dfrac{b-a}{2n})$

$$S = \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (Ax^2 + Bx + C)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{6n}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}),$$

где $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Складывая получившиеся выражения, получим приближенное значение интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2(n-1)}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$$

Формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} + 4\sum_{k=0}^{n-1} y_{2k+1}\right]$$

называется формулой парабол, или формулой Симпсона. Можно доказать (см., например, [6]), что ошибка при замене интеграла суммой не превосходит величины

$$M\frac{(b-a)^5}{2880n^4} = M\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4},$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b}\left|\dfrac{d^4 f}{dx^4}(x)\right|$.

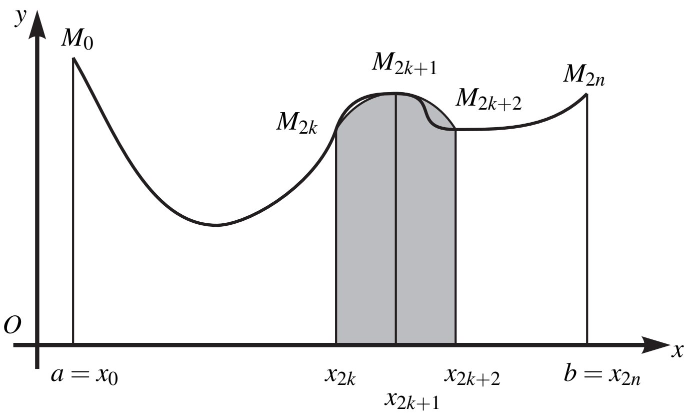


Рис. 2.14

Ясно, что с увеличением числа точек деления отрезка $[a, b]$ на части растет точность вычисления, но при этом возрастает объем вычислений. Тем не менее рассмотренные методы содержат четко сформулированный алгоритм для проведения вычислений. Кроме того, особенностью изложенных выше методов является стереотипность тех вычислительных операций, которые приходится проводить на каждом отдельном шаге. Эти две особенности обеспечивают широкое применение изложенных методов для вычисления интегралов с использованием компьютеров.

Пример 2.6.1. *Вычислить*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

с точностью до $0,0001$ *по формуле Симпсона.*

Учитывая требуемую точность, число точек деления отрезка $[0, 1]$ *найдем из неравенства*

$$\frac{M}{180(2n)^4} < 0,0001,$$

где $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\dfrac{d^4 e^{-x^2}}{dx^4}(x)\right|$. *Вычислим производную*

$$f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}.$$

Исследуя $f^{(4)}(x)$ *с помощью производных, можно показать, что во всяком случае* $\left|f^{(4)}(x)\right| \leqslant 20$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *хотя более аккуратное исследование* *показывает, что* $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f^{(4)}(x)\right| = 12$. *Мы возьмем* $M = 20$. *Тогда* n *будем искать из неравенства* $\dfrac{1}{9(2n)^4} < 10^{-4}$, *откуда* $n^4 > \dfrac{625}{9}$ *или* $n^2 > \dfrac{25}{3}$. *Последнее неравенство выполняется для всех* $n \geqslant 3$.

Возьмем для расчета $n = 5$. *Делим отрезок* $[0,1]$ *на 10 равных частей точками* $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1, \ldots, x_9 = 0,9$, $x_{10} = 1$ *и вычисляем соответствующие значения* $e^{-x_i^2}$, $i = 0,1,\ldots,10$. *При этом, чтобы обеспечить требуемую условием точность* $\varepsilon = 0,0001$, *вычисления надо проводить с пятью знаками после запятой, округляя окончательный результат до четырех знаков. Вычисления оформим таблицей*

i	x_i	$y_i = f(x_i) = e^{-x_i^2}$
0	0	1,00000
1	0,1	0,99005
2	0,2	0,96079
3	0,3	0,91393
4	0,4	0,85214
5	0,5	0,77680
6	0,6	0,69768
7	0,7	0,61263
8	0,8	0,52729
9	0,9	0,44486
10	1,0	0,36788

Далее вычисляем

$$y_0 + y_{10} = 1,36788\,;$$
$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4\cdot 3,74027 = 14,96108\,;$$
$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2\cdot 3,03790 = 6,07580\,.$$

Подставляя полученные значения в формулу Симпсона, получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}(1,36788 + 6,07580 + 14,96108) =$$
$$= 0,74682 \approx 0,7468.$$

переменных

Глава 3.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

§ 3.1. Вспомогательный раздел. Вектор-функция скалярного аргумента

3.1.1. Первые понятия

В этом разделе мы рассмотрим функции, значениями которых являются векторы на плоскости или в пространстве. При этом будем предполагать, что имеется декартова система координат: координаты на плоскости будем обозначать x и y, в пространстве — x, y, z.

В пространстве векторов на плоскости xOy зафиксируем канонический базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, в пространстве — базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Напомним, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеют единичную длину, причем вектор $\mathbf{i}$ направлен одинаково с осью Ox, вектор $\mathbf{j}$ — с осью Oy и вектор $\mathbf{k}$ — с осью Oz. Любой вектор на плоскости можно единственным образом представить в виде $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, или, в другой записи, $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$. Для векторов в пространстве соответственно имеем представления $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Пусть $[\alpha, \beta]$ — некоторый отрезок. Если каждому значению $t \in [\alpha, \beta]$ сопоставлен определенный вектор $\mathbf{r}(t)$, то говорят, что $\mathbf{r}(t)$ — векторная функция скалярного аргумента t, или, короче, вектор-функция.

Далее, если не сказано что-то иное, будут рассматриваться *свободные* векторы. Напомним, что свободные векторы полностью определяются модулем (длиной) и направлением.

Если начало вектора $\mathbf{r}(t)$ совместить с началом координат, то его конец при изменении параметра t от α до β будет описывать некоторую линию. Линия Γ, описываемая концом $\mathbf{r}(t)$, называется *годографом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$. Начало координат называется при этом *полюсом годографа.*

Если у вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении параметра t меняется только модуль, то годографом будет луч, исходящий из полюса, или некоторая часть этого луча. Если модуль вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянен ($|\mathbf{r}(t)| = C = \text{const}$), то меняется только направление $\mathbf{r}(t)$. В этом случае, если $\mathbf{r}(t)$ — это вектор на плоскости, то годограф вектор-функции есть либо окружность $x^2 + y^2 = C^2$, либо часть этой окружности. Если значениями вектор-функции являются векторы пространства, то годографом является линия на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

3.1.2. Пределы и производные. Свойства

Введем понятие предела для вектор-функции.

Будем говорить, что вектор $\mathbf{r}_0$ есть предел вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $0 < |t - t_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon$. Символически:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$

Таким образом, из определения следует, что вектор $\mathbf{r}_0$ есть предел $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0$. Это предел *числовой* функции переменной t.

Стремление вектора $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ к вектору $\mathbf{r}_0 = \{a, b, c\}$ при $t \to t_0$ эквивалентно тому, что координатные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ стремятся к координатам a, b и c соответственно. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $\mathbf{r}_0 = \{a, b, c\}$. *Тогда равенство* $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ *будет справедливо в том и только том случае, если одновременно выполняются три равенства:*

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a; \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = b; \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = c.$$

Доказательство. Так как

$$|x(t) - a| \leqslant \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2} = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|,$$

то из соотношения $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ следует, что $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$. Так же доказываются два оставшиеся предельные соотношения для координатных функций.

Обратно: пусть теперь координатные функции вектора $\mathbf{r}(t)$ стремятся при $t \to t_0$ к координатам вектора $\mathbf{r}_0$. Тогда из неравенства

$$|r(t)-r_0| = \sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2+(z(t)-c)^2} \leqslant$$
$$\leqslant |x(t)-a|+|y(t)-b|+|z(t)-c|$$

следует, что $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$. Тем самым теорема полностью доказана.

С очевидными упрощениями аналогичная теорема может быть сформулирована и доказана для вектор-функции, чьи значения являются векторами на плоскости.

Упражнение 3.1.1. *Пусть $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ — вектор-функции, а $f(t)$ — скалярная функция, определенные на отрезке $[\alpha,\beta]$. Докажите следующие свойства пределов:*

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t)\pm\mathbf{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\pm\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)$;
2. $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\mathbf{r}(t) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\right)\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)$;
3. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)\right)$;
4. $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)$.

Пусть $t_0\in[\alpha,\beta]$ — точка области определения вектор-функции $\mathbf{r}(t)$.

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$. Функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Из доказанной выше теоремы следует, что непрерывность вектор-функции равносильна непрерывности всех ее координатных функций.

Введем понятие производной вектор-функции. Пусть t_0 точка, в окрестности которой определена вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, и t принимает значение из этой окрестности.

Производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 называется предел (если он существует)

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}.$$

Производная обозначается либо $\mathbf{r}'(t_0)$, либо $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$. Таким образом,

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}.$$

Положим $t-t_0 = \Delta t$ и $\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0) = \Delta\mathbf{r}$. Тогда можно записать

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

По доказанной теореме вычисление предела вектор-функции сводится к вычислению пределов координатных функций, поэтому, если $\mathbf{r} = \{x(t), y(t)\}$, то

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\} = \left\{ x'(t_0), y'(t_0) \right\}.$$

Аналогичная формула может быть записана для функции, значения которой — пространственные векторы.

Отметим некоторые свойства производной вектор-функции. Рекомендуем доказать их самостоятельно, сводя по полученным формулам дифференцирование вектор-функций к дифференцированию координатных функций и используя правила дифференцирования скалярных функций.

Для дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ и скалярной функции $f(t)$ справедливы равенства:

1. $(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \pm \mathbf{r}_2'$.
2. $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$.
3. $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$ (дифференцирование скалярного произведения).
4. $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2'$ (дифференцирование векторного произведения).

3.1.3. Касательная к кривой. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ дифференцируема в точке t_0. Для каждого значения t будем рассматривать $\mathbf{r}(t)$ как радиус-вектор в пространстве (или на плоскости). Тогда при изменении t концы радиус-векторов $\mathbf{r}(t)$ образуют некоторую кривую Γ — годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, а значению t_0 соответствует точка P кривой L (рис. 3.1). Значению $t = t_0 + \Delta t$ отвечает точка M кривой. Проведем через точки P и M прямую l, называемую секущей, и рассмотрим вектор $\overrightarrow{PM}$ на этой секущей. Обратимся к определению производной вектор-функции в точке t_0

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Подобно тому как для числовой функции одной переменной устанавливается геометрический смысл производной, заметим, что при стремлении Δt к нулю секущая l

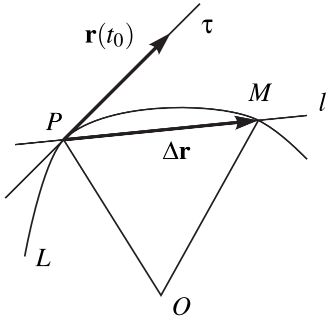


Рис. 3.1

стремится к некоторому предельному положению. Прямую τ, занимающую это предельное положение, назовем *касательной* к линии L в точке $P(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. При $\Delta t \to 0$ вектор $\dfrac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$, направленный вдоль секущей, переходит в пределе в вектор, направленный вдоль касательной τ. Вектор $\dfrac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ имеет смысл средней скорости перемещения точки M по линии l за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Предельный вектор, $\mathbf{r}'(t_0)$, вектор мгновенной скорости в момент t_0.

- *Его направление совпадает с направлением перемещения — по касательной к линии Gamma,*
- *длина — абсолютная величина скорости в момент t_0.*

В этом заключен геометрический смысл производной вектор-функции.

Таким образом, вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ является направляющим вектором прямой τ. Если вспомнить из аналитической геометрии форму векторного уравнения прямой с параметром, то уравнение касательной τ можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)s, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Для координат вектора $\mathbf{r}$ это означает

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)s; \\ y = y_0 + y'(t_0)s; \\ z = z_0 + z'(t_0)s. \end{cases}$$

Отсюда получим канонические уравнения касательной τ

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Пример 3.1.1. *Найти уравнение касательной к кривой Γ: $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \dfrac{\pi}{2}$.*

Радиус-вектор точки кривой имеет вид $\mathbf{r} = \{t - \sin t, 1 - \cos t\}$. Значит, вектор $\mathbf{r}' = \{1 - \cos t, \sin t\}$ направлен по касательной к Γ. Следовательно, вектор $\mathbf{r}'(\dfrac{\pi}{2}) = \{1; 1\}$ является направляющим вектором касательной к Γ в точке, где $t = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. в точке $M_0(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1)$. Поскольку $x'(\dfrac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 1$, то мы получаем уравнение касательной к Γ в точке M_0

$$y - 1 = x - \frac{\pi}{2} + 1$$

или

$$x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0.$$

§ 3.2. Функции нескольких переменных и их области определения. Множества на плоскости и в пространстве

3.2.1. Область определения

В соответствии с общим определением функции, заданной на множестве, *числовой функцией f двух переменных* мы называем закон (правило), по которому каждой паре чисел (x, y) из некоторого множества U ставится в соответствие некоторое число $f(x, y)$.

Слово «числовая» в определении функции принято опускать, если из контекста понятно, что *значениями $f(x, y)$ функции* являются именно числа, а не элементы множества какой-либо иной природы.

Множество U называют *областью определения функции f* и обозначают $D(f)$. Подчеркнем: элементами множества U являются не числа x и y, а упорядоченные пары (x, y) этих чисел.

Например, объем V прямого кругового цилиндра можно считать функцией, зависящей от пары чисел (r, h), в которой r —радиус основания, а h —высота цилиндра:

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

В качестве области определения $U = D(V)$ этой функции естественно рассматривать множество пар положительных чисел:

$$U = \{(r, h) :\ r > 0; h > 0\}.$$

Если, как в нашем примере, функция задается аналитически, то есть формулой, и об области определения ничего не сказано, то тогда ею считают множество всех пар чисел, при которых формула, задающая значение функции, имеет смысл. Это множество называют *естественной областью определения* функции. В нашем примере естественной областью определения функции $V(r, h) = \pi r^2 h$ является множество всех пар чисел. Это множество обозначают символом $\mathbb{R}^2$.

Все, сказанное выше, можно повторить для функции трех и, обощенно, n переменных, с той лишь разницей, что вместо пар (x, y) нужно рассматривать упорядоченные тройки (x, y, z) и «n-ки» $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чисел. Множество всех упорядоченных наборов n чисел обозначают $\mathbb{R}^n$.

Если каждой паре чисел (x, y) поставить в соответствие точку M на плоскости с декартовыми координатами (x, y), то область определения $D(f)$ функции двух переменных представится частью плоскости. Под значением функции f в точке $M(x, y)$ понимают при этом $f(M) = f(x, y)$. Аналогично элементы области определения функции трех переменных удобно представлять точками пространства, в котором введена декартова система координат. Тогда вся область определения представляется частью пространства.

Для значений функции f в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ и далее будем писать или $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, или $f(M)$ —как удобнее.

3.2.2. Окрестности. Области на плоскости и в пространстве

В качестве областей определения функций в математическом анализе удобно (и в большинстве случаев достаточно) рассматривать множества, свойства которых описываются в терминах, приведенных ниже.

Связное множество. *Множество U точек плоскости (или пространства) называется связным, если любые его две точки можно соединить непрерывной линией, каждая точка которой принадлежит множеству U.*

Окрестность. Пусть ε -положительное число. *Множество всех точек M (плоскости или пространства), для которых расстояние $|M_0M|$ до точки M_0 меньше ε, называется* ε-окрестностью *точки M_0.*

Таким образом, в случае, например, пространства ε-окрестность точки M_0 — это шар радиуса ε без границы с центром M_0; на плоскости ε-окрестность точки M_0 — это круг радиуса ε без границы.

Точно так же определяется ε-окрестность точки $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом под расстоянием между точками M_0 и $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ понимается число

$$|M_0M| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Внутренняя точка. *Точка M_0 множества U называется* внутренней, *если найдется хотя бы одна окрестность этой точки, все элементы которой принадлежат множеству U.*

Открытое множество. *Множество U в $\mathbb{R}^n$ называется* открытым, *если каждый его элемент является внутренней точкой.*

Область. *Множество U в $\mathbb{R}^n$ называется областью, если оно открыто и связно.*

Граничная точка. *Граничной точкой множества U называется такая точка, каждая окрестность которой содержит как точки множества U, так и точки, не принадлежащие U.*

Граница. *Множество всех граничных точек области U называется* границей *U и часто обозначается ∂U.*

Замыкание. Замкнутая область. *Результат объединения области U с множеством всех его граничных точек называется замыканием этой области, или замкнутой областью, и обозначается $\overline{U}$.*

Таким образом,

$$\overline{U} = U \cup \partial U.$$

Предельная точка. *Точка M из $\mathbb{R}^n$ называется предельной точкой множества U, если любая окрестность этой точки содержит бесконечно много элементов множества U.*

Заметим, что если U — область, то предельные точки U — это в точности элементы ее замыкания, т. е. замкнутой области $\overline{U}$.

Ограниченное множество. *Множество точек в $\mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно целиком содержится в некоторой окрестности начала координат O.*

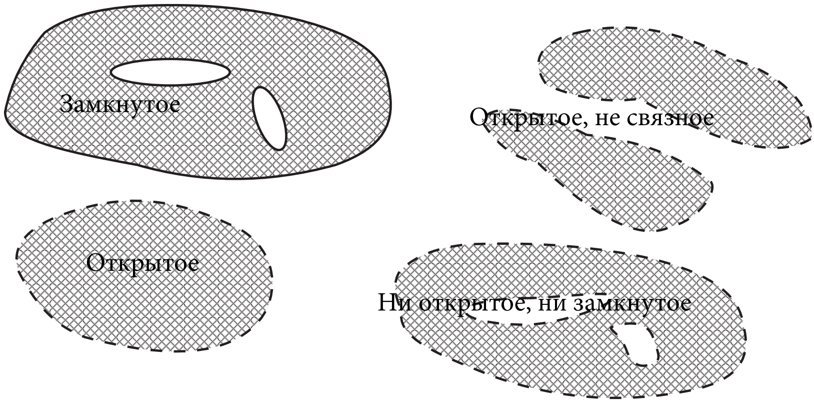


Рис. 3.2

3.2.3. График функции двух переменных

Для наглядного изображения зависимости значений функции двух переменных f от своих аргументов (т. е. независимых переменных) используют график этой функции.

Определение 3.2.1. *Графиком функции $f(x,y)$ называется множество Γ_f точек пространства, имеющих координаты*

$$(x,y,z), \text{где } (x,y) \in D(f), az = f(x,y).$$

Коротко о графике говорят так: график $z = f(x,y)$. Например, для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ графиком является поверхность $z = x^2 + y^2$ — параболоид вращения с осью симметрии Oz (рис. 3.3).

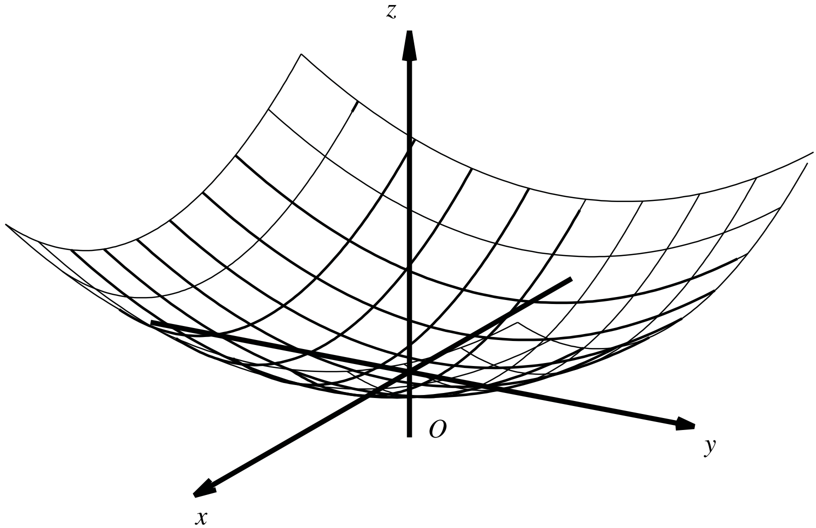


Рис. 3.3

§ 3.3. Предел и непрерывность функции двух переменных

3.3.1. Определения бесконечно малой функции и предела

Пусть областью определения функции f является множество $U \subset \mathbb{R}^n$, а M_0 — его предельная точка.

Определение 3.3.1. *Функция $f(M)$ называется бесконечно малой при стремлении M к M_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любой точки M из δ-окрестности точки M_0 и содержащейся в области определения функции f при $M \neq M_0$ выполняется неравенство*

$$|f(M)| < \varepsilon.$$

Для обозначения бесконечно малых функций часто используют малые буквы начала греческого алфавита $\alpha, \beta, \ldots$

Понятие предела вводится аналогично случаю функции одной переменной.

Определение 3.3.2. *Число A называется пределом функции $f(M)$ при* *стремлении M к M_0, если функция $\alpha(M) = f(M) - A$ является бесконечно малой при стремлении M к M_0.*

Коротко пишут так:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Из определений ясно, что функция $f(M)$ тогда и только тогда бесконечно мала при стремлении M к M_0, когда

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = 0.$$

В явных обозначениях для переменных применяют и другую запись. Так, если точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0), то соотношение $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ представляют в виде

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Обратим внимание на то, что определения бесконечно малой функции и предела не зависят от значений функции в предельной точке, более того, не требуется даже, чтобы эта функция была определена в этой точке.

Существование предела функции $f(M)$ при стремлении M к M_0 предполагает «одинаковость» поведения функции при произвольном «подходе» точки M к M_0. В случае когда число переменных $n > 1$, возможностей «подхода» становится «больше». Поэтому, несмотря на то что определения предела при $n = 1$ и при $n > 1$ выглядят одинаковыми, практическое установление существование предела функции в последнем случае труднее. Рассмотрим, например, поведение функции $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ при $x \to 0$ и $y \to 0$. Пусть точка (x, y) стремится к началу координат вдоль прямой $y = kx$. Если существует предел A функции $f(x, y)$ при стремлении (x, y) к $(0, 0)$, то

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{2xkx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Для разных прямых результаты будут отличаться, поэтому функция $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела при стремлении (x, y) к $(0, 0)$.

Иногда для вычисления предела функции двух переменных удобно перейти к полярным координатам. Например:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \to 0} \rho\cos\varphi\sin^2\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{произведение бесконечно} \\ \text{малой на ограниченную} \end{array} \right| = 0.$$

Доказать существование предела функции двух или большего числа переменных часто оказывается трудной задачей, но если существование предела уже доказано, то для вычисления этого предела бывает полезным использование, так называемого повторного предела. Сформулируем это понятие для функции двух переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_0,y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки.

Определение 3.3.3. *Если существуют пределы*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y); \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

то они называются повторными пределами функции $f(x,y)$ в точке M.

В этом определении подразумевают следующую процедуру вычисления предела. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ вначале для всякого x вычисляется *внутренний* предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. При этом x считается постоянной. В результате получается некоторая функция переменной x

$$g(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Потом вычисляют *внешний* предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Полученное число (если оно существует) и называется повторным пределом. Второй повторный предел определяется аналогично. Заметим, что внутренний, или внешний пределы в определении повторного могут и не существовать. Связь между повторными и двойным пределом устанавливает

Теорема 3.3.1. *Если существует двойной предел, т. е.*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y),$$

и для каждого x существует внутренний предел $g(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, то существует и повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, который совпадает с двойным.

Пример 3.3.1. *Дано, что существует двойной предел*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

Вычислим его, используя повторный. Заметим, что при любом $x \neq 0$ *предел* $\lim\limits_{y \to a} \dfrac{\sin xy}{x} = \dfrac{\sin ax}{x}$. *Повторный предел равен* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$. *По сформулированной выше теореме двойной предел равен* a. *Для вычисления можно было бы использовать и другой повторный предел:*

$$\lim_{y \to a} \lim_{x \to 0} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{y \to a} y = a.$$

3.3.2. Непрерывные функции

Пусть функция f, определена в точке M_0, являющейся предельной точкой области определения.

Определение 3.3.4. *Функция* f *называется непрерывной в точке* M_0, *если*

$$f(M) = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Определение 3.3.5. *Функция* f *называется непрерывной на подмножестве* U *своей области определения, если она непрерывна в каждой точке этого подмножества.*

Таким образом, понятие непрерывности функции нескольких переменных аналогично этому понятию для функции одной переменной. Отметим, что, как и для функций одной переменной, сложение, умножение, деление (с понятной оговоркой о неравенстве знаменателя нулю) и суперпозиция, т. е. подстановка, примененные к непрерывным функциям, дают в результате функции непрерывные.

Теорема 3.3.2 принадлежит Вейерштрассу.

Теорема 3.3.2. *Если замкнутая область* $\overline{U}$ *является ограниченной в* $\mathbb{R}^n$, *а функция* f *непрерывна на* $\overline{U}$, *то она достигает на* $\overline{U}$ *своих наименьшего и наибольшего значений, т. е. в* $\overline{U}$ *существуют такие точки* M_1 *и* M_2, *что при любом* M *из* $\overline{U}$ *выполняются неравенства*

$$f(M_1) \leqslant f(M) \leqslant f(M_2).$$

§ 3.4. Приращения независимых переменных и функции. Частные производные

3.4.1. Приращения независимых переменных и функции

Введем обозначения, используемые далее во всей главе.

Символами Δx, Δy и т. п. будем обозначать приращения, получаемые независимыми переменными. Пусть точки $M(x,y)$, $M_1(x+\Delta x,y)$, $M_2(x,y+\Delta y)$, $M_3(x+\Delta x,y+\Delta y)$ лежат в $D(f)$ — области определения функции f. Разности $\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x,y) - f(x,y)$ и $\Delta_y f(x,y) = f(x,y+\Delta y) - f(x,y)$ называются *частными приращениями*, а разность

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y)$$

полным приращением функции f в точке $M(x,y)$, отвечающим приращениям Δx и Δy независимых переменных.

Заметим, что в словосочетании «полное приращение» слово «полное» часто опускают.

На языке приращений знакомое из предыдущего раздела определение непрерывной в точке $M(x,y)$ функции выглядит так: *Функция f называется непрерывной в точке $M(x,y)$, если приращение $\Delta f(x,y)$ является бесконечно малым при стремлении Δx и Δy к нулю.*

3.4.2. Частные производные

Пусть точка $M(x,y)$ является внутренней точкой области определения $D(f)$ функции f. Это гарантирует, что выражения $\Delta_x f(x,y)$ и $\Delta_y f(x,y)$ определены для любых достаточно малых по абсолютной величине приращений Δx и Δy независимых переменных.

Определение 3.4.1. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}$, *то он называется частной производной функции f по переменной x в точке $M(x,y)$ и обозначается*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \textit{или} \quad f'_x(x,y) \quad \left(\textit{или } \frac{\partial f}{\partial x}(M),\ f'_x(M)\right).$$

Аналогично определяется производная по переменной y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Заметим, что в определении частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ переменная y фиксирована (не получает приращения и, следовательно, не изменяется). Таким образом, предельный переход осуществляется только по одной переменной Δx. Перефразируя определение, скажем, что частная производная по переменной x — это производная функции f, вычисленная в предположении, что y — постоянная.

Рассмотрим примеры.

Пусть $f(x,y) = x^2 - 3xy^3 + y$. Тогда $f'_x(x,y) = 2x - 3y^2$; $f'_y(x,y) = -9xy^2 + 1$.

Другой пример: $f(x,y) = x^y$. Вычисляя частную производную по переменной x, мы должны считать y постоянной. Функция, таким образом, является степенной:

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}.$$

При вычислении производной $f'_y(x,y)$ переменной является x, а y — постоянная. Поэтому дифференцируемую функцию рассматриваем как показательную

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x.$$

Частные производные функции трех и большего числа переменных определяются и вычисляются аналогично.

3.4.3. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Рассмотрим функцию f двух переменных. Как уже отмечалось, ее графиком является поверхность $z = f(x,y)$ в пространстве. Для того чтобы сформулировать геометрический смысл частной производной, например $f'_y(M)$, в точке $M(x,y)$, проведем через точку $P(x,y,f(x,y))$ графика плоскость $x = \text{const}$. Эта плоскость пересечет поверхность $z = f(x,y)$ по линии γ (рис. 3.4). На этой же плоскости $x = \text{const}$ отметим прямую l — пересечение с координатной плоскостью xOy. Выберем на l направление, совпадающее с направлением оси Oy. Теперь сформулируем утверждение, содержащее геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$ — эта производная равна $\operatorname{tg}\beta$, где β — угол, образованный в плоскости $x = \text{const}$ касательной к кривой γ с выбранным направлением на прямой l.

§ 3.5. Дифференцируемость функции двух переменных

3.5.1. Дифференцируемость функции

Определение 3.5.1. *Функция f называется дифференцируемой во внутренней точке $M(x,y)$ области определения, если существуют такие числа K_1 и K_2, что*

$$\Delta f(x,y) = K_1\Delta x + K_2\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \tag{3.5.1}$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ — бесконечно малые функции при стремлении Δx и Δy к нулю.

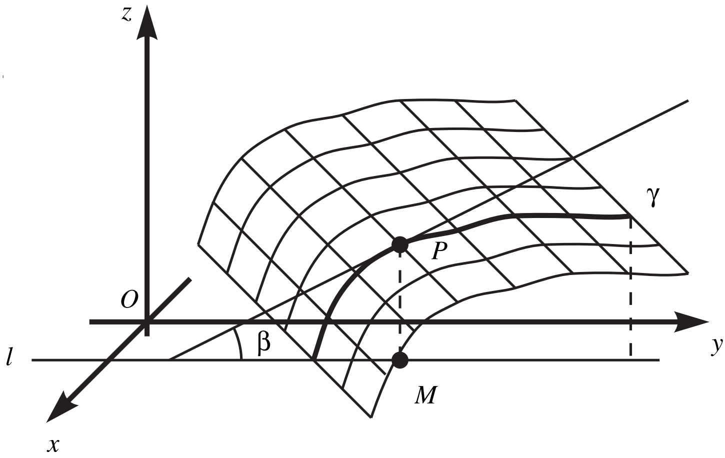


Рис. 3.4

Теорема 3.5.1 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция f дифференцируема в точке M, то существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$.

Доказательство. Если функция f дифференцируема в точке $M(x,y)$, то согласно определению для приращения функции $\Delta f(x,y)$ имеет место представление (3.5.1) с некоторыми числами K_1 и K_2 и бесконечно малыми при Δx и Δy, стремящимися к нулю, α и β. Положив в равенстве (3.5.1) $\Delta y = 0$, получим выражение для частного приращения

$$\Delta_x f(x,y) = K_1\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

Разделив на Δx обе части этого равенства и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(K_1 + \alpha(\Delta x, 0)) = K_1.$$

Таким образом $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = K_1$. Так же можно показать, что $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = K_2$. Теорема доказана.

Для функции одной переменной существование производной — необходимое и достаточное условие дифференцируемости. В случае, когда число независимых переменных более одной, только существования частных производных для дифференцируемости мало. Но если эти производные непрерывны, то этого оказывается достаточно.

Теорема 3.5.2 (достаточное условие дифференцируемости). *Если частные производные функции f существуют в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ и непрерывны в этой точке, то функция f дифференцируема в $M(x,y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства дифференцируемости функции f в точке M согласно определению нужно показать, что приращение функции f представимо в виде

$$\Delta f(x,y) = K_1\Delta x + K_2\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

с некоторыми числами K_1 и K_2 и функциями α и β, бесконечно малыми при стремлении Δx и Δy к нулю. Перепишем $\Delta f(x,y)$ в виде

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + \\ + f(x,y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta_x f(x,y+\Delta y) + \Delta_y f(x,y).$$

Первое слагаемое $\Delta_x f(x,y+\Delta y)$ вычислено при фиксированном значении $y+\Delta y$ второго аргумента и его можно преобразовать с помощью теоремы Лагранжа для функции одной переменной x:

$$\Delta_x f(x,y+\Delta y) = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$$

при некотором значении θ_1, $0 < \theta_1 < 1$. Аналогично найдется такое число $\theta_2 \in (0,1)$, что

$$\Delta_y f(x,y) = f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

При стремлении Δx и Δy к нулю, аргументы частных производных $f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)$ и $f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)$ стремятся к (x,y). Частные производные f'_x и f'_y по условию теоремы непрерывны, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x,y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y)$$

Согласно определению предела функции это означает, что

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha(\Delta x,\Delta y),$$
$$f'_y(x,y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y) + \beta(\Delta x,\Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ — некоторые функции, бесконечно малые при стремлении Δx и Δy к нулю. Таким образом, приращение функции мы представили в виде

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \\ + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y. \quad (3.5.2)$$

Это означает, что функция f дифференцируема в точке $M(x,y)$. Теорема доказана.

Итак, дифференцируемость функции f в точке $M(x,y)$ означает, что ее приращение в этой точке разбивается на сумму двух своих частей. Первая из них

$$f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y$$

зависит от приращений Δx и Δy независимых переменных линейным образом. Оставшаяся вторая часть приращения $\Delta f(M)$ имеет при $\Delta x, \Delta y \to 0$ второстепенное значение по сравнению с первой, так как равна

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

с функциями α и β, бесконечно малыми при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Определение 3.5.2. *Дифференциалом дифференцируемой в точке M функции называется ее главная — линейная часть приращения.*

Дифференциал обозначается символом $df(M)$. Если $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$df(M) = f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + f'_{x_2}(M)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_n}(M)\Delta x_n. \qquad (3.5.3)$$

3.5.2. Приближенные вычисления значений функции с помощью дифференциала

Если приращение дифференцируемой в точке $M(x,y)$ функции f представить приближенно главной линейной частью — дифференциалом, то можно записать:

$$\Delta f(x,y) \approx df(x,y), \qquad (3.5.4)$$

или, что то же самое,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + df(x,y). \qquad (3.5.5)$$

Эти приближенные равенства используют в приближенных вычислениях. Пусть, например, требуется вычислить значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $N(-4,2;3,1)$. Рассмотрим точку $M(-4;3)$. Она выбрана из соображений близости к N и простоты вычислений в этой точке значений функции и ее частных производных.

Найдем выражение дифференциала функции f в произвольной точке:

$$df(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y.$$

Формула (3.5.5) для функции $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ принимает вид

$$\sqrt{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2} \approx \sqrt{x^2+y^2} + \\ + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y.$$

Беря значения $x=-4$, $y=3$, $\Delta x=-0,2$ и $\Delta y=0,1$, получаем
$$f(N)\approx\sqrt{(-4)^2+3^2}+\frac{-4\cdot(-0,2)}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}+\frac{3\cdot 0,1}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=5,22.$$

В заключение заметим, что погрешность приближенных вычислений по формулам (3.5.4) и (3.5.5) тем меньше, чем меньше приращения независимых переменных.

Пример 3.5.1. *Дана функция $z=f(x,y)$ и две точки: $A(x_0,y_0)$ и $B(x_1,y_1)$. Требуется:*

1) вычислить значение z_1 функции в точке B;

2) вычислить приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A, заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом; оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции ее дифференциалом, если $z=x^2-x+y$; $A(1;3)$; $B(0,98;3,01)$.

Решение. 1) Вычислим точное значение z_1 функции в точке $B(0,98;3,01)$
$$z_1=z(B)=0,98^2-0,98+3,01=2,9904.$$

2) Вычислим приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке B. При переходе от точки A к точке B переменные x и y получают приращения
$$\Delta x=x_1-x_0=0,98-1=-0,02;$$
$$\Delta y=y_1-y_0=3,01-3=0,01,$$
а функция $z=f(x,y)$ — приращение $\Delta z=z(B)-z(A)$, т. е.,
$$\Delta z=z(B)-(1^2-1+3)=2,9904-3=-0,0096.$$
Вычисляя приближенное значение функции в точке B, вместо точной формулы
$$z_1=z_0+\Delta z=3+(-0,0096)=2,9904$$
мы используем приближенную
$$\bar{z}_1\approx z_0+dz.$$

Значение $z_0=3$ вычислено выше. Найдем dz. В выражение для дифференциала
$$dz=z'_x(A)\Delta x+z'_y(A)\Delta y$$
подставим значения частных производных
$$z'_x=2x-1;\quad z'_x(A)=2\cdot 1-1=1;\quad z'_y=1,$$
и приращений $\Delta x=-0,02$, $\Delta y=0,01$.
$$dz=1\cdot(-0,02)+1\cdot 0,01=-0,01.$$
Таким образом, приближенное значение
$$\bar{z}_1\approx 3-0,01=2,99.$$

Относительная погрешность, возникающая при замене приращения функции ее дифференциалом, равна

$$\left|\frac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| \cdot 100\% = \frac{-0,0096+0,01}{0,0096} \cdot 100\% = 4,167\ \%.$$

Данный пример показывает, что дифференциал является главной частью приращения функции.

3.5.3. Выражение дифференциала функции через дифференциалы координатных функций

Положим в формуле (3.5.3) $f(x,y) = x$.

Так как в этом случае $f'_x = 1$, то $df(x,y) = \Delta x$, или в короткой записи $dx = \Delta x$. Аналогично получим равенство $dy = \Delta y$. Таким образом дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных. Это позволяет выразить дифференциал любой функции через дифференциалы независимых переменных x и y

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy. \tag{3.5.6}$$

Для функции трех переменных соответствующая формула имеет вид

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz.$$

В случае большего числа переменных формула аналогична.

3.5.4. Дифференцируемость, касательная плоскость и нормаль к графику функции двух переменных

Рассмотрим график Γ_f функции двух переменных $z = f(x,y)$. В области определения функции f выделим внутреннюю точку $M(x_0,y_0)$, а на графике — соответствующую ей точку $P(x_0,y_0,z_0)$, $z_0 = f(M)$. Пусть функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

задают параметрически линию в области определения, проходящую через точку M. Это значит, что при некотором значении $t = t_0$ $x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0$. Если определить вектор-функцию равенством $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t),y(t)))$, то при изменении параметра t конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ будет двигаться по некоторой линии γ, на графике Γ_f и при $t = t_0$ пройдет через точку P. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$, а функция f дифференцируема в точке M, то вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и линия γ в точке P имеет касательный вектор. В самом деле, из дифференцируемости функции f в точке M следует, что для приращения вектор-функции $\Delta\mathbf{r}(t_0)$ имеет место представление

$$\Delta\mathbf{r}(t_0) = (\Delta x(t_0), \Delta y(t_0), \Delta f(x_0, y_0)) = \\ = (\Delta x(t_0), \Delta y(t_0), f'_x(M)\Delta x(t_0) + f'_y(M)\Delta y(t_0) + \\ + \alpha \cdot \Delta x(t_0) + \beta \cdot \Delta y(t_0))$$

с бесконечно малыми при стремлении Δx и Δy к нулю функциями α и β. Если $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$, то и непрерывны при $t = t_0$. Следовательно, $\Delta x(t_0)$ и $\Delta y(t_0)$ стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$. Поэтому при $\Delta t \to 0$ стремятся к нулю и бесконечно малые α и β. Из дифференцируемости $x(t)$ и $y(t)$ при $t = t_0$ следует, что существует предел

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \left(x'(t_0), y(t_0), f'_x(M)x'(t_0) + f'_y(M)y(t_0)\right).$$

Эта производная и является касательным к линии γ вектором в точке P в соответствии с геометрическим смыслом производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Заметим, что при любом выборе функций $x(t)$ и $y(t)$, т. е. при любом описанном выше построении линии γ, касательный к линии γ вектор имеет координаты вида $\tau = (u, v, f'_x(M)u + f'_y(M)v)$, и перпендикулярен вектору $\mathbf{n} = (-f'_x(M), -f'_y(M), 1)$ — скалярное произведение $(\tau, \mathbf{n}) = 0$. Это означает, что все эти векторы с общим началом в точке P лежат в одной общей плоскости, нормалью которой и служит вектор $\mathbf{n}$.

Рассмотрим теперь произвольную поверхность S в пространстве и точку P на этой поверхности. *Если через эту точку можно провести такую плоскость τ, которая содержит касательные векторы к любой, проведенной через точку P кривой на поверхности S, то плоскость τ называется касательной к поверхности S в точке P (рис. 3.5).*

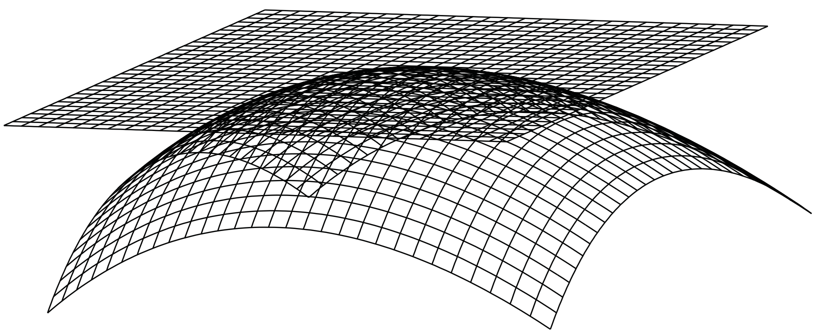


Рис. 3.5

Принимая во внимание это определение и предшествующее ему изложение, приходим к выводу: *если функция f дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$,* *то существует касательная плоскость τ к графику Γ_f функции f, проведенная через точку $P(x_0, y_0, f(M))$. Вектор $\mathbf{n} = (-f'_x(M), -f'_y(M), 1)$ является нормалью этой плоскости.*

Найдем уравнение этой плоскости. Для этого воспользуемся известным из аналитической геометрии уравнением плоскости, содержащей точку $P(x_0, y_0, z_0)$ с известным вектором нормали $\mathbf{n}$:

$$-f'_x(M)(x - x_0) - f'_y(M)(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0,$$

или в общепринятом виде

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{3.5.7}$$

Нормалью к графику $z = f(x, y)$ в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ называется прямая, проведенная через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости τ. Параметрические уравнения этой прямой:

$$\nu : \begin{cases} x = x_0 - f'_x(x_0, y_0)t; \\ y = y_0 - f'_y(x_0, y_0)t; \\ z = z_0 + t. \end{cases} \tag{3.5.8}$$

3.5.5. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных

Выясним геометрический смысл дифференциала функции $df(x_0, y_0)$. Для этого вычислим приращение линейной функции

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

графиком которой является касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $P(x_0, y_0, z_0)$.

Приращениям Δx и Δy независимых переменных соответствует приращение этой линейной функции

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Мы видим, что результат совпадает с дифференциалом $df(x_0, y_0)$. Таким образом, *дифференциал функции двух переменных совпадает с приращением линейной функции, графиком которой является касательная плоскость в соответствующей точке графика функции.* Это и есть геометрический смысл дифференциала.

§ 3.6. Дифференцируемость сложных и неявных функций

3.6.1. Дифференцируемость и производные сложной функции

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$ и пару функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ переменной t. Если функция f определена для значений $x = \varphi(t)$ и

$y = \psi(t)$, то можно образовать новую, *сложную функцию* переменной t

$$g(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Теорема 3.6.1. *Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция f дифференцируема в точке $M(x,y) = M(\varphi(t), \psi(t))$, то функция $g(t)$ дифференцируема в точке t и ее производную можно вычислить по формуле*

$$g'(t) = f'_x(M)\varphi'(t) + f'_y(M)\psi'(t). \tag{3.6.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем приращение сложной функции $g(t)$

$$\Delta g(t) = f(\varphi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t)) - f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть при изменении аргумента от t до $t+\Delta t$ функция φ получила приращение $\Delta\varphi(t)$, а функция $\psi(t)$ — приращение $\Delta\varphi(t)$. Тогда можно записать:

$$\Delta g(t) = f(\varphi(t) + \Delta\varphi(t)), \psi(t) + \Delta\psi(t)) - f(\varphi(t), \psi(t)) = \Delta f(M).$$

По условию функция f дифференцируема в точке $M(\varphi(t), \psi(t))$, поэтому существуют такие бесконечно малые при стремлении Δx и Δy к нулю функции $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$, что

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \\ + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Отсюда для приращения функции g получаем

$$\Delta g(t) = f'_x(M)\Delta\varphi(t) + f'_y(M)\Delta\psi(t) + \\ + \alpha(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))\Delta\varphi(t) + \beta(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))\Delta\psi(t).$$

Разделим обе части последнего равенства на Δt:

$$\frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = f'_x(M)\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} + f'_y(M)\frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t} + \\ + \alpha(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} + \beta(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))\frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}.$$

При стремлении Δt к нулю отношение $\dfrac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}$ стремится к $\varphi'(t)$, а $\dfrac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}$ стремится к $\psi'(t)$ — это следует из дифференцируемости функций φ и ψ в точке t. Из непрерывности дифференцируемой функции также следует, что $\Delta\varphi(t)$ и $\Delta\psi(t)$ стремятся к нулю при стремлении Δt к нулю. Поэтому $\alpha(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))$ и $\beta(\Delta\varphi(t), \Delta\psi(t))$ тоже стремятся к нулю. Окончательно получаем, что существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = f'_x(M)\varphi'(t) + f'_y(M)\psi'(t),$$

или $g'(t) = f'_x(M)\varphi'(t) + f'_y(M)\psi'(t)$.

Теорема доказана.

Следствие 3.6.1. *Если $f(x,y)$ — дифференцируемая функция двух переменных, а $y = g(x)$ — дифференцируемая функция одной переменной, то функция одной переменной $z = f(x, g(x))$ — дифференцируема, и*

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dg}{dx}(x).$$

Рассмотрим еще один случай образования сложной функции. Пусть дана функция двух переменных $f(x,y)$. Если x и y не будучи независимыми являются функциями двух других переменных u и v

$$x = \varphi(u,v); \quad y = \psi(u,v),$$

то получается сложная функция, зависящая от этих переменных:

$$g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)).$$

Аналогично тому, как было показано для функции $f(\varphi(t), \psi(t))$, можно вывести формулы:

$$g'_u(u,v) = f'_x(x,y) \cdot \varphi'_u(u,v) + f'_y(x,y) \cdot \psi'_u(u,v), \tag{3.6.2}$$

$$g'_v(u,v) = f'_x(x,y) \cdot \varphi'_v(u,v) + f'_y(x,y) \cdot \psi'_v(u,v). \tag{3.6.3}$$

В этих формулах частные производные функции f вычислены при

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v).$$

Подобные формулы можно привести и для других случаев образования сложной функции.

Приведем пример использования полученных формул. Пусть $g(t) = t^t$ и нам нужно вычислить $g'(t)$. Для этого можно воспользоваться логарифмической производной, как это делалось для функции одной переменной, а можно рассуждать так: функция $g(t)$ есть результат образования сложной функции при подстановке в функцию двух переменных $f(x,y) = x^y$ вместо x и y двух одинаковых функций переменной t: $x = \varphi(t) = t$, $y = \psi(t) = t$. Тогда по формуле

$$g'(t) = f'_x(x,y)\varphi'(t) + f'_y(x,y)\psi'(t)$$

получаем

$$(t^t)' = (yx^{y-1})1 + (x^y \ln x)1 = tt^{t-1} + t^t \ln t = t^t(1 + \ln t).$$

Результат тот же, что и при логарифмическом дифференцировании.

3.6.2. Производные неявных функций

Предположим, что дифференцируемая функция $f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y) = 0$, иными словами $y = f(x)$ есть решение этого уравнения. Будем предполагать, что F — дифференцируемая функция двух переменных. Найдем формулу, выражающую производную $f'(x)$ через частные производные функции F.

Из определения неявной функции следует, что

$$F(x, f(x)) = 0$$

для всех x из области определения функции $f(x)$. Продифференцируем это тождество по x и, используя формулу производной сложной функции, получим

$$F'_x(x,y)1 + F'_y(x,y)f'(x) = 0.$$

Таким образом, при $F'_y(x,y) \neq 0$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{3.6.4}$$

Аналогично для функции двух переменных $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением

$$F(x,y,z) = 0$$

при $F'_z(x,y,z) \neq 0$, $z = f(x,y)$, можно получить формулы:

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{3.6.5}$$

Рассмотрим пример.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $y + xe^y = 1$. Таким образом, в нашем примере $F(x,y) = y + xe^y - 1$ и

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

Если нам известна точка $M(x,y)$ на графике функции $y = f(x)$, то можно вычислить значение $f'(x)$. Например, в нашем случае $M(0,1)$ — точка графика (проверьте!). Поэтому

$$f'(0) = -\frac{e^1}{1+0e^1} = -e.$$

Пример 3.6.1. *Функция $z = f(x,y)$ задана неявно уравнением*

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3 - xyz = 0.$$

1. Убедитесь в том, что $f(-1,0) = 1$.

2. Найдите частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и вычислите значения $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,0)$.

3. Найдите уравнение касательной плоскости τ и нормали ν к поверхности

$$S\colon\ F(x,y,z) = 0$$

в точке $M(x_0,y_0,z_0) = M(-1,0,1)$.

Решение. 1) Подставим значения $x = -1$ и $y = 0$ в уравнение, задающее функцию $z = f(x,y)$:

$$1 - z^3 = 0.$$

Очевидно, $z = 1$ — единственное решение этого уравнения. Следовательно,

$$z(-1,0) = f(-1,0) = 1.$$

2) Частные производные функции f найдем из формул

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x-yz}{-3z^2-xy}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y-xz}{-3z^2-xy},$$

Откуда $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{3}$.

3) При нахождении частных производных функции f использованы значения производных функции F:

$$F'_x(M) = -2; \quad F'_y(M) = 1; \quad F'_z(M) = -3.$$

Подставляя эти числа в уравнения касательной плоскости

$$\tau\colon\ F_x(M)(x-x_0) + F'_y(M)(y-y_0) + F'_z(M)(z-z_0) = 0$$

и нормали

$$\nu\colon\ \frac{x-x_0}{F'_x(M)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M)},$$

получим

$$\tau\colon\ 2x - y + 3z - 1 = 0; \quad \nu\colon\ \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}.$$

§ 3.7. Производная по направлению

3.7.1. Определение производной по направлению

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — внутренняя точка области определения функции двух переменных f. Эту точку можно двигать в разных направлениях, оставаясь в области определения — в положительном направлении оси Ox, в направлении биссектрисы третьего координатного угла — в любом другом. При этом функция будет получать разные приращения и скорость изменения функции будет разной. При перемещении точки в положительном направлении оси Ox скорость изменения равна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = f'_x(M_0).$$

При перемещении точки вдоль оси Oy эта скорость

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(M_0).$$

Если теперь задано произвольное направление s, т. е. луч, исходящий из точки M_0, то скорость изменения значений функции при движении точки вдоль этого луча можно определить так. Пусть M — точка на луче s, $M \neq M_0$.

Определение 3.7.1. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|},$$

то его называют производной функции f по направлению s в точке M_0 и обозначают $\frac{\partial f}{\partial s}(M_0)$.

Замечание 3.7.1.

1. Предел в определении производной по направлению есть предел функции одной переменной, если этой переменной считать расстояние между точками M и M_0.

2. Если направление s совпадает с направлением оси Ox, то $\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$, если направление s совпадает с направлением оси Oy, то $\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ и т. д.

Таким образом, понятие производной функции по направлению обобщает понятие частной производной.

Используя только определение, вычислять производную по направлению неудобно. Выведем формулы, связывающие производную функции по произвольному направлению s с частными производными. Остановимся для определенности на функции $f(x, y, z)$ трех переменных и точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если направление s образует с координатными осями углы α — с осью Ox, β — с осью Oy и γ — с осью Oz, то для координат точки $M(x, y, z)$ на луче s выполняются равенства:

$$x = x_0 + \rho \cos \alpha; \quad y = y_0 + \rho \cos \beta; \quad z = z_0 + \rho \cos \gamma,$$

где $\rho = |MM_0|$. Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma)}{\rho},$$

таким образом, производная по направлению s в точке M_0 есть производная сложной функции $g(\rho) = f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma)$, вычисленная при $\rho = 0$. По формуле производной сложной функции

$$g'(\rho) = f'_x(x,y,z)x'_\rho + f'_y(x,y,z)y'_\rho + f_z(x,y,z)z'_\rho =$$
$$= f'_x(x,y,z)\cos\alpha + f_y(x,y,z)\cos\beta + f'_z(x,y,z)\cos\gamma.$$

Окончательно, при $\rho = 0$ получаем формулу

$$\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma. \qquad (3.7.1)$$

3.7.2. Производная по направлению. Градиент функции. Геометрический смысл градиента

Введем для рассмотрения вектор, координатами которого являются частные производные функции f, вычисленные в точке M_0

$$\operatorname{grad} f(M_0) = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)).$$

Этот вектор называется *градиентом функции f в точке* M_0 и обозначается еще символом $\nabla f(M_0)$ (∇ читается «набла»). Формулу производной функции f по направлению s

$$\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma$$

можно переписать так:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = (\mathbf{e}, \nabla f(M_0)),$$

где $\mathbf{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — вектор единичной длины, направленный вдоль луча s. Используя формулу вычисления скалярного произведения через проекцию, получаем, что производная функции f по направлению s совпадает с проекцией градиента функции f на это направление (рис. 3.6):

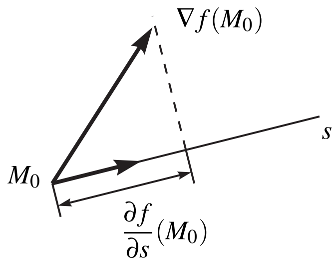


Рис. 3.6

$$\frac{\partial f}{\partial s}(M_0) = \operatorname*{pr}_s \nabla f(M_0). \qquad (3.7.2)$$

Вспомнив смысл производной функции по направлению (предыдущий раздел), заключаем: 1) направление градиента функции совпадает с направлением, в котором нужно перемещать точку, чтобы получить наибольшую скорость возрастания значений функции; 2) эта скорость равна длине градиента.

Эти два соображения и определяют геометрический смысл градиента.

§ 3.8. Линии и поверхности уровня. Уравнения касательной и нормали

3.8.1. Линии и поверхности уровня

Определение 3.8.1. *Множество точек $M(x,y) \in D(f)$, для которых $f(x,y) = C$, где C — некоторая постоянная, называется линией уровня C функции двух переменных f.*

Аналогично множество точек $M(x,y,z) \in D(f)$, для которых $f(x,y,z) = C$, называется поверхностью уровня C функции трех переменных f.

То, что L_C является линией уровня C или поверхностью уровня C функции f, коротко можно записать так $L_C\colon f(x,y) = C$ или $L_C\colon f(x,y,z) = C$. Приведем несколько примеров.

1. $f(x,y) = x + y^2$. Уравнение линии уровня $L_C\colon x + y^2 = C$. Несколько линий выглядят так, как показано на рис. 3.7.

2. $f(x,y) = \ln(x+y)$. Уравнение линии уровня C
$$L_C\colon \ln(x+y) = C, \quad \text{или} \quad x + y = e^C.$$
Вид линий уровня приведен на рис. 3.8.

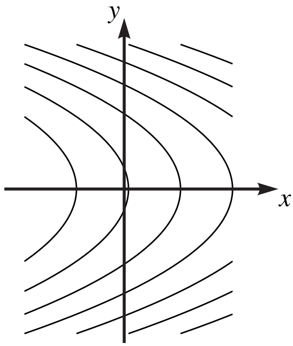


Рис. 3.7

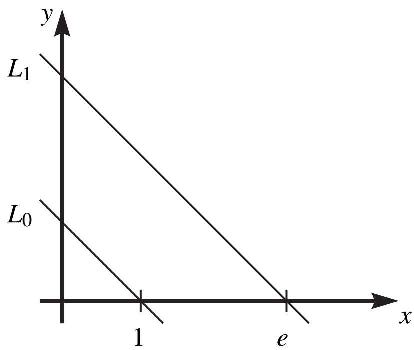


Рис. 3.8

3. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} + \dfrac{z^2}{9}$. Уравнение поверхности уровня C^2
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = C^2, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(2C)^2} + \frac{y^2}{C^2} + \frac{z^2}{(3C)^2} = 1.$$
Это уравнение трехосного эллипсоида с полуосями $2C$, C и $3C$ (рис. 3.9).

Заметим, что не всегда линии уровня являются линиями, а поверхности уровня — поверхностями. Например, для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ линии уровня задаются уравнениями $L_C\colon x^2 + y^2 = C$. Для $C < 0$ $L_C = \emptyset$; $L_0 = \{O\}$ — множество из одной точки — начала координат; для $C > 0$ L_C — окружность радиуса $\sqrt{C}$ с центром в начале координат.

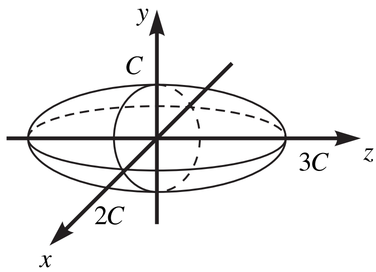


Рис. 3.9

3.8.2. Уравнения касательных и нормалей

Найдем уравнение касательной прямой к линии уровня

$$L_C\colon f(x,y) - C = 0$$

в точке M_0, когда $f'_y(M_0) \neq 0$. Можно считать L_C графиком неявно заданной функции $y = \varphi(x)$.

Уравнение касательной прямой в точке M_0

$$\tau\colon y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

По формуле производной неявной функции

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)},$$

следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}(x - x_0),$$

или

$$f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) = 0. \qquad (3.8.1)$$

Так же доказывается. что это уравнение есть уравнение касательной прямой и в случае, когда $f'_x(M_0) \neq 0$.

Аналогично для функции трех переменных, если в точке M_0

$$\big(f'_x(M_0)\big)^2 + \big(f'_y(M_0)\big)^2 + \big(f'_z(M_0)\big)^2 \neq 0,$$

то уравнение касательной плоскости к поверхности L_C в точке M_0 имеет вид

$$\tau\colon f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) + f'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \qquad (3.8.2)$$

Коэффициенты перед переменными в этих уравнениях совпадают с координатами градиента функции f в точке M_0. Вспоминая геометрический смысл параметров уравнений прямой на плоскости и плоскости в пространстве, приходим к выводу: *координаты градиента совпадают с координатами* *вектора нормали к касательной прямой (или, соответственно, плоскости), проведенной к линии (поверхности) уровня функции.* Из условия перпендикулярности прямых следует, что уравнение

$$\nu\colon\ f'_y(M_0)(x-x_0)-f'_x(M_0)(y-y_0)=0 \tag{3.8.3}$$

есть уравнение прямой, перпендикулярной к касательной τ, проведенной к линии уровня L_C в точке M_0. Прямая ν называется *нормалью к линии* L_C. Аналогично уравнения

$$\nu\colon\ \begin{cases} x=x_0+f'_x(M_0)t;\\ y=y_0+f'_y(M_0)t;\\ z=z_0+f'_z(M_0)t \end{cases} \tag{3.8.4}$$

являются параметрическими уравнениями перпендикулярной к касательной плоскости τ прямой, которая называется *нормалью к поверхности уровня* L_C в точке M_0.

§ 3.9. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

3.9.1. Частные производные высших порядков

Если вычислены частные производные некоторой функции f во всех внутренних точках ее области определения, то эти производные можно рассматривать как новые функции. Их частные производные называются *частными производными функции f второго порядка.* Аналогично частные производные производных второго порядка называются частными производными третьего порядка и т. д.

Рассмотрим все частные производные второго порядка функции двух переменных $f(x,y)$:

$$f''_{xx}(x,y)=(f'_x)'_x(x,y);\quad f''_{yy}(x,y)=(f'_y)'_y(x,y);$$
$$f''_{xy}(x,y)=(f'_x)'_y(x,y);\quad f''_{yx}(x,y)=(f'_y)'_x(x,y).$$

Последние две частные производные называются *смешанными* и отличаются друг от друга тем, что вычислены, как говорят, в разном порядке: 1) функцию f дифференцировали сначала по переменной x затем результат дифференцировали по переменной y, 2) поступили наоборот. Проясняет ситуацию следующая

Теорема 3.9.1 (Шварца). *Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то они совпадают: $f''_{xy}=f''_{yx}$.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для функции большего числа переменных. Таким образом, для функции, например трех переменных, различных производных второго порядка не девять, а всего шесть (если, конечно, они непрерывны).

Замечание 3.9.1. *Для производных более высоких порядков приведенные обозначения неудобны. Кроме них используют следующие:*

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f'''_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}; \quad \dots$$

Пример 3.9.1.

1. $f(x,y) = x^2y - 2xy^3 - x^4$.

$$f'_x(x,y) = 2xy - 2y^3 - 4x^3; \qquad f'_y(x,y) = x^2 - 6xy^2;$$
$$f''_{xx}(x,y) = 2y - 12x^2; \qquad f''_{yy}(x,y) = -12xy;$$
$$f''_{xy} = 2x - 6y^2.$$

2. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad f''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$
$$f''_{xy} = \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2}.$$

3.9.2. Дифференциалы высших порядков

Если дифференциал функции двух переменных

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

рассматривать как функцию переменных x и y при неизменных дифференциалах dx и dy независимых переменных, то можно вычислить дифференциал этой функции, *подставляя в результат прежние значения для приращений независимых переменных* $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$d(df(x,y)) = (df'_x(x,y))dx + (df'_y(x,y))dy =$$
$$= f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dx\,dy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2.$$

Это выражение называют дифференциалом второго порядка функции f и обозначают $d^2 f(x,y)$. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка

$$d^3 f(x,y)) = d(d^2 f(x,y)) = f'''_{xxx}(x,y)(dx)^3 + \\ + 3f'''_{xxy}(x,y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x,y)(dy)^3$$

и дифференциалы высших порядков. Дифференциалы высших порядков для функций большего числа переменных определяются по такой же схеме.

3.9.3. Формула Тейлора

В дифференциальном исчислении функции одной переменной была получена формула Тейлора. Аналогичную формулу можно вывести для функции двух и большего числа переменных. Если функция f двух переменных имеет в точке $M(x,y)$ и в некоторой ее окрестности частные производные порядков 1, 2, ..., n, то для этой функции имеет место формула Тейлора порядка n в точке $M(x,y)$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + df(x,y) + \\ + \frac{1}{2!}d^2 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x,y) + r_n(\Delta x, \Delta y) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x,y)}{k!} + r_n(\Delta x, \Delta y). \quad (3.9.1)$$

В этой формуле для единообразия записи слагаемых использованы соглашения

$$d^0 f(x,y) = f(x,y) \quad \text{и} \quad 0! = 1.$$

Выражение $r_n(\Delta x, \Delta y)$ имеет вид

$$\alpha_n(\Delta x, \Delta y)\Big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\Big)^{n/2}$$

с бесконечно малой при стремлении Δx и Δy к нулю функцией α_n, вид которой зависит от функции f и точки $M(x,y)$. Выражение $r_n(\Delta x, \Delta y)$ называется остаточным членом в формуле Тейлора порядка n. Если хотя бы одна из частных производных порядка 1, 2, ..., n отлична от нуля, то отношение остаточного члена к сумме остальных слагаемых в правой части формулы Тейлора стремится к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy. Говорят, что $r_n(\Delta x, \Delta y)$ есть выражение более высокого порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми и это позволяет записать приближенную формулу

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x,y)}{k!}.$$

Погрешность этой формулы и есть величина остаточного члена $r_n(\Delta x, \Delta y)$. Она тем меньше, чем меньше Δx и Δy.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, частные производные которой до второго порядка включительно были вычислены в разделе 3.9.1. Первый и второй дифференциалы этой функции имеют вид

$$df(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy;$$

$$d^2f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(dx)^2 + \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(dy)^2.$$

Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции f в точке $M(1,1)$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arctg}\frac{1+\Delta y}{1+\Delta x} = \\
&\qquad = \operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta y + \frac{1}{4}(\Delta x)^2 - \frac{1}{4}(\Delta y)^2 + r_2(\Delta x, \Delta y) = \\
&\qquad\qquad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta y + \frac{1}{4}(\Delta x)^2 - \frac{1}{4}(\Delta y)^2 + r_2(\Delta x, \Delta y).
\end{aligned}$$

В заключение заметим, что для функции большего числа переменных основные формулы двух последних разделов остаются неизменными:

$$d^{k+1}f(M) = d(d^kf(M)),$$

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_m+\Delta x_m) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^kf(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{k!} + r_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&r_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m) = \alpha_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)\times \\
&\qquad \times\Big((\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2\Big)^{n/2}
\end{aligned}$$

с бесконечно малой при стремлении $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ к нулю функцией α_n.

§ 3.10. Отображения $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$

3.10.1. Параметрическое задание поверхностей

Пусть для каждой пары $(u,v) \in G$ некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ задан радиус-вектор $\mathbf{r}(u,v)$ точки с декартовыми координатами $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Тем самым задано отображение $\mathbf{r}(u,v)$ области G в пространство $\mathbb{R}^3$. Будем называть это отображение *непрерывным, дифференцируемым* и т. п., если таковыми являются *координатные функции*

$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$. При изменении переменных (u,v) в пределах G конец радиус-вектора $\mathbf{r}(u,v)$ пробегает в $\mathbb{R}^3$ некоторое множество S, которое, если отображение $\mathbf{r}$ непрерывно, называют *поверхностью, заданной параметрически функциями* $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Переменные (u,v) называют *параметрами*.

Рассмотрим образы координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ при параметризации поверхности S дифференцируемыми координатными функциями. Если держать значение параметра v постоянным, а значение u изменять, то концы радиус-векторов $\mathbf{r}(u,v)$ вектор-функции скалярного аргумента u вычерчивают на поверхности S линию. Производная этой вектор-функции есть касательный к линии вектор, длина которого равна скорости движения точки $\mathbf{r}(u,v)$. Таким образом, частную производную по переменной u отображения $\mathbf{r}(u,v)$ можно понимать, как вектор, касательный к поверхности S (рис. 3.10). Точно так же получаем, что $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ — еще один касательный вектор. Оба вектора лежат в касательной к поверхности S плоскости. Если отображение $\mathbf{r}$ *невырожденно, что означает неколлинеарность векторов* $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, то можно найти их общий перпендикуляр, являющийся перпендикуляром к касательной плоскости, т. е. вектор нормали к поверхности S:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v).$$

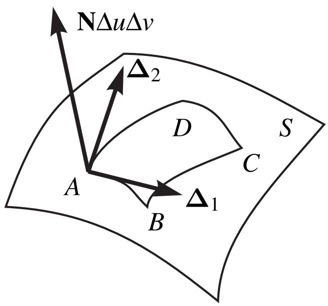


Рис. 3.10

Рассмотрим образ малого прямоугольника с вершинами

$$(u,v), \quad (u+\Delta u, v), \quad (u, v+\Delta v), \quad (u+\Delta u, v+\Delta v)$$

при отображении $\mathbf{r}$. Образом этого прямоугольника является криволинейный четырехугольник с соответствующими вершинами A, B, D, C. Так как четырехугольник мал, то приближенно его стороны можно считать отрезками прямых, т. е.

$$\overrightarrow{AB} \approx \mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u,v);$$

$$\overrightarrow{AD} \approx \mathbf{r}(u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v);$$

$$\overrightarrow{BC} \approx \mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u+\Delta u, v);$$

$$\overrightarrow{DC} \approx \mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u, v+\Delta v).$$

Выразим в этих выражениях значения $\mathbf{r}(u+\Delta u, v)$, $\mathbf{r}(u, v+\Delta v)$ и $\mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)$ по формуле Тейлора первого порядка, заменяя многоточием бесконечно малые порядка выше первого.

$$\overrightarrow{AB} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Delta u + \ldots = \mathbf{\Delta}_1 + \ldots$$

$$\overrightarrow{AD} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Delta v + \ldots = \mathbf{\Delta}_2 + \ldots$$

$$\overrightarrow{BC} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Delta v + \ldots = \mathbf{\Delta}_2 + \ldots$$

$$\overrightarrow{DC} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Delta u + \ldots = \mathbf{\Delta}_1 + \ldots$$

Эти соотношения свидетельствуют о том, что с точностью до бесконечно малых порядка выше первого четырехугольник $ABCD$ можно считать параллелограммом, построенным на векторах $\mathbf{\Delta}_1$ и $\mathbf{\Delta}_2$ как на сторонах.

Численно площадь параллелограмма равна длине векторного произведения его сторон-векторов, и мы получаем выражение для площади образа малого прямоугольника:

$$S_{ABCD} \approx |\mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_2| = |\mathbf{N}|\,\Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right| \Delta u \Delta v.$$

Это равенство можно читать так: *длина вектора нормали*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$$

совпадает с коэффициентом изменения бесконечно малой площади при отображении

$$(u,v) \to \mathbf{r}(u,v).$$

Важный частный случай. Пусть параметры (u,v) совпадают с координатами (x,y). В этом случае координатные функции отображения $\mathbf{r}$ имеют вид

$$x = x; \quad y = y; \quad z = f(x,y),$$

а построенные выше касательные к поверхности S векторы равны

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x,y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x,y) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)),$$

вектор нормали $\mathbf{N} = \{-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1\}$; его длина

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}.$$

3.10.2. Криволинейные координаты и замена переменных

Если координатная функция $z \equiv 0$, то поверхность S есть часть плоскости xOy и отображение $\mathbf{r}(u,v)$ можно рассматривать как отображение области G переменных (u,v) в область G' переменных (x,y) (рис. 3.11).

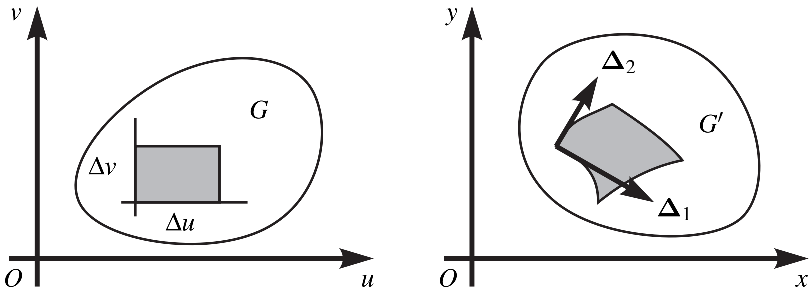


Рис. 3.11

Векторное произведение

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v),$$

рассмотренное в предыдущем разделе, имеет только одну, третью, отличную от нуля координату

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *якобианом отображения*

$$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v)),$$

или *функциональным определителем* и, как было показано выше, его абсолютная величина равна коэффициенту изменения малой площади при отображении

$$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v)).$$

Чтобы прояснить смысл знака якобиана, для каждой точки области M рассмотрим обе пары координат, определяющих положение точки на плоскости. Пара (x,y) — декартовы координаты точки, пара (u,v), котрая определяет положение точки с помощью вычисляемых по ним значениям координатных функций $(x(u,v), y(u,v))$, называется парой криволинейных координат той же точки. Говорят, что *пара векторов*, чьи координаты образуют якобиан, *имеет правую ориенацию, если вращение от первого ко второму по наименьшему углу производится против часовой стрелки* (как от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{j}$). *Противоположная ориентация называется левой.* Говорят, что отображение $(u,v) \to (x,y)$ не изменяет ориентации, если для всех (u,v) пара векторов

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right), \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right)$$

имеет правую ориентацию. Можно показать, что *отображение* $(u, v) \to (x, y)$ *тогда и только тогда не меняет ориентации, когда в каждой точке якобиан* $J(u, v) > 0$.

Аналогично определяется и интерпретируется якобиан отображения пространств трех измерений

$$(u, v, w) \to (x, y, z).$$

При этом положительному якобиану соответствуют отображения с правыми тройками векторов

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right).$$

§ 3.11. Экстремум функции двух переменных

3.11.1. Основные определения

Рассмотрим функцию f, определенную в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3.11.1. *Точка M_0 называется точкой минимума (максимума) функции f, если для всех M из некоторой окрестности точки M_0 при $M \neq M_0$ выполняется неравенство*

$$f(M) \geqslant f(M_0) \quad (f(M) \leqslant f(M_0)). \tag{3.11.1}$$

Точка M_0 называется точкой экстремума функции f, если она является или точкой минимума или точкой максимума этой функции.

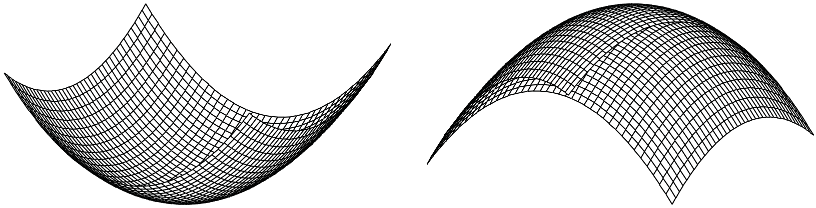
Точку M_0 называют точкой строгого максимума (минимума), если неравенства (3.11.1) *являются строгими.*

График дифференцируемой в окрестности точки экстремума M_0 функции двух переменных имеет в окрестности этой точки характерный вид (рис. 3.12).

3.11.2. Необходимое условие экстремума

Теорема 3.11.1. *Если M_0 — точка экстремума функции f, то каждая частная производная функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

Доказательство. Пусть для определенности число переменных равно двум, и, например, M_0—точка минимума функции f. Тогда согласно определению если переменная x достаточно близка к x_0, то $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$. Для функции $f(x, y_0)$ одной переменной x это означает, что x_0 является точкой минимума этой функции, и по необходимому условию экстремума функции



минимум максимум

Рис. 3.12

одной переменной ее производная в точке x_0, равная по определению частной производной $f'_x(x_0, y_0)$, или равна нулю, или не существует. То же самое можно доказать и для частной производной $f'_y(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

Определение 3.11.2. *Точка M_0 называется критической точкой функции, если каждая частная производная в этой точке или равна нулю, или не существует.*

Таким образом, необходимое условие экстремума коротко формулируется так: *любая точка экстремума функции является ее критической точкой.*

Дальше станет ясно, что обратное утверждение неверно.

3.11.3. Достаточное условие экстремума функции двух переменных

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные первого и второго порядков. Обозначим для краткости $f''_{xx} = A$; $f''_{xy} = B$; $f''_{yy} = C$; $AC - B^2 = \Delta$. Аналогом достаточного условия экстремума функции одной переменной является следующая

Теорема 3.11.2. *Пусть M_0 — критическая точка функции f. Тогда:*
1) если $A > 0$ и $\Delta > 0$, то M_0 — точка минимума функции f;
2) если $A < 0$ и $\Delta > 0$, то M_0 — точка максимума функции f;
3)если $\Delta < 0$, то M_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. Для доказательства теоремы представим значения функции f с помощью формулы Тейлора 2-го порядка, учитывая, что частные производные первого порядка равны в точке M_0 нулю.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)+ \\ +\frac{1}{2}\left(A(\Delta x)^2+2B\Delta x\Delta y+C(\Delta y)^2\right)+r_2(\Delta x,\Delta y)$$

Введем полярные координаты для приращений: $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$. Учитывая, что остаточный член в формуле Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ^2, перепишем формулу Тейлора в виде

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)+ \\ +\frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi)+o(\rho^2). \quad (3.11.2)$$

Рассмотрим случай $\Delta > 0$, $A > 0$. Заметим, что тогда и $C > 0$, так как $\Delta = AC - B^2 > 0$. Функция $g(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi$ переменной $\varphi \in [0, 2\pi]$ непрерывна и при любом значении положительна. Действительно, если $\cos\varphi = 0$, то $g(\varphi) = C\sin^2\varphi > 0$, если $\cos\varphi \neq 0$, то $g(\varphi) = \cos^2\varphi(A+2Bt+Ct^2)$, где $t = \operatorname{tg}\varphi$. Дискриминант квадратного трехчлена отрицателен: $4B^2 - 4AC = -4\Delta < 0$. Тогда и в этом случае $g(\varphi) > 0$. Функция $g(\varphi)$ принимает на отрезке $[0, 2\pi]$ свое минимальное положительное значение m. Из формулы Тейлора для приращения функции получаем неравенство

$$\Delta f(x_0,y_0) \geqslant \frac{\rho^2}{2}m + o(\rho^2) = \frac{m\rho^2}{2}\left(1+\frac{2o(\rho^2)}{m\rho^2}\right).$$

Для достаточно малых ρ выражение $1+\dfrac{2o(\rho^2)}{m\rho^2} > \dfrac{1}{2}$ и $\Delta f(x_0,y_0) > 0$, то есть M_0 — точка минимума функции f.

Случай $\Delta > 0$, $A < 0$ исследуется аналогично.

Пусть теперь $\Delta < 0$, и в формуле (3.11.2) $\cos\varphi \neq 0$. Квадратный трехчлен $A+2Bt+Ct^2$ имеет в этом случае положительный дискриминант и поэтому принимает значения разных знаков. Это означает, что найдутся такие числа φ_1 и φ_2, что при $t_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ $g(\varphi_1) = \cos^2\varphi_1(A+2Bt_1+Ct_1^2) > 0$, а при $t_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ $g(\varphi_2) = \cos^2\varphi_2(A+2Bt_2+Ct_2^2) < 0$. При $\varphi = \varphi_1$ и для достаточно малых ρ значения приращения функции

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\rho^2}{2}g(\varphi_1)\left(1+\frac{2o(\rho^2)}{g(\varphi_1)\rho^2}\right) > 0,$$

а при $\varphi = \varphi_2$

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\rho^2}{2}g(\varphi_2)\left(1+\frac{2o(\rho^2)}{g(\varphi_2)\rho^2}\right) < 0.$$

Это означает, что в любой малой окрестности точки M_0 найдутся точки, в которых значения f как больше, так и меньше, чем $f(M_0)$ю Поэтому M_0 не является точкой экстремума. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1. Доказанная теорема проясняет характер критической точки в случаях, когда $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то для выяснения этого вопроса нужно привлечь частные производные более высокого порядка.

При анализе случая $\Delta < 0$ в ходе доказательства теоремы фактически показано, что в области определения функции f существуют такие две прямые, проходящие через M_0, что при движении точки M по первой из этих прямых значения функции $f(M)$ сначала уменьшаются, в точке M_0 достигают минимума, затем возрастают. При движении точки M по второй прямой значения функции сначала возрастают, в точке M_0 достигает максимального значения, затем уменьшаются. В окрестности точки M_0 график функции имеет характерный вид седла (рис. 3.13), поэтому точку M_0 называют в этом случае седловой.

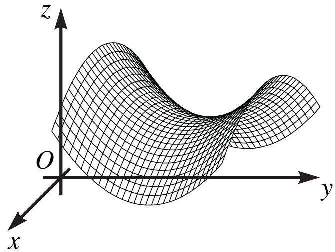


Рис. 3.13

2. В случае когда число переменных, от которых зависит функция f, больше двух, тоже можно сформулировать достаточное условие экстремума функции. Рассмотрим второй дифференциал функции f в критической точке M_0. Он является квадратичной формой Q переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ Пусть эта квадратичная форма невырождена. Тогда:

а) если форма Q положительно определена, то M_0 — точка минимума;

б) если форма Q отрицательно определена, то M_0 — точка максимума;

в) если форма Q не является знакоопределенной, то M_0 — не точка экстремума функции f.

Пример 3.11.1. *Исследуем функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум. Найдем критические точки функции, для чего решим систему уравнений*

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Критические точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

Определим характер каждой из этих точек по достаточному условию экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка

$$f''_{xx}(x,y) = 6x; \quad f''_{xy}(x,y) = -3; \quad f''_{yy}(x,y) = 6y.$$

В точке M_1

$$A = f''_{xx}(M_1) = 0; \quad B = f''_{xy}(M_1) = -3; \quad C = f''_{yy}(M_1) = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, M_1 — седловая точка. В точке M_2

$$A = 6; \quad B = -3; \quad C = 6; \quad \Delta = 27,$$

поэтому M_2 — точка минимума функции f. Значение функции в этой точке $f(M_2) = -1$.

§ 3.12. Условные экстремумы

Пусть функция f исследуется на экстремум не на всей области своего определения, а на множестве точек, чьи координаты удовлетворяют уравнению

$$\varphi(x, y) = 0,$$

где φ — некоторая функция. Например, среди всех точек параболы L: $\varphi(x, y) = x^2 - y = 0$ нужно найти ту, которая соответствует минимуму функции $f(x, y) = (x-3)^2 + y^2$. Чтобы решить поставленную задачу можно например, выразить y через x из равенства $x^2 - y = 0$, сведя тем самым функцию f к функции одной переменной x, затем исследовать полученную функцию. Однако так можно поступать не всегда, будем рассуждать по-другому. Рассмотрим семейство линий уровня функции f. В поставленной задаче это семейство окружностей с центром $P(3; 0)$. Если в некоторой точке параболы L функция f достигает своего минимума, то «бесконечно малые» перемещения этой точки по параболе в любую сторону не меняют значений функции f, т. е. не уводят нас с линии минимального уровня. Это возможно только в том случае, когда парабола и линия экстремального уровня функции касаются друг друга в точке экстремума (рис. 3.14). Так как градиент функции перпендикулярен ее линии уровня, это равносильно тому, что градиенты функций f и φ в точке экстремума коллинеарны:

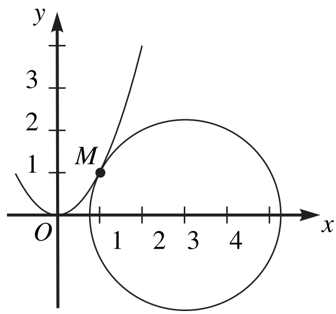


Рис. 3.14

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla \varphi(x, y) = 0.$$

Таким образом, в точке параболы, соответствующей минимуму функции f, должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) + \lambda \nabla \varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем искомую точку минимума функции f, $M(1; 1)$, соответствующую значению $\lambda = 2$ и $f_{\min} = f(M) = 5$.

Рассмотрим функцию n переменных f, определенную в некоторой окрестности точки M_0, и множество $L \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку M_0.

Определение 3.12.1. *M_0 называется точкой условного минимума функции f, если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M этой окрестности, если $M \in L$ и $M \neq M_0$, то $f(M) > f(M_0)$.*

Аналогично определяется точка условного максимума. Точка условного экстремума — это точка условного минимума или точка условного максимума.

Важные частные случаи:

1. Число переменных $n = 2$. L — линия, задаваемая уравнением
$$\varphi(x,y) = 0.$$

2. Число переменных $n = 3$. L — поверхность, задаваемая уравнением
$$\varphi(x,y,z) = 0.$$

3. Число переменных $n = 3$. L — линия, задаваемая системой уравнений
$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0, \\ \varphi_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

4. Более общий случай. Число переменных n — произвольное. L — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, чьи координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяют системе уравнений $(m < n)$:
$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0; \\ \qquad\qquad \ldots \\ \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0. \end{cases}$$
Сформулируем необходимое условие локального экстремума для приведенных выше случаев 1–4. В самом общем из них, когда n произвольно, $m < n$, определим так называемую *функцию Лагранжа $n + m$* переменных равенством
$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m) =$$
$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Теорема 3.12.1. *Пусть функции f, φ_1, $\ldots$, φ_m имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности $M_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — точки условного экстремума функции f, и градиенты $\nabla\varphi_1(M_0)$, $\nabla\varphi_2(M_0)$, $\ldots$, $\nabla\varphi_m(M_0)$ линейно независимы. Тогда существуют* *такие числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *что* $\mathbf{M}_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *является критической точкой функции Лагранжа* F, *то есть*

$$\begin{cases} \nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0; \\ \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0; \\ \ldots \\ \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0. \end{cases} \quad (3.12.1)$$

Иными словами, теорема 3.12.1 утверждает, что $M_0 \in L$ может быть точкой условного экстремума только тогда, когда найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что

$$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0.$$

Эти числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*, а описанный метод отыскания точек условного экстремума называется *методом множителей Лагранжа.*

Приведем вид системы уравнений (3.12.1) в рассмотренных выше частных случаях.

1. $n = 2, m = 1$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda \varphi'_x(x,y) = 0; \\ f'_y(x,y) + \lambda \varphi'_y(x,y) = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \quad (3.12.2)$$

2. $n = 3, m = 1$

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) + \lambda \varphi'_x(x,y,z) = 0; \\ f'_y(x,y,z) + \lambda \varphi'_y(x,y,z) = 0; \\ f'_z(x,y,z) + \lambda \varphi'_z(x,y,z) = 0; \\ \varphi(x,y,z) = 0. \end{cases} \quad (3.12.3)$$

3. $n = 3, m = 2$

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y,z) = 0; \\ f'_y(x,y,z) + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y,z) = 0; \\ f'_z(x,y,z) + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x,y,z) = 0; \\ \varphi_1(x,y,z) = 0; \\ \varphi_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \quad (3.12.4)$$

Замечание 3.12.1. *Достаточные условия условного экстремума выходят за рамки настоящего пособия. Необходимое же условие будет проиллюстрировано в следующем разделе.*

§ 3.13. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

3.13.1. Пример

Согласно теореме Вейерштрасса всякая непрерывная в замкнутой и ограниченной области D функция достигает в этой области своих наименьшего и наибольшего значений. Чтобы их найти, нужно вначале выявить в D все точки, в которых экстремальные значения в принципе могут достигаться, а затем сравнить значения функции f только в этих точках.

Рассмотрим конкретный пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 13x$ в области D заданной неравенствами $y^2 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 3.15).

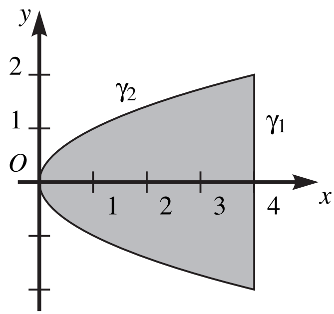


Рис. 3.15

Решая поставленную задачу, будем рассуждать так. Если экстремальное значение функции достигается во внутренней точке области, то согласно необходимому условию экстремума эта точка должна быть критической. Найдем все критические точки внутри области D

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + 4y - 13 = 0; \\ f'_y(x,y) = 4x + 10y = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 65/2; \\ y = -13. \end{cases}$$

Найденная критическая точка области D не принадлежит, поэтому своих наибольшего и наименьшего значений внутри области функция f не принимает. Следовательно, эти значения принимаются функцией на границе области. Граница D состоит из двух гладких линий γ_1 и γ_2, показанных на рисунке. На участке γ_1 $x = 4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Функция $f(x,y)$ сводится здесь к функции одной переменной

$$f_1(y) = f(4,y) = 5y^2 + 16y - 36.$$

Если функция f достигает в какой-то точке на γ_1 своего экстремального значения, то это выполнено и для функции $f_1(y)$, $y \in [-2,2]$ при соответствующем значении y. Поэтому это значение является или критическим для функции f_1 или крайним: $y = \pm 2$. Критические точки функции f_1:

$$f'_1 = 10y + 16 = 0; \quad \implies \quad y_{\text{кр}} = -1{,}6.$$

Так как на γ_1 $x = 4$, то мы определили такие «подозрительные» точки, в которых функция f может принимать экстремальные значения: $M_1(4;-2)$, $M_2(4;-1{,}6)$, $M_3(4;2)$.

На участке γ_2 точки экстремума можно искать аналогично, сведя функцию f к функции одной переменной. Можно поступить иначе: найдем на γ_2 точки условного экстремума функции f при условии, выполненном на этой части границы D: $x - y^2 = 0$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x - y^2).$$

Координаты критических точек должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} F_x'(x,y,\lambda) = 0; \\ F_y'(x,y,\lambda) = 0; \\ F_\lambda'(x,y,\lambda) = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x + 4y - 13 + \lambda = 0; \\ 4x + 10y - 2y\lambda y = 0; \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Необходимое условие условного экстремума выполняется для двух точек γ_2: $M_4(0;0)$ и $M_5(1;1)$.

Список точек, «подозрительных» в отношении достижения в них экстремальных значений функции f, исчерпывается M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Сравнивая значения функции f в этих точках, найдем наибольшее и наименьшее ее значения в замкнутой области D:

$$f_{\text{наим}} = f(M_2) = -48,8; \quad f_{\text{наиб}} = f(M_3) = 16.$$

3.13.2. Алгоритм решения задачи нахождения наименьшего и наибольшего значений функции

Ход рассуждений при решении этой конкретной задачи является общим, и мы приходим к такому алгоритму решения задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции f в замкнутой области D, ограниченной ломаной $\Gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \ldots \bigcup \gamma_n$.

1. Находим критические точки функции внутри D.

2. На каждом звене γ_k ломаной находим точки условного экстремума функции, сводя ее к функции одной переменной, или пользуясь методом множителей Лагранжа.

3. Список точек, полученных в п. 1 и 2, дополняем вершинами ломаной $\Gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \ldots \bigcup \gamma_n$.

4. Вычисляем значения функции в точках полученного списка и выбираем среди них наибольшее и наименьшее. Это и есть наибольшее и наименьшее значения функции f в замкнутой области D.

§ 3.14. Метод наименьших квадратов

3.14.1. Постановка задачи

Пусть на плоскости дано n точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n)$. Предполагается, что абсцисса и ордината связаны линейной зависимостью

$$y = ax + b,$$

а точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ накоплены в результате наблюдений. Параметры a

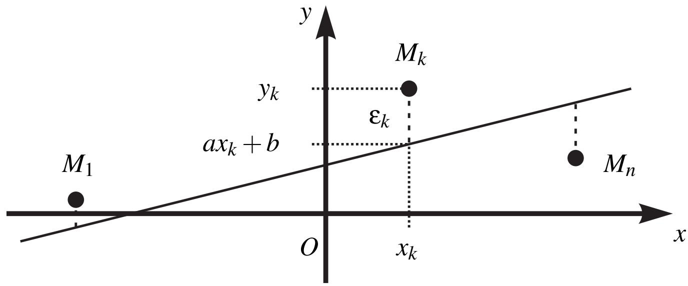


Рис. 3.16

и b линейной зависимости неизвестны. Координаты точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ измерены неточно, поэтому равенство $y_k \approx ax_k + b$ выполнено с некоторой погрешностью. Требуется так подобрать параметры a и b, чтобы точки M_1, $M_2, \ldots, M_n$ менее всего отклонялись от прямой $y = ax + b$. Мерой отклонения каждой точки является число $\varepsilon_k = |ax_k + b - y_k|$ (рис. 3.16). Общей же мерой отклонения результатов наблюдений от линейной зависимости $y = ax + b$ может служить число

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

Эта сумма содержит квадраты отклонений, поэтому в каком-то смысле и оценивает суммарное уклонение точек $M_k(x_k, y_k)$ от линейной зависимости $y = ax + b$. Именно: $\delta = 0$ в том и только в том случае, в котором для всех k $y_k = x_k + b$.

Поставим следующую задачу. **По заданным точкам $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ найти числа a и b, при которых выражение**

$$\delta(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее из возможных значений.

Решив эту задачу, говорят, что параметры a и b найдены по методу наименьших квадратов. Таким образом, задаче определения параметров линейной зависимости по данным наблюдений $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$

придан точный смысл. Слова «метод наименьших квадратов» относятся к методу определения меры отклонения $\delta(a,b)$ результатов наблюдения от теоретической зависимости $y = ax + b$. Мы могли бы искать параметры a и b и по другому методу, например по «методу наименьших абсолютных величин», или «наименьших четвертых степеней», и получили бы при этом другие ответы! Одна из причин выбора метода наименьших квадратов — его простота.

Заметим, что поставленная задача — найти минимум функции $\delta(a,b)$ — имеет решение, и вот почему. Во-первых, функция двух переменных $\delta(a,b)$ ограничена снизу: $\delta(a,b) \geqslant 0$. Во-вторых, эта функция неограниченно возрастает, если a и b устремить в бесконечность. Из дальнейшего изложения видно, что если все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ не лежат на вертикальной прямой, то функция $\delta(a,b)$ имеет только одну критическую точку, которая, таким образом, и является точкой абсолютного минимума функции $\delta(a,b)$.

3.14.2. Решение задачи

Найдем критическую точку введенной выше функции $\delta(a,b)$

$$\begin{cases} \delta'_a(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot (ax_i + b - y_i) = 0, \\ \delta'_b(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Полученная система двух линейных уравнений для неизвестных a и b называется нормальной системой. Ее определитель

$$\Delta = n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{m=1}^{n} x_m\right) + $$

$$+ \left(\sum_{m=1}^{n} x_m\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - 2x_k \cdot \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m + \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right)^2\right) =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right)^2.$$

Как видно из этого равенства, определитель системы может быть равен нулю в том и только том случае, когда $x_1 = x_2 =$

$= \ldots = x_n$, т. е. когда все точки M_1, M_2, ..., M_n расположены на вертикальной прямой. Таким образом, если это не так, то нормальная система имеет решение, притом только одно.

Рассмотрим пример. Экспериментально получены четыре значения функции $y = ax + b$, которые записаны в таблице

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Найдем функцию $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов.

Найдем по таблице

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 11; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 10; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 39; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 21.$$

Составим нормальную систему уравнений

$$\begin{cases} 39a + 11b = 21, \\ 11a + \ \ 4b = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$a = -\frac{26}{35}; \qquad b = \frac{159}{35}.$$

Искомая функция есть

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

Глава 4.

Кратные интегралы

В главе мы рассмотрим кратные интегралы — двойные и тройные. К кратным интегралам приводят многие задачи геометрии, математического анализа, механики, физики.

Схема применения кратных интегралов та же, что и для определенных интегралов. Чтобы проиллюстрировать, как возникает кратный интеграл, рассмотрим задачу о вычислении массы пластины.

На плоскости xOy рассмотрим материальную пластину, т. е. область G, на которой распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$. Считая, что плотность $\rho(x,y)$ непрерывна, найдем массу пластины G.

Разобьем область G произвольно на n частей:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$$

так, что никакие две части не имеют общих внутренних точек.

Через ΔS_i обозначим площадь G_i. Если части G_i небольшие, то в силу непрерывности $\rho(x,y)$ можно считать, что плотность постоянна на каждой части G_i. Выберем произвольно точку (ξ_i, η_i) из G_i и будем считать, что $\rho(x,y) \approx \rho(\xi_i, \eta_i)$ при $(x,y) \in G_i$.

Через $d(G_i)$ обозначим диаметр части G_i, т. е. наибольшее расстояние между двумя точками из G_i; через λ обозначим наибольший из диаметров: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(G_i)$.

При наших допущениях масса части G_i приближенно равна $m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, а масса всей пластины G равна приближенно

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i\ .$$

Приближение будет тем точнее, чем мельче разбиение пластины G на части. Естественно принять за массу пластины предел

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i\ .$$

Предел в правой части равенства является двойным интегралом от функции $\rho(x,y)$ по множеству G и обозначается

$$\iint_G \rho(x,y)\,dxdy.$$

Мы подробно рассмотрим двойные интегралы. Определение и свойства тройных интегралов вполне аналогичны определению и свойствам двойных интегралов. Поэтому изучение тройных интегралов будет по возможности кратким.

§ 4.1. Определение двойного интеграла

Прежде чем определить двойной интеграл и рассмотреть его свойства, приведем некоторые понятия, связанные с множествами на плоскости и в пространстве. Ранее были введены понятия ограниченного множества, открытого и замкнутого множеств, области, границы множества.

Замкнутой областью называется объединение точек области и ее граничных точек.

Под гладкой кривой мы понимаем такую кривую (на плоскости и в пространстве), в каждой точке которой существует касательная и при непрерывном движении точки по кривой касательная меняется непрерывно. На плоскости это означает, что угол между касательной и положительной полуосью абсцисс меняется непрерывно. В случае пространственной кривой (как, впрочем, и на плоскости) непрерывно меняются направляющие косинусы направляющего вектора касательной к кривой.

Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Гладкими кривыми на плоскости будут, например, окружность, парабола. Кусочно-гладкими кривыми будут треугольник, параллелограмм.

Далее мы всегда считаем, что граница плоской области гладкая или кусочно-гладкая кривая.

Пусть G — некоторая ограниченная замкнутая область на плоскости xOy и пусть на G определена функция $z = f(x,y)$.

Разделим область G гладкими или кусочно-гладкими кривыми на n частей $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ так, что никакие две части G_i и G_j не имеют общих внутренних точек. Мы будем считать, что все G_i — замкнутые области, добавляя к каждой части разбиения точки ее границы.

Площадь части G_i будем обозначать ΔS_i, диаметр G_i обозначим $d(G_i)$. Как уже говорилось выше при рассмотрении примера, $d(G_i) = \max\limits_{P,Q \in G} d(P,Q)$, где $d(P,Q)$ — расстояние между точками P и Q. Наибольший из диаметров $d(G_i)$ обозначим через λ и будем называть мелкостью разбиения области G на части.

Выберем в каждой части G_i произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ .$$

Сумма S_n называется интегральной суммой для функции $z = f(x,y)$ в области G.

Определение 4.1.1. *Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел I интегральных сумм S_n, не зависящий от способов разбиения области G на части $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и выбора точек P_i, то он называется двойным интегралом от функции $z = f(x,y)$ по области G и обозначается* $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ *или* $\iint\limits_G f(x,y)\,dS$.

Таким образом, если конечный предел I интегральных сумм существует, то

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,dS = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i.$$

Понятие предела интегральных сумм нуждается в уточнении. Оно может быть в точности таким же, как и для предела интегральных сумм при определении определенного интеграла, и мы на этом останавливаться не будем.

Если двойной интеграл от функции $z = f(x,y)$ по области G существует, то про функцию $f(x,y)$ говорят, что она интегрируема по G; если интеграл не существует, то говорят, что $f(x,y)$ не интегрируема по G.

Выражение $f(x,y)\,dxdy$ называется подынтегральным выражением, $f(x,y)$ — подынтегральной функцией, x и y — переменными интегрирования, G — областью интегрирования, $dS = dxdy$ — элементом площади.

Отметим, что, как и определенный интеграл, двойной интеграл зависит только от функции и области интегрирования. Переменные интегрирования — «немые», т. е. выражения $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$, $\iint\limits_G f(u,v)\,dudv$ и т. д. есть различные по форме записи одного и того же числа — двойного интеграла от функции f по области G.

Остановимся вкратце на условиях интегрируемости функций. Необходимым условием существования интеграла является ограниченность подынтегральной функции. Доказательство этого получается почти дословным повторением доказательства необходимого условия существования определенного интеграла (см. теорему 2.0.1). Как и для случая одного переменного, ограниченности функции оказывается недостаточно для интегрируемости. Действительно, в квадрате $G = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ рассмотрим ограниченную функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональные,} \\ 0, & \text{если } x \text{ или } y \text{ иррациональные.} \end{cases}$$

Какое бы ни взять разбиение $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$, в каждой части G_i всегда можно выбрать как точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ с рациональными координатами ξ_i и η_i, так и точку $P'(\xi_i', \eta_i')$ с иррациональными ξ_i' и η_i'. Но тогда в первом случае $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = s$, где s — площадь G, а во втором случае $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i')\Delta S_i = 0$. Отсюда вытекает, что у интегральных сумм не может быть предела, не зависящего от выбора точек $P_i \in G_i$. Значит, двойного интеграла от этой функции по G не существует, хотя функция, очевидно, ограничена.

Мы не будем стараться описать наиболее общий класс интегрируемых функций. Отметим без доказательства, что если функция $z = f(x,y)$ непрерывна на ограниченно замкнутой области G, то она интегрируема по G. В приложениях — это наиболее часто встречающийся случай.

Отметим еще класс разрывных интегрируемых функций. Если функция $z = f(x,y)$ ограничена в ограниченной замкнутой области G и непрерывна в G всюду, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких или кусочно-гладких кривых в G, то она интегрируема по G.

Доказательства сделанных утверждений можно найти в более подробных курсах математического анализа (см., например, [6] или [15]).

§ 4.2. Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области G, непрерывна и положительна в G. Рассмотрим в пространстве тело V, ограниченное сверху графиком функции $z = f(x,y)$, снизу — областью G, а с боков — цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G, а образующие параллельны оси Oz. Разделим область G произвольным образом на n частей, $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$. Через ΔS_i обозначим площадь G_i. Выберем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i) \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда произведение $v_i = f(P_i)\Delta S_i$ дает объем цилиндра, нижнее основание которого есть G_i, верхнее основание параллельно нижнему, боковые стенки параллельны оси Oz, а высота цилиндра равна $f(P_i)$. Объем v_i приближенно равен объему криволинейного цилиндра, ограниченного сверху частью графика функции $z = f(x, y)$ над G_i. Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ дает приближенное значение объема, заключенного между графиком функции $z = f(x, y)$ и плоскостью xOy ($(x, y) \in G$). Точность приближения будет тем больше, чем меньше части G_i. При неограниченном измельчении разбиения (т. е. $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{d}(G_i) \to 0$ при $n \to \infty$) сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ будет все точнее приближать объем тела V, а в пределе мы получим истинный объем V. Обозначим через v объем V. Тогда, согласно вышесказанному,

$$v = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy.$$

Последнее равенство следует из определения двойного интеграла и интегрируемости функции $f(x, y)$ на G, так как она непрерывна (рис. 4.1).

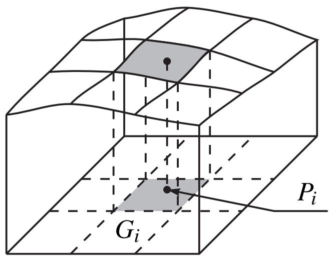


Рис. 4.1

Из приведенных рассуждений следует, что двойной интеграл от непрерывной положительной функции равен объему тела, ограниченного графиком функции, плоскостью xOy и боковыми стенками, параллельными оси Oz. В этом и заключается геометрический смысл двойного интеграла.

§ 4.3. Свойства двойного интеграла

1. Обозначим через S площадь области G. Тогда

$$\iint\limits_G dxdy = S.$$

Доказательство. В нашем случае $f(x, y) = 1$ всюду в G. Поэтому для любого разбиения $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ и для любого выбора точек $P_i \in G_i$ мы получаем

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta S_i = S.$$

Что и требовалось доказать.

Следующие свойства 2–6 двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла, поэтому мы опускаем их доказательства.

2. Линейные свойства двойного интеграла. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы по области G и C — произвольная постоянная, то функции $Cf(x,y)$ и $f(x,y)+g(x,y)$ интегрируемы по G и справедливы равенства

$$\iint\limits_G Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy,$$

$$\iint\limits_G [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_G g(x,y)\,dxdy.$$

3. Аддитивность двойного интеграла. Пусть области G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек и функция $f(x,y)$ интегрируема по G_1 и G_2. Тогда функция $f(x,y)$ интегрируема по объединению $G = G_1 \cup G_2$ и выполняется

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy.$$

4. Теорема с среднем. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G, то в G найдется такая точка (x_0,y_0), что будет выполняться равенство

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)S,$$

где S — площадь G.

Следующие свойства касаются оценок двойного интеграла.

5. Если функция $f(x,y)$ интегрируема по G и неотрицательна в G, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \geqslant 0.$$

Следствие 4.3.1. *Если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы по G и $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ всюду в G, то*

$$\iint\limits_G f(x,y) \leqslant \iint\limits_G g(x,y)\,dxdy.$$

6. Если функция $f(x,y)$ интегрируема по области G, то

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dxdy.$$

§ 4.4. Вычисление двойного интеграла

Теорема 4.4.1 (вычисление двойного интеграла по прямоугольнику). *Пусть функция $z = f(x,y)$ интегрируема по прямоугольнику*

$$D = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

и пусть для каждого x из отрезка $[a,b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx,$$

называемый повторным, и справедливы равенства

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Доказательство теоремы мы не приводим. Его можно найти в более подробных курсах математического анализа.

Повторный интеграл принято записывать в виде

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Если в последней теореме поменять ролями x и y, то получим утверждение о существовании повторного интеграла

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

и справедливости равенства

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

С помощью этой формулы или формулы из теоремы вычисление двойного интеграла по прямоугольнику сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Заметим, что если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике D, то без всяких дополнительных условий выполняются равенства

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

В этом случае выбор порядка интегрирования (сначала по переменной y, потом по x, или наоборот) может, в зависимости от подынтегральной функции, повлиять на объем вычислений.

Пример 4.4.1.

1) Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$

где $D = \{(x,y)\colon\ 1 \leqslant x \leqslant e, 4 \leqslant y \leqslant 6\}$.

Записывая интеграл в виде повторного, вычисляем его

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int\limits_1^e dx \int\limits_4^6 \frac{y}{x}\,dy = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{x}\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=4}^{y=6}\right) dx =$$

$$= \int\limits_1^e \frac{10}{x}\,dx = 10\ln x\bigg|_1^e = 10\ln e = 10.$$

2) Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D xe^{xy}\,dxdy,$$

где $D = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1, 2 \leqslant y \leqslant 3\}$.

Если записать интеграл в виде повторного

$$\iint\limits_D xe^{xy}\,dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^1 xe^{xy}\,dx,$$

то мы видим, что интеграл по x требует применения формулы интегрирования по частям, и только потом мы будем вычислять интеграл по переменной y. Запишем интеграл в виде повторного следующим образом

$$\iint\limits_D xe^{xy}\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_2^3 xe^{xy}\,dy.$$

Мы видим, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух простых определенных интегралов

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^3 xe^{xy}\,dy = \int\limits_0^1 e^{xy}\bigg|_{y=2}^{y=3} dx = \int\limits_0^1 \left(e^{3x} - e^{2x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6}.$$

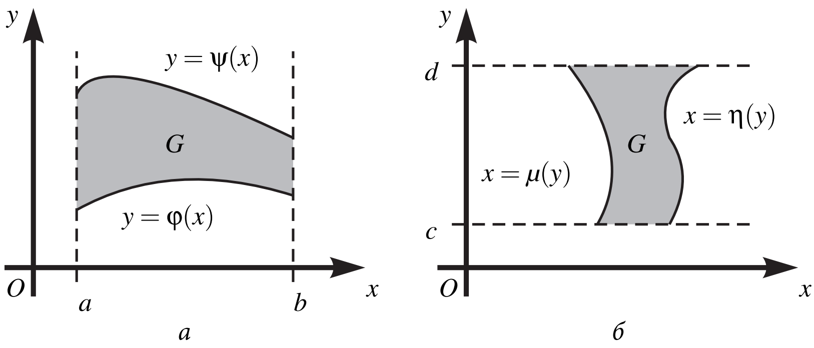


Рис. 4.2

Теперь рассмотрим вычисление двойного интеграла по криволинейной области.

Определение 4.4.1. *Замкнутая область G на плоскости xOy называется нормальной относительно оси Oy, если она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ соответственно, а с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$, т. е. если G имеет вид*

$$G = \{(x, y) \colon a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

Замкнутая область G называется нормальной относительно оси Ox, если ее можно задать следующим образом

$$G = \{(x, y) \, : c \leqslant y \leqslant d, \mu(y) \leqslant x \leqslant \eta(y)\}.$$

На рис. 4.2,а изображена область, нормальная относительно оси Oy (не Ox!), на рис. 4.2,б — область, нормальная относительно оси Ox (но не Oy!).

Если область нормальна относительно обеих осей координат, то она называется простой.

Простой областью будет, например, внутренность эллипса, внутренность прямоугольника. Несложно заметить, что любая выпуклая область будет простой.

Теорема 4.4.2 (вычисление двойного интеграла для криволинейной области). *Пусть G — замкнутая область, нормальная относительно оси Oy*

$$G = \{(x, y) \colon a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

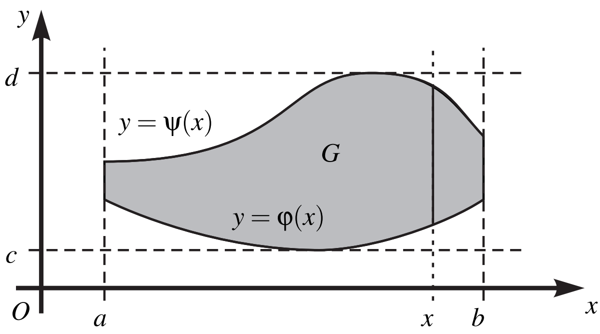


Рис. 4.3

и пусть функция $z = f(x,y)$ интегрируема по G и для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$. Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Пусть c и d — такие числа, что $c \leqslant \varphi(x) \leqslant \leqslant \psi(x) \leqslant d$ при всех $x \in [a,b]$ (рис. 4.3). Тогда область G содержится в прямоугольнике $D = \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{если } (x,y) \in G, \\ 0, & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

По свойству аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy + \int\limits_{D\setminus G} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy.$$

Из аддитивности определенного интеграла и из определения функции $F(x,y)$ следует

$$\int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_c^{\varphi(x)} F(x,y)\,dy + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\psi(x)}^{d} F(x,y)\,dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)\,dy.$$

Отсюда и из теоремы 4.4.1 мы получаем

$$\iint\limits_D F(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Что и требовалось доказать.

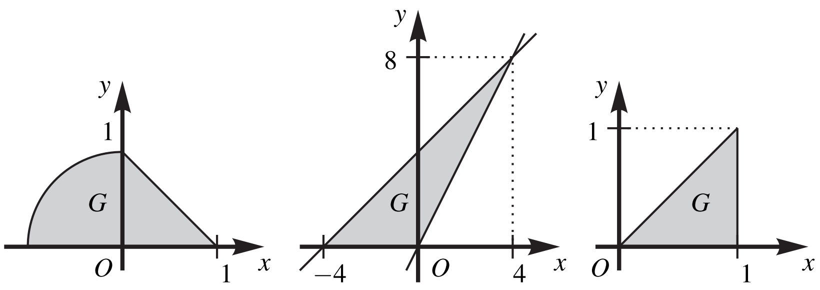
Замечание 4.4.1. *Если область G нормальна относительно оси Ox*

$$G = \{(x,y)\colon\, c \leqslant y \leqslant d, \mu(y) \leqslant x \leqslant \eta(y)\},$$

и функция $f(x,y)$ такова, что существуют интегралы $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ и $\int\limits_{\mu(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx$ при всех $y \in [c,d]$, то, повторяя доказательство теоремы, установим равенство

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\mu(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx.$$

В случае простой области двойной интеграл сводится к повторному двумя способами. Отметим, что от того, как сделан переход от двойного интеграла к повторному, часто зависит объем вычислений. Чтобы вычислить двойной интеграл наиболее рациональным способом, следует аккуратно разобраться как с областью интегрирования, так и с подынтегральной функцией.



а *б* *в*

Рис. 4.4

Пример 4.4.2.

1) Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

В данном примере (рис. 4.4,а) замкнутая область интегрирования G *задается неравенствами*

$$G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant 1, -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y\}.$$

Мы видим, что если интегрировать сначала по y*, а потом по* x*, то область* G *придется разбить на две области:*

$$G_1 = \{(x,y)\ : -1 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\},$$
$$G_2 = \{(x,y)\ : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}.$$

Но тогда

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

2) Вычислить интеграл $\iint\limits_G xy\,dxdy$*, где* G *— область, ограниченная линиями* $y = 2x$*,* $y = x+4$*,* $x = 0$ *(рис. 4.4,б).*

Мы видим, что удобнее интегрировать сначала по y, а затем по x, так как в противном случае придется рассматривать два повторных интеграла. Имеем

$$\iint\limits_G xy\,dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{2x}^{x+4} xy\,dy = \int\limits_0^4 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=2x}^{y=x+4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (8x^2+16x-3x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}x^3+8x^2-\frac{3}{4}x^4\right)\Bigg|_0^4 = \frac{160}{3}.$$

3) Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^2\cos xy\,dxdy$, *где область G ограничена линиями $y=0$, $y=x$, $x=1$ (рис. 4.4,в).*

В данном примере область устроена одинаково просто для перехода к повторному интегралу в любом порядке, но если вначале интегрировать по y, то придется дважды использовать формулу интегрирования по частям. В повторном интеграле удобнее вначале брать интеграл по x. Имеем

$$\iint\limits_G y^2\cos xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 y^2\cos xy\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y\left(\sin xy\Bigg|_{x=y}^{x=1}\right)dy = \int\limits_0^1 y\sin y\,dy - \int\limits_0^1 y\sin y^2\,dy.$$

Первый интеграл возьмем по частям,

$$u=y,\quad du=dy,\quad dv=\sin y\,dy,\quad v=-\cos y.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 y\sin y\,dy = -y\cos y\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \cos y\,dy = -\cos 1+\sin 1.$$

Второй интеграл берется заменой

$$y^2=t,\quad y\,dy=\frac{1}{2}dt,\quad y=0\to t=0,\quad y=1\to t=1.$$

Имеем

$$\int y\sin y^2\,dy = \int\limits_0^1 \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\iint\limits_G y^2\cos xy\,dxdy = \sin 1-\cos 1-\frac{1}{2}+\frac{\cos 1}{2} = \sin 1-\frac{1+\cos 1}{2}.$$

§ 4.5. Замена переменных в двойном интеграле

Для вычисления или оценки определенных интегралов нам часто приходилось прибегать к замене переменной. Целью этого метода является получение более простого подынтегрального выражения. Не менее важна замена переменных и в кратных интегралах. При этом в кратных интегралах целью замены переменных может быть не только упрощение подынтегрального выражения, но и получение более простой области интегрирования.

Рассмотрим два экземпляра плоскости с декартовыми прямолинейными координатами. Одну — с системой координат uOv и другую — с системой координат xOy. Пусть Ω — замкнутая область в плоскости uOv и задано отображение $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ области Ω в плоскость xOy. Будем считать, что отображение непрерывно дифференцируемо. Это означает, что функции φ и ψ непрерывны в Ω, и их первые частные производные также непрерывны в Ω.

Если точка (u,v) пробегает область Ω, то соответствующая точка $(x,y) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ пробегает в плоскости xOy некоторую замкнутую область G. Область G называется образом области Ω. Напомним, что якобианом отображения $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ называется определитель

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Для якобиана еще используется обозначение $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Напомним геометрический смысл якобиана. Если мы рассмотрим в области Ω прямоугольник Δ со сторонами, параллельными координатным осям с длинами Δu и Δv, и если Δ' — образ прямоугольника при отображении $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, то площади прямоугольника Δ и криволинейного прямоугольника Δ' — $\Delta u\Delta v$ и $\Delta S'$ соответственно связаны приближенным равенством

$$\Delta S' \approx |J(u,v)|\,\Delta u\Delta v\,.$$

Теорема 4.5.1 (о замене переменных в двойном интеграле). *Пусть отображение $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемо в замкнутой области $\Omega\subset uOv$ и взаимно однозначно отображает область Ω на замкнутую область $G\subset xOy$, причем якобиан $J=J(u,v)$ отличен от нуля всюду в Ω. Тогда если функция $z=f(x,y)$ интегрируема по области G, то функция $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|$ интегрируема по области Ω и* *имеет место формула*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv.$$

Это равенство называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Строгое доказательство теоремы слишком громоздко, поэтому мы ограничимся только наброском его.

Параллельно осям Ou и Ov проведем прямые, пересекающие область Ω. Из полученных прямоугольников выберем только те, которые целиком лежат в Ω (рис. 4.5).

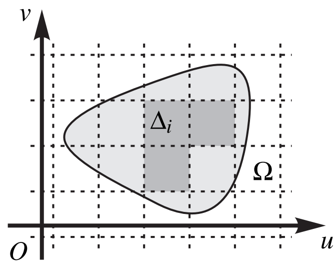


Рис. 4.5

Пусть это будут $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Их площади обозначим через ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. При измельчении разбиения Ω объединение прямоугольников, входящих в Ω целиком, будет все более точно приближать область Ω.

Соответствующие криволинейные четырехугольники в области G обозначим $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$, а их площади через $\Delta S_1', \Delta S_2', \ldots, \Delta S_n'$ соответственно.

Выберем произвольно точки $P_i(u_i, v_i) \in \Delta_i \subset \Omega$. Тогда им будут соответствовать точки $M_i(\varphi(u_i,v_i), \psi(u_i,v_i))$ из $\Delta_i' \subset G$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i' = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(u_i,v_i),\psi(u_i,v_i))\Delta S_i' \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(u_i,v_i),\psi(u_i,v_i))\,|J(u_i,v_i)|\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta S_i.$$

Если $\lambda(\Omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d(\Delta_i)$ — мелкость разбиения Ω, а $\lambda(G) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d(\Delta_i')$ — мелкость разбиения G, то при $\lambda(\Omega) \to 0$ выполняется $\lambda(G) \to 0$. Поэтому переходя в равенстве интегральных сумм к пределу при $\lambda(\Omega) \to 0$, мы получим в пределе искомую формулу замены переменных в двойном интеграле.

Пример 4.5.1. *Вычислить интеграл*

$$\iint\limits_G x\,dxdy,$$

где G — область, ограниченная прямыми $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $x + y = 1$, $x + y = 2$ (рис. 4.6,а).

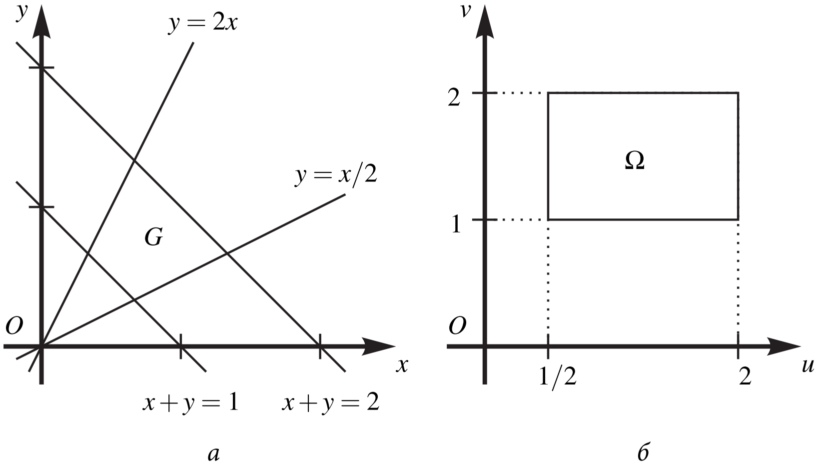


Рис. 4.6

Перейдем к новым координатам

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = x + y.$$

Тогда $x = \dfrac{u}{1+v}$, $y = \dfrac{uv}{1+v}$.

Области $G \subset xOy$ *будет соответствовать прямоугольник* $\Omega = \{(u,v)\colon\ 1/2 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 2\} \subset uOv$. *Действительно, при отображении областей границы переходят в границы. Прямым* $y = x/2$ *и* $y = 2x$ *в плоскости* xOy *соответствуют прямые* $u = 1/2$ *и* $u = 2$ *в плоскости* uOv, *прямым* $x + y = 1$ *и* $x + y = 2$ *соответствуют прямые* $v = 1$ *и* $v = 2$ *(рис. 4.6,б).*

Вычисляем якобиан.

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Применяя формулу замены переменных, отсюда получаем

$$\iint\limits_G x\,dxdy = \iint\limits_\Omega \frac{u}{1+v}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}\,dudv = \iint\limits_\Omega \frac{u^2}{(1+v)^3}\,dudv =$$

$$= \int\limits_1^2 dv \int\limits_{1/2}^2 \frac{u^2}{(1+v)^3}\,du = \left(-\frac{1}{2(1+v)^2}\bigg|_1^2\right)\cdot\left(\frac{u^3}{3}\bigg|_{1/2}^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{18}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{24}\right) = \frac{49}{96}.$$

Важным частным случаем замены переменных в двойном интеграле является переход к полярным координатам.

Рассмотрим замкнутую область G на плоскости xOy и задание этой же области в полярных координатах. Полярные координаты выберем так, чтобы их полюс совпадал с началом декартовых координат, а полярная ось — с положительной полуосью Ox. Тогда, как известно, преобразование координат задается формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где r и φ — полярные координаты точек плоскости.

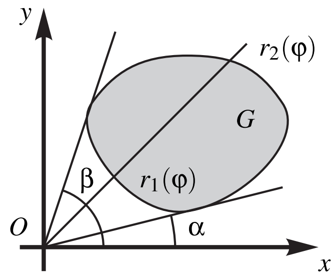


Рис. 4.7

Вычислим якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$. Имеем

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Пусть преобразование координат взаимно однозначно отображает на G следующую замкнутую область изменения переменных r и φ (рис. 4.7)

$$\Omega = \{(r,\varphi)\colon \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)\}.$$

Тогда согласно теореме 4.5.1 о замене переменных получаем

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Отметим, что на практике чаще всего от двойного интеграла по x и y переходят сразу к повторному интегралу от r и φ.

Пример 4.5.2.

1) Вычислить интеграл

$$\iint\limits_G x\,dxdy,$$

где $G=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 2x\}$ *— круг (рис. 4.8,а).*

Имеем $G=\{(x,y)\colon (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$ *— круг, касающийся оси* Oy *в точке* $O(0,0)$*, с центром в точке* $(1,0)$*. Ясно, что при переходе к полярным координатам* $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$*, мы имеем* $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $r\leqslant 2\cos\varphi$*. Последнее неравенство получается из неравенства* $y^2+x^2\leqslant 2x$*, так как* $x^2+y^2=r^2$, $x=r\cos\varphi$*. Поэтому*

$$\iint\limits_G x\,dxdy=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2\cos\varphi\,dr=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{8}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigg(1+2\cos 2\varphi+$$

$$+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\bigg)d\varphi=\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right]\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi.$$

2) Вычислим интеграл Пуассона. Покажем, что

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Напомним, что интеграл по неограниченному полуинтервалу $[0,\infty)$ *понимается следующим образом*

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{R}e^{-x^2}\,dx,$$

если предел существует.

Рассмотрим области (рис. 4.8,б)

$$\begin{aligned}F&=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant R^2\};\\ G&=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant R, 0\leqslant y\leqslant R\};\\ H&=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 2R^2\}.\end{aligned}$$

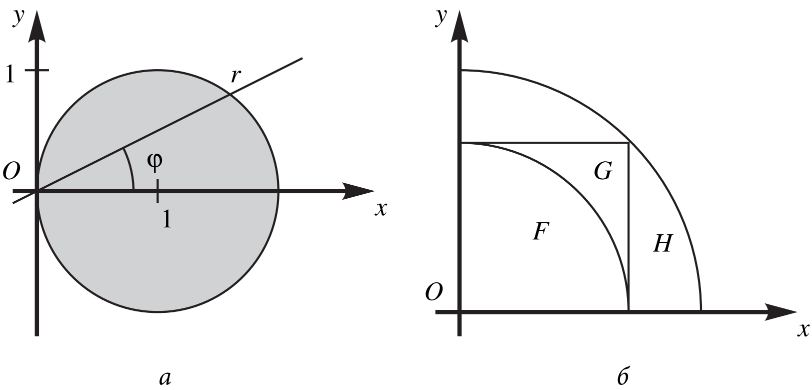


Рис. 4.8

Ясно, что $F \subset G \subset H$ *и что*

$$\iint\limits_F e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqslant \iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqslant \iint\limits_H e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Интегралы по F *и* H *легко вычисляются переходом к полярным координатам*

$$\iint\limits_F e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2}\,r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^R e^{-r^2}\,d(r^2) = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Аналогично

$$\iint\limits_H e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Интеграл по G *запишем в виде повторного и получим*

$$\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \cdot \int\limits_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Подставим вычисленные интегралы в двойное неравенство для интегралов. Получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{R^2}} \leqslant \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}.$$

Устремляя в этом двойном неравенстве R к бесконечности, получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т. е.,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) Иногда бывает удобно использовать обобщенные полярные координаты $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, где a и b — некоторые положительные постоянные.

Якобиан для данной системы функций равен $J = abr$. (Проверьте это).

Вычислим интеграл

$$\iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}}\,dxdy,$$

где область G ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, т. е.

$$G = \left\{(x,y)\colon\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1\right\}.$$

Сделаем замену переменных $x = 4r\cos\varphi$, $y = 5r\sin\varphi$, $|J| = 20r$. Тогда из $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} \leqslant 1$ следует $r^2 \leqslant 1$, т. е. $r \leqslant 1$, и мы получаем

$$\iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2}\,20r\,dr =$$

$$= -10\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2}\,d(25 - r^2) = -20\pi \cdot 2 \cdot \left.\frac{(25 - r^2)^{3/2}}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{40}{3}\pi\left(25^{3/2} - 24^{3/2}\right) = \frac{40}{3}\pi(125 - \sqrt{24^3}).$$

§ 4.6. Применения двойных интегралов

4.6.1. Вычисление площадей плоских фигур

Первое приложение следует из первого свойства двойного интеграла (§ 4.3):

$$\iint_G dxdy = S,$$

где S — площадь G.

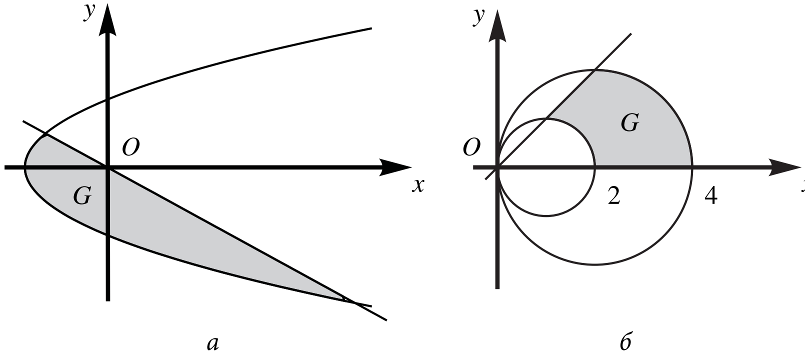


Рис. 4.9

Пример 4.6.1.

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 4.9,а)

$$y^2 = 4 + x, \qquad x + 3y = 0.$$

Из рис. 4.9,а видно, что при переходе к повторному интегралу удобнее вначале интегрировать по x, а затем по y. Если же выбрать обратный порядок интегрирования, то придется рассматривать сумму двух повторных интегралов.

Вычисляем

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_{-4}^{1} dy \int\limits_{y^2-4}^{-3y} dx = \int\limits_{-4}^{1} (4 - 3y - y^2)\, dy =$$

$$= \left(4y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 4.9,б)

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = 0, \quad y = x.$$

Здесь удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r\,dr = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \frac{16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi}{2}\, d\varphi = 6\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{3(\pi+2)}{4}.$$

4.6.2. Вычисление объемов

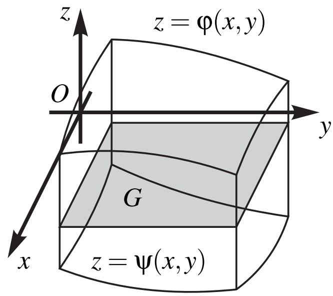


Рис. 4.10

Пусть V — пространственное тело, ограниченное снизу графиком функции $z = \varphi(x, y)$, сверху — графиком $z = \psi(x, y)$ ($\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$ при $(x, y) \in G$), с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz и проходят через границу области G (рис. 4.10).

Возьмем такую постоянную C, что для всех $(x, y) \in G$ будет выполняться $\varphi(x, y) + C \geqslant 0$. Тогда объем тела V будет равен объему, заключенному между графиками функций $z = \varphi(x, y) + C$ и $z = \psi(x, y) + C$, $(x, y) \in G$. Но тогда

$$v = \iint\limits_G [\psi(x, y) + C]\, dxdy - \iint\limits_G [\varphi(x, y) + C]\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_G [\psi(x, y) - \varphi(x, y)]\, dxdy.$$

Пример 4.6.2. *Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями*

$$x + z = -2, \quad x + z = 2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Ясно, что проекция тела на плоскость xOy есть круг

$$G = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

В этом примере $\varphi(x, y) = -2 - x$, $\psi(x, y) = 2 - x$. *По формуле для вычисления объемов получаем*

$$v = \iint\limits_G [(2 - x) - (-2 - x)]\, dxdy = 4 \iint\limits_G dxdy = 4 \cdot S = 4\pi,$$

где $S = \pi$ *— площадь круга* G.

4.6.3. Вычисление площади поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области G, непрерывна в G и частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны в G.

Обозначим через S график функции $z = f(x, y)$, т. е.

$$S = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in G, z = f(x, y)\}.$$

Мы выведем формулу для вычисления площади S с помощью двойного интеграла. Сначала поясним, что мы понимаем под площадью поверхности S.

Рассмотрим произвольное разбиение области G,

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n.$$

Как и ранее, через ΔS_i обозначим площадь G_i, через λ_n — мелкость разбиения, т. е. $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{d}(G_i)$.

Через S_i обозначим часть графика S над множеством G_i, т. е. $S_i = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in G_i, z = f(x,y)\}$. В каждой части G_i выберем произвольно точку (ξ_i, η_i). На поверхности ей соответствует точка

$$M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)) \in S_i.$$

Проведем через M_i касательную плоскость к поверхности S

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i) \cdot (x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i) \cdot (y - \eta_i) = z - z_i,$$

где $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$ и (x, y, z) — произвольная точка на касательной плоскости. Вектор

$$\mathbf{N} = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i), -\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i), 1 \right\}$$

будет нормальным вектором касательной плоскости, направленным «вверх», т. е. составляющим острый угол с осью Oz.

На касательной плоскости рассмотрим ту ее часть, которая находится над G_i. Обозначим ее через σ_i, а ее площадь — через $\Delta\sigma_i$. Площадь $\Delta\sigma_i$ приближенно равна площади S_i, а сумму всех таких площадей $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$ можно считать приближенным значением площади графика S.

За точное значение площади S принимают предел такой суммы при неограниченном измельчении области G (а значит, и поверхности S) на части, т. е. если s — площадь S, то

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

Уточнить понятие предела сумм можно так же, как и определение предела интегральных сумм для определенного интеграла.

Пусть γ_i — угол между вектором $\mathbf{N}$ и осью Oz. Угол γ_i равен углу между касательной плоскостью и плоскостью xOy. Так как G_i есть проекция σ_i на плоскость xOy, то, как известно из школьного курса математики, площади этих областей связаны соотношением

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}.$$

Но

$$\cos\gamma_i = \frac{(\mathbf{N},\mathbf{k})}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi_i,\eta_i)\right]^2+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi_i,\eta_i)\right]^2}},$$

где $\mathbf{k} = \{0,0,1\}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz. Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i,\eta_i)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i,\eta_i)\right]^2}\,\Delta S_i.$$

Мы видим, что в правой части равенства стоит интегральная сумма по области G функции

$$g(x,y) = \sqrt{1+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^2}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\lambda_n \to 0$, получаем

$$s = \lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_G g(x,y)\,dxdy,$$

или

$$s = \iint\limits_G \sqrt{1+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^2}\,dxdy,$$

или окончательно

$$s = \iint\limits_G \sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\,dxdy.$$

Пример 4.6.3. *Найти площадь части гиперболического параболоида $xy = z$, ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), вырезаемой цилиндром $x^2+y^2 = 8$.*

Для $(x,y) \in G = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 8, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ имеем

$$\sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

При вычислении площади поверхности перейдем к полярным координатам

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|J| = r$,

$$s = \iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}\,r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}\,d(1+r^2) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}(27-1) = \frac{13}{3}\pi.$$

4.6.4. Приложения двойного интеграла в механике

В начале главы мы рассмотрели одно из приложений двойного интеграла — вычисление массы плоской материальной пластины.

Если в области $G \subset xOy$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$, то масса пластины G вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy.$$

Пример 4.6.4. *Найти массу тела пластины G,*

$$G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\},$$

если ее плотность $\rho(x,y) = xy$.

Согласно полученной формуле, находим

$$m = \iint\limits_G xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} xy\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{12}.$$

Найдем координаты центра тяжести материальной пластины G, плотность которой $\rho(x,y)$. Снова рассмотрим разбиение G на части

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$$

и выберем в каждой части G_i произвольно точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$. Мы будем считать, что масса G_i равна $m_i \approx \rho(P_i)\Delta S_i$ и сосредоточена в точке $P_i(\xi_i,\eta_i)$.

В силу непрерывности $\rho(x,y)$ мы допускаем небольшую ошибку, если размеры G_i невелики.

В силу нашего предположения, вся масса m пластины G сосредоточена в n точках P_1, P_2, …, P_n. Но тогда координаты центра тяжести системы материальных точек вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \rho(P_i)\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta S_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \rho(P_i)\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta S_i}.$$

При неограниченном измельчении разбиения G на части (т. е. при $n \to \infty$ и $\lambda_n \to 0$) будет выполняться $\bar{x} \to x_C$, $\bar{y} \to y_C$, где (x_C, y_C) — координаты центра тяжести G. Таким образом, при $n \to \infty$ и $\lambda_n \to 0$ мы получаем в пределе

$$x_C = \frac{1}{m}\iint\limits_G x\rho(x,y)\,dxdy, \quad y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_G y\rho(x,y)\,dxdy,$$

где $m = \iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy$ — масса G.

Величины $M_x = \iint\limits_G y\rho(x,y)\,dxdy$ и $M_y = \iint\limits_G x\rho(x,y)\,dxdy$ называются статистическими моментами пластины G относительно осей Oy и Ox соответственно.

Таким образом, формулы для нахождения координат центра тяжести материальной пластины G можно записать еще и в следующем виде

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}.$$

Пример 4.6.5. *Найти координаты центра тяжести пластины из предыдущего примера.*

Имеем

$$G = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}, \quad \rho(x,y) = xy.$$

Как мы уже нашли,

$$m = \frac{1}{12}.$$

Найдем статистические моменты G относительно осей координат

$$M_y = \iint\limits_G x^2 y\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} x^2 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2 \left(y^2 \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^6\,dx = \frac{1}{14}$$

$$M_x = \iint\limits_G xy^2\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} xy^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x\left(y^3\Big|_0^{x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{24}.$$

Отсюда находим координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{14} : \frac{1}{12} = \frac{6}{7}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{24} : \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, точка $C\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{2}\right)$ *— центр тяжести пластины* G.

Моментом инерции I_O материальной точки M с массой m относительно точки O называется произведение массы M на квадрат расстояния $r = \mathrm{d}(O, M)$ между точками O и M, т. е. $I_O = mr^2$.

Моментом инерции системы материальных точек M_1, M_2, $\ldots$, M_n с массами m_1, m_2, $\ldots$, m_n относительно точки O называется сумма моментов инерции всех этих точек: $I_O = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, где $r_i = \mathrm{d}(O, M_i)$.

Аналогично определяется момент инерции системы материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно оси l,

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние от точки M_i до оси l.

Определим момент инерции пластины G с плотностью $\rho(x, y)$ относительно точки O — начала прямоугольных декартовых координат.

Рассмотрим произвольное разбиение $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$. Выберем произвольно в каждой части G_i точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Как и выше, считаем, что масса G_i приближенно равна $\rho(M_i)\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь G_i, и сосредоточена в точке M_i. Так как $r_i = \mathrm{d}(O, M_i) = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$, то момент инерции этой системы точек относительно начала координат O выразится так:

$$\bar{I}_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right) \rho(M_i)\Delta S_i.$$

Моментом инерции пластины G относительно начала координат называется предел сумм $\bar{I}_O$ при неограниченном измельчении разбиения G, т. е.

при $n \to \infty$ и $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant 1 \leqslant n} \mathrm{d}(G_i) \to 0$. Поэтому если обозначить момент инерции G относительно O через I_O, то

$$I_O = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(M_i) \Delta S_i =$$

$$= \iint\limits_G (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dxdy.$$

Моменты инерции пластины G с плотностью $\rho(x, y)$ относительно координатных осей Ox и Oy определяются соответственно формулами

$$I_x = \iint\limits_G y^2 \rho(x, y)\, dxdy,$$

$$I_y = \iint\limits_G x^2 \rho(x, y)\, dxdy.$$

Следовательно,

$$I_O = I_x + I_y.$$

Пример 4.6.6. *Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластины G, ограниченной линиями*

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Однородность G означает, что плотность постоянна, т. е.

$$\rho(x, y) = \rho_0$$

при всех $(x, y) \in G$, где $\rho_0 > 0$ — постоянное число. По формуле находим

$$I_x = \rho_0 \iint\limits_G y^2\, dxdy = \rho_0 \int_0^2 dx \int_0^{3 - \frac{3}{2}x} y^2\, dy =$$

$$= \frac{\rho_0}{3} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^3 dx = -\frac{2}{9}\rho_0 \int_0^2 (3 - \frac{3}{2}x)^3\, d(3 - \frac{3}{2}x) =$$

$$= -\frac{2}{9}\rho_0 \frac{1}{4}(3 - \frac{3}{2}x)^4 \Big|_0^2 = \frac{9}{2}\rho_0.$$

§ 4.7. Тройные интегралы

4.7.1. Определение тройного интеграла, его свойства, вычисление

Построение тройного интеграла и рассмотрение его свойств производится в точности по той же схеме, что и для двойного интеграла. Этим и объясняется краткость нашего дальнейшего изложения.

Множеством, по которому интегрируется функция трех переменных, будет трехмерная область. Мы далее считаем, что границы рассматриваемых областей — либо гладкие, либо кусочно-гладкие поверхности. Напомним, что поверхность гладкая, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся при непрерывном движении точки касания по поверхности. Кусочно-гладкая поверхность — это поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков. Плоскость и сфера — это гладкие поверхности, а поверхность куба — кусочно-гладкая поверхность.

Пусть V — некоторая ограниченная замкнутая область в пространстве и $u = f(x,y,z)$ — функция, ограниченная на V. Разобьем V произвольно на n частей $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$, не имеющих попарно общих внутренних точек. Присоединяя к каждой части V_i точки ее границы, мы считаем, что все части V_i — замкнутые области. Обозначим через ΔV_i объем V_i, через $d(V_i)$ — диаметр V_i, т. е. $d(V_i) = \max\limits_{M,N\in V_i} \mathrm{d}(M,N)$, где $\mathrm{d}(M,N)$ — расстояние между точками M и N.

Наибольший из диаметров $d(V_i)$ обозначим через λ_n и будем называть мелкостью разбиения области V.

Выберем в каждой части V_i произвольно точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\chi_i)$ и составим сумму
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\chi_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

Сумма S_n называется интегральной суммой для функции
$$u = f(x,y,z)$$
в области V.

Определение 4.7.1. *Если существует конечный предел*
$$I = \lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i,$$
не зависящий от способов разбиения области V на части и от выбора точек $M_i \in V_i$, то он называется тройным интегралом от функции f по области V и обозначается
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz, \textit{ или } \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV, \textit{ или } \iiint\limits_V f\,dV.$$

Уточнить понятие предела интегральных сумм можно точно так же, как и при определении определенного интеграла.

Терминология для двойных и тройных интегралов аналогична. Выражение $dV = dxdydz$ называется элементом объема.

Так же как для определенных и двойных интегралов, можно показать, что интегрируемая функция необходимо ограничена, хотя ограниченности недостаточно для интегрируемости. Последнее показывается построением примера ограниченной неинтегрируемой функции. Пример такой функции строится так же, как это было сделано для двойного интеграла.

Как и ранее, при рассмотрении определенных и двойных интегралов мы не будем углубляться в изучении вопроса об условиях интегрируемости функций, ограничимся тем, что выделим класс интегрируемых функций, вполне достаточный для почти всех приложений тройных интегралов.

Если функция ограничена на ограниченной замкнутой области и непрерывна на ней всюду, за исключением конечного числа гладких или кусочно-гладких поверхностей или кривых, то эта функция интегрируема по данной области. В частности, функция непрерывная в ограниченной замкнутой области всегда интегрируема по этой области.

Свойства линейности и аддитивности для тройного интеграла формулируются в точности так же, как и для двойного.

Тройной интеграл от единицы равен объему области интегрирования. Доказывается это свойство так же, как и аналогичное свойство для двойного интеграла. Теорема о среднем для тройного интеграла выглядит следующим образом

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0,z_0)v,$$

где v — объем V, (x_0,y_0,z_0) — некоторая точка из V.

Формулировки свойств, связанных с оценками интегралов, получаются из формулировок для двойных интегралов заменой их на тройные.

Обратимся к вычислению тройных интегралов. Нам понадобятся области специального вида.

Область V называется нормальной, относительно оси Oz, если она ограничена снизу поверхностью $z = \psi(x,y)$, сверху — поверхностью $z = \psi(x,y)$, $\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y)$ при $(x,y) \in G$, где G — проекция V на плоскость xOy, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Oz и проходящими через границу G.

Аналогично определяются области нормальные относительно осей Ox и Oy.

Теорема 4.7.1 (вычисление тройного интеграла). *Пусть V — нормаль-*

ная относительно оси Oz замкнутая область, т. е.

$$V = \{(x,y,z)\colon\ (x,y) \in G, \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\},$$

функция $f(x,y,z)$ интегрируема по V. Тогда функция

$$I(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

интегрируема по G и справедливы равенства

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iint\limits_G I(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_G \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Доказательство теоремы мы опускаем.

Если область G нормальна относительно оси Oy:

$$G = \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b, h(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

то, расписывая интеграл по G как повторный, мы получим

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{h(x)}^{g(x)} \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Аналогично расписываются интегралы по областям нормальным относительно осей Ox и Oy. Отметим, что на порядок расстановки в повторном интеграле интегралов по переменным влияют как область интегрирования, так и подынтегральная функция.

Пример 4.7.1.

1) Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_V y^2 z \sin(xyz)\,dv,$$

где V — параллелепипед,

$$V = \{(x,y,z)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Здесь удобнее расставить порядок интегрирования следующим образом:

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 y^2 \sin(xyz)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \left(-y\cos(xyz)\Big|_{x=0}^{x=1} \right) dz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (y - y\cos(yz))\,dz =$$

$$= \int\limits_0^2 (yz - \sin(yz))\Big|_{z=0}^{z=1} dy = \int\limits_0^2 (y - \sin y)\,dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + \cos y \right)\Bigg|_0^2 = 1 + \cos 2.$$

2) Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_V y\cos(x+z)\,dv,$$

где V *— область, ограниченная цилиндром* $y = \sqrt{x}$ *и плоскостями* $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \dfrac{\pi}{2}$.

Сведем интеграл I *к двойному согласно теореме.*

$$I = \iint\limits_G \Bigg(\int\limits_0^{\pi/2 - x} y\cos(x+z)\,dz \Bigg) dxdy,$$

где

$$G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$$

— проекция тела V *на плоскость* xOy*. Вычисляем интеграл по* z*, а затем —*

двойной интеграл по G.

$$I=\iint\limits_G y\left(\sin(x+z)\Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\right)dxdy=\iint\limits_G y(1-\sin x)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}}dy\int\limits_{y^2}^{\pi/2}y(1-\sin x)\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}}y\left[(x+\cos x)\Big|_{y^2}^{\pi/2}\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}}\left(\frac{\pi}{2}y-y^3-y\cos y^2\right)dy=\left(\frac{\pi}{4}y^2-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\pi/2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}}\cos y^2\,dy^2=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi/2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

4.7.2. Замена переменных в тройном интеграле

В пространстве отображение одной области на другую осуществляется с помощью преобразования, задаваемого системой уравнений:

$$\begin{cases} x=x(u,v,w);\\ y=y(u,v,w);\\ z=z(u,v,w).\end{cases}\qquad(4.7.1)$$

Эта система уравнений иногда называется преобразованием координат. Когда точка (u,v,w) пробегает область Ω, точка (x,y,z) пробегает некоторую область V.

Если функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ имеют все первые частные производные, то определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

называется якобианом отображения и обозначается

$$J(u,v,w),\quad \text{или}\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}.$$

Напомним, что отображение называется взаимнооднозначным, если из $(u_1,v_1,w_1)\neq(u_2,v_2,w_2)$ следует, что соответствующие точки (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) из V различны.

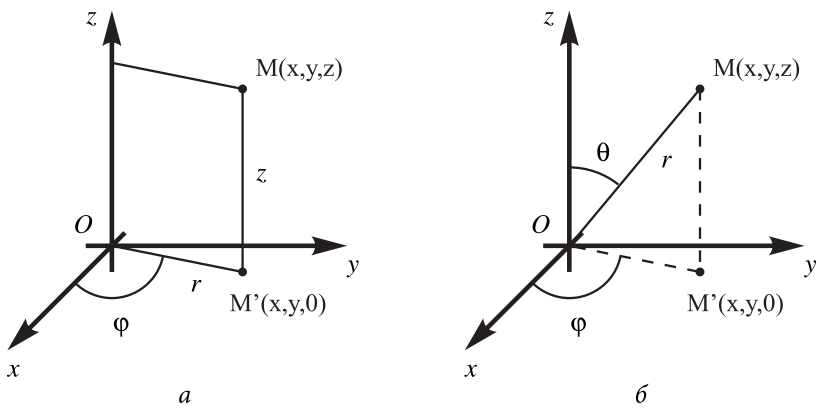


Рис. 4.11

Теорема 4.7.2 (замена переменных в тройном интеграле). *Если отображение* (4.7.1) *взаимнооднозначно отображает область* $\Omega \subset uvwO$ *на область* $V \subset xyzO$*, причем, функции* $x(u,v,w)$*,* $y(u,v,w)$*,* $z(u,v,w)$ *имеют в* Ω *ограниченные непрерывные первые частные производные и якобиан* $J(u,v,w)$ *отличен от нуля всюду в* Ω*, и если функция* $f(x,y,z)$ *интегрируема по* V*, то справедлива формула замены переменных в тройном интеграле*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw.$$

Доказательство теоремы мы не приводим.

В приложениях тройных интегралов наиболее употребительны цилиндрические и сферические координаты (рис. 4.11).

Цилиндрические координаты. В этой системе координат положение точки M пространства определяется полярными координатами r и φ точки M' —- проекции точки M на плоскость xOy и аппликатой z (рис. 4.11,а). Числа r, φ, z называются цилиндрическими координатами точки M, причем $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), z — любое число.

Ясно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Вычисляем якобиан данного преобразования

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных будет в данном случае иметь вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz,$$

где Ω — область пробегаемая точкой (r,φ,z), когда соответствующая точка (x,y,z) пробегает область V.

Пример 4.7.2. *Вычислить интеграл*

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $2z = x^2+y^2$, $z = 2$.

Переходим к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$|J| = r$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 2$. *Поясним последнее неравенство. Проекцией V на плоскость xOy будет круг*

$$G = \{(x,y) :\ x^2+y^2 \leqslant 4\}.$$

Область V задается неравенствами $\dfrac{x^2+y^2}{2} \leqslant z \leqslant 2$ при $(x,y) \in G$. Подставляя в неравенства цилиндрические координаты, мы и получаем $\dfrac{r^2}{2} \leqslant z \leqslant 2$. Итак,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{r^2/2}^2 r^2\cdot r\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = 2\pi\cdot\left(8-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi.$$

Сферические координаты. В пространстве, где уже есть декартова прямоугольная система координат, положение точки M можно определить с помощью следующей тройки чисел. Пусть r — это расстояние от точки M до начала координат O, φ — угол между положительным направлением оси Ox и вектором OM', где M' — проекция точки M на плоскость xOy, и пусть θ — это угол между осью Oz и вектором OM (рис. 4.11,б). Ясно, что $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Числа r, φ, θ однозначно определяют положение точки в пространстве и называются сферическими координатами точки M.

Легко выразить x, y, z через r, φ, θ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Вычислим якобиан этого преобразования

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\theta - r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta -$$

$$- r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\theta - r^2\sin^2\theta\sin^3\theta =$$

$$= -r^2\sin^3\theta - r^2\cos^2\theta\sin\theta = -r^2\sin\theta.$$

Формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta,$$

где Ω — область изменения переменных r, φ, θ.

Пример 4.7.3. *Вычислить интеграл*

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

где V — это шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant y$.

Выделяя полный квадрат по y, видим, что V — это шар

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

радиуса $R = 1/2$ с центром в точке $C(0,1/2,0)$. Подставим выражение x, y, z через сферические координаты в неравенство $x^2+y^2+z^2 \leqslant y$. Получим $r^2 \leqslant r\sin\varphi\sin\theta$, или, $r \leqslant \sin\varphi\sin\theta$. Мы получили задание нашего шара в сферических координатах. Ясно, что $0 \leqslant r \leqslant \sin\varphi\sin\theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Вычисляем интеграл

$$I=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{\sin\varphi\sin\theta}r\cdot r^2\sin\theta\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sin\varphi\sin\theta}\right)d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi\cdot\sin^5\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi\int\limits_0^{\pi}\left[-(1-\cos\theta)^2\right]d\cos\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos2\varphi}{2}+\frac{1+\cos4\varphi}{8}\right)d\varphi\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d\cos\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi}{4}-\frac{\sin2\varphi}{4}+\frac{\varphi}{8}+\frac{\sin4\varphi}{32}\right)\bigg|_0^{\pi}\times$$

$$\times\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{40}.$$

4.7.3. Приложения тройных интегралов

Вычисление объемов. Основанием для такого применения тройного интеграла служит формула

$$\iiint\limits_V dxdydz=v,$$

где v — объем V.

Пример 4.7.4. *Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Тело V ограничено снизу конусом $x=\sqrt{x^2+y^2}$, а сверху — параболоидом $z=6-x^2-y^2$. Вычислять объем здесь удобнее с использованием цилиндрических координат

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z,\quad |J|=r,$$

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_\Omega r\,drd\varphi dz.$$

Из $6-x^2-y^2=\sqrt{x^2+y^2}$ *следует, что* $6-r^2=r$, *или* $r^2+r-6=0$. *Отсюда находим* $r=2$ — *уравнение окружности* ($x^2+y^2=4$) — *границы области* G — *проекции* V *на плоскость* xOy. *Переходим к повторному интегралу в цилиндрических координатах и вычисляем объем*

$$v=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}dr\int\limits_r^{6-r^2}r\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}(6r-r^3-r^2)\,dr=$$

$$=2\pi\left(3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\bigg|_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

Применение тройного интеграла в механике. Вывод следующих формул вполне аналогичен выводу соответствующих формул для плоских материальных пластинок. Поэтому вывод формул мы опускаем.

Если $\rho(x,y,z)$ — объемная плотность вещества, распределенного в области V, то масса V вычисляется по формуле

$$m=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dv.$$

Координаты центра тяжести вычисляются по формулам:

$$x_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$y_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$z_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dv.$$

Моменты инерции области V относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат O определяются соответственно формулами:

$$I_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$I_y=\iiint\limits_V(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$I_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$I_O=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей xOy, xOz, yOz тела V вычисляются по формулам

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dv;$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dv.$$

Таким образом, формулы для вычисления координат центра тяжести можно записать в следующем виде

$$x_C = \frac{M_y z}{m}, \quad y_C = \frac{M_x z}{m}, \quad z_C = \frac{M_x y}{m},$$

где m — масса тела V.

Пример 4.7.5.

1) Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями $2x+z=4$, $x+z=2$, $y^2=2x$ $(y>0)$, если плотность $\rho(x,y,z)=y$.

Вычисляем

$$m = \iiint\limits_V y\,dxdydz = \iint\limits_G \left(\int\limits_{2-x}^{4-2x} y\,dz\right) dxdy = \iint\limits_G y(2-x)\,dxdy,$$

где G — проекция V на плоскость xOy. Вычисляем двойной интеграл

$$m = \iint\limits_G y(2-x)\,dxdy = \int\limits_0^2 f dy \int\limits_{y^2/2}^2 y(2-x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 y\left(\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{y^2/2}^2\right) dy = \int\limits_0^2 y\left(2 - y^2 + \frac{y^4}{8}\right) dy =$$

$$= \left(y^2 - \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{48}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

2) Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z=4x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

Однородность означает, что плотность $\rho(x,y,z)=\rho_0$ — постоянная величина.

Для вычисления интеграла $I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho_0\, dxdydz$ *используем цилиндрические координаты* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $|J| = r$. *Тогда*

$$I_z = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\,dr \int\limits_{0}^{2\sqrt{r\cos\varphi}} r^2\rho_0\, dz =$$

$$= 2\rho_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^{2/7}\sqrt{\cos\varphi}\, dr =$$

$$= \frac{4}{9}\rho_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi}\left(r^{9/2}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{2^{13/2}}{9}\rho_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2^{13}}}{9}\rho_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)^2\, d\sin\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2^{13}}}{9}\rho_0 \left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2^{21}}}{135}\rho_0.$$

Литература

[1] *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1974. — 320 с.

[2] *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее применения. — М.: Наука, 1971. — 407 с.

[3] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. — М: Наука, 1971. — 232 с.

[4] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1978. — 296 с.

[5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1971. — Ч. 1. — 600 с.

[6] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973. — Т.1. — 616 с.

[7] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973. — Т.2. — 472 с.

[8] *Лаптев Г.Ф.* Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1976. — 336 с.

[9] *Мышкис А.Д.* Математика. Специальные курсы. — М.: Наука, 1971. — 632 с.

[10] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Т.1. — 432 с.

[11] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Т.2. — 392 с.

[12] *Очан Ю.С.* Методы математической физики. — М.: Высшая школа, 1965. — 384 с.

[13] *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

[14] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.I. — 607 с.

[15] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.II. — 800 с.

[16] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.III. — 656 с.

[17] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965. — 424 с.