

Министерство общего и профессионального образования Российской
Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Том I
третье издание

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей
высших учебных заведений

Новосибирск
2006

УДК 51 (075.8)
В 937

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко*, д-р физ.-мат. наук,
проф. СибУКП.
А. Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов-заочников I курса всех факультетов

Высшая математика

В937 Учеб. пособие/ В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик,
Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнев, В. В. Хаблов. —
Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. — Т. I — 280 с.

ISBN 5-7782-0422-1

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов I курса очного и заочного отделений всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику в объеме первого курса. При его написании были использованы методические разработки и другие материалы, ранее изданные кафедрами высшей и инженерной математики НГТУ. Эти материалы включены в текст пособия без ссылок, за что мы приносим свои извинения. Все замечания по содержанию данной работы просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

Во втором издании переработаны задания контрольных работ и исправлены замеченные опечатки

УДК 51(075.8)

ISBN 6-7782-0422-1

- © Новосибирский государственный
технический университет, 2006
- © В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик,
Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнев,
В. В. Хаблов, 2006

Оглавление

Предисловие	8
Глава 0. Введение. Общематематические понятия	9
§ 0.1. Структура математического языка	9
§ 0.2. Множества	10
§ 0.3. Множество действительных чисел	12
§ 0.4. Числовая ось и десятичное представление действительных чисел	14
§ 0.5. Абсолютная величина числа. Промежутки на числовой оси	17
§ 0.6. Функция	19
0.6.1. Понятие функции (отображения)	19
0.6.2. Композиция функций. Обратные функции	19
0.6.3. Способы задания функции. График	21
0.6.4. Элементарные функции	23
Глава 1. Матрицы и системы линейных уравнений	26
§ 1.1. Матрицы и операции над ними	28
1.1.1. Линейные операции над матрицами	28
1.1.2. Умножение матриц	33
§ 1.2. Определители	38
1.2.1. Свойства суммирования	38
1.2.2. Понятие определителя. Примеры	40
1.2.3. Свойства определителей	46
§ 1.3. Обратная матрица	52
1.3.1. Определение и свойства обратной матрицы	52
1.3.2. Существование обратной матрицы.	54
1.3.3. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы	56
§ 1.4. Ранг матрицы	58
1.4.1. Линейная независимость строк и столбцов	58
1.4.2. Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре и о ранге матрицы	61
1.4.3. Элементарные преобразования матриц	66
§ 1.5. Системы линейных уравнений	69
1.5.1. Основные понятия. Матричная запись системы	69

1.5.2. Формулы Крамера	70
§ 1.6. Системы линейных уравнений. Общая теория	72
1.6.1. Условие совместности системы. Теорема Кронекера–Капелли	72
1.6.2. Однородные системы линейных уравнений	74
1.6.3. Неоднородные системы линейных уравнений	80
Глава 2. Векторная алгебра	85
§ 2.1. Понятия вектора и линейные операции	85
2.1.1. Линейные операции над векторами	87
§ 2.2. Базис на плоскости и в пространстве	91
2.2.1. Линейная зависимость и линейная независимость векторов	92
2.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов на плоскости и в пространстве. Компланарные векторы	92
2.2.3. Базис на плоскости и в пространстве	95
2.2.4. Декартова прямоугольный базис. Декартова прямоугольная система координат	98
2.2.5. Условия равенства и коллинеарности векторов в координатной форме	100
§ 2.3. Проекция вектора на ось.	101
2.3.1. Длина вектора в координатной форме. Направляющие косинусы	104
2.3.2. Деление отрезка в заданном отношении	106
§ 2.4. Скалярное произведение векторов	108
2.4.1. Геометрические свойства скалярного произведения	109
2.4.2. Алгебраические свойства скалярного произведения	110
2.4.3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах	111
§ 2.5. Векторное произведение двух векторов	112
2.5.1. Определение векторного произведения	112
2.5.2. Выражение векторного произведения в декартовых координатах	114
§ 2.6. Смешанное произведение векторов	116
2.6.1. Определение смешанного произведения и его геометрический смысл	116
2.6.2. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах	119
Глава 3. Аналитическая геометрия	122
§ 3.1. Уравнение линии на плоскости. Полярная система координат. Уравнение поверхности и линии в пространстве	122

3.1.1.	Полярная система координат	123
3.1.2.	Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности	125
3.1.3.	Уравнение линии в пространстве	126
§ 3.2.	Прямая на плоскости	126
3.2.1.	Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Касательная и нормаль к кривой	126
3.2.2.	Общее и каноническое уравнения прямой	127
3.2.3.	Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Па- раметрические уравнения прямой	131
3.2.4.	Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности и параллельности прямых	133
§ 3.3.	Плоскость	134
3.3.1.	Общее уравнение плоскости	134
3.3.2.	Неполные уравнения плоскости	135
3.3.3.	Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей	137
§ 3.4.	Прямая в пространстве	137
3.4.1.	Канонические уравнения прямой в пространстве	137
3.4.2.	Уравнение прямой, проходящей через две точки	138
3.4.3.	Параметрические уравнения прямой в пространстве	139
3.4.4.	Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых	140
3.4.5.	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной плоскости	140
3.4.6.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой	141
3.4.7.	Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости	142
3.4.8.	Векторные уравнения прямой и плоскости	142
§ 3.5.	Кривые второго порядка	145
3.5.1.	Эллипс	147
3.5.2.	Эллипс. Исследование формы	149
3.5.3.	Гипербола	152
3.5.4.	Гипербола: исследование формы	153
3.5.5.	Эксцентриситет эллипса и гиперболы	156
3.5.6.	Парабола	157

3.5.7.	«Почти канонические» уравнения эллипса, гиперболы и параболы	159
3.5.8.	Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы	161
Глава 4.	Комплексные числа	162
§ 4.1.	Понятие комплексного числа	163
§ 4.2.	Операции над комплексными числами	165
§ 4.3.	Показательная, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного.	169
Глава 5.	Элементарная теория предела	173
§ 5.1.	Предел последовательности	173
5.1.1.	Существо вопроса	173
5.1.2.	Определение числовой последовательности и ее предела	174
5.1.3.	Свойства предела последовательности	176
5.1.4.	Понятие о неопределенностях. Техника нахождения пределов.	178
5.1.5.	Предельный переход в неравенствах	180
5.1.6.	Монотонные последовательности	181
5.1.7.	Число e	181
5.1.8.	Применение к приближенным вычислениям	182
§ 5.2.	Предел числовой функции	183
5.2.1.	Определение и примеры	183
5.2.2.	Предельный переход в неравенствах	187
5.2.3.	Первый замечательный предел	187
5.2.4.	Предел сложной функции	188
5.2.5.	Второй замечательный предел	189
5.2.6.	Предел монотонной функции	190
5.2.7.	Односторонние пределы	190
§ 5.3.	Непрерывные функции	191
5.3.1.	Определение и примеры	191
5.3.2.	Операции над непрерывными функциями	192
5.3.3.	Свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке	192
5.3.4.	Непрерывность обратной функции	193
5.3.5.	Непрерывность элементарных функций	195
5.3.6.	Сравнение бесконечно малых функций	195
5.3.7.	Три типа разрыва непрерывности функций	199
Глава 6.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	201
§ 6.1.	Производная и дифференциал	201
6.1.1.	Вычисление скорости прямолинейного движения	201
6.1.2.	Понятие производной	202

6.1.3. Вычисление производной основных элементарных функций $y = ax + c$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$	203
6.1.4. Дифференциал функции	204
6.1.5. Геометрический смысл производной и дифференциала	205
6.1.6. Непрерывность и дифференцируемость	207
§ 6.2. Свойства операции дифференцирования	208
6.2.1. Дифференцирование арифметических операций	208
6.2.2. Производная сложной функции	211
6.2.3. Производная обратной функции	212
6.2.4. Сводка основных правил и формул	214
6.2.5. Логарифмическое дифференцирование	215
6.2.6. Дифференцирование произведения	216
6.2.7. Дифференцирование неявно заданных функций	217
6.2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически	217
§ 6.3. Повторное дифференцирование	218
6.3.1. Производные старших порядков	218
6.3.2. Повторное дифференцирование неявно заданных функций	219
6.3.3. Повторное дифференцирование функций, заданных параметрически	220
6.3.4. Дифференциалы высших порядков	221
§ 6.4. Приложения дифференциального исчисления	221
6.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления	222
6.4.2. Формула Тейлора	227
6.4.3. Правило Лопитала	236
6.4.4. Исследование поведения функции	240
6.4.5. Построение графиков функций	249
Контрольные работы	255
Контрольная работа №1	255
Контрольная работа №2	268
Список литературы	275

Предисловие

Настоящий учебник по высшей математике адресован студентам нематематических специальностей и направлений высших учебных заведений. Подбор разделов высшей математики, включенных в книгу достаточно широк и предусмотрен Государственными образовательными стандартами инженерных, экономических и других нематематических специальностей, за исключением специальных разделов математики. Кроме того, при изложении материала авторы старались избегать громоздких доказательств и излишнего формализма, оставаясь, тем не менее, на достаточном уровне строгости.

Книга предназначена для самостоятельного изучения высшей математики. Такой учебник особенно нужен студентам дистанционной или, как её раньше называли, заочной формы образования. Эта особенность выражается в бóльшей насыщенности иллюстрирующими и обучающими примерами, в акценте на содержательной стороне изложения и доступности.

Излагаемый в книге вариант курса высшей математики сложился на основе лекций, читаемых авторами на различных факультетах НГТУ на протяжении ряда лет.

Последовательность изучения глав, предложенная в книге, не является единственно возможной и может быть изменена по усмотрению преподавателей, организующих учебный процесс.

Глава 0.

Введение. Общематематические понятия

Великая книга природы
Написана языком математики.
Г. Галилей (1564–1642)

§ 0.1. Структура математического языка

Рассмотрим некоторые важные математические понятия, используемые в самых разных разделах математики.

Пусть A — условие теоремы, т.е. то, что предполагается данным, а B — ее заключение, т.е. то, что требуется доказать. Наиболее распространенная форма математического утверждения

$$A \Rightarrow B. \quad (0.1.1)$$

Здесь A и B — некоторые высказывания, а само утверждение (0.1.1) читается как « A влечет B », « B есть следствие A », или «если A , то B ». При этом A называют *достаточным условием* для B (т.е. того, что содержится в A достаточно, вполне хватает для того, чтобы было справедливо утверждение B), а B — *необходимым условием* для A (т.е. B не обойдешь, если выполняется A).

Если одновременно выполнены: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то высказывания A и B называются *равносильными*, или *эквивалентными*, что выражают также

одним из следующих способов: « A есть необходимое и достаточное условие для B », « A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B », или символически

$$A \Leftrightarrow B.$$

Доказательство математического утверждения состоит в построении последовательности других утверждений, образующих цепочку следствий:

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B,$$

где каждое следствие есть либо уже доказанное утверждение (теорема, лемма), либо аксиома, либо содержится в исходном предположении A .

В любом языке, в том числе и в русском, конечное число слов. И ясно, что невозможно дать определения *всех* понятий. Ибо в этом случае неизбежны порочные логические круги $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$. В математике некоторые основные, первичные понятия или объекты не определяются и предполагаются интуитивно ясными и не вызывающими неоднозначные толкования. Такими являются, например, понятия натурального и целого числа, понятие точки и прямой в геометрии). Системы аксиом устанавливают "правила игры" с этими объектами. Все последующие понятия вводятся с помощью математических определений (например, рациональные числа определяются как числа, которые можно представить в виде отношения двух целых чисел).

§ 0.2. Множества

Из основных понятий математики наиболее общим является понятие множества.

Под *множеством* понимается *совокупность некоторых объектов*, которые называются элементами множества. Тот факт, что x является элементом множества M , обозначается $x \in M$ (читается « x принадлежит M »). Если же x не является элементом M , то это обозначают $x \notin M$ (« x не принадлежит M »).

Множество задают с помощью простого перечисления всех его элементов, если это возможно, и записывают в виде: $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Например, множество всех арабских цифр $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Другой способ задания множества основан на том, что все элементы данного множества объединяются некоторым общим для них свойством. Если элемент x обладает некоторым свойством P , будем обозначать это $P(x)$. Тогда множество M , которое состоит из всех элементов множества S , обладающих свойством P , обозначается одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} M &= \{x \in S \mid x \text{ обладает свойством } P\} = \\ &= \{x \in S \mid P(x)\} = \{x \in S : P(x)\}. \end{aligned}$$

Например, промежуток $[a, b]$ действительной числовой оси можно задать следующим образом:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}.$$

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если все элементы множества A принадлежат множеству B . Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются *равными*, или *совпадающими* (обозначается $A = B$), очевидно, они состоят из одних и тех же элементов. Среди всех множеств выделяют *пустое множество* \emptyset , не содержащее ни одного элемента, и *универсальное множество* U , содержащие все элементы. Для любого множества A считаются выполненными включения: $\emptyset \subseteq A \subseteq U$. Множества \emptyset и U называются *несобственными* подмножествами A .

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B . *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B . Объединение и пересечение множеств можно задать равенствами:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B . *Дополнением* множества A называется множество \bar{A} , состоящее из всех элементов, не принадлежащих A . Иначе:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\},$$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A.$$

Наглядное представление об операциях с множествами дают так называемые диаграммы Эйлера–Венна (рис. 0.1).

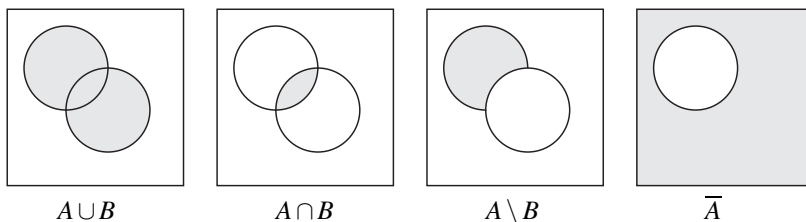


Рис. 0.1

В заключение отметим, что объединение и пересечение более двух множеств определяются аналогично, а для их обозначения используются следующие способы:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

§ 0.3. Множество действительных чисел

Строгое изложение высшей математики и ее центрального раздела — математического анализа — основано на свойствах действительных чисел. Исходным для определения множества действительных чисел является так называемый натуральный ряд, или множество \mathbb{N} натуральных чисел

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

Из школьного курса математики читатель знаком с основными свойствами множества натуральных чисел, поэтому мы остановимся лишь на некоторых из них. Наиболее содержательным является так называемый «принцип (или аксиома) математической индукции», который заключается в следующем.

Если: 1) некоторое свойство P выполняется для $n = 1$ и 2) из выполненности P для $n = k$ следует его выполнимость для $n = k + 1$, то свойство P выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$.

Проиллюстрируем применение принципа математической индукции на следующем примере. Из курса элементарной математики известна формула для вычисления суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (0.3.1)$$

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) При $n = 1$ формула (0.3.1) выполняется очевидным образом:

$$S_1 = \frac{b_1(1 - q^1)}{1 - q} = b_1.$$

2) Пусть (0.3.1) выполнена для $n = k$. Тогда для $n = k + 1$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + b_{k+1} = \frac{b_1(1 - q^k)}{1 - q} + b_1 \cdot q^k = \frac{b_1(1 - q^k) + b_1 q^k(1 - q)}{1 - q} = \\ &= \frac{b_1 - b_1 q^k + b_1 q^k - b_1 q^{k+1}}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^{k+1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

Сравнивая крайние члены в этой цепочке равенств, видим, что формула (0.3.1) доказана для $n = k + 1$. В проделанных вычислениях была использована формула (0.3.1) при $n = k$, справедливая согласно индуктивному предположению, и формула общего члена геометрической прогрессии: $b_{k+1} = b_1 q^k$. В силу принципа математической индукции, формула (0.3.1) справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$.

Из других свойств натурального ряда отметим, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует непосредственно следующее за ним число $n + 1 \in \mathbb{N}$, а для любого натурального $n \neq 1$ существует непосредственно предшествующее ему число $n - 1 \in \mathbb{N}$. На множестве натуральных чисел вводятся отношения $\leq, \geq, <, >$, а также операции сложения $a + b$ и умножения $a \cdot b$.

Требование выполнимости обратных операций для сложения и умножения приводит к необходимости расширения множества \mathbb{N} . Так, для выполнимости операции вычитания $a - b$ к множеству \mathbb{N} добавляют число 0 и множество $\mathbb{N}_- = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$ целых отрицательных чисел. Полученное в результате множество $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}_-$ называется множеством целых чисел. Точно так же, требование выполнимости операции деления $a : b = \frac{a}{b}$ приводит к расширению множества \mathbb{Z} целых чисел до множества \mathbb{Q} рациональных чисел, которое определяется следующим образом:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Множество \mathbb{Q} рациональных чисел, в свою очередь, оказывается недостаточным для использования в различных областях математики и ее приложений. Например, оказалось, что квадратное уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения в множестве рациональных чисел. Предположив, что при некоторых целых p и q число $x = \frac{p}{q}$ удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$, мы приходим к противоречию. Действительно, можно считать, не ограничивая общности, что дробь $x = \frac{p}{q}$ несократима. Подставим x в данное уравнение. Тогда полу-

чим цепочку следствий: $\left(\frac{p^2}{q^2} = 2\right) \Leftrightarrow (p^2 = 2q^2) \Rightarrow (p^2 - \text{четное число}) \Leftrightarrow (p - \text{четное число}) \Leftrightarrow (p = 2p_1, p_1 \in \mathbb{Z})$. Подставляя значение $p = 2p_1$ в равенство $p^2 = 2q^2$, получим: $4p_1^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2p_1^2 = q^2$, откуда следует, что q^2 , а значит и $q - \text{четное число}$. Но тогда $q = 2q_1$ для некоторого $q_1 \in \mathbb{Z}$, поэтому дробь $\frac{p}{q} = \frac{2p_1}{2q_1}$ сократима, что противоречит первоначальному допущению.

Другие примеры недостаточности множества рациональных чисел представляются в процессе измерения длин. Например, если катеты прямоугольного равнобедренного треугольника имеют длины по 1, то длина c гипотенузы не может быть представлена никаким рациональным числом: по теореме Пифагора $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, а это невозможно в множестве \mathbb{Q} . Геометрически это означает несоизмеримость катета и гипотенузы: нет такой единицы масштаба δ , которая целое число раз отложилась бы на катете и гипотенузе. Похожая ситуация возникает, если попытаться измерить длину окружности L ее радиусом R : $\frac{L}{R} \neq \frac{p}{q}$ ни при каких целых p и $q \neq 0$. Читателю известно,

что отношение $\frac{L}{R}$ называют числом 2π .

Числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Множество \mathbb{R} , являющееся объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, называется множеством *действительных*, или *вещественных*, чисел. Иное, конструктивное описание множества действительных чисел связано с изображением действительных чисел точками числовой оси и представлением их в десятичной системе, оно рассматривается в следующем разделе.

§ 0.4. Числовая ось и десятичное представление действительных чисел

Прямая, на которой выбраны начальная точка, единичный отрезок и положительное направление, называется *числовой осью*. Мы расширим множество \mathbb{Q} рациональных чисел так, чтобы каждой точке числовой оси соответствовало бы некоторое число и, наоборот, каждое такое число можно было изобразить точкой на числовой оси. Построенное с помощью этого расширения числовое множество и будем считать множеством действительных чисел.

Для изображения натурального числа \mathbb{N} на числовой оси достаточно отложить в положительном направлении \mathbb{N} единичных отрезков (например, при помощи циркуля) (рис. 0.2).

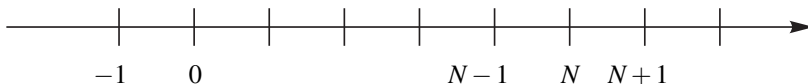


Рис. 0.2

Для изображения рационального числа p/q представим его в виде $p/q = N + m/n$, ($m < n$), где N — целое, а m/n — дробная часть этого числа. Изобразим число N , и на отрезке, заключенном между точками N и $N + 1$ изобразим отрезок m/n (выполняя операцию деления отрезка $[N, N + 1]$ на n частей при помощи циркуля и линейки) (рис. 0.3).

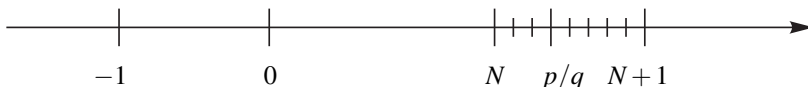


Рис. 0.3

Чтобы изобразить любое действительное, в том числе и иррациональное число x некоторой точкой M на числовой оси и, наоборот, каждой точке M

сопоставить число x , быть может, иррациональное, используют алгоритм представления действительных чисел в позиционной системе исчисления (двоичной, троичной, десятичной и т. п.).

Пусть число x изображается точкой M на числовой оси. Для нахождения величины этого числа при помощи десятичной системы найдем единичный интервал между целыми числами N и $N + 1$, содержащий точку M , и разделим его на 10 равных частей (десятичных интервалов). Обозначим эти интервалы в порядке их следования числами $0, 1, 2, \dots, 9$. Пусть точка M попала в интервал с номером α_1 , $0 \leq \alpha_1 \leq 9$. Разделим этот интервал, в свою очередь, на 10 равных частей (длины $1/10^2$) и обозначим через α_2 номер того интервала, в который попала точка M , $0 \leq \alpha_2 \leq 9$. Продолжая этот процесс далее, мы столкнемся с тремя возможными случаями:

Случай конечной десятичной дроби. На n -м шаге этого процесса точка M совпала с одним из концов интервала длины $1/10^n$. Тогда в качестве номера интервала α_n выберем номер того интервала, в котором точка M является левым концом. В этом случае точка M представляется в виде

$$x = N + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Учитывая, что целую часть N можно разложить в сумму β_0 единиц, β_1 десятков, β_2 сотен и т. д., окончательное разложение числа x по степеням 10 представляется в виде

$$x = \beta_m 10^m + \dots + \beta_1 10 + \beta_0 + \alpha_1 10^{-1} + \dots + \alpha_n 10^{-n}. \quad (0.4.1)$$

Это представление равносильно записи

$$x = \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \quad (0.4.2)$$

называемой десятичным представлением числа x . Ясно, что записи (0.4.1) или (что то же самое) (0.4.2) представляют рациональное число.

Случай периодической десятичной дроби. Точка M не совпадает с концом интервала ни на каком конечном n -м шаге, а числа, нумерующие интервалы, образуют последовательность из повторяющегося блока $\alpha_1 \dots \alpha_k$, называемого периодом. В этом случае число x имеет вид

$$x = \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\text{период}} \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\text{период}} \dots \quad (0.4.3)$$

Такие десятичные дроби также представляют рациональные числа, так как раскладываются в k сумм бесконечных убывающих геометрических прогрессий. Например, для числа

$$x = 0,341341341\dots$$

имеем разложение

$$x = \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^4} + \dots \right) + \left(\frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right),$$

где в каждой из скобок стоит сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/10^3$. Вычисляя эти три суммы по известной формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии и складывая, заключаем, что $x = 341/999$ — рациональное число.

Третий случай: непериодическая бесконечная десятичная дробь. Число x представляется в виде

$$x = \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots, \quad (0.4.4)$$

где последовательность $\alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ не является периодической. Такие числа не являются рациональными. На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем, а интересующимся советуем обратиться к более подробным курсам математического анализа. Естественно назвать именно такие числа (то есть представленные в виде бесконечной непериодической десятичной дроби) *иррациональными*, а действительными считать, как и прежде, все рациональные или иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначается буквой \mathbb{R} .

Проделаем еще некоторые вычисления. Оставим в записи (0.4.4) n знаков $\alpha_1 \dots \alpha_n$ после запятой и оценим абсолютную погрешность такого «укороченного» представления числа x :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots - \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \dots \leq \\ &\leq \frac{9}{10^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

При переходе к неравенству мы воспользовались тем, что все $\alpha_{n+k} \leq 9$, $k = 1, 2, \dots$. Суммируя прогрессию в скобках, заключаем, что

$$\varepsilon \leq \frac{9}{10^{n+1}} \left(\frac{1}{1 - 1/10} \right) = \frac{1}{10^n}.$$

Вывод 1. Если в десятичной записи числа ограничиться n знаками после запятой, то абсолютная погрешность такой записи составит величину $\varepsilon = 10^{-n}$. Таким образом, чем больше знаков после запятой учитывать в записи числа (0.4.4) тем точнее получается значение этого числа.

Замечание 1. Число x , записанное в виде конечной десятичной дроби (0.4.2) допускает второй способ записи в виде бесконечной периодической дроби, у которой период состоит из одной цифры 9. Например, $1 = 0,999$; $3,33 = 3,32999$ и т. д. Обычно применяют первый способ записи, так как последний десятичный знак α_n в записи (0.4.2) указывает номер левого конца интервала совпадающего с точкой M , изображающей число x .

Итак, мы рассмотрели алгоритм десятичной записи числа, согласно которому всякая точка M числовой оси изображает некоторое действительное число x в виде (0.4.2) или (0.4.3), или (0.4.4).

Обратно, следуя этому алгоритму, любое число представляющееся в одной из возможных десятичных записей (0.4.2) или (0.4.3) или (0.4.4) можно изобразить точкой на числовой оси, которая удалена от начала 0 на расстояние, равное сумме длин конечного или бесконечного множества отрезков: $\beta_k 10^k, k = m, m-1, \dots, 1, 0$, и $\alpha_r 10^{-r}, r = 1, 2, \dots, n, \dots$:

$$x = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \beta_1 10 + \beta_0 + \alpha_1 10^{-1} + \dots + \alpha_n 10^{-n} + \dots \quad (0.4.5)$$

При этом, согласно выводу 1, если нас «устраивает» погрешность порядка $\epsilon = 10^{-n}$, то в этой сумме (0.4.5) можно ограничиться n десятичными знаками $\alpha_1 \dots \alpha_n$ дробной части числа.

Вывод 2. Между действительными числами и точками числовой оси установлено так называемое *взаимно-однозначное соответствие*, которое состоит в том, что каждой точке M числовой оси соответствует единственное число x в одной из записей (0.4.2) или (0.4.3), или (0.4.4) и, наоборот, каждое число x , записанное таким образом, изображается единственной точкой M на числовой оси.

§ 0.5. Абсолютная величина числа. Промежутки на числовой оси

Как следует из предыдущего раздела, положительные числа изображаются точками числовой оси правее точки, изображающей число 0 (начало), отрицательные числа изображаются точками, расположенными левее точки 0 . Каждому действительному числу x положительному или отрицательному сопоставляется число $|x|$ по правилу

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Число $|x|$ называется *абсолютной величиной*, или *модулем* действительного числа x , геометрически оно означает расстояние, на котором точка x удалена от начала 0 . Модуль разности $|a - b|$ двух чисел имеет смысл расстояния между соответствующими точками на числовой оси.

Из геометрического смысла абсолютной величины вытекает следующая эквивалентность неравенств: для любого $r > 0$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r, \quad (0.5.1)$$

которые выражают тот факт, что точка x удалена от начала на расстояние, не большее r .

Пользуясь эквивалентностью (0.5.1), можно доказать другие полезные неравенства для абсолютных величин:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (0.5.2)$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||. \quad (0.5.3)$$

Действительно, складывая почленно следующие очевидные неравенства

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|,$$

получим систему неравенств

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

которая, в силу (0.5.1), равносильна неравенству (0.5.2).

Доказательство неравенства (0.5.3) предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пользуясь определением модуля, нетрудно проверить также справедливость следующих соотношений:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Множество точек числовой оси, удовлетворяющих системе неравенств $a \leq x \leq b$, называют *замкнутым промежутком*, или *отрезком* и обозначают $[a, b]$. Равносильны записи:

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b.$$

Открытым промежутком (интервалом) называют множество точек, определяемое равенством

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Полуоткрытыми промежутками или полуинтервалами называются следующие подмножества \mathbb{R} :

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Если в определениях интервала (полуинтервала) один из символов a, b (или оба) заменить на ∞ или $-\infty$, то получим так называемые бесконечные промежутки. Например,

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\},$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Окрестностью точки a радиуса ε (ε -окрестностью) называется множество точек x числовой оси, удаленных от точки a не более, чем на ε , или множество:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq \varepsilon\}.$$

Открытой ε -окрестностью будем называть множество точек, заданное одним из следующих эквивалентных соотношений:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Множество E на числовой оси $(-\infty, \infty)$ называется *ограниченным*, если существует r -окрестность начала координат, ($r \neq \infty$), содержащая это множество. Другими словами, для всех точек $x \in E$ выполняется неравенство

$$|x| < r \neq \infty.$$

§ 0.6. Функция

0.6.1. Понятие функции (отображения)

Пусть X и Y — некоторые множества. Будем говорить, что задана *функция* (или *отображение*), определенная на X со значениями в Y , если указан закон f , сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in Y$.

Множество X называют *областью определения* функции, а элементы x этого множества называют *аргументами*, или *независимыми переменными*; элемент y , соответствующий конкретному значению x , называют значением функции от элемента x , или *образом* x , и обозначают $y = f(x)$. При изменении аргумента x значение $y = f(x)$ меняется по заданному закону, поэтому элемент y называют *зависимой переменной*.

Множество всех значений $f(x) \in Y$, которые принимает функция $f(x)$, когда x пробегает все X , будем называть *множеством значений*, или *областью значений* функции.

В зависимости от природы множеств X и Y термин «функция» имеет ряд синонимов: *отображение*, *преобразование*, *оператор* и др. Наряду с обозначением $y = f(x)$ для функции (отображения) используются и такие:

$$x \rightarrow f(x); \quad f : x \rightarrow y; \quad f : X \rightarrow Y; \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Если X и Y числовые множества, то $y = f(x)$ называется *числовой функцией*. Например: $y = \sin x$, $y = 2^x$, $y = 2x + 1$ — числовые функции.

Две функции f_1 и f_2 считаются *совпадающими*, или *тождественно равными* на X (пишут $f_1(x) \equiv f_2(x)$), если $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in X$.

Пример: функции $f_1(x) = 1$ и $f_2(x) = x/x$ не совпадают на \mathbb{R} , так как $f_2(x)$ не определена в точке $x = 0$.

0.6.2. Композиция функций. Обратные функции

Пусть множество значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $z = \varphi(y)$. Тогда может быть определена *композиция* или *суперпозиция* двух функций или, что то же, *сложная функция*:

$z = \varphi(f(x))$, и ее область определения совпадает с областью определения функции $f(x)$. Для более чем двух функций (чтобы не запутаться в скобках) композицию обозначают в виде

$$f_3(f_2(f_1(x))) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x).$$

Примеры.

$$1. y = f(x) = \sin x, z = \varphi(y) = y^3 \Rightarrow z = \varphi \circ f(x) = \sin^3 x;$$

$$2. y = f(x) = ax + b, z = \varphi(y) = y^2, w = \psi(z) = e^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \psi \circ \varphi \circ f(x) = e^{(ax+b)^2}.$$

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \rightarrow Y$ называют множество $f(A)$ тех элементов из Y , которые являются образами элементов множества A .

Прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество тех элементов из X , образы которых при отображении f содержатся в B . Прообраз множества B обозначают $f^{-1}(B)$, формально его можно задать равенством:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *взаимно однозначным отображением*, если каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$ и разные элементы x_1 и x_2 имеют различные образы, т.е. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Для взаимно однозначного соответствия $f : X \rightarrow Y$ определено *обратное отображение (функция)*

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

следующим образом: если y есть образ элемента x при отображении f , то x есть образ элемента y при отображении $f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.

Примеры.

1. $y = f(x) = ax + b \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = (y - b)/a$. Здесь $f(x)$ является взаимно однозначным отображением одной числовой оси на другую.

2. $y = \varphi(x) = a^x \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) = \log_a y$, ($a \neq 1, a > 0$). Здесь $\varphi(x)$ является взаимно однозначным отображением числовой оси $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, \infty)$.

3. $y = \psi(x) = \sin x$. Здесь ψ является отображением числовой оси $(-\infty, \infty)$ на отрезок $[-1, 1]$.

4. Изображение действительных чисел x точками M на числовой оси дает пример взаимно однозначного соответствия: $x \leftrightarrow M$.

Обратной к функции f^{-1} является функция f . Поэтому справедливы равенства:

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Пример: $y = f(x) = a^x \Rightarrow$

$$f \circ f^{-1}(y) = a^{\log_a y} = y \quad (y > 0),$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

0.6.3. Способы задания функции. График

В общем случае всякий закон, определяющий функцию $y = f(x)$, задается некоторым текстом. Наиболее распространенная форма такого текста — формула, позволяющая вычислять значение функции y по заданному значению аргумента x . Способ задания функции с помощью формул называют *аналитическим*. Выше уже приводились примеры такого задания функции. Добавим к ним еще один. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум x », что означает «знак x ») определяется формулой

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

С помощью этой функции легко выражается другая функция $y = |x|$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x.$$

Аналитический способ задания функции в свою очередь подразделяется на три способа: *явный, неявный и параметрический*.

Явный способ — это непосредственное выражение зависимой переменной через независимую переменную в виде формулы $y = f(x)$: $y = \sin^3 x$, $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$ и т. п.

Неявный способ. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$. Пусть каждому x из некоторого числового множества X соответствует одно или несколько y таких, что пара чисел (x, y) удовлетворяет данному уравнению. Тем самым данное уравнение определяет функцию (одну или несколько) $y = f(x)$ и при этом для всех x из множества X выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$. В этом случае говорят, что данное уравнение неявно задает y как функцию от x или что задана неявная функция.

Например:

1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ или $x = \pm\sqrt{1-y^2}$;

2. $F(x, y) = \sin(x+y) - x + y = 0$. В этом случае не существует аналитической зависимости ни $x = \varphi(y)$, ни $y = f(x)$, получаемых из зависимости $F(x, y) = 0$.

Параметрический способ — это выражение зависимой и независимой переменных через третью переменную, называемую параметром,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t — параметр. Если существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, то, подставляя ее во второе уравнение, получим явное задание y от x в виде $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = f(x)$.

Пример. Закон движения точки по окружности радиуса R с центром $(0, 0)$ задается положением точки $M(x(t), y(t))$ на плоскости xOy в зависимости от времени t . Этот закон можно записать в виде

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi(t), \\ y = R \sin \varphi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — угол, определяющий положение точки на окружности в зависимости от времени t . Возводя обе части этих равенств в квадрат и складывая, приходим к неявной зависимости $x^2 + y^2 = R^2$.

Другие примеры параметрического задания функций:

1) параметрическое задание параболы $y = 4x^2$ получаем, полагая $x = t/2$, $y = t^2$;

2) параметрическое задание прямой $2x - y = 1 \iff x = t, y = 2t - 1$.

Вообще, любую функцию, заданную явным уравнением $y = f(x)$, можно задать параметрически (или, как говорят, *параметризовать*), полагая $x = t, y = f(t)$.

Параметрическое задание функции удобно интерпретировать как перемещение точки $M(x(t), y(t))$ на плоскости xOy по закону, определяющему значение ее координат $x(t) = \varphi(t), y(t) = \psi(t)$ в зависимости от времени t .

Иногда текст, задающий функцию, может принимать достаточно специфический вид. В качестве примера упомянем так называемое *табличное задание функции* (обычно используется при обработке экспериментальных данных). Здесь «текст», задающий соответствие $f : x \rightarrow y$, «записывается» в виде таблицы, в которой в одной строке расписывается значение аргумента, а в другой — значение функции.

Наконец, еще один способ задания функции — *графический*. Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Для любой числовой функции $y = f(x)$ на оси Ox изобразим множество ее определения X , а на оси Oy множество значений этой функции. Множество точек плоскости $(x, f(x))$, для которых $x \in X$ назовем *графиком функции* $y = f(x)$. Графики функций отражают свойства (поведение) этих функций. Например, из школьного курса математики читателю хорошо известно, как на графике отражаются такие свойства функции, как возрастание или убывание (монотонность), периодичность и т. п. Остановимся подробнее на так называемых *свойствах симметрии*.

Четной называется функция $f(x)$, имеющая область определения, симметричную относительно точки $x = 0$, и удовлетворяющая условию $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy , так как точки графика $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси Oy .

Нечетной называется функция $y = f(x)$, имеющая область определения, симметричную относительно точки $x = 0$, и удовлетворяющая условию $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен на плоскости относительно начала координат, так как точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ симметричны относительно начала координат. Например, функция $y = x^2$ — четная, а $y = x^3$ — нечетная, их графики представлены на рис. 0.4.

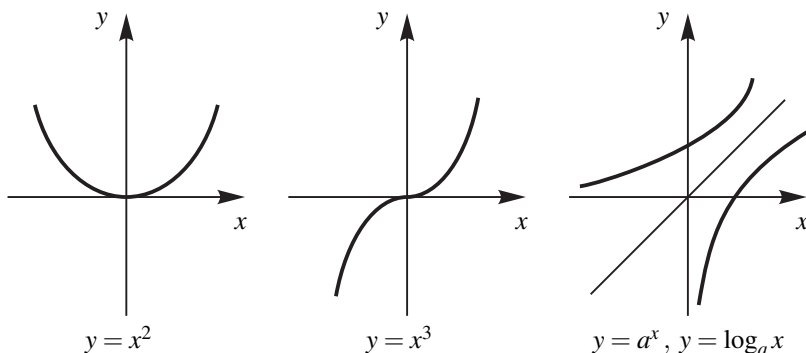


Рис. 0.4

Графики прямой и обратной функций, рассматриваемые совместно, также обладают некоторым свойством симметрии. Пусть $y = f(x)$. Если в обратной функции $x = f^{-1}(y)$ поменять местами символы x и y : $x \leftrightarrow y$ и записать обратную функцию в виде $y = f^{-1}(x)$, то графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно прямой $x = y$. Это следует из того, что точка $(x, y) = (x, f(x))$ графика функции $f(x)$ симметрична относительно прямой $y = x$ точке $(f(x), x)$. И если обозначить $f(x) = x'$, то получим, что $x = f^{-1}(x')$ и точка $(f(x), x) = (x', f^{-1}(x'))$ является точкой графика функции $y = f^{-1}(x)$ при значении аргумента x' .

Например, графики функций $y = f(x) = a^x$ и $y = f^{-1}(x) = \log_a x$, ($a > 1$), симметричны относительно прямой $x = y$, являющейся биссектрисой первого координатного угла (см. рис. 0.4).

0.6.4. Элементарные функции

Следующие функции: $y = ax + b$ (линейная); $y = \sin x$ (синус x); $y = \log_a x$ (логарифм числа x по основанию a , $a \neq 1$, $a > 0$) назовем *основными элементарными функциями*.

Все функции, которые можно получить в результате конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), а

также операций композиции (или суперпозиции, т.е. взятия сложной функции) и обратной функции, производимые над основными функциями $ax + b$, $\sin x$ и $\log_a x$, образуют множество всех элементарных функций.

Приведем некоторые из них, известные из курса элементарной математики.

1. Показательная функция $y = a^x$. Эта функция является обратной к логарифмической функции.

2. Степенная функция $w = x^\alpha$ (α действительное число) определяется как композиция трех функций: $w = e^z$ — показательной, $z = \alpha y$ — линейной и $y = \ln x$ — логарифмической. Действительно,

$$w = e^{z(y(x))} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha.$$

3. $y = \cos x$ связана с $\sin x$ зависимостью $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

$$4. y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; y = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

5. Многочлен $P_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$ — результат композиции линейных функций и арифметических операций (при целочисленных n).

Продолжая применять к полученным функциям указанные выше арифметические операции, а также операции суперпозиции и взятия обратных функций, мы получим все множество элементарных функций.

Как в самой математике, так и в самых разных ее приложениях применяются *гиперболические функции*. Они определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — синус гиперболический;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — косинус гиперболический;}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — тангенс гиперболический;}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — котангенс гиперболический.}$$

Оказывается для этих функций справедливы формулы, схожие с известными в тригонометрии. Например, если основное тригонометрическое тождество имеет вид $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то для гиперболических функций справедливо *основное гиперболическое тождество*:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

В самом деле,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} = 1.$$

Приведем для иллюстрации еще несколько формул, в справедливости которых рекомендуем убедиться самостоятельно.

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Оказывается, для любой тригонометрической формулы существует аналогичная (но, как видно из примеров, не обязательно с ней совпадающая) гиперболическая формула.

Замечание. В качестве основных или образующих элементарных функций, при помощи которых указанными операциями образуется множество всех элементарных функций, можно взять другие наборы: $\{ax + b, \cos x, e^x\}$ или $\{ax, C - \operatorname{const}, \operatorname{tg} x, 2^x\}$ и т. д.

Все элементарные функции задаются в виде формул, т. е. аналитически. Однако, стоит отметить, что аналитический способ задания, по существу, предполагает договоренность обозначать определенные операции соответствующими символами. Например, символ $\cos x$ обозначает величину проекции единичного отрезка на ось Ox . Символ $\log_a x$ обозначает операцию нахождения такой степени y , чтобы заданное число x представлялось в виде $x = a^y$. Таким образом, аналитическое задание функции формулой или знаком есть не что иное, как способ сокращения текста, описывающего закон соответствия $f: x \rightarrow y$.

Глава 1.

Матрицы и системы линейных уравнений

С системами линейных алгебраических уравнений читатель знаком со средней школы. Рассмотрим, к примеру, простейшую систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = -1. \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Решим эту систему методом исключения неизвестных: исключим неизвестное x , умножив первое уравнение на -3 , второе — на 2 , а затем сложив полученные уравнения. Получим таким образом ряд эквивалентных систем (напомним, эквивалентными, или равносильными, называются системы, которые имеют одно и то же множество решений):

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15, \\ 6x + 8y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15, \\ 17y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -5, \\ y = -1. \end{cases} \quad (1.0.2) \end{aligned}$$

Второе уравнение последней системы дает значение $y = -1$. Подставляя его в первое уравнение, находим x :

$$-6x + 9 \cdot (-1) = -15; \quad -6x = -6; \quad x = 1.$$

Эти последние действия также можно представить в виде эквивалентных преобразований систем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -6x + 9y = -15, \\ y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15, \\ -9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x = -6, \\ -9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases} \quad (1.0.3) \end{aligned}$$

Как читатель, вероятно, догадался, мы теперь исключили неизвестное y из первого уравнения системы (1.0.2), прибавив к нему второе уравнение, умноженное на -9 . Таким образом получили систему (1.0.3), которая эквивалентна исходной системе (1.0.1) и настолько проста, что представляет собой решение исходной системы.

Сделаем некоторые замечания по поводу проделанных вычислений. Во-первых, процесс решения исходной системы состоял в последовательном выполнении над уравнениями системы некоторых операций, сохраняющих равносильность. Эти операции можно свести к следующим трем: умножение любого уравнения на число, не равное нулю; замена любого уравнения его суммой с другим; перестановка уравнений. Будем называть эти операции *элементарными преобразованиями*.

Во-вторых, каждая из полученных в ходе решения систем однозначно определяется набором коэффициентов при неизвестных и правых частей уравнений. Изобразим, например, коэффициенты и правые части уравнений системы (1.0.1) в виде следующей таблицы:

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right).$$

Такие таблицы называют матрицами. В первой строке выписанной матрицы располагаются коэффициенты при неизвестных и правая часть первого уравнения системы (1.0.1), во второй строке — соответствующие коэффициенты второго уравнения.

В-третьих, элементарные преобразования, которые производились с системами, можно проделать с соответствующими матрицами, умножая их строки на число (т. е. умножая каждый элемент строки на это число), складывая строки или меняя их местами. Проведем, например, с матрицей A^* те же преобразования, которые были проведены в (1.0.2)–(1.0.3) с системой линейных уравнений (1.0.1), т. е. умножим первую строку матрицы A^* на

–3, а вторую — на 2, затем сложим полученные строки и т. д. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 A^* &= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & -15 \\ 6 & 8 & -2 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & -15 \\ 0 & 17 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & -15 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & -15 \\ 0 & -9 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 0 & -6 \\ 0 & -9 & 9 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \quad (1.0.4)
 \end{aligned}$$

Знак « \sim » между матрицами означает эквивалентность соответствующих этим матрицам систем линейных уравнений. Финальная матрица (1.0.4) соответствует системе (1.0.3)

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$$

которая, как и прежде, дает решение исходной системы (1.0.1).

Как видим, решение системы линейных уравнений можно свести к серии элементарных преобразований матрицы этой системы. Такими преобразованиями матрицу исходной системы можно преобразовать к такой матрице, в которой ниже диагональных элементов стоят нули. При этом оказывается, что в итоге получится система, равносильная исходной (этот метод решения систем называется *методом Гаусса или методом последовательного исключения неизвестных*). Это, конечно, намного удобней, чем решать саму систему, особенно при решении систем больших размеров, т. е. с большим числом уравнений и неизвестных. Такие системы, содержащие десятки неизвестных и уравнений, нередки в различных областях, использующих математические методы, например в экономике, статистике и др. Матрицы используются также в других областях математики.

Данная глава будет посвящена основам матричного исчисления и применению его к решению произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

§ 1.1. Матрицы и операции над ними

1.1.1. Линейные операции над матрицами

Матрицей размерности ($m \times n$) называется прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел a_{ij} , расположенных в m строках и n столбцах.

Матрицы изображаются и обозначаются одним из следующих способов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad (1.1.1)$$

где m — число строк матрицы, n — число столбцов. Числа a_{ij} , образующие матрицу, называются *элементами матрицы*, при этом первый индекс i обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Так, например, следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет размерность (2×3) , ее элементы: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 3$.

Столбец размера m — это матрица размерности $(m \times 1)$. *Строка размера n* — это матрица размерности $(1 \times n)$. Для обозначения столбца будем использовать черту сверху, для обозначения строки — черту снизу, при этом элементы столбца или строки могут обозначаться буквами с одним индексом:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

В то же время для элементов столбца или строки, входящих в какую-нибудь матрицу, сохраним их обозначение с двумя индексами. Так, для матрицы A из (1.1.1) условимся обозначать ее j -й столбец и i -ю строку соответственно

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

Матрица размерности $(n \times n)$ называется *квадратной порядка n* . Например, следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

являются квадратными, причем матрица A имеет порядок n , а матрицы B и C — соответственно третьего и второго порядков.

Главной диагональю квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ называют совокупность элементов $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, расположенных на диагонали, идущей из верхнего левого угла матрицы в ее нижний правый угол. Впрочем, указанную совокупность элементов, имеющих одинаковые индексы, также называют элементами главной диагонали, если даже матрица не является квадратной. Квадратную матрицу называют *треугольной*, если все ее элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю. Так, из приведенных выше примеров матриц треугольной является матрица B .

На множестве матриц одной размерности можно определить операции сложения матриц и умножения матрицы на число:

а) сложить две матрицы, значит сложить соответствующие элементы:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n},$$

(Складывать можно матрицы только одной размерности);

б) умножить матрицу на число, значит умножить на это число все элементы матрицы:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n},$$

Эти две операции в математике называют *линейными*.

ПРИМЕР 1.1.1. Для заданных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

вычислить матрицы: $A + B$, $2A$, $-3B$.

РЕШЕНИЕ. Все искомые матрицы имеют ту же размерность (2×2) , что и матрицы A , B . Их элементы вычислим, производя указанные действия с соответственными элементами матриц A и B :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2+1 & -1+2 \\ 0+3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \\ 2A &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ -3B &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2 \\ -3 \cdot 3 & -3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. Для матриц A и B неодинаковых размерностей сумма не определена, поэтому складывать их нельзя.

Поскольку операции сложения матриц и умножения матрицы на число сводятся к этим операциям над элементами матриц, то для них выполняются следующие

Свойства линейных операций:

- 1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность сложения);
- 3) существует матрица O (называемая *нулевой*) такая, что для любой матрицы A

$$A + O = O + A = A;$$

- 4) для любой матрицы A существует матрица $-A$ (называемая *противоположной*) такая, что

$$A + (-A) = (-A) + A = O;$$

- 5) для любых чисел λ и μ

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел);

- 7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц);

- 8) $1 \cdot A = A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.2. Все матрицы, фигурирующие в этих свойствах, имеют одинаковую размерность ($m \times n$). Очевидно, что нулевой матрицей является матрица размерности ($m \times n$), все элементы которой равны нулю, а противоположной для матрицы A является матрица, элементы которой есть числа, противоположные элементам A :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

Разностью матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$ (обозначаемая $A - B$) такая, что

$$A = B + C.$$

Из определения суммы матриц следует, что элементы матриц A, B, C связаны соотношениями:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij},$$

откуда вытекает

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

то есть при вычитании матриц A и B нужно вычитать соответственные элементы этих матриц. Например, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

из примера 1.1.1 вычислим матрицу $B - 2A$

$$B - 2A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot 2 & 2 - 2 \cdot (-1) \\ 3 - 2 \cdot 0 & 4 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если, например,

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то

$$3\bar{a} - 2\bar{b} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна операция над матрицами — *транспонирование*: Транспонировать матрицу A , — значит поменять ее строки и столбцы местами.

Для транспонированной матрицы применяется обозначение: $B = A^T$. Если, например, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, то $B = A^T = (b_{ij})_{n \times m}$, причем

$$b_{ij} = a_{ji}. \quad (1.1.2)$$

ПРИМЕР 1.1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ тогда

$$B = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что *транспонированной строкой* будет столбец, составленный из элементов строки, а *транспонированным столбцом* — соответственно строку, составленную из элементов столбца: $\underline{a}^T = \bar{a}$ и $\bar{b}^T = \underline{b}$. В развернутом виде:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \underline{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

В приложениях часто возникают *симметрические* матрицы — матрицы, которые совпадают со своими транспонированными, то есть если $A = A^T$ или при всех i, j $a_{ij} = a_{ji}$.

Ясно, что симметричные матрицы — непременно квадратные, а их элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, совпадают. Например, следующие матрицы симметричны:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.1.1. Докажите следующие свойства транспонированных матриц:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T. \quad (1.1.3)$$

1.1.2. Умножение матриц

Наряду с операциями сложения и умножения на число, на множестве матриц можно определить операцию умножения, которая обладает многими (но не всеми!) свойствами умножения чисел или алгебраических выражений. Определим сначала операцию умножения строки на столбец. Пусть даны строка \underline{a} и столбец \bar{b} одинаковых размеров:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1.1. Произведением строки \underline{a} на столбец \bar{b} называется число, обозначаемое $\underline{a} \cdot \bar{b}$, равное сумме произведений элементов строки на соответствующие элементы столбца:

$$\underline{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad (1.1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.3. Порядок сомножителей в определении 1.1.1 и обозначении произведения $\underline{a} \cdot \bar{b}$ является существенным: слева — строка, справа — столбец.

ПРИМЕР 1.1.3. Для заданных строк $\underline{a} = (1, 0, -1)$, $\underline{b} = (1, 1, 1)$ и столбца $\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ вычислить произведения: $\underline{a} \cdot \bar{c}$, $\underline{b} \cdot \bar{c}$, $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \bar{c}$.

РЕШЕНИЕ. В соответствии с определением 1.1.1 вычисляем:

$$\underline{a} \cdot \bar{c} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = 1;$$

$$\underline{b} \cdot \bar{c} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Для вычисления третьего произведения найдем сначала строку $\underline{a} + \underline{b}$:

$$\underline{a} + \underline{b} = (1 + 1, 0 + 1, -1 + 1) = (2, 1, 0).$$

Опять применяя определение 1.1.1, находим:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \bar{c} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = 1.$$

Результаты проделанных вычислений обнаруживают справедливость соотношения:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \bar{c} = \underline{a} \cdot \bar{c} + \underline{b} \cdot \bar{c}.$$

Это не случайно: справедливы следующие свойства, позволяющие при умножении суммы строк на столбец или строки на сумму столбцов раскрывать скобки точно так же, как это делается при действиях с числами или алгебраическими выражениями:

1) Для любых чисел λ и μ справедливы равенства:

$$(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) \cdot \bar{c} = \lambda(\underline{a} \cdot \bar{c}) + \mu(\underline{b} \cdot \bar{c}); \quad (1.1.5)$$

$$\underline{a} \cdot (\lambda \bar{b} + \mu \bar{c}) = \lambda(\underline{a} \cdot \bar{b}) + \mu(\underline{a} \cdot \bar{c}). \quad (1.1.6)$$

Доказательство этих свойств читателю предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

Несколько сложнее вводится операция умножения матриц.

Определение 1.1.2. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times p}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{p \times n}$ называется матрица $C = A \cdot B = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \underline{a}_i \cdot \bar{b}_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad (1.1.7)$$

т. е. элемент c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$ равен произведению i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.4. Из этого определения следует, что умножать матрицу A на матрицу B (A слева от B !) можно, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В этом случае размерность матрицы произведения определяется согласно следующему правилу умножения размерностей:

$$(m \times p)(p \times n) = (m \times n), \quad (1.1.8)$$

где слева стоят размерности матриц-сомножителей, а справа — размерность матрицы-произведения.

ПРИМЕР 1.1.4. Вычислить произведения AB и BA (в обозначениях произведения точка иногда опускается) для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Начнем с правила умножения размерностей. Так как матрица A имеет размерность (2×2) , а матрица B — соответственно (3×2) , то произведение AB невозможно (число столбцов левой матрицы — 2 не равно числу строк правой матрицы — 3). Произведение BA возможно, так как число столбцов матрицы B и число строк матрицы A совпадают. Размерность произведения найдем, согласно правилу (1.1.8):

$$(3 \times 2)(2 \times 2) = (3 \times 2),$$

то есть матрица $C = BA$ состоит из трех строк и двух столбцов. Найдем ее элементы, пользуясь формулами (1.1.7). Начнем с первой строки:

$$c_{11} = \underline{b}_1 \cdot \bar{a}_1 = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3;$$

$$c_{12} = \underline{b}_1 \cdot \bar{a}_2 = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2;$$

то есть элементы первой строки матрицы $C = BA$ получаются последовательным умножением первой строки матрицы B на столбцы матрицы A . Аналогично вычисляя элементы второй и третьей строк матрицы C , получим:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Произведение квадратных матриц одного порядка определено всегда, при этом матрица-произведение имеет тот же порядок (докажите это с помощью правила умножения размерностей!).

ПРИМЕР 1.1.5. Для матриц второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить их произведения AB и BA .

РЕШЕНИЕ.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.5. Если матрица A является строкой размера n : $A = \underline{a} = (a_{1j})_{(1 \times n)}$, а матрица B — столбцом того же размера: $B = \bar{b} = (b_{i1})_{(n \times 1)}$, то произведение AB определено, так как, по правилу умножения размерностей,

$$(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1).$$

При этом произведение имеет размерность (1×1) , т. е. является числом:

$$A \cdot B = \underline{a} \cdot \bar{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Стало быть, произведение матрицы-строки на матрицу-столбец совпадает с произведением строки на столбец в смысле определения 1.1.1 (стр. 33).

УПРАЖНЕНИЕ 1.1.2. Докажите, что произведение матрицы-столбца размерности $(m \times 1)$ на матрицу-строку размерности $(1 \times n)$ определено всегда, при этом произведение имеет размерность $(m \times n)$ и вычисляется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m a_1 & b_m a_2 & \dots & b_m a_n \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц обладает свойствами :

1) Произведение матриц, вообще говоря, *некоммутативно* (неперестановочно), то есть

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Это видно уже из последнего примера. Кроме того для прямоугольных (т. е. не квадратных) матриц одно из произведений $A \cdot B$ или $B \cdot A$ может не существовать, а даже если оба эти произведения возможны, то они могут иметь различную размерность.

Те матрицы, для которых свойство коммутативности умножения выполняется, называются *перестановочными* или *коммутативными*: матрицы A и B перестановочны, если для них выполняется равенство:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Например, следующая квадратная матрица порядка n , у которой на главной диагонали стоят единицы, а на других местах — нули,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

— перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, а именно, для нее выполнены соотношения:

$$A \cdot E = E \cdot A = A. \quad (1.1.10)$$

Проверьте эти соотношения на примере матриц третьего порядка. Из соотношений (1.1.10) можно заключить, что матрица E из (1.1.9) играет роль единицы в матричном умножении и она называется *единичной матрицей*.

2) Произведение матриц, если оно имеет смысл, *ассоциативно*, то есть

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C. \quad (1.1.11)$$

3) Произведение матриц *ассоциативно относительно умножения на число*, т. е. для любого числа λ

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$$

4) Произведение матриц *дистрибутивно* относительно сложения, т. е.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (1.1.12)$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \quad (1.1.13)$$

5) Если определено произведение матриц $A \cdot B$, то определено и произведение $B^T \cdot A^T$, при этом справедливо равенство:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \quad (1.1.14)$$

Иначе говоря, транспонированная матрица от произведения равна произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке.

Доказательства этих свойств можно найти, например, в [1].

Операция матричного умножения была введена не из желания придумать операцию, похожую на умножение обычных чисел, а из некоторых задач, решение которых без матричного умножения выглядело чересчур сложно и громоздко. Дальше мы увидим много примеров, подтверждающих это. Пока же рассмотрим два таких примера.

ПРИМЕР 1.1.6. Пусть системы переменных (x_1, x_2) , (y_1, y_2) , (z_1, z_2) выражаются друг через друга соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Требуется найти выражение переменных (z_1, z_2) через (x_1, x_2) .

РЕШЕНИЕ. Можно, конечно, подставить значения переменных (y_1, y_2) из первой системы равенств (1.1.15) во вторую, привести подобные и так решить поставленную задачу. Но попробуем вместо столь громоздкого пути, использовать матричный метод. Прежде всего, запишем соотношения (1.1.15) в более компактной матричной форме. Для этого введем обозначения следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда системы равенств (1.1.15) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\bar{y} = A\bar{x}, \quad \bar{z} = B\bar{y}. \quad (1.1.16)$$

Если мы теперь подставим во второе из этих равенств значение столбца \bar{y} из первого равенства, то получим:

$$\bar{z} = B\bar{y} = B(A\bar{x}) = (BA)\bar{x}.$$

Таким образом, столбец переменных \bar{z} получается умножением матрицы произведения BA на столбец \bar{x} :

$$\bar{z} = BA\bar{x}.$$

§ 1.2. Определители

1.2.1. Свойства суммирования

В § 1.1 уже использовалось следующее обозначение суммы конечного числа слагаемых:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.2.1)$$

В этом обозначении x_i называется *общим членом суммы*, i — *индексом суммирования*, $i = 1$ и $i = n$ — соответственно *нижним и верхним пределами суммирования*. Отметим некоторые свойства суммирования:

- а) индекс суммирования в (1.2.1) можно заменить другим

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n x_k;$$

- б) множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы

$$\sum_{i=1}^n \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n x_i; \quad (1.2.2)$$

в) если общий член суммы состоит из двух слагаемых, то вся сумма разлагается на две

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i; \quad (1.2.3)$$

г) если общий член суммы зависит от двух индексов, по которым ведется суммирование, то справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ik}. \quad (1.2.4)$$

То есть при двойном суммировании можно менять порядок суммирования.

Для доказательства этих свойств заметим, что свойства а), б) и в) вытекают непосредственно из определения (1.2.1), а свойство г) следует из того, что левую и правую части (1.2.4) можно рассматривать как сумму всех элементов матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

вычисленную сначала внутри строк и затем по всем строкам матрицы, а потом наоборот: сначала внутри столбцов и затем по всем столбцам.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.1. Механически изменять порядок суммирования, (как в (1.2.4)), можно только тогда, когда пределы суммирования в обеих суммах — внутренней и внешней — постоянны, т. е. не зависят от индексов суммирования. В противном случае к изменению порядка суммирования следует подходить осторожно. Некоторые приемы этой процедуры иллюстрируются следующим примером.

ПРИМЕР 1.2.1. Поменять порядок суммирования в следующей сумме:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i x_{ik}. \quad (1.2.5)$$

РЕШЕНИЕ. Как и при обосновании свойства в), данную сумму можно представить как сумму элементов следующей матрицы:

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix},$$

функции будем вводить в зависимости от порядка матрицы (и определителя). Начнем с определителей низших порядков.

Определителем первого порядка называется число, совпадающее с единственным элементом определителя:

$$\det A = \det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}. \quad (1.2.9)$$

Здесь $||$ — символ определителя, но не знак абсолютной величины.

Определителем второго порядка называется число, вычисляемое через элементы соответствующей матрицы по формуле

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.2.10)$$

Примеры.

$$\det(-3) = -3; \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2;$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 0 = -5.$$

Определители, так же как и матрицы, широко используются в математике и ее приложениях. В качестве примера рассмотрим опять систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Действуя точно так же, как при решении системы (1.0.1), умножим первое уравнение нашей системы на a_{22} , второе — на $-a_{12}$ и сложим полученные уравнения. Тогда получим

$$a_{11}a_{22}x - a_{21}a_{12}x = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

откуда (если $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$) находим x

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (1.2.12)$$

Аналогично находим y , умножая первое уравнение системы (1.2.11) на $-a_{21}$, а второе — на a_{11} и складывая полученные уравнения,

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (1.2.13)$$

Можно заметить, что в правых частях равенств (1.2.12)–(1.2.13) в числителях и знаменателях стоят выражения, напоминающие определители некоторых матриц. А именно, обозначим через Δ определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (1.2.11),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

а через Δ_1 и Δ_2 — определители, полученные из Δ заменой первого столбца (или второго столбца соответственно) столбцом из свободных членов системы (1.2.11),

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1.$$

Тогда решение системы (1.2.11) (если $\Delta \neq 0$), представленное равенствами (1.2.12)–1.2.13, можно записать в виде

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (1.2.14)$$

Эти формулы, позволяющие сразу вычислять решение системы (1.2.11) в случае если определитель Δ отличен от нуля, называются *формулами Крамера*. Их лаконичность и простота очевидны.

Прежде чем дать общее определение детерминанта (определителя) порядка n , введем определитель третьего порядка.

Определителем третьего порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице третьего порядка с помощью следующего равенства:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Определители второго порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называются *минорами элементов* a_{11}, a_{12}, a_{13} исходного определителя третьего порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Они могут быть построены с помощью следующего правила: *минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя порядка n есть определитель порядка $n - 1$, который получается из исходного определителя вычеркиванием той его строки и того столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}* (в данном случае вычеркиванием i -й строки и j -го столбца). Тогда равенство (1.2.15) можно переписать в виде

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13} \cdot M_{13},$$

или еще по-другому:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (1.2.16)$$

где выражения A_{ij} представляются через соответствующие миноры равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \quad (1.2.17)$$

Выражение A_{ij} называется *алгебраическими дополнением элемента a_{ij}* .

ПРИМЕР 1.2.2. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. В соответствии с формулой (1.2.16) нужно вычислить алгебраические дополнения элементов первой строки. Для этого находим последовательно:

$$a_{11} = 1, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 34,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 34;$$

$$a_{12} = -2, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -18,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = 18;$$

$$a_{13} = 3, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = 6.$$

Теперь $\det A$ вычисляем по формуле (1.2.16):

$$\det A = 1 \cdot 34 + (-2) \cdot 18 + 3 \cdot 6 = 16.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.2. *Если раскрыть определители второго порядка в правой части формулы (1.2.15) и объединить члены, входящие со знаками (+) и (-), то получим соотношение*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.2.18)$$

Отметим, что здесь шесть слагаемых и в каждом из них берется произведение элементов из *разных строк и столбцов*. Нетрудно убедиться, что в сумме присутствуют все такие комбинации. Отсюда, в частности, следует, что если в определителе какая-либо строка состоит из нулей, то такой определитель равен нулю.

Для вычисления определителей 3-го порядка с помощью последней формулы можно сформулировать следующее правило вычисления — *правило треугольника*: определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов, соединенных в треугольники на нижеследующем рисунке, взятых со знаками (+) и (−) соответственно.

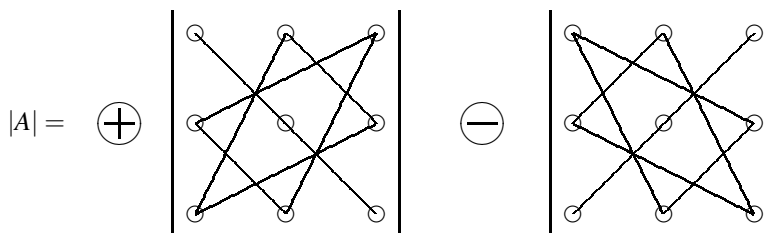


Рис. 1.1. Правило треугольника.

Более точно, первые три произведения берутся с теми знаками, которые получились в результате перемножения чисел, а в последних трех — знаки этих произведений следует сменить.

ПРИМЕР 1.2.3. *Вычислим определитель третьего порядка из предыдущего примера с помощью правила треугольника.*

РЕШЕНИЕ.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) \cdot 5 - \\ - 0 \cdot 4 \cdot 3 - (-3) \cdot (-2) \cdot 6 - 1 \cdot (-2) \cdot 5 = 24 + 18 + 0 - 0 - 36 + 10 = 16.$$

Введем теперь определитель порядка n методом математической индукции. Напомним, что метод математической индукции (доказательства или определения) состоит из двух шагов: во-первых, устанавливается справедливость доказываемого утверждения при $n = 1$; во-вторых, доказывается его справедливость при $n = k + 1$ в предположении, что оно выполняется при $n = k$. Отсюда вытекает справедливость утверждения при всех натуральных n .

Определение 1.2.1. 1) Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица первого порядка, то полагаем $\det A = a_{11}$.

2) Предположим, что введен определитель порядка $n - 1$. Определителем порядка n , соответствующим матрице $A = (a_{ij})_{n \times n}$, назовем число, вычисляемое по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}, \quad (1.2.19)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

Применив это определение для вычисления определителей второго и третьего порядка, получим введенные ранее формулы (1.2.10)–(1.2.15). Равенство (1.2.19) называется *разложением определителя $\det A$ по первой строке*.

ПРИМЕР 1.2.4. Показать, что определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}. \quad (1.2.20)$$

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись формулой (1.2.19), разложим данный определитель по первой строке:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + \dots + 0 \cdot A_{1n} = a_{11}A_{11}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение A_{11} представляет собой такой же определитель треугольного вида, как и исходный, но порядка $(n - 1)$, поэтому он в свою очередь разлагается по первой строке:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22} \cdot A'_{11} + 0 \cdot A'_{12} + \dots + 0 \cdot A'_{1,n-1} = a_{22}A'_{11},$$

где символами A'_{ik} обозначены алгебраические дополнения элементов определителя A_{11} . Таким образом, исходный определитель представляется в виде

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{11}a_{22}A'_{11} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим доказываемое равенство (1.2.20).

Применим результат примера 1.2.4 к квадратным матрицам, у которых все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Такие матрицы называют *диагональными*. Из равенства (1.2.20) следует, что определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\det \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22}\cdots\lambda_{nn}. \quad (1.2.21)$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице:

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

1.2.3. Свойства определителей

Очевидно, определители тем проще вычислять, чем больше у них нулевых элементов. А уж диагональные и треугольные определители вообще вычисляются "в уме". Возникает естественный вопрос: нельзя ли так преобразовать определитель, чтобы при этом его величина не изменилась, но получился бы, например, треугольный определитель?

Рассмотрим свойства определителей порядка n , которые облегчают их вычисление. Для определителей второго и третьего порядков эти свойства проверяются непосредственными вычислениями (и мы их не будем проводить), а для определителей порядка n эти свойства доказываются довольно сложно и громоздко. С доказательствами этих свойств можно ознакомиться в рекомендуемой литературе. Начнем с формулировки теоремы, которая равноправие всех его строк и столбцов.

1) Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (какого-нибудь столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}. \quad (1.2.22)$$

2) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т. е.

$$\det A = \det A^T. \quad (1.2.23)$$

Сравните:

$$\lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}.$$

Следствие 1.2.2. Если определитель содержит нулевую строку, то есть строку, все элементы которой равны нулю, то он равен нулю. Аналогично, определитель, содержащий нулевой столбец, равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 1.2.1, если общий множитель, о котором там идет речь, равен $\lambda = 0$. Однако мы приведем еще другое доказательство, основанное на свойстве 1). Пусть строка с номером i — нулевая. Разлагая определитель по этой строке, то есть применяя первое из равенств (1.2.22), получим:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + \dots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

Следствие 1.2.3. Если определитель имеет две одинаковых строки (или два одинаковых столбца), то он равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поменяем местами одинаковые строки. Тогда, с одной стороны, определитель не изменится, с другой — по свойству 3) — он поменяет знак. Отсюда следует, что $\det A = -\det A$, что возможно лишь в случае $\det A = 0$.

Следствие 1.2.4. Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пропорциональны строки с номерами i и j , т. е. $a_j = \lambda \cdot a_i$. Вынесем из i -й строки определителя $\det A$ общий множитель λ . Получим: $\det A = \lambda \det A'$, при этом у матрицы A' окажутся две одинаковые строки с номерами i и j . В силу следствия 1.2.3, $\det A' = 0$, а значит и $\det A = 0$.

Следствие 1.2.5. Определитель не изменится, если какой-либо его столбец (или строку) заменить суммой этого столбца (строки) и любого другого столбца (строки), умноженного на любое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица A' получена из матрицы A заменой j -го столбца \bar{a}_j столбцом $\bar{a}'_j = \bar{a}_j + \alpha \bar{a}_i$. Покажем, что $\det A' = \det A$. Для этого воспользуемся свойством 1.2.25, применив его к матрице A'

$$\det A' = \det A + \alpha \det A'', \tag{1.2.26}$$

где матрица A'' получена из матрицы A заменой столбца \bar{a}_j на столбец \bar{a}_i . Но тогда матрица A'' имеет два одинаковых столбца: с номерами i и j . Следовательно, $\det A'' = 0$, и равенство $\det A' = \det A$ вытекает из (1.2.26).

Это свойство обычно используется в несколько иной формулировке: *определитель не изменится, если к какому-либо его столбцу (или строке) прибавить или вычесть другой (другую), умножив его предварительно на любое число.* Эффективность этого приема иллюстрируется следующим примером.

ПРИМЕР 1.2.5. *Вычислить определитель:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Вместо применения правила треугольника или разложения по строке или столбцу вычтем первую строку определителя последовательно из второй, а потом из третьей. По свойству 1.2.4, определитель не изменится:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь из третьей строки вторую, умноженную на 2, получим определитель треугольного вида

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Обращаем внимание на то, что мы получали нули не где попало, а целенаправленно — ниже диагонали.

Для формулировки очередного свойства введем следующее

Определение 1.2.2. *Линейной комбинацией столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ одного размера называется столбец \bar{a} вида*

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k. \quad (1.2.27)$$

Аналогично определяется линейная комбинация строк.

Следствие 1.2.6. *Если какой-нибудь столбец (или строка) квадратной матрицы A есть линейная комбинация других столбцов (строк) этой матрицы, то $\det A = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для частного случая линейной комбинации двух столбцов. В общем случае можно использовать метод математической индукции. Пусть j -й столбец матрицы A представлен в виде линейной комбинации двух других столбцов:

$$\bar{a}_j = \lambda_1 \bar{a}_i + \lambda_2 \bar{a}_k.$$

По свойству 1.2.25 определитель $\det A$ представим в виде:

$$\det A = \lambda_1 \det A_1 + \lambda_2 \det A_2,$$

где матрицы A_1 и A_2 получены из A заменой j -го столбца соответственно столбцами \bar{a}_i и \bar{a}_k . Очевидно, обе эти матрицы имеют по два одинаковых столбца и их определители равны нулю в силу свойства 1.2.3. Значит, и $\det A = 0$.

Следствие 1.2.7. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{jk} = 0, \quad (i \neq j). \quad (1.2.28)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot A_{kj} = 0, \quad (i \neq j). \quad (1.2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим определитель $\det A'$, полученный из данного определителя $\det A$ заменой его j -й строки на i -ю. Этот определитель равен нулю, так как имеет две одинаковые строки. Разлагая его по j -й строке, получим

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}, \quad (i \neq j),$$

что совпадает с (1.2.28). Аналогично доказывается (1.2.29).

Следствие 1.2.7 и свойство 1) можно объединить в одну теорему:

Теорема 1.2.1. Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ выполняются равенства:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} = \delta_{ij} \det A, \quad (1.2.30)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} = \delta_{ij} \det A, \quad (1.2.31)$$

где символ δ_{ij} , называемый символом Кронекера, предназначен для краткой записи предыдущего выражения и определяется равенством:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.2.32)$$

Заключительное свойство сформулируем в форме теоремы, которую называют теоремой умножения определителей.

Теорема 1.2.2. Для любых квадратных матриц A и B одного порядка определитель их произведения равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (1.2.33)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

В заключение покажем, как рассмотренные свойства можно использовать для рационального вычисления определителей порядка выше трех.

ПРИМЕР 1.2.6. Вычислить определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Будем производить с данным определителем действия, не изменяющие значения определителя, но упрощающие его вид. При этом будем целенаправленно получать нули ниже диагонали. В частности, будем складывать и вычитать строки или столбцы с целью получить как можно больше нулей в какой-нибудь строке (или столбце). При этом для пояснения будем использовать следующие обозначения: $(\bar{a}_i + \bar{a}_j \Rightarrow \bar{a}_i)$ означает, что к i -му столбцу прибавили j -й столбец. Аналогичные пояснения для действий со строками. Используя эти действия, попытаемся получить три нуля в первом столбце:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы прибавили к первому столбцу второй (значение определителя не меняется!), получив на месте a_{11} число 1. Теперь будем последовательно вычитать первую строку, умноженную на подходящее число, из второй, третьей и четвертой:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(a_2 - a_1 \Rightarrow a_2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(a_3 - 2a_1 \Rightarrow a_3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(a_4 - 4a_1 \Rightarrow a_4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Итак, получили нули в первом столбце всюду ниже главной диагонали. Оперируя таким же образом со строками 2–4, получим нули во втором столбце ниже главной диагонали:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(\underline{a}_2 \leftrightarrow \underline{a}_3)}{=} \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(\underline{a}_3 - 2\underline{a}_2 \Rightarrow \underline{a}_3)}{=} \\ & = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(\underline{a}_4 - 5\underline{a}_2 \Rightarrow \underline{a}_4)}{=} \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Наконец, вычитая из четвертой строки последней матрицы удвоенную третью, получим определитель треугольного вида, у которого к тому же четвертая строка — нулевая:

$$\det A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0.$$

§ 1.3. Обратная матрица

В этом пункте по-прежнему рассматриваются только квадратные матрицы порядка n .

1.3.1. Определение и свойства обратной матрицы

Определение 1.3.1. Матрица A называется обратимой, если существует такая матрица B , что

$$AB = BA = E, \tag{1.3.1}$$

где E — единичная матрица. Матрица B называется обратной по отношению к матрице A .

Докажем некоторые свойства обратимых матриц.

Свойство 1.3.1. Если матрица A обратима, то ее обратная матрица B единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют две обратные матрицы B_1 и B_2 , и покажем, что они совпадают. Действительно, в силу (1.3.1) выполняются следующие равенства:

$$AB_1 = B_1A = E, \quad AB_2 = B_2A = E. \tag{1.3.2}$$

Умножим слева первое из них на матрицу B_2 и, используя определение обратной матрицы, а также свойства матричного умножения, получим цепочку эквивалентных равенств:

$$\begin{aligned} B_2(AB_1) = B_2E &\Leftrightarrow (B_2A)B_1 = B_2 &\Leftrightarrow \\ &&\Leftrightarrow EB_1 = B_2 &\Leftrightarrow B_1 = B_2. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Обратную матрицу обозначают: $B = A^{-1}$. В этих обозначениях равенство (1.3.1) приобретает вид

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (1.3.3)$$

Свойство 1.3.2. Если матрицы A и B обратимы, то матрица AB также обратима, причем

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (1.3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к $A \cdot B$, то есть их произведение равно единичной матрице. Используя свойства матричного умножения, имеем:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = \\ &= (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E,$$

т. е. первое из равенств (1.3.1) или (1.3.3) в определении обратной матрицы. Аналогично доказывается второе*, т. е.:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E.$$

Свойство 1.3.3. Если матрица A обратима, то матрица A^T также обратима, причем

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (1.3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, как и в предыдущем свойстве, что матрица $(A^{-1})^T$ удовлетворяет определению обратной к матрице A^T . Действительно, используя свойство матричного умножения и определение обратной матрицы, имеем:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E.$$

* Впрочем, если доказано одно из равенств (1.3.1), то другое можно не проверять: оно вытекает из первого. Попробуйте это доказать.

1.3.2. Существование обратной матрицы.

Определение 1.3.2. Матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица A называется вырожденной.

Теорема 1.3.1. Для того, чтобы матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. При этом обратная матрица может быть найдена в явном виде по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T, \quad \text{где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.3.6)$$

— матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A (она называется присоединенной для матрицы A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1} . Покажем, что $\det A \neq 0$, т.е. матрица A невырождена. Так как $AA^{-1} = E$, то $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$. По теореме умножения определителей $\det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}) = 1$. Последнее равенство возможно, только если оба сомножителя в левой части отличны от нуля. Отсюда следует, что $\det A \neq 0$.

Достаточность. Пусть матрица A невырождена. Покажем, что матрица

$$B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной для матрицы A . Для этого докажем, что произведение $AB = C$ является единичной матрицей. Используя свойство 3) матричного умножения, представим сначала матрицу C в виде:

$$C = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь, применяя правило умножения матриц и теорему 1.2.1, найдем элемент c_{ij} матрицы C :

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{\det A} \det A \delta_{ij} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда следует, что элементы c_{ij} матрицы C равны 1, если $i = j$, и равны 0, если $i \neq j$. Это и означает, что матрица

C — единичная. Следовательно, $AB = E$. Аналогично доказывается $BA = E$, а значит, $B = A^{-1}$.

Рассмотрим примеры вычисления обратных матриц.

ПРИМЕР 1.3.1. *Найти обратную для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Найдем сначала определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A невырождена, а значит — обратима. Обратную матрицу найдем по формуле (1.3.6). Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычисляем обратную матрицу согласно формуле (1.3.6):

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Правильность вычислений проверим с помощью равенства: $A \cdot A^{-1} = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично убеждаемся, что $A^{-1}A = E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно.

ПРИМЕР 1.3.2. *Найти обратную для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Найдем определитель матрицы (разлагая его, например, по первой строке):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Матрица A невырождена, значит, обратная A^{-1} существует. Для ее нахождения, как и раньше, найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу находим по формуле (1.3.6):

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в правильности нахождения обратной матрицы. Для этого нужно проверить, что выполняются равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

1.3.3. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. В общем виде такая система из n уравнений

ПРИМЕР 1.3.3. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 5; \\ 3x + 9y + 4z = -1; \\ x + 5y + 3z = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему уравнений в матричном виде: $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} вычислена в примере 1.3.2, с ее помощью находим решение:

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/3 \\ 26/3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственное решение нашей системы: $x = -43/3, y = 26/3, z = -9$.

§ 1.4. Ранг матрицы

1.4.1. Линейная независимость строк и столбцов

Рассмотрим некоторые свойства столбцов или строк одного размера, при этом все понятия и утверждения будем формулировать только для столбцов, для строк они формулируются аналогично.

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ — некоторая совокупность столбцов одного размера. Напомним (см. определение 1.2.2 на стр. 49), что линейной комбинацией этих столбцов называется столбец \bar{a} вида:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k, \quad (1.4.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — действительные числа, коэффициенты линейной комбинации.

Линейную комбинацию (1.4.1) называют *тривиальной*, если все коэффициенты в правой части (1.4.1) равны нулю: $\lambda_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k$ (или короче: $i = \overline{1, k}$). В противном случае (то есть когда хотя бы одно λ_i отлично от нуля) линейная комбинация называется *нетривиальной*. Заметим, что тривиальная линейная комбинация столбцов всегда равна нулевому столбцу

$$0\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_k = \bar{0}.$$

Ситуация, когда нетривиальная линейная комбинация столбцов может равняться нулевому столбцу, описана в следующем определении.

Определение 1.4.1. Совокупность (или система) столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу. В противном случае система столбцов называется линейно независимой.

Иначе говоря, система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно зависима, если найдутся коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых хотя бы один отличен от нуля, такие, что выполнено равенство:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}, \quad (1.4.2)$$

где $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — нулевой столбец.

Напротив, система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно независима, если не найдутся такие коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых хотя бы один отличен от нуля, и выполнено равенство (1.4.2). Стало быть, система линейно независима, если равенство (1.4.2) возможно лишь для нулевых коэффициентов λ_i или если равенство (1.4.2) влечет

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0. \quad (1.4.3)$$

ПРИМЕР 1.4.1. Выяснить, является ли система столбцов

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

линейно зависимой.

РЕШЕНИЕ. Запишем равенство (1.4.2) для данной системы столбцов:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно равносильно следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Последняя система равенств, равносильная (1.4.2), представляет собой систему линейных уравнений, а вопрос о линейной зависимости исходной системы столбцов сводится к существованию ненулевого решения системы (1.4.4). Заметим, что эта система однородная, то есть столбец из правых частей ее уравнений нулевой. Очевидно, одно решение у нее всегда есть — нулевое: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. А так как определитель системы $\det A = -2 \neq 0$, то система (1.4.4) является крамеровской и имеет единственное решение (см. (1.3.10)), т. е. нулевое. Таким образом, равенство (1.4.2) для нашей системы столбцов выполняется лишь при нулевых значениях коэффициентов. Стало быть, данная система столбцов линейно независима.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Из решения этого примера вытекает справедливость следующего утверждения: система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (1.4.5)$$

имеет ненулевое решение, где A — матрица, составленная из столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$.

Рассмотрим некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых систем.

Свойство 1.4.1. Система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть столбцы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу, т. е. найдутся коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых хотя бы один отличен от нуля, и выполнено равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_k\bar{a}_k = \bar{0}.$$

Для простоты предположим, что коэффициент, отличный от нуля — λ_1 . Разделим это равенство на λ_1 (т. е. умножим на $1/\lambda_1$) и перенесем все члены, кроме \bar{a}_1 , в правую часть:

$$\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\bar{a}_k.$$

Это равенство и означает, что столбец \bar{a}_1 есть линейная комбинация остальных столбцов.

Достаточность. Пусть теперь один из столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ есть линейная комбинация остальных. Например,

$$\bar{a}_1 = \mu_2\bar{a}_2 + \dots + \mu_k\bar{a}_k.$$

Переносим все члены этого равенства в левую часть, получим

$$1\bar{a}_1 - \mu_2\bar{a}_2 - \dots - \mu_k\bar{a}_k = \bar{0}.$$

Так как в левой части последнего равенства стоит нетривиальная линейная комбинация столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, равная нулевому столбцу (коэффициент у столбца \bar{a}_1 отличен от нуля!), то данная система столбцов линейно зависима.

Свойство 1.4.2. Если система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ содержит нулевой столбец, то она линейно зависима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $\bar{a}_1 = \bar{0}$, тогда выполняется равенство

$$1\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_k = \bar{0},$$

из которого и вытекает линейная зависимость данной системы столбцов согласно определению 1.4.1.

Свойство 1.4.3. Если система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для простоты первые $r \leq k$ столбцов линейно зависимы. Тогда найдется нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_r\bar{a}_r = \bar{0}.$$

Добавив к левой части этого равенства остальные столбцы с коэффициентами, равными нулю, получим:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_r\bar{a}_r + 0\bar{a}_{r+1} + \dots + 0\bar{a}_k = \bar{0}.$$

Так как из первых r коэффициентов не все равны нулю, то в левой части последнего равенства стоит нетривиальная линейная комбинация столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r, \bar{a}_{r+1}, \dots, \bar{a}_k$, равная нулевому столбцу. Следовательно, они образуют линейно зависимую систему.

Свойство 1.4.4. Если система столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО выводится из предыдущего свойства рассуждением от противного.

1.4.2. Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре и о ранге матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.4.2. Минором k -го порядка матрицы A называется определитель, образованный элементами, расположенными на пересечении каких-либо k строк и каких-либо k столбцов матрицы.

ПРИМЕР 1.4.2. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минорами первого порядка являются все элементы матрицы: 1, 2, 3, 0, 4 и т. д. Миноры второго порядка — это всевозможные определители второго порядка, стоящие на пересечении каких-нибудь пар столбцов и каких-нибудь пар строк:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{и т. д.}$$

Миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, миноров выше третьего порядка у данной матрицы нет. Вообще, если матрица имеет размерность $m \times n$, то наивысший порядок ее миноров равен минимальному из чисел m, n .

Определение 1.4.3. Рангом матрицы A называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Обозначения: $\text{Rg } A$ или $\text{Rang } A$.

Более подробно: $\text{Rg } A = r$, если существует минор порядка r матрицы A , отличный от нуля, и все миноры более высоких порядков равны нулю. В этом случае минор порядка r , отличный от нуля (любой), называется *базисным* минором матрицы A , а совокупность столбцов (строк), пересекающих базисный минор, также называют *базисными*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4.1. Докажите, что если существует минор порядка r матрицы A , отличный от нуля, и все миноры порядка $r + 1$ равны нулю, то $\text{Rg } A = r$.

ПРИМЕР 1.4.3. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как существуют миноры первого порядка, отличные от нуля (элементы матрицы), то вычисляем миноры второго порядка. Если все они окажутся равными нулю то ранг равен 1 (см. упражнение 1.4.1). Если найдется минор второго порядка, отличный от нуля, то вычисляем миноры третьего порядка. В случае если все миноры третьего порядка окажутся нулевыми, то ранг равен 2. Если же среди них найдется ненулевой, то вычисляем миноры четвертого порядка и т. д.

Заметим, что алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_{r+1} не зависят от того, какая именно строка стоит на последнем месте, поэтому в их обозначении отсутствует зависимость от i . Разложение определителя Δ_{r+1} по последней строке имеет вид

$$\Delta_{r+1} = a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{ir}\lambda_r + a_{ij}\lambda_{r+1}$$

или

$$0 = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \dots + \lambda_r a_{ir} + \lambda_{r+1} a_{ij}$$

при всех $i = 1, \dots, m$. Последние равенства равносильны следующему соотношению для столбцов:

$$\bar{0} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r + \lambda_{r+1} \bar{a}_j.$$

Заметим, что в этом равенстве коэффициент $\lambda_{r+1} = A_{ij}$ есть базисный минор матрицы A , поэтому он не равен нулю. Разделив на него все члены равенства, выразим оттуда \bar{a}_j :

$$\bar{a}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} \bar{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{r+1}} \bar{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} \bar{a}_r.$$

В силу произвольности j , последнее равенство означает, что любой столбец матрицы A есть линейная комбинация базисных столбцов.

Следствие 1.4.1. *Если матрица A квадратная и $\det A = 0$, то столбцы (строки) матрицы образуют линейно зависимую систему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть порядок матрицы равен n . Так как матрица квадратная, то единственный минор порядка n матрицы — это ее определитель. Условие $\det A = 0$ эквивалентно тому, что $\text{Rg} A = r < n$. Значит, существует столбец, который не пересекает базисный минор. По теореме 1.4.1, этот столбец есть линейная комбинация базисных, а значит, по свойству 1.4.1 (если $r = n - 1$) или по свойству 1.4.3 (если $r < n - 1$) все столбцы матрицы линейно зависимы. Аналогично доказывается линейная зависимость строк.

Теорема 1.4.2 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы следует из определения ранга матрицы и теоремы о базисном миноре. Если $\text{Rg} A = r$, то в матрице существует ровно r линейно независимых строк (это базисные строки), а любые $(r + 1)$ строки линейно зависимы. Действительно, ранг матрицы A' , образованной этими $(r + 1)$ строками, не превосходит ранга всей матрицы A , то есть $\text{Rg} A' \leq r$, а значит, найдется строка матрицы A' , не пересекающая базисный минор этой матрицы. По теореме о базисном миноре, эта строка есть линейная комбинация остальных строк матрицы A' , значит, все строки этой матрицы

линейно зависимы. Тогда, по свойству 1.4.3 линейно зависимых систем, все строки матрицы A также линейно зависимы.

Справедливо и обратное. Если в матрице существует r линейно независимых строк, а любые $(r + 1)$ строки линейно зависимы, то, во-первых, существует минор порядка r , отличный от нуля. Такой минор найдется среди миноров, расположенных в этих r линейно независимых строках, так как в противном случае все эти миноры порядка r равны нулю, следовательно, ранг матрицы, образованной r линейно независимыми строками, будет меньше r , что влечет линейную зависимость этих r строк, в силу первой части теоремы, т. е. здесь — противоречие. Во-вторых, любой минор порядка $(r + 1)$ исходной матрицы равен нулю, так как все его $(r + 1)$ строки будут линейно зависимы (почему?) и, значит, одна из них есть линейная комбинация остальных. По определению ранга матрицы, отсюда следует (см. упражнение 1.4.1), что $\text{Rg}A = r$.

Следствие 1.4.2. Ранг матрицы не меняется при умножении ее на любую невырожденную (квадратную) матрицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ имеет ранг $\text{Rg}A = r$. Умножим ее справа на невырожденную матрицу $B = (b_{jk})_{n \times n}$. В силу теоремы о ранге матрицы, достаточно показать, что максимальное число линейно независимых строк матрицы AB равно r . Заметим, что строками матрицы AB являются произведения соответствующих строк матрицы A на матрицу B :

$$\underline{a}_1 B, \quad \underline{a}_2 B, \quad \dots, \quad \underline{a}_m B.$$

Покажем, что линейная зависимость (линейная независимость) любой системы строк матрицы A равносильна линейной зависимости (линейной независимости) соответствующей системы строк матрицы AB . Пусть, например, система строк $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ линейно зависима, т. е. равенство

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0} \tag{1.4.6}$$

выполняется при некоторых ненулевых коэффициентах λ_i . Умножив это равенство на матрицу B , получим

$$\lambda_1 \underline{a}_1 B + \lambda_2 \underline{a}_2 B + \dots + \lambda_k \underline{a}_k B = \underline{0}. \tag{1.4.7}$$

При этом равенства (1.4.6) и (1.4.7) равносильны, так как (1.4.6) получается из (1.4.7) умножением последнего на матрицу B^{-1} . Поэтому из линейной зависимости (независимости) строк $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ вытекает линейная зависимость (независимость) строк $\underline{a}_1 B, \underline{a}_2 B, \dots, \underline{a}_k B$ и обратно. Отсюда ясно, что максимальное число линейно независимых строк у матриц A и AB должно быть одинаковым.

1.4.3. Элементарные преобразования матриц

Определение 1.4.4. *Элементарными преобразованиями матрицы называются:*

- 1) перестановка любых двух строк матрицы;
- 2) умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля;
- 3) сложение строк, то есть замена любой строки матрицы ее суммой с какой-нибудь другой строкой;
- 4) те же операции со столбцами.

Определение 1.4.5. *Матрицы, полученные одна из другой элементарными преобразованиями, называются эквивалентными.*

Обозначение: $A \sim B$ (A эквивалентна B).

Теорема 1.4.3. *Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы отметим, что каждое элементарное преобразование равносильно умножению матрицы на некоторую невырожденную матрицу. Доказательство этого утверждения можно найти в курсах линейной алгебры. Тогда утверждение теоремы вытекает из следствия 1.4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.2. *При помощи элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к одному из простейших видов: треугольному, диагональному или «ступенчатому», ранг которых определяется очень просто.*

Например, пусть матрица A элементарными преобразованиями приведена к диагональному виду (перестановкой строк и столбцов можно добиться, чтобы ненулевые элементы главной диагонали стояли в левом верхнем углу):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Тогда, очевидно, ранги обеих матриц совпадают и равны числу ненулевых элементов диагональной матрицы. В самом деле, базисный минор диагональной матрицы B как раз находится в левом верхнем углу, и его порядок равен числу ненулевых элементов.

Рассмотрим несколько примеров использования элементарных преобразований для вычисления ранга матрицы.

Уточним сначала понятие ступенчатой матрицы.

Определение 1.4.6. *Ступенчатой матрицей будем называть матрицу, удовлетворяющую следующим условиям:*

- 1) все нулевые строки находятся ниже всех ненулевых;
- 2) у каждой ненулевой строки, кроме первой, число нулевых элементов, предшествующих первому ненулевому, больше, чем у предыдущей строки.

Например, ступенчатыми являются матрицы A и B .

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \underline{3} & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{3} & 2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем ступенчатой является треугольная матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.4.4. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся определением ранга матрицы. Пусть в матрице $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ступенчатого вида r ненулевых строк, где $r \leq \min(m, n)$. Тогда у нее имеется минор порядка r , отличный от нуля, а именно минор, лежащий на пересечении ненулевых строк и столбцов, в которых находятся первые ненулевые элементы этих строк (отмеченные в приведенных выше примерах ступенчатых матриц). Кроме того, все миноры порядка выше r либо не существуют, либо равны нулю, так как неизбежно будут содержать нулевые строки. Отсюда следует, что $\text{Rg} A = r$.

ПРИМЕР 1.4.4. *Найти ранг ступенчатой матрицы и указать базисный минор:*

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \underline{2} & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Из предыдущей теоремы следует, что $\text{Rg} A = 3$. Базисный минор лежит на пересечении ненулевых строк и столбцов, в которых лежат первые ненулевые элементы этих строк, отмеченные уголками:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4.2. Докажите, что $\text{Rg} A = 3$ для матрицы из последнего примера без теоремы 1.4.4, пользуясь только определением ранга матрицы.

На следующем примере проиллюстрируем метод нахождения ранга матрицы путем приведения ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Этот метод называют *методом Гаусса*.

ПРИМЕР 1.4.5. Найдите ранг матрицы с помощью элементарных преобразований (методом Гаусса)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Начнем с того, что для удобства поменяем местами первые две строки. Удобство заключается в том, что в первой строке на первой позиции стоит 1. Затем, используя эту первую строку, добьемся, чтобы в первом столбце все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равнялись нулю. Для этого из каждой строки, начиная со второй, будем вычитать (или прибавлять) первую, умноженную на подходящее число:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так, например, из второй строки вычли первую, умноженную на 2; к третьей удобней прибавить первую, умноженную на 3; а четвертую строку оставили без изменений, так как у нее уже в первом столбце стоит 0.

Аналогичные преобразования проделаем со строками последней матрицы, начиная со второй: сначала поменяем местами вторую и четвертую, затем, вычитая или прибавляя вторую строку к последующим, умножая ее предварительно на подходящее число, добьемся, чтобы во втором столбце

Как и в п 1.3.3, *матрицей системы* будем называть матрицу из ее коэффициентов:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а столбец неизвестных и столбец свободных членов обозначать соответственно

$$\bar{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.5.1) можно записать в эквивалентной матричной форме:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad \text{или} \quad AX = B. \quad (1.5.2)$$

ПРИМЕР 1.5.1. Для заданной системы линейных уравнений выписать матрицу системы, столбец неизвестных, столбец свободных членов и записать систему в матричном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Легко видеть, что матрица системы имеет размерность (3×4) (3 уравнения и 4 неизвестных), столбец неизвестных имеет размер 4, а столбец свободных членов — размер 3. Конкретные их выражения имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этих значениях данная система уравнений имеет вид (1.5.2).

1.5.2. Формулы Крамера

Вернемся еще раз к крамеровским системам линейных уравнений, т. е. системам, число уравнений в которых равно числу неизвестных, а матрица системы невырожденная. Пусть матрица системы по-прежнему обозначена $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Ее определитель обозначим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и будем называть *определителем системы*. Наряду с Δ рассмотрим определители Δ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, которые получаются из Δ заменой его j -го столбца столбцом свободных членов, например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и т. д. В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 1.5.1 (Крамера). *Если в системе линейных уравнений (1.5.1) или (1.5.2) число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы отличен от нуля (т. е. система является крамеровской), то она имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия доказываемой теоремы совпадают с условиями разрешимости крамеровской системы при помощи обратной матрицы (см. п. 1.3.3). В этом случае крамеровская система имеет единственное решение, задаваемое формулой (1.3.10). Запишем подробнее эту формулу, подставляя в нее выражение для обратной матрицы из (1.3.6):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы в правой части равенства, найдем:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_kA_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_kA_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_kA_{kn} = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Последние равенства во всех этих соотношениях получены по формулам разложения определителей Δ_j по j -му столбцу:

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^n b_kA_{k1}, \quad \Delta_2 = \sum_{k=1}^n b_kA_{k2}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \sum_{k=1}^n b_kA_{kn}.$$

Формулы (1.5.3), по которым находится решение крамеровской системы, также называют *формулами Крамера*.

ПРИМЕР 1.5.2. Найти решение системы по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1; \\ -2x + 4y = -3; \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

то формулы Крамера применимы. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменив в Δ столбцы 1, 2, 3 столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда решение находим по формулам (1.5.3):

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что в общем случае количество арифметических операций необходимых для решения линейной системы значительно меньше при решении методом Гаусса, чем методами обратной матрицы или Крамера. Последние методы рационально использовать при решении систем с числовыми коэффициентами 2-го или 3-го порядков и систем с буквенными коэффициентами.

§ 1.6. Системы линейных уравнений.

Общая теория

1.6.1. Условие совместности системы.

Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида (1.5.1) или в матричной форме (1.5.2). Наряду с матрицей системы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ рассмотрим так называемую расширенную матрицу

$$A^* = (A|B) = (A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (1.6.1)$$

которая получается добавлением к матрице A столбца свободных членов.

В связи с данной системой возникает вопрос о ее совместности: имеет ли она хотя бы одно решение? Ответ содержится в следующей теореме Кронекера-Капелли.

Теорема 1.6.1 (Кронекера-Капелли). *Для того чтобы система линейных уравнений (1.5.1) или (1.5.2) имела решения (т. е. была совместной), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A системы был равен рангу расширенной матрицы A^* :*

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*. \quad (1.6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Используя линейные операции над столбцами, систему (1.5.1) можно записать в следующем виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или сокращенно:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}. \quad (1.6.3)$$

Пусть система совместна. Тогда найдутся такие значения $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$, при подстановке которых в (1.5.1) или в (1.6.3) все эти уравнения обращаются в верные равенства, в частности будет выполнено равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{b}.$$

Из этого равенства следует, что столбец свободных членов \bar{b} есть линейная комбинация столбцов матрицы A , и значит его добавление к матрице A не увеличивает максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A . По теореме о ранге матрицы, $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^* = r$. Тогда базисный минор матрицы A может служить и базисным минором расширенной матрицы A^* . Не ограничивая общности, можно считать, что базисный минор расположен в верхнем левом углу матрицы A , т. е. на пересечении первых r строк и первых r столбцов. Тогда, по теореме о базисном миноре, столбец \bar{b} является линейной комбинацией первых r столбцов матрицы A , т. е.

$$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r$$

для некоторых коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Приписав в правую часть этого равенства остальные столбцы матрицы A с нулевыми коэффициентами, получим

$$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r + 0 \bar{a}_{r+1} + \dots + 0 \bar{a}_n,$$

откуда следует, что (1.6.3) выполняется при значениях неизвестных $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0$. Это и означает, что система (1.5.1) имеет решение.

Свойство 1.6.2. Если столбец $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ является решением системы (1.6.4), то для любого действительного λ столбец $\lambda\bar{x}$ также является решением (1.6.4).

Из этих свойств немедленно вытекает

Следствие 1.6.1. Если столбцы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

являются решениями системы (1.6.4), то для любых действительных λ и μ линейная комбинация $\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}$ также является решением (1.6.4).

Методом математической индукции отсюда выводится

Следствие 1.6.2. Если столбцы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ являются решениями системы (1.6.4), то для любых действительных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ линейная комбинация

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \dots + \lambda_k\bar{x}_k$$

также является решением системы (1.6.4).

Попробуйте доказать это следствие самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.1. Из свойства 1.6.2 следует, что если однородная система имеет хотя бы одно ненулевое решение, то она имеет бесконечное множество решений.

Определение 1.6.2. Совокупность решений $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$ однородной системы (1.6.4) называется фундаментальной системой решений, если

- 1) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$ линейно независимы,
- 2) любое решение системы (1.6.4) является линейной комбинацией решений $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.2. Если найдена фундаментальная система решений $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$ однородной системы (1.6.4), то множество всех решений этой системы можно представить в виде

$$\bar{x} = c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + \dots + c_k\bar{e}_k, \quad (1.6.6)$$

где c_1, c_2, \dots, c_k — произвольные действительные постоянные.

Определение 1.6.3. Решение (1.6.6), представляющее при всевозможных значениях постоянных c_i ($i = 1, \dots, k$) все решения системы (1.6.4), называется общим решением однородной системы.

Теорема 1.6.2. Если ранг r матрицы A однородной системы (1.6.4) меньше числа неизвестных n , то система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из $(n - r)$ решений: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы содержит также и некоторый алгоритм нахождения фундаментальной системы решений. Заметим, что перестановка строк матрицы A соответствует перестановке уравнений системы (1.6.4) и приводит к системе, равносильной исходной, а перестановка столбцов равносильна переобозначению неизвестных. Проведем, если необходимо, такие перестановки, будем считать, как и раньше, что базисный минор матрицы A находится в ее левом верхнем углу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По теореме о базисном миноре все строки матрицы A с номерами, большими r , являются линейными комбинациями первых r строк. Соответствующие уравнения системы (1.6.4) обладают тем же свойством, поэтому их можно отбросить, так как они есть следствие первых r уравнений. Оставшаяся система из r первых уравнений с n неизвестными равносильна исходной. Оставим в левой части этой системы первые r неизвестных, остальные перенесем в правую часть. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (1.6.7)$$

Первые r неизвестных x_1, x_2, \dots, x_r будем называть *базисными*, остальные $(n - r)$ неизвестных x_{r+1}, \dots, x_n — *свободными* (или *параметрическими*).

(Заметим: так как в общем случае базисный минор не обязательно расположен в левом верхнем углу, то базисными могут быть любые r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы A).

Если свободным переменным придать какие-либо значения, то базисные неизвестные можно найти единственным образом из системы (1.5.1),

так как это крамеровская система с определителем, отличным от нуля: ее определитель — базисный минор матрицы A .

Придадим свободным неизвестным поочередно следующие наборы значений

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6.8)$$

Тогда правые части системы (1.5.1) получат определенные числовые значения, для которых система (1.5.1) будет иметь единственное решение. Таким образом, при каждом наборе свободных неизвестных из (1.6.8) мы найдем из (1.5.1) соответственный набор базисных неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \end{pmatrix}.$$

Объединяя их в единые столбцы, получим $(n-r)$ столбцов

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{e}_k = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6.9)$$

каждый из которых является решением системы (1.5.1), а следовательно, и исходной системы (1.6.4).

Докажем, что решения из (1.6.9) образуют фундаментальную систему. Сначала проверим их линейную независимость. Составим матрицу из столбцов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-r} \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r^1 & x_r^2 & \dots & x_r^{n-r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет размерность $n \times (n - r)$, причем минор порядка $(n - r)$, стоящий в последних $(n - r)$ строках, равен 1, т. е. отличен от нуля. Следовательно, ранг данной матрицы равен $(n - r)$, и по теореме о ранге матрицы все ее столбцы линейно независимы.

Проверим условие 2) в определении фундаментальной системы. Возьмем произвольное решение однородной системы (1.6.4):

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)^T$$

и образуем следующую линейную комбинацию решений этой системы:

$$\bar{y} = \bar{x} - x_{r+1}\bar{e}_1 - x_{r+2}\bar{e}_2 - \dots - x_n\bar{e}_{n-r}. \quad (1.6.10)$$

В силу следствия 1.6.2, \bar{y} является решением системы (1.6.4). Выполнив все действия со столбцами в правой части равенства (1.6.10), обнаружим, что все последние $(n - r)$ элементов столбца \bar{y} равны нулю, то есть

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r, 0, \dots, 0)^T.$$

Заметим, что столбец \bar{y} , будучи решением системы (1.6.4), является одновременно решением равносильной системы (1.5.1) при нулевых значениях всех свободных неизвестных. Однако нулевые значения свободных неизвестных дают нулевое (единственное) решение системы (1.5.1) для базисных неизвестных, т. е. $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_r = 0$. Отсюда следует, что $\bar{y} = \bar{0}$, и из (1.6.10) находим:

$$\bar{x} = x_{r+1}\bar{e}_1 + x_{r+2}\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_{n-r}.$$

Таким образом, произвольное решение \bar{x} однородной системы (1.6.4) есть линейная комбинация решений $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$. Следовательно, доказано, что $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений.

Следствие 1.6.3. *Если число уравнений однородной системы (1.6.4) равно числу неизвестных, то система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\det A = 0$, то $\text{Rg} A = r < n$, и по теореме 1.6.2 система имеет фундаментальную систему из $(n - r)$ решений, а значит, бесконечное множество решений. Обратное: если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель должен равняться нулю, так как если $\det A \neq 0$, то система является крамеровской и имеет единственное (нулевое) решение, что противоречит исходному допущению.

Как уже отмечалось, доказательство теоремы 1.6.2 содержит описание алгоритма решения однородной системы (1.6.4). При этом на начальном этапе (определение ранга матрицы системы, нахождение базисного минора) оперировать нужно с матрицей, а не с самой системой. В следующем примере мы покажем, как, оперируя в основном с матрицей, найти все решения однородной системы линейных уравнений.

ПРИМЕР 1.6.1. Найти фундаментальную систему решений однородной системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Используем метод элементарных преобразований (метод Гаусса) для нахождения ранга матрицы системы (будем говорить — «ранга системы») и базисного минора. При этом будем производить элементарные операции только со строками матрицы, так как это соответствует операциям с уравнениями системы, сохраняющим равносильность. Как и прежде, приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & \underline{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \underline{0} & \underline{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг ступенчатой матрицы равен 2 (числу ненулевых строк). Значит и ранг исходной матрицы $\text{Rg} A = r = 2$. Число неизвестных системы $n = 5$. Следовательно, по теореме 1.6.2 система имеет фундаментальную систему из $n - r = 3$ решений. Число базисных неизвестных равно 2 (рангу), свободных — 3. Чтобы назначить базисные неизвестные, выберем базисный минор последней матрицы: можно, например, взять в качестве базисного минор второго порядка на пересечении первых двух строк и второго и третьего столбцов. Тогда базисными неизвестными будут x_2, x_3 , остальные — свободными. Выпишем систему, соответствующую последней матрице, затем свободные неизвестные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \iff \iff \begin{cases} 2x_2 + x_3 = -3x_1 - 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно базисных неизвестных «снизу вверх»

находим

$$\begin{cases} x_3 = x_4 + 3x_5 \\ x_2 = \frac{1}{2}(-x_3 - 3x_1 - 3x_4 - 5x_5) = -\frac{3}{2}x_1 - 2x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Полученное решение можно представить в виде

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1 - 2x_4 - 4x_5 \\ x_4 + 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad (1.6.11)$$

где базисные неизвестные выражены через свободные, а свободные могут принимать произвольные значения. Таким образом, равенство (1.6.11) описывает множество всех решений однородной системы линейных уравнений. Поэтому столбец \bar{x} , заданный равенством (1.6.11), также называют *общим решением* данной однородной системы.

Из общего решения легко получить фундаментальную систему решений. Для этого, как и при доказательстве теоремы 1.6.2, будем придавать свободным неизвестным (x_1, x_4, x_5) последовательно значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Тогда, подставляя эти значения в (1.6.11), получим

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя найденную фундаментальную систему решений, общее решение (1.6.11) можно записать в виде (1.6.6)

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_4\bar{e}_2 + x_5\bar{e}_3, \quad (1.6.12)$$

где свободные неизвестные x_1, x_4, x_5 играют роль произвольных постоянных, т. е. могут принимать произвольные значения.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6.2. Подставив в правую часть равенства (1.6.12) значения столбцов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, убедитесь, что правые части равенств (1.6.11) и (1.6.12) совпадают.

1.6.3. Неоднородные системы линейных уравнений

Рассмотрим произвольную неоднородную систему уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (1.6.13)$$

Соответствующей однородной системой будем называть систему

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (1.6.14)$$

с той же матрицей A .

В дополнение к свойствам однородных систем, рассмотренным в предыдущем пункте, определим во взаимосвязи свойства систем (1.6.13)–(1.6.14).

Свойство 1.6.3. Если \bar{z} — какое-нибудь решение неоднородной системы (1.6.13), а \bar{x} — любое решение соответствующей однородной системы (1.6.14), то $\bar{y} = \bar{z} + \bar{x}$ — решение неоднородной системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сформулированных условий, выполняются следующие равенства:

$$A\bar{z} = \bar{b}, \quad A\bar{x} = \bar{0}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$A\bar{z} + A\bar{x} = \bar{b} \iff A(\bar{z} + \bar{x}) = \bar{b},$$

откуда и следует, что $\bar{y} = \bar{z} + \bar{x}$ есть решение неоднородной системы (1.6.13).

Совершенно аналогично можно доказать следующее

Свойство 1.6.4. Если \bar{y} и \bar{z} — какие-нибудь два решения неоднородной системы (1.6.13), то их разность $\bar{x} = \bar{y} - \bar{z}$ является решением однородной системы (1.6.14).

Следствие 1.6.4. Всякое решение \bar{y} неоднородной системы (1.6.13) представимо в виде суммы некоторого (частного) решения \bar{z} неоднородной системы и какого-то решения \bar{x} соответствующей однородной системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \bar{y} произвольное решение неоднородной системы (1.6.13), а \bar{z} — некоторое частное решение той же системы. Тогда, по свойству 1.6.4, их разность $\bar{x} = \bar{y} - \bar{z}$ есть некоторое решение соответствующей однородной системы (1.6.14), откуда $\bar{y} = \bar{z} + \bar{x}$.

Теорема 1.6.3. Пусть \bar{z} — какое-нибудь частное решение неоднородной системы (1.6.13), а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (1.6.14). Тогда все множество решений неоднородной системы может быть представлено в виде

$$\bar{y} = \bar{z} + c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + \dots + c_{n-r}\bar{e}_{n-r}, \quad (1.6.15)$$

где c_1, c_2, \dots, c_{n-r} — произвольные действительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1.6.4 произвольное решение системы (1.6.13) представимо в виде $\bar{y} = \bar{z} + \bar{x}$, где \bar{x} — решение однородной системы. Но любое решение однородной системы по теореме 1.6.2 может быть представлено в виде линейной комбинации решений фундаментальной системы

$$\bar{x} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_{n-r} \bar{e}_{n-r}$$

при некоторых значениях постоянных c_1, c_2, \dots, c_{n-r} . Подставляя это выражение для \bar{x} в предыдущее равенство, получим (1.6.15).

Как и для однородной системы, выражение (1.6.15) называется *общим решением* неоднородной системы линейных уравнений.

ПРИМЕР 1.6.2. *Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений и выразить его через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Как и в случае однородной системы, используем метод Гаусса, но элементарные преобразования (только со строками!) будем проводить с расширенной матрицей системы. Как и прежде, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{aligned} A^* = (A|\bar{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Видим, что число ненулевых строк ступенчатых матриц, как основной, так и расширенной, равно 2. Следовательно, $\text{Rg}A = \text{Rg}A^* = 2$, и по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Так как число неизвестных системы $n = 4$, то по теореме 1.6.2 система имеет фундаментальную систему из $n - r = 2$ решений. В качестве базисного минора обеих матриц удобно выбрать минор треугольного вида, расположенный на пересечении первых двух (ненулевых) строк и первого и четвертого столбцов (элементы которых отмечены в последней матрице). Тогда базисными неизвестными будут x_1, x_4 , остальные — свободными. Как и раньше, выпишем систему, соответствующую последней (ступенчатой) матрице, затем свободные неизвестные

перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10, \end{cases} \iff \iff \begin{cases} x_1 + x_4 = -2 + 2x_2 + x_3, \\ -x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно базисных неизвестных «снизу вверх», находим общее решение неоднородной системы

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.6.16)$$

где базисные неизвестные выражены через свободные, а свободные могут принимать произвольные значения.

Из общего решения неоднородной системы легко получить частное решение этой системы. Для этого достаточно в равенстве (1.6.16) подставить вместо свободных неизвестных какие-нибудь конкретные значения, проще всего — нулевые: $x_2 = 0, x_3 = 0$. Полученное частное решение неоднородной системы

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

вычтем из общего решения (1.6.16) неоднородной системы. По свойству 1.6.4 эта разность является решением соответствующей однородной системы

$$\bar{x} = \bar{y} - \bar{z} = \begin{pmatrix} -9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.6.17)$$

В этом решении базисные неизвестные x_1, x_4 выражены через свободные x_2, x_3 , которые принимают произвольные значения. Следовательно, равенство (1.6.17) представляет общее решение однородной системы, соответствующей данной неоднородной. Как и при решении предыдущего примера, найдем фундаментальную систему решений однородной системы, подставляя в (1.6.17) поочередно значения свободных неизвестных: $x_2 = 1, x_3 = 0$ и $x_2 = 0, x_3 = 1$,

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя найденную фундаментальную систему решений, общее решение неоднородной системы можно записать в виде (1.6.15)

$$\bar{y} = \bar{z} + x_2 \bar{e}_1 + x_3 \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где свободные неизвестные играют роль произвольных постоянных.

Глава 2.

Векторная алгебра

§ 2.1. Понятие вектора и линейные операции над векторами

Величины для задания которых достаточно указать их числовые значения, называются скалярными величинами, или просто скалярами. Примеры скалярных величин: длина отрезка, угол, площадь, объем, время, работа, масса, температура и т. д. Простейшие скалярные величины — отвлеченные (т. е. не имеющие размерности) числа.

Наряду со скалярами существуют и другие величины, для полной характеристики которых недостаточно задания их числовых значений. Например, для характеристики действия силы мало знать ее величину — надо знать направление, в котором эта сила действует. Такие величины, как скорость, ускорение, сила, напряженность электромагнитного поля и т. д., требующие для своего задания не только числового значения, но и направления, называются векторными величинами, или векторами.

Для наглядного изображения векторов используют геометрические векторы — прямолинейные отрезки, имеющие не только определенную длину, но и определенное направление.

Вектором будем называть направленный отрезок.

Вектор полностью характеризуется заданием:

- a) своей начальной точки (*точки приложения вектора*);
- b) направления;
- c) длины.

Векторы обозначаются буквами или со стрелкой, или с чертой, или выделением жирным шрифтом: \vec{F} , \vec{s} , \mathbf{P} , \mathbf{v} . Так как вектор — это направленный отрезок, то его иногда удобнее обозначать двумя буквами с чертой (или

стрелкой) вверху: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} и т. д., при этом первая буква обозначает начало вектора, а вторая — конец.

Длиной вектора \overrightarrow{AB} называется расстояние между его начальной и конечной точками. Длину вектора, которую чаще называют модулем вектора, обозначают $|\overrightarrow{AB}|$, $|\mathbf{a}|$ и т. д. В физике принято модуль вектора обозначать той же буквой, что и вектор, но без черты (стрелки) сверху: если \vec{v} — скорость, то v — величина скорости.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

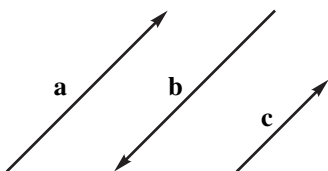


Рис. 2.1

Введем важное понятие равенства векторов.

Коллинеарные векторы могут иметь или одинаковое (например, векторы \mathbf{a} и \mathbf{c} на рис. 2.1) или противоположное (например, векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} на рис. 2.1) направления. Коллинеарность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} будем обозначать $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Определение 2.1.1. Два вектора считаются равными ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$), если они удовлетворяют трем условиям:

- 1) имеют одинаковую длину;
- 2) коллинеарны;
- 3) имеют одинаковое направление.

Из этого определения следует, что положение точки приложения вектора не имеет значения, т. е. при параллельном переносе вектор не меняется. Поэтому всегда можно переместить данные векторы так, чтобы они были приложены к одной точке. Заметим, что такие векторы, определяемые только своей длиной и направлением, называют *свободными*.

Понятие свободного вектора не является единственно возможным. Например, в физике твердого тела действующую силу можно перенести в любую другую точку, но на той же прямой. И только в этом случае эффект действия силы не изменится. Следовательно, нельзя считать равными векторы, расположенные на параллельных прямых, даже если они имеют одинаковые длину и направление. Такие векторы называются *скользящими*.

Наконец, в электродинамике вектор напряженности поля зависит от точки приложения. Если векторы электромагнитного поля перенести в другие точки, даже с сохранением направления и длины, то получится поле с иными физическими характеристиками. Такие векторы называются *связанными*.

Итак, мы рассматриваем только свободные векторы. Но это не умаляет ценности излагаемой теории, так как и связанные, и скользящие векторы

можно выразить через свободные векторы.

2.1.1. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют операцию сложения векторов, операцию вычитания векторов и операцию умножения векторов на действительные числа.

Определение 2.1.2. Суммой двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , называется вектор \mathbf{c} , идущий из начала вектора \mathbf{a} в конец вектора \mathbf{b} при условии, что вектор \mathbf{b} приложен к концу вектора \mathbf{a} .

Обозначается сумма $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 2.2).

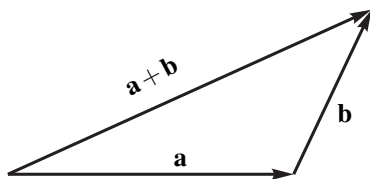


Рис. 2.2

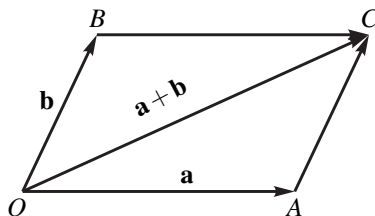


Рис. 2.3

Это определение называют «правилом треугольника» сложения векторов. Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны, то, хотя треугольника и нет, определение 2.1.2 применимо.

Если дополнить треугольник OAC (рис. 2.3) до параллелограмма $OABC$, то получим — ведь противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны — «правило параллелограмма» сложения векторов: чтобы сложить два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , приводим их к общему началу O , строим на них параллелограмм. Его диагональ, выходящая из той же вершины O , является суммой двух данных векторов.

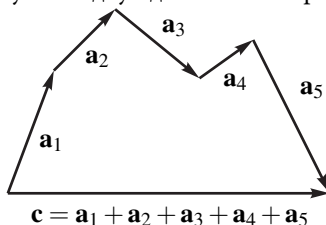


Рис. 2.4

Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то это означает, что вектор — сумма имеет длину, равную нулю. Такой вектор называется нулевым вектором (нуль-вектором) и обозначается $\vec{0}$ или $\bar{0}$,

Если нужно сложить более двух векторов, то, обобщая «правило треугольника», получаем «правило многоугольника»: чтобы построить сумму любого числа векторов, надо из конца первого вектора построить второй вектор, из конца второго — третий и т. д. Вектор, связывающий начало первого вектора с концом последнего (т. е. замыкающий вектор), и будет суммой всех данных векторов (рис. 2.4).

Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то это означает, что вектор — сумма имеет длину, равную нулю. Такой вектор называется нулевым вектором (нуль-вектором) и обозначается $\vec{0}$ или $\bar{0}$,

или $\mathbf{0}$, или просто 0 (без черты, стрелки). Очевидно, нулевой вектор — это вектор, модуль которого равен нулю (начало вектора совпадает с его концом). Очевидно, что нулевой вектор не имеет направления, а поэтому его можно считать коллинеарным любому вектору.

Если два вектора имеют одинаковую длину, но противоположное направление, то их сумма равна нулю. Такие векторы называются противоположными. Очевидно, для любого вектора \mathbf{a} найдется противоположный ему вектор $-\mathbf{a}$ и выполняется равенство $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Сложение векторов подчиняется основным законам сложения чисел:

- 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — закон коммутативности;
- 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ — закон ассоциативности;
- 3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
- 4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Первое свойство следует из «правила параллелограмма» сложения двух векторов и свойств параллелограмма — противоположные его стороны равны и параллельны.

Для доказательства второго свойства приложим вектор \mathbf{b} к концу вектора \mathbf{a} и вектор \mathbf{c} к концу вектора \mathbf{b} (рис. 2.5). Тогда $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overline{OA} + \overline{AB}) + \overline{BC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$. С другой стороны, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overline{OA} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, что и доказывает свойство 2).

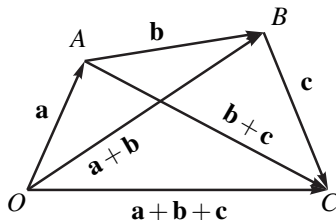


Рис. 2.5

Вычитание векторов определяется как операция, обратная сложению. Именно

Определение 2.1.3. Разностью $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется такой вектор \mathbf{c} , который в сумме с вектором \mathbf{b} даёт вектор \mathbf{a} .

Из этого определения и из «правила треугольника» сложения векторов вытекает правило построения вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$: чтобы построить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, надо привести к общему началу векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , тогда $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ — это вектор, идущий из конца вектора \mathbf{b} в конец вектора \mathbf{a} (т. е. вектор разности направлен в сторону того вектора, из которого вычитали) (рис. 2.6).

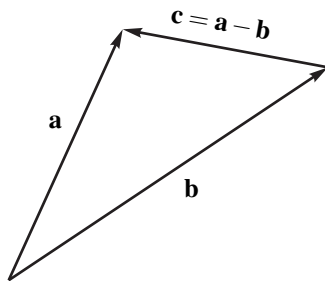


Рис. 2.6

Ясно, что вычесть из вектора \mathbf{a} вектор \mathbf{b} , значит прибавить к первому \mathbf{a} вектор $-\mathbf{b}$ противоположный второму: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Если использовать «правило параллелограмма» сложения двух векторов, то получим: вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , приведенных к общему началу и направленная в сторону уменьшаемого вектора \mathbf{a} (рис. 2.7).

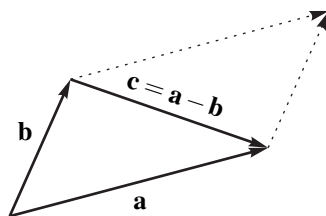


Рис. 2.7

Определение 2.1.4. Произведением $\lambda \cdot \mathbf{a}$ действительного числа λ на вектор \mathbf{a} называется вектор, коллинеарный вектору \mathbf{a} , имеющий длину, равную $|\lambda| |\mathbf{a}|$, и направление, совпадающее с направлением \mathbf{a} , если $\lambda > 0$ и ему противоположное, если $\lambda < 0$.

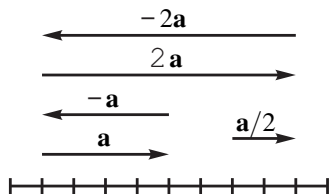


Рис. 2.8

Геометрически операция умножения вектора на число означает, что вектор \mathbf{a} растягивается в λ раз, если $\lambda > 1$, сжимается в λ раз, если $0 < \lambda < 1$, а при отрицательном λ происходит еще изменение направления вектора на противоположное (рис. 2.8).

Если мы любой ненулевой вектор \mathbf{a} разделим на его длину $|\mathbf{a}|$, то получим вектор \mathbf{a}^0 , который будет совпадать по направлению с вектором \mathbf{a} , но его длина будет равна единице. Такой вектор \mathbf{a}^0 называется *ортом* вектора \mathbf{a} .

Легко проверяются следующие свойства операции умножения вектора на число.

- 1) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ — дистрибутивность относительно суммы векторов;
- 2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ — дистрибутивность относительно суммы чисел;
- 3) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ — ассоциативность числовых сомножителей;
- 4) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Для доказательства свойства 1) следует использовать подобие треугольников, построенных на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и $\lambda\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{b}$, а для доказательства свойств 2) и 3) рассмотреть все возможные знаки чисел λ и μ . Предлагаем читателю самостоятельно провести подробные доказательства.

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число важны, так как позволяют делать преобразования в векторной алгебре по тем же правилам, по которым производятся аналогичные преобразования в обычной алгебре.

ПРИМЕР 2.1.1. Длина вектора \mathbf{m} равна единице, длина вектора \mathbf{n} равна двум и эти векторы перпендикулярны. Построить векторы, совпадающие

с диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

РЕШЕНИЕ. Диагонали параллелограмма совпадают с векторами $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (рис. 2.3 и 2.7). Используя свойства линейных операций, можно избежать построения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} по указанным векторам \mathbf{m} и \mathbf{n} .

Имеем, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2\mathbf{m} + \mathbf{n}) + (\mathbf{m} - 2\mathbf{n}) = (2\mathbf{m} + \mathbf{m}) + (\mathbf{n} - 2\mathbf{n}) = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$. Аналогично $\mathbf{d}_2 = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$.

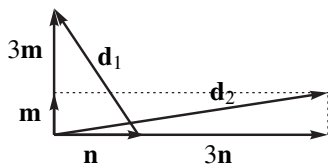


Рис. 2.9

В заключение данного раздела получим важный во многих приложениях критерий коллинеарности двух векторов. Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, то векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Справедливо и обратное: если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то найдется число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. В самом деле, приложим векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} к общему началу O . Тогда эти векторы расположатся на одной прямой. Возможны два случая: 1) векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} направлены в одну сторону; 2) они направлены в противоположные стороны.

Очевидно, в первом случае точка B делит отрезок OA в некотором отношении λ : $\frac{OA}{OB} = \lambda$. Отсюда $OA = \lambda OB$, т. е. $\overline{OA} = \lambda \overline{OB}$. Во втором случае рассуждения аналогичны.

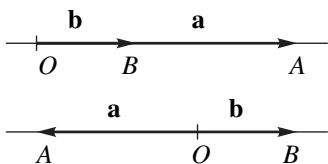


Рис. 2.10

Итак, ненулевые векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

Заметим, что если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство $\mathbf{0} = \mathbf{0b}$ выполняется для любого вектора \mathbf{b} и, следовательно, нулевой вектор можно считать коллинеарным любому вектору.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 2.1.2. В параллелограмме $ABCD$ обозначены $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{AD} = \mathbf{b}$. Выразить через \mathbf{a} и \mathbf{b} векторы \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{MC} и \overline{MD} , где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 2.11).

РЕШЕНИЕ. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Значит (рис. 2.11), $\overline{MC} = 1/2\overline{AC} = 1/2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overline{MA} = -\overline{MC} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overline{MD} = -\overline{MB} = -(\mathbf{a} - \mathbf{b})/2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$.

ПРИМЕР 2.1.3. Каким условием должны быть связаны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , чтобы вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ делил угол между ними пополам?

РЕШЕНИЕ. Вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ совпадает с диагональю параллелограмма. Но диагональ делит угол пополам только у ромба (квадрат — частный случай ромба), а параллелограмм является ромбом, если его стороны равны. Значит, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

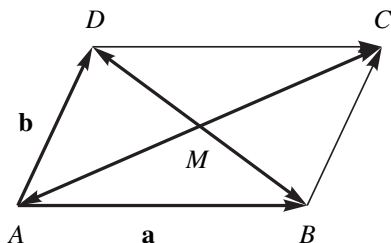


Рис. 2.11

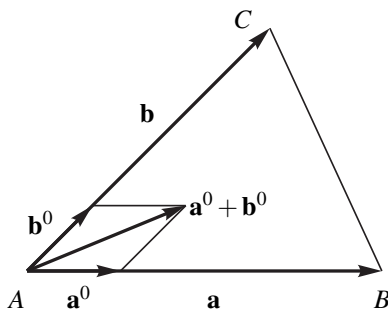


Рис. 2.12

ПРИМЕР 2.1.4. В треугольнике ABC обозначены $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{AC} = \mathbf{b}$. Найдите какой-либо вектор, коллинеарный биссектрисе угла BAC .

РЕШЕНИЕ. Если на ортах \mathbf{a}^0 и \mathbf{b}^0 построить параллелограмм, то он будет ромбом (так как $|\mathbf{a}^0| = |\mathbf{b}^0| = 1$) (рис. 2.12). Значит, диагональ $\mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0$ ромба будет являться биссектрисой угла BAC (пример 2.1.4). Отсюда получаем — вектор $\mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ коллинеарен биссектрисе угла BAC .

§ 2.2. Базис на плоскости и в пространстве

Введенные в предыдущем разделе линейные операции над векторами обладают на практике очевидными недостатками: геометрическое построение результата операции имеет недостаточную точность, поскольку зависит от точности чертежа; отсутствует наглядность при изображении пространственных векторов на плоском чертеже. Аналитическая геометрия потому и называется так, что геометрическим объектам — точкам и векторам — ставится в соответствие, при выборе определенной системы координат, набор чисел.

Оказывается, в этом случае операции над векторами сводятся к обычным операциям — сложению и умножению — с числами (координатами векторов).

2.2.1. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

В § 1.4 были введены понятия линейной зависимости и линейной независимости строк и столбцов матрицы. Эти понятия дословно переносятся на векторы.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа, т. е. выражение вида

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные действительные числа.

Определение 2.2.1. *Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация равна нулю, т. е.*

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Если векторы не являются линейно зависимыми, то их называют линейно независимыми.

Удобнее другое определение линейной независимости.

Определение 2.2.2. *Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации возможно лишь тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю.*

Все свойства (и доказательство этих свойств) линейно зависимых и линейно независимых векторов совпадают с аналогичными свойствами столбцов (п 1.4.1). Рекомендуем читателю убедиться в этом.

2.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов на плоскости и в пространстве. Копланарные векторы

Теорема 2.2.1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Дано: векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} линейно зависимы и надо доказать их коллинеарность. По определению 2.2.2 линейной зависимости найдутся такие числа λ и μ , хотя бы одно из которых не равно нулю, что справедливо равенство $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Пусть для определенности $\lambda \neq 0$. Тогда, разделив обе части последнего равенства на λ , получим $\mathbf{a} + \mu/\lambda \mathbf{b} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{a} = -\mu/\lambda \mathbf{b}$. Если обозначить $\alpha = -\mu/\lambda$, то получим равенство $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$, т. е. векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ и пусть вектор \mathbf{b} ненулевой. Тогда найдется такое число λ , что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Отсюда $1 \cdot \mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Линейная комбинация векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равна нулю, а из двух коэффициентов 1 и $-\lambda$ этой комбинации по крайней мере один не равен нулю. По определению 2.2.1 векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} линейно зависимы. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. *Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, то они линейно независимы.*

Следствие 2.2.2. *Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.*

Теорема 2.2.2. *Три вектора на плоскости линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если среди трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , лежащих на одной плоскости, есть нулевой вектор, то эти три вектора линейно зависимы по свойству 1.4.2 (стр. 60) линейно зависимых совокупностей.

Пусть все три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} ненулевые. Возможны два случая.

1. Какая-либо пара, например \mathbf{a} и \mathbf{b} , коллинеарна. Тогда по теореме 2.2.1 эта пара векторов линейно зависима. По свойству 1.4.3 (стр. 61) все три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} линейно зависимы.

2. Пусть среди векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} ни одна пара не коллинеарна. Приведем векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} к общему началу O (рис. 2.13)

Проведем через конец C вектора \mathbf{c} прямые, параллельные векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} . Обозначим через A и B точки пересечения этих прямых с прямыми, на которых лежат векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} . По построению четырехугольник $OACB$ — параллелограмм и OC — его диагональ. Значит, $\mathbf{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

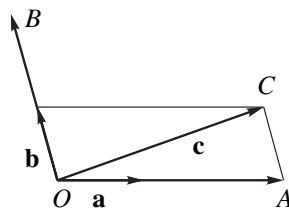


Рис. 2.13

Вектор \overline{OA} коллинеарен \mathbf{a} , значит, найдется такое число λ , что $\overline{OA} = \lambda\mathbf{a}$. Аналогично, $\overline{OB} = \mu\mathbf{b}$. Таким образом, $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. По свойству 1.4.1 (стр. 60) все три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} линейно зависимы. Теорема доказана.

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*. Теорему 2.2.2 можно сформулировать так:

Любые три компланарных вектора линейно зависимы.

Справедлива и обратная теорема:

Теорема 2.2.3. *Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.*

По «правилу параллелограмма» сложения векторов $\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{OB}$. По «правилу треугольника» сложения векторов $\overline{OD} = \overline{OE} + \overline{ED} = \overline{OE} + \overline{OC}$. Значит, вектор $\mathbf{d} = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Так как вектор \overline{OA} коллинеарен вектору \mathbf{a} (они лежат на одной прямой), то по критерию коллинеарности векторов найдется такое число α , что $\overline{OA} = \alpha\mathbf{a}$. Аналогично, найдутся числа β и γ такие, что $\overline{OB} = \beta\mathbf{b}$, $\overline{OC} = \gamma\mathbf{c}$. Следовательно, $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. или $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + (-1)\mathbf{d} = \mathbf{0}$. В равной нулю линейной комбинации векторов есть ненулевой коэффициент, значит, эти векторы линейно зависимы. Теорема доказана.

Попутно доказали утверждение:

Следствие 2.2.4. *Каковы бы ни были некопланарные векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , для любого вектора \mathbf{d} найдутся такие числа α , β и γ , что справедливо равенство*

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \quad (2.2.2)$$

Это равенство называют *разложением вектора по трем некопланарным векторам*.

В элементарной математике и физике часто говорят, что прямая одномерна, плоскость имеет размерность два и что наше пространство трёхмерно. Теоремы 2.2.1–2.2.4 объясняют смысл этих утверждений:

1) Если на плоскости задан ненулевой вектор \mathbf{a} , то для любого вектора \mathbf{b} найдется число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$;

2) Если на плоскости заданы два любых неколлинеарных вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , то для любого вектора \mathbf{c} , лежащего на этой же плоскости, найдутся такие два числа α и β , что $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$;

3) Если в пространстве заданы три любых некопланарных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , то для любого вектора \mathbf{d} найдутся такие три числа α , β и γ , что $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов на прямой, на плоскости и в пространстве равно 1, 2 и 3 соответственно.

2.2.3. Базис на плоскости и в пространстве

Равенства (2.2.1) и (2.2.2) имеют важнейшее значение в векторной алгебре. Например, выбрав два неколлинеарных вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} на плоскости в качестве базиса (базы, основы) мы можем любой вектор \mathbf{c} этой плоскости разложить по базису: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Тем самым каждому вектору на плоскости ставится в соответствие пара чисел α и β . Аналогично, каждому вектору \mathbf{d} в пространстве ставятся в соответствие три числа α , β и γ , если заранее

указаны три некопланарных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} в качестве базиса. Позже увидим, что операции над векторами сводятся к операциям над указанными числами.

Ввиду особой важности понятия базиса дадим его строгое определение для произвольного множества векторов.

Определение 2.2.3. Пусть L — некоторое множество векторов. Совокупность векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in L$ называется базисом на множестве L , если выполняются три условия:

- 1) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы;
- 2) любой вектор \mathbf{a} множества L можно разложить по векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, т. е. $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые числа;
- 3) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ упорядочены, т. е. указано, какой вектор из этой совокупности считается первым, какой вторым и т. д.

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad (2.2.3)$$

называется разложением вектора \mathbf{a} по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора в данном базисе.

Если базис задан, то равенства $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$, и $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ равноправны (здесь учитывается упорядоченность векторов базиса и координат вектора).

Справедливы следующие утверждения.

1. Любой ненулевой вектор \mathbf{e} образует базис на множестве L всех векторов, коллинеарных \mathbf{e} (т. е. базис на прямой, параллельной вектору \mathbf{e}).

Это вытекает из теоремы 2.2.1.

2. Любая пара неколлинеарных векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , лежащих на данной плоскости, образует базис на этой плоскости.

Это вытекает из следствия 2.2.3 теоремы 2.2.3 и из формулы (2.2.1).

3). Любая тройка некопланарных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образует базис в пространстве.

Это вытекает из следствия 2.2.4 теоремы 2.2.4 и формулы (2.2.2).

В дальнейшем для определенности будем рассматривать базис в пространстве.

Итак, пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — произвольный базис в пространстве, т. е. произвольная тройка некопланарных векторов. Тогда по определению базиса для любого вектора \mathbf{a} найдутся такие числа α, β и γ что справедливо равенство

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3. \quad (2.2.4)$$

Теорема 2.2.5. *Разложение любого вектора \mathbf{a} по данному базису единственно (т. е. при заданном базисе координаты вектора определяются однозначно).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, для некоторого вектора \mathbf{a} наряду с разложением (2.2.4) справедливо еще и другое разложение по тому же базису

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2 + \gamma_1 \mathbf{e}_3.$$

Вычитая это равенство из равенства (2.2.4), получим

$$(\alpha - \alpha_1) \mathbf{e}_1 + (\beta - \beta_1) \mathbf{e}_2 + (\gamma - \gamma_1) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

По определению базиса векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ линейно независимы и, значит, их линейная комбинация равна нулю только тогда, когда коэффициенты этой комбинации равны нулю: $\alpha - \alpha_1 = 0, \beta - \beta_1 = 0, \gamma - \gamma_1 = 0$, то есть $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.6. *Если в пространстве зафиксирован базис, то при сложении векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} их координаты (в этом базисе) складываются. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3$. Тогда, в силу свойств линейных операций над векторами, получим

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \mathbf{e}_3;$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \lambda \alpha_3 \mathbf{e}_3.$$

Координаты вектора суммы — коэффициенты при векторах базиса — равны сумме координат векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . По теореме 2.2.5 это разложение единственно. Для второго утверждения теоремы рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Итак, две последние теоремы позволяют «уйти» от геометрического построения результата линейных операций над векторами: вместо правила параллелограмма построения суммы векторов и растяжения вектора при умножении его на число мы переходим к простым действиям — арифметическим операциям над его координатами.

ПРИМЕР 2.2.1. *Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют базис. Показать, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3, \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ компланарны и найти линейную зависимость, их связывающую.*

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Если окажется, что это равенство возможно при α, β и γ не равных нулю одновременно, то векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} — линейно зависимы и по теореме

2.2.4 компланарны. Подставляя в линейную комбинацию векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , выраженные через векторы \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , получим

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha\mathbf{e}_3 + \beta(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + \gamma(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0},$$

или $(\beta + \gamma)\mathbf{e}_1 + (-\beta - \gamma)\mathbf{e}_2 + (\alpha - \beta - \gamma)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

В силу линейной независимости векторов базиса это равенство возможно, если только коэффициенты этой комбинации равны нулю:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -\beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем $\beta = -\gamma$ и $\alpha = -2\gamma$. Значит, $-2\gamma\mathbf{a} - \gamma\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Взяв $\gamma = -1$, получаем $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Следовательно, векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} линейно зависимы, а значит, и компланарны. Они связаны линейной зависимостью

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

2.2.4. Декартов прямоугольный базис.

Декартова прямоугольная система координат

Геометрическое построение разложений вектора по базису на плоскости и в пространстве приводит к построению параллелограммов и параллелепипедов (рис. 2.13 и 2.14). Естественно выбирать такой базис, для которого подобное построение наиболее просто. Удобнее выбирать базис \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , в котором векторы попарно перпендикулярны (или, как говорят в векторной алгебре, попарно ортогональны) и имеют длины, равные единице: $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$.

Для того чтобы связать векторный способ решения задач с методом координат, удобно рассматривать базис в его связи с системой координат.

Пространственная система координат состоит из трех взаимно перпендикулярных осей и определяется выбором начала координат и ортов (единичных векторов) всех трех осей. Прямоугольная система координат на плоскости состоит из двух взаимно перпендикулярных осей и однозначно определяется выбором начала координат и ортов этих осей.

Условимся раз навсегда обозначать орт оси Ox через \mathbf{i} , орт оси Oy через \mathbf{j} и орт оси Oz через \mathbf{k} (рис. 2.15).

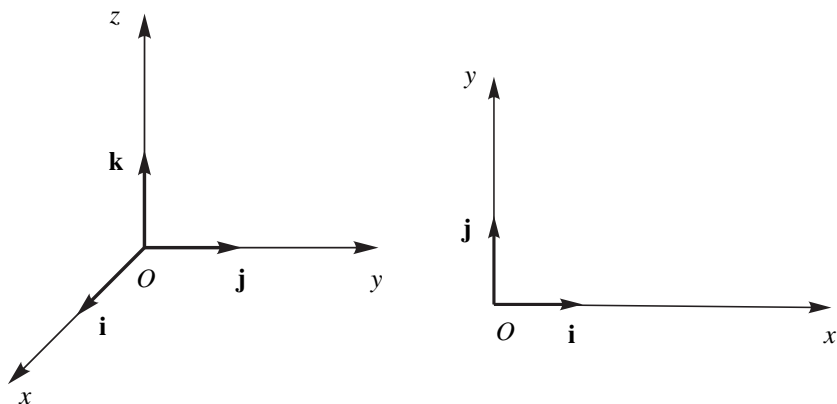


Рис. 2.15

Векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} упорядочены, это значит, что вектор \mathbf{i} считается первым, \mathbf{j} — вторым и \mathbf{k} — третьим. Системы координат, изображенные на рис. 2.15, называются *правыми*.

Иногда рассматриваются *левые* системы координат (рис. 2.16).

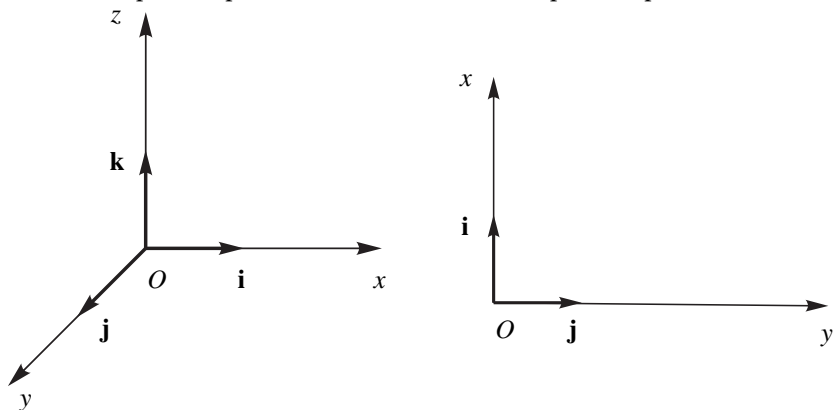


Рис. 2.16

В дальнейшем мы всюду будем рассматривать только правые системы координат. Для базиса в \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} пространстве третий вектор \mathbf{k} получается из первых двух \mathbf{i} и \mathbf{j} по известному из физики правилу «буравчика». Базис \mathbf{i} , \mathbf{j} называется *декартовым* (Р. Декарт (1596–1650) — французский математик, философ, физик и физиолог) *прямоугольным базисом* на плоскости. Базис \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — *декартов прямоугольный базис* в пространстве. Система координат с декартовым базисом называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Сформулируем полученные выше результаты для декартова прямоугольного базиса:

1. Любой вектор \mathbf{a} на плоскости может быть единственным образом разложен по декартовому базису \mathbf{i}, \mathbf{j} :

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}. \quad (2.2.5)$$

2. Любой вектор \mathbf{a} в пространстве может быть единственным образом разложен по декартовому базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}. \quad (2.2.6)$$

Векторы $\alpha\mathbf{i}$, $\beta\mathbf{j}$ и $\gamma\mathbf{k}$ называются *компонентами* вектора \mathbf{a} по осям координат.

Геометрически построение разложений (2.2.5) и (2.2.6) приводит к построению прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.17).

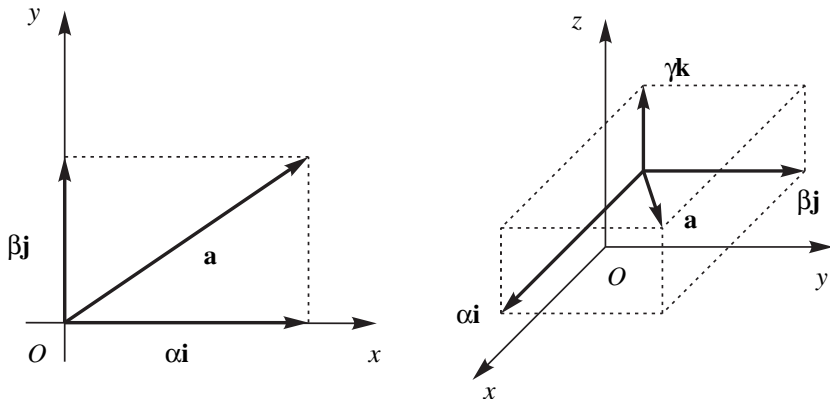


Рис. 2.17

Если вектор разложен по декартовому базису, то наряду с (2.2.5) и (2.2.6) часто используется обозначение

$$\mathbf{a} = \{\alpha, \beta\} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

без указания векторов базиса \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} . Числа α, β и γ называются *координатами вектора в декартовом базисе*.

2.2.5. Условия равенства и коллинеарности векторов в координатной форме

Используя единственность разложения вектора по базису, получаем утверждения:

1. Два вектора $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\mathbf{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их одноимённые координаты:

$$\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \iff \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2.$$

2. Два вектора $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\mathbf{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноимённые координаты пропорциональны:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (2.2.7)$$

Докажем утверждение 2.

Необходимость. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то по теореме 2.2.1 (стр. 92) найдётся число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. По теореме 2.2.6

$$\lambda \mathbf{b} = \{\lambda \alpha_2, \lambda \beta_2, \lambda \gamma_2\}.$$

Значит, $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\lambda \alpha_2, \lambda \beta_2, \lambda \gamma_2\}$. Отсюда $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$, $\beta_1 = \lambda \beta_2$, $\gamma_1 = \lambda \gamma_2$. Или $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = \beta_1/\beta_2 = \gamma_1/\gamma_2$. Необходимость доказана.

Достаточность. Приравняв отношение к числу λ получим $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = \beta_1/\beta_2 = \gamma_1/\gamma_2$. Отсюда $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$, $\beta_1 = \lambda \beta_2$, $\gamma_1 = \lambda \gamma_2$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\lambda \alpha_2, \lambda \beta_2, \lambda \gamma_2\} = \lambda \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} = \lambda \mathbf{b}.$$

По теореме 2.2.1 векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Теорема доказана.

ПРИМЕР 2.2.2. Зная, что векторы $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$ коллинеарны, вычислить коэффициенты α и β .

РЕШЕНИЕ. Используя условие (2.2.7) коллинеарности, получаем

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{5}{1} = \frac{-1}{\gamma}.$$

Отсюда $\alpha = 15$, и $\gamma = -1/5$.

§ 2.3. Проекция вектора на ось.

Осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица длины (масштаб) на этой оси. Ось можно задать единичным вектором (ортом), лежащим на этой оси.

Определение 2.3.1. Пусть A' и B' проекции точек A и B на ось l . Проекцией вектора \overline{AB} на ось l называется число, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, заключенного между проекциями начала A и конца B вектора \overline{AB} , причем эта длина берется с положительным знаком, если вектор $\overline{A'B'}$ имеет то же направление, что и ось, и с отрицательным знаком, если вектор $\overline{A'B'}$ и ось имеют противоположные направления (рис. 2.18).

Проекция вектора $\mathbf{a} = \overline{AB}$ на ось l обозначается $\text{пр}_l \overline{AB} = \text{пр}_l \mathbf{a}$.

Иногда рассматривают проекцию вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} , подразумевая под этим проекцию на ось, определяемую вектором \mathbf{b} , и обозначают $\text{пр}_\mathbf{b} \mathbf{a}$. Проекция вектора — скалярная величина (число).

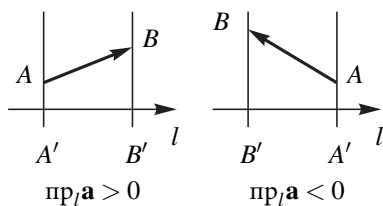


Рис. 2.18

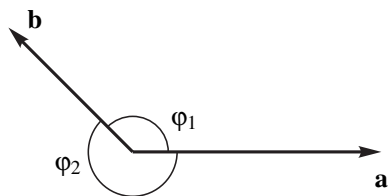


Рис. 2.19

Приведем произвольные векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} к общему началу O . Тогда в качестве угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} может быть любой из двух указанных на рис. 2.19 углов φ_1 или φ_2 (в сумме составляющих 2π). Договоримся в дальнейшем под углом между двумя векторами понимать тот угол, который не превосходит π (на рис. 2.19: $\varphi = \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \varphi_1$).

Под углом между вектором и осью будем понимать угол между данным вектором и ортом оси.

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами.

Свойство 2.3.1. Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi. \quad (2.3.1)$$

Справедливость этого свойства наглядно иллюстрируется рис. 2.20, где использовано определение проекции.

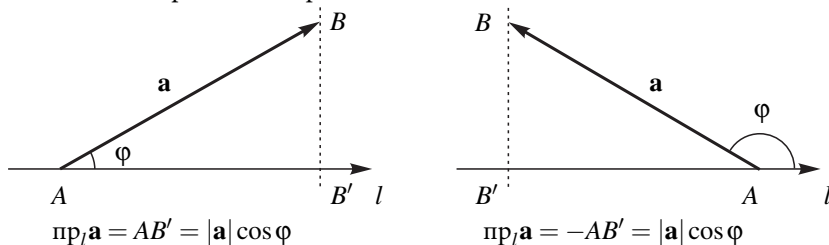


Рис. 2.20

Свойство 2.3.2. Проекция суммы векторов равна алгебраической сумме проекций

$$\text{пр}_l(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}. \quad (2.3.2)$$

Справедливость свойства 2.3.2 иллюстрируется рис. 2.21.

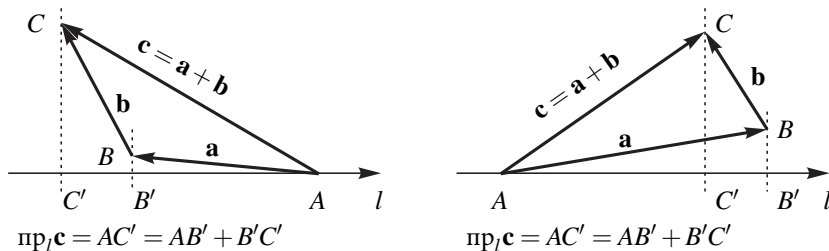


Рис. 2.21

Свойство 2.3.3. Проекция произведения вектора \mathbf{a} на скаляр λ равна произведению этого же скаляра на проекцию вектора

$$\text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{пр}_l \mathbf{a}. \quad (2.3.3)$$

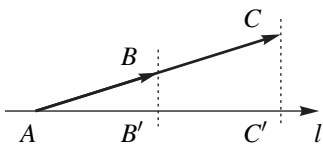


Рис. 2.22

В самом деле, обозначим $\mathbf{a} = \overline{AB}$ и $\overline{AC} = \lambda \mathbf{a}$ (рис. 2.22). Треугольники ABB' и ACC' подобны, значит, $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \lambda$. Отсюда $\text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = \text{пр}_l \overline{AC} = AC' = \lambda AB' = \lambda \text{пр}_l \overline{AB}$.

Свойства 2.3.2 и 2.3.3, в частности, означают, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим операциям над их проекциями (т. е. над числами).

Пусть задано разложение вектора \mathbf{a} по декартову базису

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}.$$

Геометрический смысл коэффициентов разложения α , β и γ даёт следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Координаты α , β и γ разложения вектора \mathbf{a} по декартовому базису равны проекциям этого вектора на оси координат

$$\alpha = \text{пр}_{Ox} \mathbf{a}, \quad \beta = \text{пр}_{Oy} \mathbf{a}, \quad \gamma = \text{пр}_{Oz} \mathbf{a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приложим вектор \mathbf{a} к началу O декартовой системы координат и построим параллелепипед, диагональю которого является вектор \mathbf{a} и грани которого лежат на координатных плоскостях (рис. 2.23).

Как и при доказательстве теоремы 2.2.5, получим, что $\mathbf{a} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Но $\overline{OA} \parallel \mathbf{i}$, значит, $\overline{OA} = \alpha \mathbf{i}$. Аналогично $\overline{OB} = \beta \mathbf{j}$ и $\overline{OC} = \gamma \mathbf{k}$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

таким образом α , β и γ — координаты вектора \mathbf{a} в декартовом базисе \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} . Построенный параллелепипед — прямоугольный и \mathbf{a} — его диагональ.

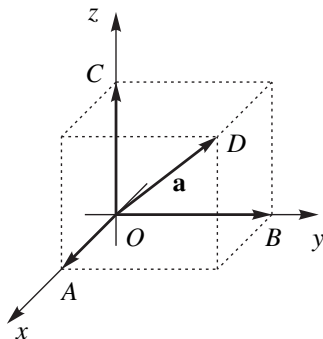


Рис. 23

Отсюда проекции OA , OB и OC вектора \mathbf{a} на оси координат равны длинам этих отрезков, взятым с определенными знаками. Остается убедиться, что $OA = \alpha$, $OB = \beta$ и $OC = \gamma$. Ясно, что

$$|\overline{OA}| = |\alpha \mathbf{i}| = |\alpha| |\mathbf{i}| = |\alpha|.$$

Но и знаки чисел OA и α одинаковы, так как если векторы \overline{OA} и \mathbf{i} одинаково направлены, то оба эти числа положительны, а если \overline{OA} и \mathbf{i} направлены в противоположные стороны, то числа OA и α отрицательны (по определению проекции вектора на ось). Итак, $OA = \alpha$. Аналогично $OB = \beta$ и $OC = \gamma$. Теорема доказана.

Проекции вектора \mathbf{a} на оси координат удобно обозначать a_x , a_y и a_z . Итак,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (2.3.4)$$

Для вектора \mathbf{a} на плоскости Oxy разложение имеет вид

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} = \{a_x, a_y\}. \quad (2.3.5)$$

2.3.1. Длина вектора в координатной форме.

Направляющие косинусы

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с диагональю \mathbf{a} (рис. 2.23). Так как квадрат его диагонали равен сумме квадратов сторон, то из равенств $OA = a_x$, $OB = a_y$, и $OC = a_z$ получаем выражение для длины вектора \mathbf{a} через его координаты

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.3.6)$$

Обозначим α , β и γ углы наклона вектора \mathbf{a} к осям Ox , Oy и Oz соответственно. Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора \mathbf{a} . Из теоремы 2.3.1 и свойства 2.3.1 проекций получаем формулы:

$$\begin{aligned} a_x &= \text{пр}_{Ox} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \\ a_y &= \text{пр}_{Oy} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \beta, \\ a_z &= \text{пр}_{Oz} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Из формул (2.3.6) и (2.3.7) получаем выражение для направляющих косинусов в координатной форме:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

По этим формулам, зная координаты вектора, можно найти его направляющие косинусы, а значит, и углы его наклона к осям координат, т. е. направление вектора.

Возводя равенства (2.3.8) в квадрат и складывая их, получим

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.\tag{2.3.9}$$

Таким образом, сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. Отсюда, в частности, *если известны два угла наклона вектора к двум осям координат, то косинус третьего угла находится с точностью до знака.*

ПРИМЕР 2.3.1. Вычислить модуль вектора $\mathbf{a} = \{-3, 6, -2\}$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (2.3.6) имеем

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

ПРИМЕР 2.3.2. Найти единичный вектор \mathbf{a} , параллельный вектору $\mathbf{A} = \{6, 7, -6\}$.

РЕШЕНИЕ. Искомый вектор либо равен орту \mathbf{A}^0 вектора \mathbf{A} , либо противоположен ему по направлению. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \pm \mathbf{A}^0 = \pm \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \pm \frac{\{6, 7, -6\}}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2}} = \\ &= \pm \frac{\{6, 7, -6\}}{\sqrt{121}} = \pm \left\{ \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right\}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.3.3. Вычислить направляющие косинусы вектора $\mathbf{a} = \{3, -4\}$.

РЕШЕНИЕ. Вектор \mathbf{a} лежит на плоскости Oxy . Значит, его третья координата — проекция на ось Oz равна 0. Поэтому по формулам (2.3.6) и (2.3.8), в которых $a_z = 0$, имеем

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{5}.$$

ПРИМЕР 2.3.4. *Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:*

- 1) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$;
- 2) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$?

РЕШЕНИЕ. 1) $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \gamma = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. По формуле (2.3.9) имеем: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$. Значит, вектор может составлять с осями координат данные углы.

2) $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \cos \gamma = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$. Сумма квадратов направляющих косинусов не равна единице, следовательно, не существует такого вектора, который бы составлял с осями координат данные углы.

ПРИМЕР 2.3.5. *Дан модуль вектора $|\mathbf{a}| = 2$ и углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$. Найти проекции вектора на оси координат.*

По формулам (2.3.7) имеем $a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha = 2 \cos 60^\circ = 1$, $a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta = 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2}$, $a_z = |\mathbf{a}| \cos \gamma = 2 \cos 120^\circ = -1$.

2.3.2. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть задана прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектором точки M называется вектор \overline{OM} , где O — начало системы координат, и обозначается $\mathbf{r}(M)$ (рис. 2.24).

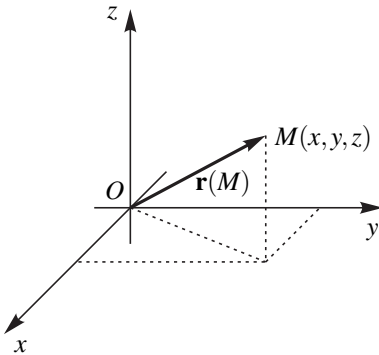


Рис. 2.24

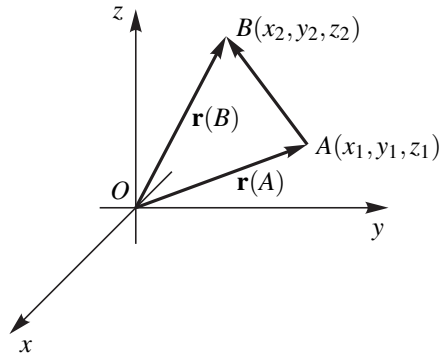


Рис. 2.25

Очевидно, координаты радиус-вектора точки $M(x, y, z)$ равны координатам самой точки $\mathbf{r}(M) = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда, очевидно, $\overline{AB} = \mathbf{r}(B) - \mathbf{r}(A) = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Получили правило: чтобы найти координаты вектора с заданными началом и концом, нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала.

Отсюда как следствие получаем формулу для расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.3.10)$$

Для точек на плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.3.11)$$

ПРИМЕР 2.3.6. Даны две точки $A(2, 1, -3)$ и $B(-1, 0, 2)$. Найти координаты векторов \overline{AB} и \overline{BA} .

РЕШЕНИЕ. $\overline{AB} = (-1 - 2)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (2 - (-3))\mathbf{k} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. $\overline{BA} = -\overline{AB} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

ПРИМЕР 2.3.7. Определить конец B вектора $\mathbf{a} = \{2, 1, -3\}$, если его начало совпадает с точкой $A(0, 1, -2)$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 1 \\ z_B - z_A = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_B = x_A + 2 = 2 \\ y_B = y_A + 1 = 1 \\ z_B = z_A - 3 = -5 \end{cases} \implies B(2, 1, -5).$$

ПРИМЕР 2.3.8. Проверить, что точки $A(2, 4, 1)$, $B(3, 7, 5)$ и $C(4, 10, 9)$ лежат на одной прямой.

РЕШЕНИЕ. Найдем векторы \overline{AB} и \overline{AC} : $\overline{AB} = \{1, 3, 4\}$, $\overline{AC} = \{2, 6, 8\}$. Так как координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, то векторы \overline{AB} и \overline{AC} коллинеарны и, следовательно, точки A , B и C лежат на одной прямой.

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти на отрезке AB точку C такую, что она делит отрезок AB в заданном отношении λ , т. е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$ (рис. 2.26).

Векторы \overline{AC} и \overline{CB} коллинеарны, одинаково направлены и $|\overline{AC}| = \lambda|\overline{CB}|$. Значит, $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Пусть точка C имеет координаты x_C , y_C и z_C . Тогда $\overline{AC} = \{x_C - x_1, y_C - y_1, z_C - z_1\}$ и $\lambda\overline{CB} = \lambda\{x_2 - x_C, y_2 - y_C, z_2 - z_C\} = \{\lambda(x_2 - x_C), \lambda(y_2 - y_C), \lambda(z_2 - z_C)\}$.

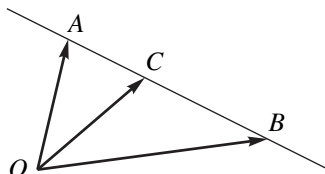


Рис. 2.26

Имеем систему уравнений для x_C , y_C и z_C :

$$\begin{cases} x_C - x_1 = \lambda(x_2 - x_C) \\ y_C - y_1 = \lambda(y_2 - y_C) \\ z_C - z_1 = \lambda(z_2 - z_C) \end{cases} \implies \begin{cases} x_C(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \\ y_C(1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2 \\ z_C(1 + \lambda) = z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

Итак,

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.3.12)$$

При $\lambda = 1$ имеем $AC = CB$, т. е. точка C — середина отрезка AB . Из формулы (2.3.12) получаем

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.3.13)$$

Получаем правило: *координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов.*

ПРИМЕР 2.3.9. *Найти центр тяжести однородного треугольника с вершинами в точках $A(1, 4)$, $B(-5, 0)$ и $C(-2, -1)$.*

РЕШЕНИЕ. В механике фигура называется однородной, если плотность распределения массы постоянна. Известно, что центр тяжести однородного треугольника лежит в точке пересечения медиан. Пусть точка M — середина отрезка AB . По первым двум формулам (2.3.13) имеем

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2.$$

Итак, точка $M(-2, 2)$ найдена. Пусть O — точка пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении $2 : 1$, т. е. $CO = 2OM$. Отсюда $\overline{CO} = 2\overline{OM}$. Переходя к координатам, получим $x_O - x_C = 2\{x_M - x_O\}$ и $y_O - y_C = 2\{y_M - y_O\}$. Или

$$x_O = \frac{x_C + 2x_M}{2} = -2, \quad y_O = \frac{y_C + 2y_M}{2} = 1.$$

Итак, центр тяжести треугольника находится в точке $O(-2, 1)$.

§ 2.4. Скалярное произведение векторов

Определение 2.4.1. *Скалярным произведением двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (2.4.1)$$

Если один из векторов нулевой, то угол $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не определен, и полагаем по определению $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Скалярное произведение векторов — это число (скаляр). Оно возникло в механике, когда, зная перемещение \vec{S} точки и действующую на неё силу \vec{F} , вычисляют работу этой силы

$$A = FS \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} тесно связано с проекцией одного из этих векторов на ось, определяемую другим вектором. По формуле (2.3.1) (стр. 102) имеем $\text{пр}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. Отсюда и из равенства (2.4.1) получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{пр}_a \mathbf{b}. \quad (2.4.2)$$

Меняя в этом равенстве \mathbf{a} и \mathbf{b} местами, получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{пр}_b \mathbf{a}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует полезная в дальнейшем формула

$$\text{пр}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \quad (2.4.3)$$

2.4.1. Геометрические свойства скалярного произведения

Свойство 2.4.1. *Два вектора ортогональны (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е.*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нулевой вектор не имеет направления и, значит, его можно считать ортогональным любому вектору. Если скалярно перемножаются два ненулевых вектора, то произведение (2.4.1) равно нулю тогда и только тогда, когда $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$, т.е. $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{2}$ и векторы ортогональны. Свойство доказано.

Свойство 2.4.2.

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \text{ — острый} &\iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0, \\ (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \text{ — тупой} &\iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0. \end{aligned}$$

Доказательство следует из определения 2.4.1 скалярного произведения, свойств косинуса и определения (рис. 2.19) угла между двумя векторами.

Свойство 2.4.3.

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}. \quad (2.4.4)$$

Свойство 2.4.4.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (2.4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}}) = 0$ и, значит, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. Отсюда получаем требуемое.

2.4.2. Алгебраические свойства скалярного произведения

Скалярное умножение подчиняется законам умножения чисел.

1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ — коммутативность;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ — дистрибутивность;

3) $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ — ассоциативность по отношению к числовому множителю.

Коммутативность непосредственно следует из определения 2.4.1 скалярного произведения, так как $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \widehat{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$. Для доказательства дистрибутивности и ассоциативности воспользуемся свойствами проекций вектора и формулой (2.4.4):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| \text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|(\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = \\ &= |\mathbf{c}| \text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}| \text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{b}| \text{пр}_{\mathbf{b}}(\alpha \mathbf{a}) = |\mathbf{b}| \text{пр}_{\mathbf{b}}(\alpha \mathbf{a}) = |\mathbf{b}| \alpha \text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \\ &= \alpha (|\mathbf{b}| \text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.4.1. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = \frac{1}{3}$, $|\mathbf{q}| = 2$ и $\widehat{(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{\pi}{3}$.

РЕШЕНИЕ. Используя алгебраические свойства скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) = 3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) - 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) = \\ &= 3\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + 12\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - 8\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 3|\mathbf{p}|^2 \cos 0 + 10|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \frac{\pi}{3} - \\ &\quad - |\mathbf{q}||\mathbf{q}| \cos 0 = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot 2^2 = -\frac{85}{3}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.4.2. Найти проекцию вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} для векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} из предыдущего примера.

РЕШЕНИЕ. Искомая проекция находится по формуле (2.4.3). Скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{85}{3}$. Найдем модуль вектора \mathbf{b} . По формуле (2.4.5) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}| &= \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{(\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + 4\mathbf{q})} = \\ &= \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + 8|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 16|\mathbf{q}|^2} = \frac{\sqrt{601}}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{85}{\sqrt{601}}$.

ПРИМЕР 2.4.3. Зная, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ и $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ окажутся перпендикулярными.

РЕШЕНИЕ. По свойству 2.4.1 скалярного произведения

$$\mathbf{p} \perp \mathbf{q} \iff \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 3\alpha|\mathbf{a}|^2 + (51 - \alpha) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 17 \cdot |\mathbf{b}|^2 = \\ &= 12\alpha + (51 - \alpha)2 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) - 17 \cdot 25 = 17\alpha - 17 \cdot 40. \end{aligned}$$

Значит, $\alpha = 40$.

2.4.3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах

Особенно просто скалярное произведение векторов вычисляется, если эти векторы разложены по декартову прямоугольному базису.

Теорема 2.4.1. Если

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x; a_y; a_z\};$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = \{b_x; b_y; b_z\};$$

то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.4.6)$$

т.е. скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Базисные векторы попарно ортогональны и имеют длины, равные единице, значит,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Используя алгебраические свойства скалярного умножения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ &+ a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для векторов на плоскости $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ формула (2.4.6), очевидно, принимает вид

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Из формул (2.4.5) и (2.4.6) получаем известную формулу для длины вектора

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

ПРИМЕР 2.4.4. Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ на вектор $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$.

РЕШЕНИЕ. Искомая проекция может быть найдена по формуле (2.4.3). Находим скалярное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \cdot 5 + 2 \cdot (-12) = 26,$$

и модуль вектора \mathbf{b}

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13.$$

$$\text{Отсюда, пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = 2.$$

ПРИМЕР 2.4.5. Даны вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$. Определить угол при вершине B .

РЕШЕНИЕ. По формуле 2.4.3 имеем

$$\cos \widehat{B} = \cos(\widehat{BA}, \widehat{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|}.$$

Но $\overline{BA} = \{3, 0, 4\}$, $\overline{BC} = \{7, 0, 1\}$, значит, $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 25$, $|\overline{BA}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$. Таким образом, $\cos \widehat{B} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Отсюда $\widehat{B} = 45^\circ$.

§ 2.5. Векторное произведение двух векторов

2.5.1. Определение векторного произведения

Наряду с умножением двух векторов, приводящим к скаляру, рассмотрим еще один тип умножения, в результате которого получается вектор.

Определение 2.5.1. Векторным произведением вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , удовлетворяющий трем условиям:

1) вектор \mathbf{c} перпендикулярен плоскости параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , т. е. ортогонален векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} : $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

2) длина вектора \mathbf{c} равна площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , т. е.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}); \quad (2.5.1)$$

3) векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , взятые в указанном порядке, образуют правую тройку (рис. 2.27).

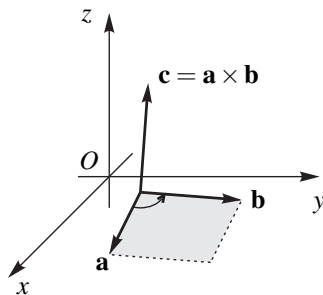


Рис. 2.27

Последнее условие означает, что вектор \mathbf{c} можно получить из первого вектора \mathbf{a} и второго вектора \mathbf{b} по известному в физике правилу «буравчика». А можно и так: если смотреть из конца третьего вектора \mathbf{c} , то поворот от первого вектора \mathbf{a} ко второму вектору \mathbf{b} происходит против часовой стрелки. Если этот поворот происходит по часовой стрелке, то такая тройка векторов называется левой.

Векторное произведение обозначим $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Еще раз подчеркнем: векторное произведение — это вектор.

Свойство 2.5.1. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (2.5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны, то $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$ и, значит, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$. Отсюда и само произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Достаточность. Если $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, то отсюда $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$ и угол $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ равен либо нулю, либо π , т. е. векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Если один из сомножителей — нулевой вектор, то он не имеет направления и, как это уже было отмечено ранее, его можно считать коллинеарным любому вектору. Свойство доказано.

Следствие 2.5.1. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Свойство 2.5.2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, т.е. при перемене мест сомножителей \mathbf{a} и \mathbf{b} векторное произведение меняет знак. Это свойство называют свойством антикоммутативности векторного произведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны, то в силу (2.5.2) $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$ и свойство 2.5.2 выполняется.

Пусть векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, тогда векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 , во-первых, имеют одинаковую длину и, во-вторых, коллинеарны (в силу определения векторного произведения). Значит, либо $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$, либо $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$. Но равенство $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ невозможно, так как тройки векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1)$ и $(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1)$ не могут быть обе правыми (ввиду правила «буравчика»). Свойство доказано.

Свойство 2.5.3.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (2.5.3)$$

Свойство 2.5.4.

$$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) \quad (2.5.4)$$

Доказательства свойств 2.5.3 и 2.5.4 сравнительно громоздки и их можно найти, например, в [3].

ПРИМЕР 2.5.1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$ и $\widehat{(\mathbf{m}, \mathbf{n})} = \frac{\pi}{6}$.

РЕШЕНИЕ. По определению 2.5.1 искомая площадь равна модулю векторного произведения $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ находим, используя свойства 2.5.1–2.5.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) \times (\mathbf{m} - 3\mathbf{n}) = \mathbf{m} \times \mathbf{m} + 2\mathbf{n} \times \mathbf{m} + \mathbf{m} \times (-3\mathbf{n}) + \\ &+ 2\mathbf{n} \times (-3\mathbf{n}) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{m} - 3\mathbf{m} \times \mathbf{n} = 2\mathbf{n} \times \mathbf{m} + 3\mathbf{n} \times \mathbf{m} = 5\mathbf{n} \times \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Значит,

$$S = 5|\mathbf{n} \times \mathbf{m}| = 5|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\sin \widehat{(\mathbf{m}, \mathbf{n})} = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 37,5.$$

2.5.2. Выражение векторного произведения в декартовых координатах

Теорема 2.5.1. Если

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \quad (2.5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Составим из базисных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} все возможные пары и для каждой пары вычислим векторное произведение. При этом учтем, что базисные векторы попарно ортогональны, имеют единичную длину и образуют правую тройку.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}; \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}; \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Применяя свойства векторного произведения 2.5.1–2.5.4 и формулы (2.5.6), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= a_x b_y \mathbf{k} - a_x b_z \mathbf{j} - a_y b_x \mathbf{k} + a_y b_z \mathbf{i} + a_z b_x \mathbf{j} - a_z b_y \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены (при одинаковых векторах), получаем требуемую формулу (2.5.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.1. Для запоминания формулу (2.5.5) удобно записать, используя символ определителя

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.5.7)$$

Раскрывая этот определитель либо по первой строке, либо по «правилу треугольника», получим разложение (2.5.5).

ПРИМЕР 2.5.2. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a} = \{2, -1, 3\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 0, -2\}$.

РЕШЕНИЕ. Раскрывая определитель (2.5.7) по первой строке, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \\ &+ \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.5.3. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(5, 2, 6)$, $B(1, 2, 0)$ и $C(3, 0, -3)$.

РЕШЕНИЕ. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} , приложенных к точке A . Значит, $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Находим векторы $\overline{AB} = \{-4, 0, -6\}$ и $\overline{AC} = \{-2, -2, -9\}$. Далее

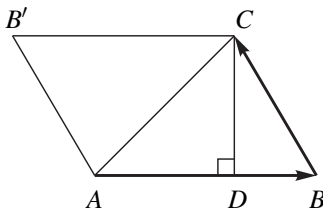
$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & -6 \\ -2 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = 4(-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Отсюда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|4(-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = 2\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 14.$$

ПРИМЕР 2.5.4. Зная две стороны треугольника $\overline{AB} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ и $\overline{BC} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, вычислить длину его высоты CD .

РЕШЕНИЕ. Очевидно, высота треугольника ABC равна высоте параллелограмма $ABCB'$. Из геометрии известно, что площадь параллелограмма $S = |\overline{AB}| |\overline{CD}|$. Из определения векторного произведения эта же площадь $S = |\overline{BA} \times \overline{BC}|$.



Отсюда получаем, что

$$|\overline{CD}| = \frac{|\overline{BA} \times \overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Но $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Векторы \overline{AB} и \overline{BC} расположены на плоскости Oxy , значит, их проекции на ось Oz равны нулю. По формуле (2.5.6) получаем

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -19\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\overline{BA} \times \overline{BC}| = |-19\mathbf{k}| = 19|\mathbf{k}| = 19$.

Таким образом, искомая высота равна $|\overline{CD}| = \frac{19}{5}$.

§ 2.6. Смешанное произведение векторов

2.6.1. Определение смешанного произведения и его геометрический смысл

Определение 2.6.1. Если векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} умножить скалярно на третий вектор \mathbf{c} , то такое произведение трёх векторов называется смешанным (или векторно-скалярным) произведением и обозначается $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Смешанное произведение имеет простой геометрический смысл, как показывает следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , взятому со знаком плюс, если тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ правая, и со знаком минус, если тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ левая. Если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} компланарны, то смешанное произведение равно нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три случая.

1. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Тогда по теореме 2.2.1 (стр. 92) они линейно зависимы. Отсюда следует, что три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} также линейно зависимы и по теореме 2.2.3 (стр. 93) они компланарны. В этом случае объем параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} равен нулю. Нам надо доказать, что и смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. Но это очевидно, так как по формуле (2.5.2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ и, значит, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

2. Векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарны и векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны. Объем параллелепипеда по-прежнему равен нулю. Покажем, что равно нулю и смешанное произведение. Вектор $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярен плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , а значит, и вектору \mathbf{c} . Таким образом, $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{c}$. Следовательно скалярное произведение $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$, то есть $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

3. Векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} не компланарны и образуют правую тройку (рис. 2.28).

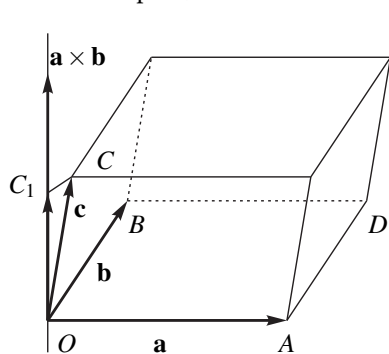


Рис. 2.28

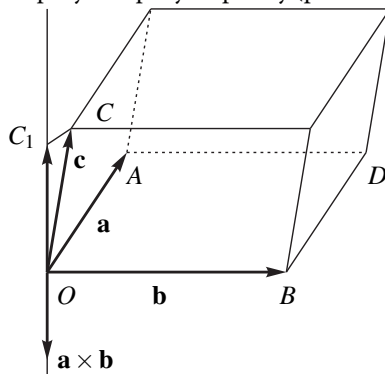


Рис. 2.29

Векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ это вектор, перпендикулярный основанию $OADB$ параллелепипеда. Значит, высота параллелепипеда равна $h = OC_1$ — проекции вектора \overline{OC} на вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Используя выражение скалярного произведения через проекцию, получим

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \text{пр}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| OC_1 = S_{OADB} OC_1 = V.$$

Если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образуют левую тройку (рис. 2.29), то векторы $\overline{OC_1}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ противоположно направлены и $\text{pr}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{c}$ отрицательна.

Отсюда $\text{pr}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{c} = -h$. Следовательно, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -V$. Теорема доказана.

Следствие 2.6.1. *Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов*

$$V_{\text{пар}} = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Следствие 2.6.2. *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Отсюда получаем: *смешанное произведение произведение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} не равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы не компланарны, а, значит, линейно независимы.*

Если две тройки векторов либо обе правые, либо обе левые, то говорят, что эти тройки имеют одинаковую ориентацию. Если одна тройка правая, а другая левая, то говорят, что эти тройки имеют противоположную ориентацию.

Из трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} можно составить следующие шесть троек

$$\mathbf{abc}; \quad \mathbf{cab}; \quad \mathbf{bca}; \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{bac}; \quad \mathbf{cba}; \quad \mathbf{acb}. \quad (2.6.2)$$

Легко показать, что все тройки (2.6.1) имеют ту же ориентацию, что и тройка \mathbf{abc} , а все тройки (2.6.2) имеют ориентацию противоположную ориентации тройки \mathbf{abc} .

Теорема 2.6.2. *Справедливо равенство*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (2.6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутативности скалярного произведения $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$. Надо доказать, что $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$. С точностью до знака это равенство очевидно, так как и правая и левая его части (с точностью до знака) равны объёму параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} (или равны нулю, если эти векторы компланарны). Но и знаки правой и левой частей доказываемого равенства также совпадают, так как обе тройки \mathbf{abc} и \mathbf{bca} относятся к одной группе троек 2.6.1, т. е. имеют одинаковую ориентацию. Теорема доказана.

Равенство (2.6.3) позволяет записывать смешанное произведение в виде $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{abc}$, не указывая, какие именно два вектора (первые два или последние два) перемножаются векторно.

2.6.2. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

Пусть векторы заданы разложениями по декартовому базису

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}; \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}; \mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}.$$

По формулам (2.5.7) (стр. 115) и (2.4.6) (стр. 111) получаем, используя определители

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{i} \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) = \\ &= \left(a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, получили формулу для вычисления смешанного произведения в декартовых координатах:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.6.4)$$

Следствие 2.6.3. Векторы компланарны тогда и только тогда, когда равен нулю определитель, составленный из координат этих векторов, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР 2.6.1. Показать, что векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ образуют базис.

РЕШЕНИЕ. Три вектора образуют базис в пространстве, если они некопланарны, т. е. смешанное произведение этих векторов не равно нулю.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -52 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образуют базис.

ПРИМЕР 2.6.2. Показать, что четыре точки $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(0, 1, 5)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

РЕШЕНИЕ. Эти точки лежат в одной плоскости, если векторы \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{AD} лежат в этой плоскости, т. е. компланарны. Находим эти векторы $\overline{AB} = \{2, 0, -2\}$, $\overline{AC} = \{1, -1, 4\}$ и $\overline{AD} = \{3, -1, 2\}$. Их смешанное произведение

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Смешанное произведение равно нулю, значит, векторы компланарны, а точки лежат в одной плоскости.

ПРИМЕР 2.6.3. Даны вершины пирамиды $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-5, 0, 5)$ и $D(0, 5, 1)$. Найти длину ее высоты, опущенной из вершины D .

РЕШЕНИЕ. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{AD} , как на смежных ребрах. Из геометрии известно, что объем параллелепипеда равен произведению площади основания параллелепипеда на его высоту: $V = SH$.

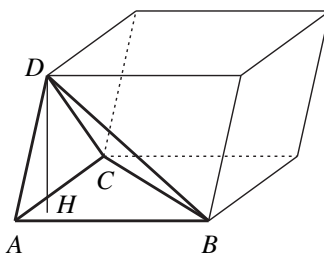


Рис. 2.30

С другой стороны, его объем равен модулю смешанного произведения векторов \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{AD} , а площадь основания — модулю векторного произведения векторов \overline{AB} и \overline{AC} .

Отсюда $|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| = |\overline{AB} \times \overline{AC}| \cdot H$, или

$$H = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}.$$

Находим векторы

$$\overline{AB} = \{3, 1, -2\}, \quad \overline{AC} = \{-4, 0, 3\}, \quad \overline{AD} = \{1, 5, -1\}.$$

Вычисляем векторное произведение и его модуль

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}; \quad |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{26}.$$

Для вычисления смешанного произведения нет необходимости вычислять еще один определитель, проще найденное векторное произведение скалярно умножить на вектор \overline{AD}

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -6.$$

Таким образом,

$$H = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{26}}.$$

Глава 3.

Аналитическая геометрия

§ 3.1. Уравнение линии на плоскости.

Полярная система координат.

**Уравнение поверхности и линии
в пространстве**

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Если указано правило, по которому каждой точке $M(x, y)$ плоскости (или какой-нибудь части плоскости) сопоставляется некоторое число z , то говорят, что на плоскости (или на части плоскости) задана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

Предположим, что на плоскости задана линия L . Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением линии L* (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L , и не удовлетворяют координаты x и y любой точки, не лежащей на линии L .

Саму линию L называют *геометрическим местом точек*, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

В дальнейшем вместо выражения «дано уравнение линии $F(x, y) = 0$ » кратко будем говорить: «дана линия $F(x, y) = 0$ ».

Для аналитического представления линии L часто бывает удобно выражать координаты x и y точек этой линии при помощи третьей вспомогательной переменной (или параметра) t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Если из этих равенств можно исключить параметр t , то получим уравнение

линии в виде $F(x, y) = 0$. Например, уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

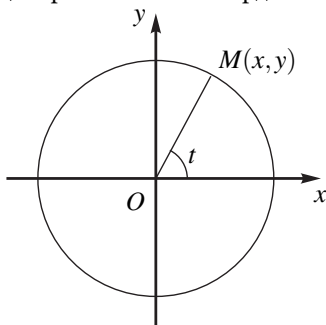


Рис. 3.1

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка на этой окружности (рис. 3.1). Если ввести параметр t — угол между радиус-вектором \overline{OM} и положительной полуосью Ox , то параметрические уравнения окружности имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Параметр t может принимать любые значения, но для того чтобы точка M один раз обошла окружность, следует ограничить область изменения параметра t : $0 \leq t < 2\pi$. Отметим, что для исключения параметра t из уравнений $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ достаточно возвести в квадрат и сложить эти уравнения

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

Получили уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$.

Вид уравнения линии зависит не только от вида самой линии, но и от выбора системы координат. Уравнение линии меняется как при переходе от одной декартовой системы координат к другой, так и при переходе от декартовых к каким-нибудь другим координатам, в отличие от изображения линии.

3.1.1. Полярная система координат

В математике и ее приложениях часто применяется *полярная система координат*.

Полярная система координат определяется заданием:

- 1) некоторой точки O , называемой *полюсом*,
- 2) луча OA , исходящего из этой точки, называемого *полярной осью* и
- 3) *масштаба* (единицы длины) на этой оси.

Полярными координатами точки M называются два числа $\rho = OM$ — расстояние от точки M до полюса O и $\varphi = \widehat{AOM}$ (рис.3.2). Число ρ называется *полярным радиусом*, число φ — *полярным углом* точки M . Угол φ при этом следует

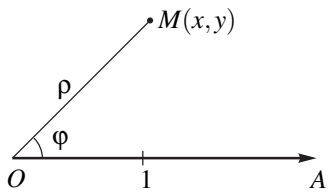


Рис. 3.2

понимать так, как принято в тригонометрии: углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, считаются положительными, а углы, отсчитываемые по часовой стрелке — отрицательными. Полярный угол φ имеет бесконечно много возможных значений для заданной точки M (они отличаются друг от друга на полные обороты $\pm 2\pi n$, где n — натуральное число).

Точку M с полярными координатами ρ и φ обозначают $M(\rho, \varphi)$. Для точки M , совпадающей с полюсом, полярный угол не определён, полярный радиус полюса равен нулю.

Для того чтобы соответствие между точками плоскости, отличными от полюса, и парами чисел (ρ, φ) было взаимно однозначным, обычно принимают, что ρ и φ изменяются в следующих границах:

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

В случае одновременного рассмотрения декартовой и полярной систем координат обычно полюс совмещают с началом декартовой системы координат, а полярную ось — с положительной полуосью абсцисс (рис. 3.3). Пусть точка M имеет декартовы координаты x и y и полярные координаты ρ и φ .

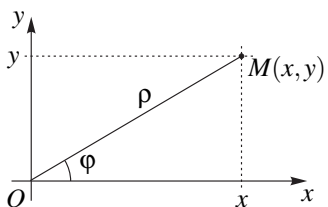


Рис. 3.3

Очевидно,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Если уравнение линии L в декартовой системе координат имеет вид $F(x, y) = 0$, то для получения уравнения этой линии в полярной системе координат достаточно заменить x и y по формулам (3.1.1). Например, уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярной системе имеет вид $(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = R^2$ или $\rho = R$, что, впрочем, очевидно и без вычислений.

Из рис. 3.3 видно, что

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (3.1.2)$$

По этим формулам можно перейти от полярного уравнения линии к её декартовому уравнению. Пусть, например, линия в полярной системе

координат имеет вид $\rho = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$. Отсюда $\rho + \rho \sin \varphi = 1$, или $\sqrt{x^2 + y^2} + y = 1$.

1. Переносим y вправо, возведя в квадрат и упростив, получим $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. Это — парабола.

3.1.2. Уравнение поверхности в пространстве.

Цилиндрические поверхности

Пусть задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве и некоторая поверхность S . Говорят, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ является уравнением поверхности S , если координаты любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на поверхности S , удовлетворяют этому уравнению и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной поверхности.

Пусть, например, S — сфера радиуса R с центром в точке $M_0(a, b, c)$. Все точки сферы одинаково удалены от центра, значит, произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на сфере S тогда и только тогда, когда $|M_0M| = R$. Отсюда $|M_0M|^2 = R^2$ и, значит, уравнение такой сферы имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Отметим, что в уравнении поверхности $F(x, y, z) = 0$ не обязательно присутствуют все три переменные x , y и z ; требуется лишь, чтобы координаты точек поверхности обращали уравнение поверхности в верное числовое равенство. Рассмотрим, например, уравнение $F(x, y) = 0$ и пусть оно определяет кривую L на плоскости Oxy .

Если $M_0(x_0, y_0)$ — точка на этой кривой, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$, то все точки $M(x_0, y_0, z)$, где z — произвольно, также удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Но точки $M(x_0, y_0, z)$ с двумя фиксированными первыми координатами, очевидно, лежат на прямой, проходящей через $M_0(x_0, y_0)$ параллельно оси Oz (рис. 3.4).

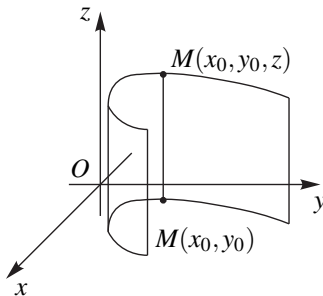


Рис. 3.4

Следовательно, поверхность заданная уравнением $F(x, y) = 0$ может быть получена движением прямой, параллельной оси Oz , вдоль кривой L . Аналогично выглядят поверхности, заданные уравнениями $F(x, z) = 0$ и $F(y, z) = 0$.

Такие поверхности называются *цилиндрическими* и кривая L называется *направляющей цилиндра*.

3.1.3. Уравнение линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ уравнения этих поверхностей, то системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

должны удовлетворять точки, лежащие как на одной, так и на другой поверхности, т. е. точки, лежащие на линии L их пересечения.

Как и для случая плоской линии, возможно параметрическое задание линии L в пространстве. При этом координаты x , y и z любой точки линии L задаются как функции некоторого параметра t

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Например, уравнения $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{a}{2\pi}t$ задают *винтовую линию*, лежащую на цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ и имеющую *шаг винта*, равный a . Рекомендуем читателю построить эту линию.

§ 3.2. Прямая на плоскости

3.2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Касательная и нормаль к кривой

Из школьного курса математики известно уравнение прямой, разрешенное относительно ординаты y

$$y = kx + b. \quad (3.2.1)$$

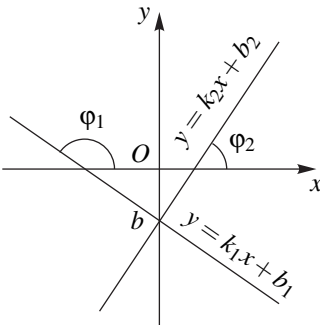


Рис. 3.5

Параметр k характеризует направление прямой и называется *угловым коэффициентом*. В случае прямоугольной декартовой системы координат угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox . Свободный член b в уравнении (3.2.1) равен величине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, считая от начала координат (рис. 3.5).

Используя свойства тангенса, получаем, что две прямые, заданные уравнениями $L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$:

- 1) параллельны, если их угловые коэффициенты равны, т. е. $k_1 = k_2$;
- 2) перпендикулярны, если $1 + k_1k_2 = 0$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

В самом деле, докажем, например, утверждение 2. Если $L_1 \perp L_2$, то $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая угловой коэффициент k , изображается уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.2.2)$$

Действительно, так как прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3.2.1): $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая это равенство из уравнения (3.2.1), получим уравнение (3.2.2).

Уравнение (3.2.2) удобно использовать для получения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на кривой (рис. 3.6).

Из геометрического смысла производной $f'(x_0)$ — это именно тангенс угла наклона касательной в точке M_0 . Отсюда получаем уравнение касательной:

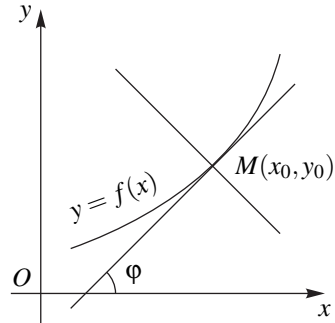


Рис. 3.6

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.2.3)$$

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно касательной. Если $k = f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной, то угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.2.4)$$

3.2.2. Общее и каноническое уравнения прямой

Если прямая перпендикулярна оси Ox , то её невозможно задать уравнением $y = kx + b$, так как $\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует. Такие прямые задаются

уравнением $x = a$, где a — константа. Но при решении задачи зачастую (например, найти уравнение высоты в некотором треугольнике с заданными вершинами) заранее не известен угол наклона прямой к оси Ox и мы будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$, тогда как такого уравнения в данном случае может не существовать.

Как можно задать прямую на плоскости? Прямая L однозначно определяется заданием какой-либо точки $M_0(x_0, y_0)$, через которую она проходит, и направлением. Направление можно задать вектором, который:

- А) перпендикулярен данной прямой (рис.36);
- В) параллелен данной прямой (рис.37).

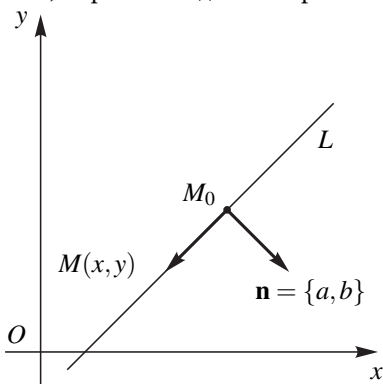


Рис. 3.7

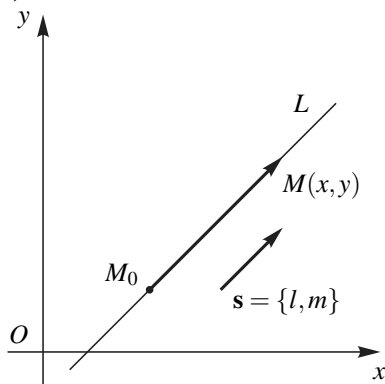


Рис. 3.8

Получим уравнения прямых в каждом из этих случаев.

А. *Общее уравнение прямой на плоскости.*

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на плоскости. Очевидно, что $M \in L$ тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \perp \mathbf{n}$. Используя условие ортогональности двух векторов (равенство нулю их скалярного произведения), будем иметь $\overline{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$. Но $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\mathbf{n} = \{a, b\}$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (3.2.5)$$

Вектор $\mathbf{n} = \{a, b\}$ называется *нормальным вектором* или *вектором нормали* к прямой. Уравнение (3.2.5) — это уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным вектором нормали.

Раскрывая в уравнении (3.2.5) скобки и обозначая

$$-ax_0 - by_0 = c,$$

это уравнение можно записать в виде

$$ax + by + c = 0. \quad (3.2.6)$$

Уравнение (3.2.6) называется *общим уравнением прямой*.

При решении задач просто необходимо помнить, что в общем уравнении прямой коэффициенты при переменных x и y задают вектор нормали, т. е. вектор, перпендикулярный этой прямой. Например, если прямая задана уравнением $2x - 3y = 4$, то вектор $\mathbf{n} = \{2, -3\}$ перпендикулярен данной прямой.

ПРИМЕР 3.2.1. Даны вершины треугольника $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ и $C(-3, -2)$. Написать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .

РЕШЕНИЕ. Высота перпендикулярна в основанию. Значит нормалью к искомой прямой может служить вектор $\overline{BC} = \{-4, -5\}$. Используя уравнение (3.2.5), получаем

$$-4(x + 2) - 5(y - 1) = 0.$$

Упрощая, получаем уравнение высоты

$$4x + 5y + 3 = 0.$$

ПРИМЕР 3.2.2. При каком значении параметра a прямые $3ax - 8y + 13 = 0$ и $(a + 1)x - 2ay - 21 = 0$ параллельны?

РЕШЕНИЕ. Прямые параллельны, если их нормали $\mathbf{n}_1 = \{3a, -8\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{a + 1, -2a\}$ параллельны. Используя условие (2.2.7) коллинеарности двух векторов, получаем

$$\frac{3a}{a + 1} = \frac{-8}{-2a}.$$

Отсюда $3a^2 - 4a - 4 = 0$. Решая это уравнение, получим $a_1 = 2$ и $a_2 = -\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 3.2.3. При каком значении параметра a прямые $(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$ будут перпендикулярны друг другу?

РЕШЕНИЕ. Прямые перпендикулярны, если их нормали $\mathbf{n}_1 = \{3a + 2, 1 - 4a\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{2, -3\}$ будут также перпендикулярны, значит, скалярное произведение $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. Отсюда

$$2(3a + 2) - 3(1 - 4a) = 0 \quad \text{или} \quad a = -\frac{1}{6}.$$

В. Каноническое уравнение прямой на плоскости.

Получим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s} = \{l, m\}$ (рис. 3.8). Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на плоскости. Очевидно, что точка $M \in L$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и \mathbf{s} коллинеарны. Используя условие (2.2.7) коллинеарности двух векторов, будем иметь

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (3.2.7)$$

Уравнение (3.2.7) называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*. Вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$ называется *направляющим вектором* прямой.

Итак, в каноническое уравнение прямой входят координаты вектора ей параллельного (направляющего вектора прямой). Например, если прямая задана уравнением $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4}$, то эта прямая проходит через точку $M_0(1, -3)$ параллельно вектору $\mathbf{s} = \{2, -4\}$.

Заметим, что в уравнении (3.2.7) один из знаменателей l или m может оказаться равным нулю (оба эти числа быть равными нулю не могут, так как вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$ ненулевой). Договоримся всякую пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ понимать как равенство $ad = bc$. Иначе говоря, равенство нулю знаменателя — это обращение в нуль соответствующего числителя (рис. 3.9).

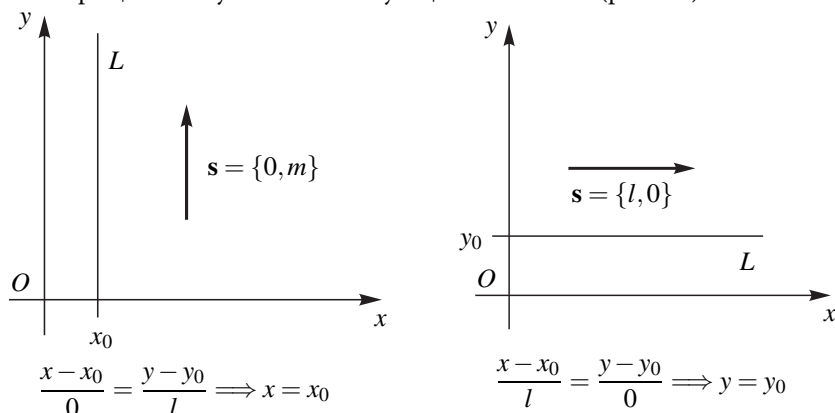


Рис. 3.9

При решении задач следует помнить, что если уравнение прямой записано в канонической форме (3.2.7), то числа, стоящие в знаменателях, задают направляющий вектор прямой.

ПРИМЕР 3.2.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, -2)$ перпендикулярно прямой $4x - 5y + 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Направляющим вектором искомой прямой может служить вектор нормали $\mathbf{n} = \{4, -5\}$ данной прямой: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-5}$ — искомое уравнение.

3.2.3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Параметрические уравнения прямой

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и требуется составить уравнение прямой, проходящей через них.

В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Используя (3.2.7), получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.2.8)$$

Это — уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Параметрические уравнения прямой легко получаются из канонического уравнения (3.2.7), если приравнять обе дроби в этом уравнении к параметру t :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Если параметр t изменять от $-\infty$ до $+\infty$, то найденная из системы (3.2.9) пара чисел (x, y) будет определять точку $M(x, y)$, пробегающую всю прямую.

ПРИМЕР 3.2.5. В треугольнике с вершинами $A_1(-1, 2)$, $A_2(2, 6)$ и $A_3(4, -10)$ составить уравнения медианы A_1M , высоты A_1H и биссектрисы A_1B .

РЕШЕНИЕ. 1) A_1M — медиана, значит, точка M делит отрезок A_2A_3 пополам. По формулам (2.3.13) имеем $x_M = \frac{2+4}{2} = 3$, $y_M = \frac{6-10}{2} = -2$. Итак, точка $M(3, -2)$ найдена. Используя (3.2.8), запишем уравнение медианы A_1M : $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-2-2}$. Отсюда, упрощая, $x+y-1=0$ — искомое уравнение медианы.

2) Высота A_1H перпендикулярна основанию A_2A_3 , значит, нормальным вектором к этой высоте может служить вектор $\overline{A_2A_3} = \{2, -16\}$. Используя (3.2.5), получаем $2(x+1) - 16(y-2) = 0$. Отсюда $x - 8y + 17 = 0$ — уравнение искомой высоты.

3) Для нахождения уравнения биссектрисы A_1B достаточно найти направляющий вектор этой прямой, в качестве которого можно взять $\mathbf{s} = \frac{\overline{A_1A_2}^\circ}{|A_1A_2|} + \frac{\overline{A_1A_3}^\circ}{|A_1A_3|}$ (см. пример 2.1.4), где $\overline{A_1A_2}^\circ = \frac{\overline{A_1A_2}}{|A_1A_2|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}^\circ = \frac{\overline{A_1A_3}}{|A_1A_3|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_3}$.

Найдем эти орты:

$$\overline{A_1A_2} = \{3, 4\}, \quad |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \overline{A_1A_2^o} = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\};$$

$$\overline{A_1A_3} = \{5, -12\}, \quad |\overline{A_1A_3}| = 13, \quad \overline{A_1A_3^o} = \left\{ \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\}.$$

Следовательно, направляющий вектор биссектрисы равен

$$\mathbf{s} = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\} + \left\{ \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\} = \left\{ \frac{64}{65}, -\frac{8}{65} \right\}.$$

Заметим, впрочем, что длина направляющего вектора не имеет значения, поэтому можно взять вектор $\mathbf{s}_1 = \frac{65}{8}\mathbf{s} = \{8, -1\}$ в качестве направляющего. Но это лишь упрощение промежуточных вычислений и не более того. Используя формулу (3.2.7), получаем уравнение искомой биссектрисы A_1B : $\frac{x+1}{8} = \frac{y-2}{-1}$. Или $x + 8y - 15 = 0$.

ПРИМЕР 3.2.6. Найти расстояние точки $A(4, -2)$ от прямой $8x - 15y - 11 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данной прямой (см. пример 3.2.4): $\frac{x-4}{8} = \frac{y+2}{-15}$ или $15x + 8y - 44 = 0$. Решая совместно уравнения обеих прямых,

$$\begin{cases} 8x - 15y - 11 = 0, \\ 15x + 8y - 44 = 0. \end{cases}$$

находим точку $B\left(\frac{44}{17}, \frac{11}{17}\right)$ их пересечения.

Расстояние от точки A до прямой находим по формуле (2.3.10)

$$d = AB = \sqrt{\left(4 - \frac{44}{17}\right)^2 + \left(-2 - \frac{11}{17}\right)^2} = 3.$$

Отметим, что эту задачу можно решать векторным способом. Для этого берем на прямой две произвольные точки M_1 и M_2 (рис. 3.10). Их можно найти, если в уравнении прямой $8x - 15y - 11 = 0$ придать переменной y два различных значения и получить соответствующие значения переменной x .

И тогда искомое расстояние равно высоте AB в треугольнике AM_1M_2 . Следовательно (см. пример 2.5.4),

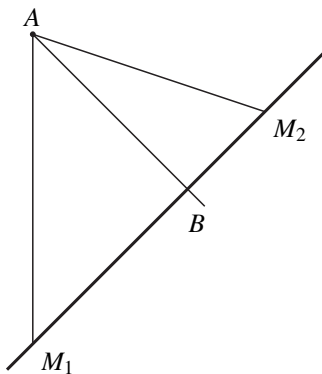


Рис. 3.10

$$AB = \frac{|\overline{AM_1} \times \overline{AM_2}|}{|M_1M_2|}.$$

Наконец, нетрудно доказать, что расстояние точки $A(x_0, y_0)$ от прямой $ax + by + c = 0$ может быть найдено по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.2.10)$$

По этой формуле решение получается совсем коротким. Но вопрос: стоит ли искать или запоминать лишнюю формулу для решения весьма частной задачи? Во многих учебниках кроме выведенных нами уравнений прямой (с угловым коэффициентом, общего, канонического, параметрических, через две точки), приводятся и другие уравнения (в отрезках, нормальное, пучка прямых), которые позволяют существенно упростить решение конкретных задач. Но мы вопросы оптимальности оставим в стороне.

3.2.4. Угол между двумя прямыми.

Условие перпендикулярности и параллельности прямых

Пусть даны две прямые $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Очевидно, что угол между прямыми совпадает с углом между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1 = \{a_1, b_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{a_2, b_2\}$. Следовательно, используя формулу для вычисления скалярного произведения в декартовых координатах, получаем

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{L_1, L_2}) &= \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Прямые перпендикулярны, если $\widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \frac{\pi}{2}$ т. е. $\cos \widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = 0$. Отсюда получаем условие перпендикулярности двух прямых

$$L_1 \perp L_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \quad (3.2.12)$$

Прямые параллельны, если их нормали коллинеарны. Отсюда получаем условие параллельности прямых

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (3.2.13)$$

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}.$$

Угол между этими прямыми, очевидно, совпадает с углом между направляющими векторами $\mathbf{s}_1 = \{l_1, m_1\}$ и $\mathbf{s}_2 = \{l_2, m_2\}$. Значит, угол между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями, находится по формуле

$$\begin{aligned} \cos \widehat{(L_1, L_2)} &= \cos \widehat{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)} = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|} = \\ &= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Условие перпендикулярности прямых

$$L_1 \perp L_2 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \quad (3.2.15)$$

Условие параллельности прямых

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (3.2.16)$$

В заключение еще раз заметим, что применение методов векторной алгебры эффективно при решении задач о прямых на плоскости. При этом обязательно следует помнить, что в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ вектор $\mathbf{n} = \{a, b\}$ это вектор нормали к прямой, а в каноническом уравнении $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$ вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$ — это направляющий вектор прямой. И тогда нет никакой необходимости запоминать множество приведенных выше формул; все они (как и большинство векторных соотношений в механике, физике, технических дисциплинах) это последовательное и сознательное применение свойств векторных операций.

§ 3.3. Плоскость

3.3.1. Общее уравнение плоскости

Плоскость P однозначно определяется заданием какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую она проходит и вектором $\mathbf{n} = \{A, B, C\} \neq \mathbf{0}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 3.11). Вектор \mathbf{n} называется *вектором нормали* (или *нормальным вектором*) к плоскости.

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ в пространстве. Очевидно, что точка M лежит на плоскости P тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} \perp \mathbf{n}$, т. е. скалярное произведение $\overline{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Так как $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, то предыдущее равенство равносильно уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.3.1)$$

Это уравнение определяет плоскость P , проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярную вектору $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Раскрывая в уравнении (3.3.1) скобки и обозначая

$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$$

получаем

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.3.2)$$

Уравнение (3.3.2) называется *общим уравнением плоскости*.

Итак, всякая плоскость задается в декартовой прямоугольной системе координат линейным уравнением (3.3.2). Легко показать и обратное: всякое линейное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задает некоторую плоскость.

В самом деле, пусть x_0, y_0, z_0 — какое-либо решение уравнения (3.3.2). Тогда, подставляя эти числа в уравнение, будем иметь $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычитая это равенство из уравнения (3.3.2), получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это означает, что вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ортогонален вектору $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$. Значит, все точки $M(x, y, z)$ плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору \mathbf{n} (и только они), удовлетворяют уравнению (3.3.2).

При решении задач важно помнить, что числа A, B и C , стоящие при переменных x, y и z — это координаты вектора нормали — вектора, перпендикулярного плоскости.

3.3.2. Неполные уравнения плоскости

Если в уравнении (3.3.2) отсутствует свободный член, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0, 0, 0)$ удовлетворяют этому уравнению.

Так как вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ ненулевой, то хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Пусть в уравнении (3.3.2) отсутствует член с одной из координат, например уравнение имеет вид $Ax + By + D = 0$. Нормальным вектором к такой плоскости будет вектор $\mathbf{n} = \{A, B, 0\}$. Он имеет проекцию

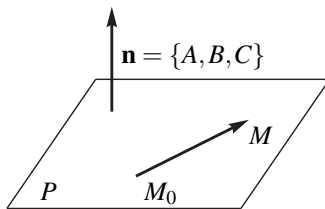


Рис. 3.11

на ось Oz , равную нулю, то есть ортогонален этой оси. А это означает, что сама плоскость параллельна этой оси. Аналогично, плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy и плоскость $Bu + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox . Впрочем, всё сказанное следует из п 3.1.3: уравнение $Ax + Bu + D = 0$ можно рассматривать как уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой является прямая $Ax + Bu + D = 0$.

Пусть в уравнении (3.3.2) отсутствуют члены с двумя координатами, например, уравнение имеет вид $Ax + D = 0$. Это означает, что вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ ортогонален как оси Oy , так и оси Oz , то есть ортогонален координатной плоскости Oyz . Следовательно, сама плоскость $Ax + D = 0$ параллельна этой координатной плоскости, т. е. перпендикулярна оси Ox . Уравнение этой плоскости можно записать в виде $x = -\frac{D}{A}$. Аналогично, плоскости $Bu + D = 0$ и $Cz + D = 0$ перпендикулярны осям Oy и Oz соответственно.

ПРИМЕР 3.3.1. Даны две точки $A(1, 3, -2)$ и $B(3, -5, 4)$. Через точку A провести плоскость, перпендикулярную отрезку AB .

РЕШЕНИЕ. В качестве нормали к искомой плоскости можно взять вектор $\mathbf{n} = \overline{AB} = \{2, -8, 6\}$. Используя уравнение (3.3.1), получаем $2(x - 1) - 8(y - 3) + 6(z + 2) = 0$, или $x - 4y + 3z + 17 = 0$ — искомая плоскость.

ПРИМЕР 3.3.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. В качестве вектора нормали к искомой плоскости можно взять вектор нормали $\mathbf{n} = \{1, -4, 5\}$ к данной плоскости. Значит, искомая плоскость имеет вид $1(x + 2) - 4(y - 7) + 5(z - 3) = 0$. Или $x - 4y + 5z + 15 = 0$.

ПРИМЕР 3.3.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(1, 1, 0)$, $B(3, 0, 5)$ и $C(4, 1, 2)$.

РЕШЕНИЕ. В качестве вектора нормали можно взять вектор $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ по свойству векторного произведения он ортогонален векторам \overline{AB} и \overline{AC} , а значит, и искомой плоскости.

$$\mathbf{n} = \{2, -1, 5\} \times \{3, 0, 2\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Из уравнения (3.3.1) получаем $-2(x - 1) + 11(y - 1) + 3(z - 0) = 0$. Или $2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

Заметим, что эту задачу можно решить иначе. Если взять точку $M(x, y, z)$ в пространстве, то, очевидно, эта точка будет лежать на искомой плоскости,

тогда и только тогда, когда векторы \overline{AM} , \overline{AB} и \overline{AC} компланарны, т. е. если их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \{x-1, y-1, z\} \cdot \{2, -1, 5\} \cdot \{3, 0, 2\} = \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Раскрывая этот определитель, получим уравнение искомой плоскости $2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

3.3.3. Угол между двумя плоскостями.

Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы две плоскости $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Очевидно, что угол между этими плоскостями совпадает с углом между их нормальными $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Отсюда

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.3.3)$$

Условие параллельности плоскостей

$$P_1 \parallel P_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.3.4)$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$P_1 \perp P_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.3.5)$$

§ 3.4. Прямая в пространстве

3.4.1. Канонические уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух плоскостей. Координаты точек, лежащих на прямой, должны удовлетворять уравнениям обеих плоскостей, т. е. удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Как и для прямой на плоскости любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Прямая L может быть определена точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ через которую она проходит и направляющим вектором $\mathbf{s} = \{l, m, n\}$. Очевидно, что произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ коллинеарен вектору \mathbf{s} . Используя условие коллинеарности векторов, получим

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.4.2)$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Двойное равенство (3.4.2) — иной способ записи системы (3.4.1)

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Каждое из уравнений этой системы является неполным уравнением плоскости — плоскости, параллельной соответствующей оси координат.

Например, уравнение $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ можно записать в виде $mx - ly + (-mx_0 + ly_0) = 0$ — это плоскость с нормалью $\mathbf{n} = \{m, -l, 0\}$ параллельна оси Oz . Таким образом, и канонические уравнения (3.4.2) задают прямую в пространстве, как линию пересечения двух плоскостей, но параллельных координатным осям.

Как и для канонического уравнения прямой на плоскости, в уравнениях (3.4.2) одно или два из чисел l , m и n могут быть равными нулю. Это лишь подчеркивает, что направляющий вектор (а значит, и сама прямая) перпендикулярен соответствующей оси координат и нужно приравнять к нулю числитель соответствующей дроби.

3.4.2. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и требуется написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Очевидно, что в качестве направляющего вектора такой прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и из формулы (3.4.2) получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.4.4)$$

Это — уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Многие задачи на прямую в пространстве решаются проще, если уравнения прямых имеют каноническую форму записи (3.4.2). Поэтому нужно уметь приводить уравнения прямой (3.4.1) к каноническому виду. Это можно сделать, например, следующим образом.

В системе (3.4.1) придать одной из переменных, например z , два различных значения $z = z_1$ и $z = z_2$. Из полученных двух систем найти соответствующие пары чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Получим две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой. По формуле (3.4.4) получим канонические уравнения прямой.

ПРИМЕР 3.4.1. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Для нахождения y и z имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x_1 + 4y - z - 7 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_2 - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x_2 + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим две точки $M_1(0, 2, 1)$ и $M_2(1, \frac{5}{11}, -\frac{2}{11})$. По формуле (3.4.4) получаем

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 2}{\frac{5}{11} - 2} = \frac{z - 1}{-\frac{2}{11} - 1}.$$

Упрощая, получаем канонические уравнения искомой прямой

$$\frac{x}{11} = \frac{y - 2}{-17} = \frac{z - 1}{-13}.$$

3.4.3. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Если в канонических уравнениях прямой (3.4.2) все три дроби приравнять к параметру t

$$\frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t, \quad \frac{z - z_0}{n} = t,$$

то получим

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Это *параметрические уравнения прямой в пространстве*. Если параметру t придавать значения от $-\infty$ до $+\infty$, то точки $M(x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$ будут пробегать всю прямую.

Параметрические уравнения прямой удобно использовать для нахождения точки пересечения прямой и плоскости.

ПРИМЕР 3.4.2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Перейдём к параметрическим уравнениям прямой $\frac{x-7}{5} = t$, $\frac{y-4}{1} = t$, $\frac{z-5}{4} = t$.

Отсюда $x = 7 + 5t$, $y = 4 + t$, $z = 5 + 4t$. При некотором значении параметра t точка этой прямой будет лежать на данной плоскости. Подставляя выражения x , y , z через параметр t в уравнение плоскости, получим $t = -1$. При этом значении параметра t находим координаты искомой точки: $x = 7 + 5(-1) = 2$, $y = 4 + (-1) = 3$, $z = 5 + 4(-1) = 1$. Итак, прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 3, 1)$.

3.4.4. Угол между двумя прямыми в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть заданы две прямые $L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. Очевидно, угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\mathbf{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{L_1, L_2}) &= \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|} = \\ &= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Условие параллельности двух прямых имеет вид

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.4.6)$$

Условие перпендикулярности двух прямых имеет вид

$$L_1 \perp L_2 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.4.7)$$

3.4.5. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной плоскости

В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, поэтому уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

ПРИМЕР 3.4.3. Найти точку B , симметричную точке $A(4, -3, 1)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Точки A и B должны лежать на одной прямой, перпендикулярной плоскости, и одинаково отстоять от этой плоскости. Найдём уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Найдём точку пересечения этой прямой и плоскости: $x = 4 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1 - t$ подставим в уравнение плоскости $(4 + t) + 2(-3 + 2t) - (1 - t) - 3 = 0$; отсюда $t = 1$. Значит, точка пересечения $C(5, -1, 0)$. Она делит отрезок AB пополам. Но координаты середины отрезка равны полусумме координат крайних точек. Значит,

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Отсюда

$$x_B = 2x_C - x_A = 6,$$

$$y_B = 2y_C - y_A = 1,$$

$$z_B = 2z_C - z_A = -1.$$

Симметричная точка $B(6, 1, -1)$ найдена.

3.4.6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой

Очевидно, нормальным вектором к искомой плоскости может служить направляющий вектор прямой $s = \{l, m, n\}$. Применяя формулу (3.3.1), получаем уравнение искомой плоскости

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

ПРИМЕР 3.4.4. Найти расстояние точки $A(7, 9, 7)$ от прямой

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой:

$$4(x-7) + 3(y-9) + 2(z-7) = 0$$

или

$$4x + 3y + 2z - 69 = 0.$$

Найдём точку пересечения прямой и плоскости $B(10, 7, 4)$. Искомое расстояние от точки A до прямой

$$AB = \sqrt{(10-7)^2 + (7-9)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{22}.$$

3.4.7. Угол между прямой и плоскостью.

Условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть даны прямая $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

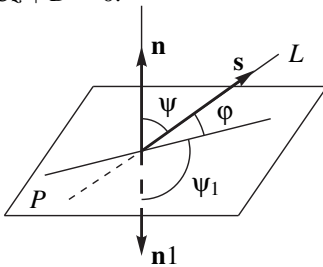


Рис. 3.12

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и проекцией прямой на плоскость. Обозначим искомый угол φ . Пусть ψ — угол между нормальным вектором плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и направляющим вектором прямой $\mathbf{s} = \{l, m, n\}$, если этот угол острый и ψ_1 , если этот угол — тупой (рис. 3.12).

Очевидно, $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right|$. Значит, по формуле приведения

$$\sin \varphi = \sin \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right| = |\cos \psi|.$$

$$\text{Но } \cos \psi = \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{s}}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{s}|}.$$

Получаем формулу для угла между прямой и плоскостью

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.4.8)$$

Прямая и плоскость перпендикулярны в том и только в том случае, если векторы \mathbf{n} и \mathbf{s} коллинеарны. Отсюда

$$L \perp P \iff \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (3.4.9)$$

Прямая и плоскость параллельны в том и только в том случае, если векторы \mathbf{n} и \mathbf{s} ортогональны, то есть $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$, или

$$L \parallel P \iff Al + Bm + Cn = 0. \quad (3.4.10)$$

3.4.8. Векторные уравнения прямой и плоскости

Рассмотренные выше уравнения прямых и плоскостей иногда называют уравнениями в координатной форме, так как они связывают координаты точек $M(x, y)$ или $M(x, y, z)$, лежащих на этих прямых и плоскостях. При этом легко заметить внешнюю схожесть или однотипность канонических уравнений прямых на плоскости и в пространстве, параметрических уравнений этих же прямых, общего уравнения прямой на плоскости и общего уравнения плоскости. Это объясняется тем, что при выводе таких уравнений

мы использовали одни и те же свойства векторных операций. Например, канонические уравнения прямых выводились из условия коллинеарности прямой и ее направляющего вектора; общее уравнение прямой на плоскости и общее уравнение плоскости — их ортогональность вектору нормали. Можно ожидать, что в векторной форме эти уравнения будут одинаковыми. Векторную форму записи уравнений особенно удобно использовать при рассмотрении многих теоретических вопросов.

Выберем в пространстве произвольную точку O , называемую *полюсом*. Положение точки M в пространстве однозначно определяется вектором \overline{OM} , который называется *радиус-вектором* этой точки: при выбранном полюсе O , каждой точке M соответствует единственный вектор \overline{OM} , связывающий полюс с этой точкой, и, наоборот — каждому радиус-вектору $\mathbf{r} = \overline{OM}$ соответствует единственная точка M — конец радиус-вектора \mathbf{r} . Радиус-вектор точки M будем обозначать $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$, а радиус-вектор точки M_0 обозначаем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(M_0)$.

Векторное уравнение — это уравнение, связывающее радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки M , радиус-векторы \mathbf{r}_i заданных точек M_i и, возможно, заданные векторы (\mathbf{a} , \mathbf{s} , \mathbf{n} , \mathbf{N} и т. п.).

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$, причём полюс совпадает с началом координат. Орт оси Ox обозначим \mathbf{i} , оси Oy — \mathbf{j} , оси Oz — \mathbf{k} . Тем самым в пространстве задан декартов прямоугольный базис.

Положение точки в пространстве однозначно определяется ее тремя координатами. Следовательно, чтобы задать точку, нужно задать или все три ее координаты, или задать три уравнения, которые однозначно задавали бы эти координаты. Если задано лишь два уравнения, то, в общем случае, они не могут определить единственную точку в пространстве — им удовлетворяют координаты бесконечного множества точек, лежащих на некоторой линии. Аналогично если задано лишь одно уравнение, то ему удовлетворяют координаты точек, лежащих на некоторой поверхности (опять же, если исключить вырожденные случаи типа $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ или $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, которые, очевидно, не задают никакой поверхности).

Если задано векторное уравнение, то оно может определять единственную точку или линию или поверхность и в каждом случае вопрос о том, что определяет данное уравнение решается его анализом. Рассмотрим, например, уравнение $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0$. По основному геометрическому свойству скалярного произведения ему удовлетворяют все радиус-векторы \mathbf{r} , перпендикулярные вектору \mathbf{a} . Таким образом, это уравнение на плоскости определяет прямую, проходящую через полюс (ведь радиус-вектор $\mathbf{r} = 0$ удовлетворяет данному уравнению), перпендикулярно вектору \mathbf{a} , а в пространстве оно определяет плоскость, также проходящую через полюс перпендикулярно

вектору \mathbf{a} .

Аналогично, уравнение $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$ определяет геометрическое место точек, радиус-векторы которых параллельны вектору \mathbf{a} , т. е. и на плоскости и в пространстве оно задает прямую, проходящую через полюс параллельно вектору \mathbf{a} .

Таким образом, используя свойства операций над векторами, можно определить геометрический образ, соответствующий данному векторному уравнению. Важно уметь решать обратную задачу — составлять уравнение данного геометрического места точек.

Пусть символ $M(\mathbf{r})$ (или $\mathbf{r}(M)$) означает, что вектор \mathbf{r} является радиус-вектором точки M .

ПРИМЕР 3.4.5. Составить векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам \mathbf{p} и \mathbf{q} .

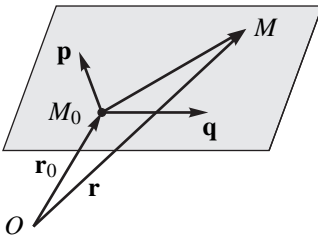


Рис. 3.13

Легко получить векторное параметрическое уравнение данной плоскости. Векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} неколлинеарны и, следовательно, образуют базис на искомой плоскости. Разлагая вектор $\overline{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, лежащий на той же плоскости по базису \mathbf{p} и \mathbf{q} , получим уравнение искомой плоскости

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}.$$

Здесь t_1 и t_2 — параметры, т. е. произвольные действительные числа.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующие векторные уравнения прямых и плоскостей.

L.1) Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ параллельно вектору \mathbf{s} :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{s}. \quad (3.4.11)$$

L.2) Прямая проходит через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ параллельно вектору \mathbf{s} :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{s} = 0. \quad (3.4.12)$$

L.3) Прямая, параллельная вектору \mathbf{s} :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{m}. \quad (3.4.13)$$

L.4) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (3.4.14)$$

Это уравнение легко преобразуется к виду

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2. \quad (3.4.15)$$

И, наконец, это же уравнение в параметрической форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (3.4.16)$$

L.5) Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, перпендикулярно вектору \mathbf{n} :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.4.17)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \lambda = 0, \quad (3.4.18)$$

где λ некоторый скаляр.

P.1) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, перпендикулярно вектору \mathbf{n} :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.4.19)$$

или

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \lambda = 0. \quad (3.4.20)$$

P.2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам \mathbf{p} и \mathbf{q} :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (3.4.21)$$

P.3) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам \mathbf{p} и \mathbf{q} :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}. \quad (3.4.22)$$

P.4) Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$ и $M_3(\mathbf{r}_3)$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (3.4.23)$$

Рекомендуем читателю обратить особое внимание на уравнения (3.4.11), (3.4.17), (3.4.19), (3.4.21), (3.4.22) и вывести эти формулы.

§ 3.5. Кривые второго порядка

До сих пор мы рассматривались уравнения линейных объектов — прямых и плоскостей, и это были уравнения первой степени. Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0. \quad (3.5.1)$$

Возможны следующие случаи:

1) уравнению (3.5.1) не удовлетворяет ни одна точка плоскости. Например, если уравнение имеет вид $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

2) этому уравнению удовлетворяет единственная точка. Например, $x^2 + y^2 = 0$;

3) уравнению удовлетворяют точки, лежащие на одной прямой. Например, уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ эквивалентно уравнению $(x - y)^2 = 0$, т. е. $x - y = 0$ — а это прямая;

4) уравнению удовлетворяют точки, лежащие на двух прямых. Например, $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ эквивалентно уравнению $(x - y)^2 = 1$, или $(x - y) = \pm 1$, а это — две прямые;

5) уравнению (3.5.1) удовлетворяют точки, лежащие на некоторой кривой (в обыденном понимании этого термина); такую кривую называют *кривой второго порядка*.

Последний случай и будет нас интересовать в этом разделе. Оказывается, таких кривых может быть всего лишь три: *эллипс, гиперболa и парабола*.

Возьмем на плоскости вторую декартову прямоугольную систему координат, определяемую началом O' и базисными векторами \mathbf{i}' и \mathbf{j}' (рис. 3.14).

В подробных курсах аналитической геометрии доказывается, что переход от одной системы координат к другой сводится к параллельному переносу вдоль вектора $\overline{OO'}$ и последующему повороту осей на угол φ .

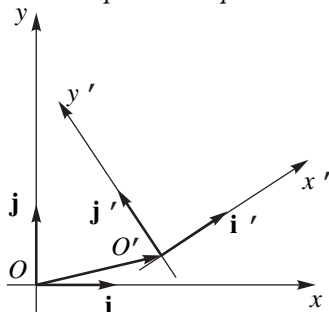


Рис. 3.14

Правда, это будет в том случае, когда базисные векторы направлены так, что кратчайшие повороты от \mathbf{i} к \mathbf{j} и от \mathbf{i}' к \mathbf{j}' совершаются в одном направлении.

Если кратчайшие повороты от \mathbf{i} к \mathbf{j} и от \mathbf{i}' к \mathbf{j}' совершаются в противоположных направлениях (рис. 3.15), то нужно еще изменить направление оси ординат на противоположное. Такое преобразование нельзя свести к параллельному переносу и повороту, не выводящему из плоскости Oxy .

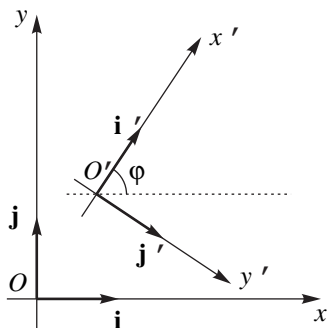


Рис. 3.15

Можно доказать, что при преобразовании системы координат кривая второго порядка останется кривой второго порядка, но уравнение этой кривой изменится.

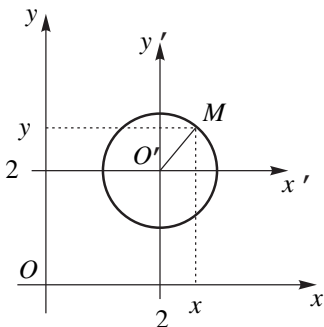


Рис. 3.16

Пусть точка M в системе координат Oxy имеет координаты (x, y) , а в системе координат $O'x'y'$ — (x', y') . Тогда (рис. 3.16): $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Предположим, что точка O' в системе координат Oxy имеет координаты (x_0, y_0) . Отсюда находим векторы $\overline{OO'} = \{x_0, y_0\}$, $\overline{O'M} = \{x', y'\}$ и $\overline{OM} = \{x, y\}$. Следовательно $\{x, y\} = \{x_0, y_0\} + \{x', y'\}$ и получаем формулы, связывающие «старые» координаты (x, y) точки M с её «новыми» координатами (x', y')

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

В связи с этим возникают две задачи.

1. Как выбрать систему координат, чтобы уравнение кривой имело простейший, или, как говорят, *канонический вид*?

2. Если кривая второго порядка задана «сложным» уравнением (3.5.1), то как и к какой системе координат перейти, чтобы эта кривая имела каноническое уравнение?

Вторая задача рассматривается ниже в теории приведения квадратичных форм к каноническому виду. Мы же остановимся на первой задаче.

3.5.1. Эллипс

Определение 3.5.1. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (и равная $2a$).*

Ясно, что должно выполняться неравенство $2a \geq F_1F_2$.

Рассмотрим, например, уравнение $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$. Выделяя полные квадраты, запишем это уравнение в виде $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. Это — окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $O'(2, 2)$ (рис. 3.16). Если начало координат перенести в точку O' , то уравнение принимает более простой вид: $x'^2 + y'^2 = 1$. При параллельном переносе системы координат формулы, связывающие координаты точки M в той и другой системах координат, особенно просты.

Для вывода канонического уравнения эллипса проведем ось Ox через фокусы F_1 и F_2 , а ось Oy перпендикулярно оси Ox через середину отрезка F_1F_2 (рис. 3.17). Если фокусы совпадают, то оси координат проводим через фокус произвольно.

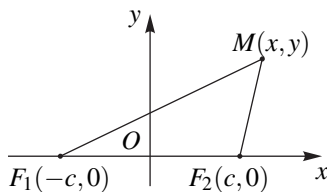


Рис. 3.17

Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно.

Возьмем точку $M(x, y)$ на плоскости. Она будет лежать на эллипсе тогда и только тогда, когда $MF_1 + MF_2 = 2a$. Используя формулу расстояния между точками (2.3.10), получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.5.2)$$

Это равенство является необходимым и достаточным условием принадлежности точки $M(x, y)$ данному эллипсу.

Перенесем в последнее равенство один из корней вправо и возведем обе части в квадрат

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Упростив это равенство и оставив корень справа, получим

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Снова возводим обе части в квадрат

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)y^2.$$

В любом треугольнике сумма двух его сторон больше третьей стороны. Значит $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$, т. е. $2a > 2c$ (рис. 3.17). Отсюда $a^2 - c^2 > 0$. Обозначая $b^2 = a^2 - c^2$, получаем

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.5.3)$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2. \quad (3.5.4)$$

При возведении в квадрат равенства (3.5.2) могли появиться «лишние корни», то есть такие точки $M(x, y)$, которые удовлетворяют уравнению (3.5.3), но не удовлетворяют уравнению (3.5.2). Пусть координаты точки

$M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3.5.3). Из этого уравнения найдём $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ и подставим в уравнение (3.5.2)

$$\sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} + \sqrt{(x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = 2a.$$

После несложных преобразований получим

$$\sqrt{\left(a + \frac{c}{a} \cdot x\right)^2} + \sqrt{\left(a - \frac{c}{a} \cdot x\right)^2} = 2a.$$

Из уравнения (3.5.3) очевидно, что $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, т. е. $|x| \leq a$, и так как $c < a$, то $\frac{c}{a} < 1$. Следовательно, $a + \frac{c}{a}x > 0$ и $a - \frac{c}{a}x > 0$. Поэтому равенство (3.5.2) представляет собой верное числовое равенство $2a = 2a$, то есть точка $M(x, y)$ с координатами, удовлетворяющими уравнению (3.5.3), лежит на эллипсе.

Уравнение (3.5.3) называется *каноническим уравнением эллипса*.

Числа a и b называются *большой и малой полуосями эллипса* (так как $a^2 = b^2 + c^2$, то $a > b$, отсюда и термины — большая и малая).

Отметим, что если полуоси равны $a = b = R$, то эллипс представляет собой окружность $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат.

3.5.2. Эллипс. Исследование формы

Из канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ получаем:

1) эллипс симметричен относительно осей координат и относительно начала координат.

Действительно, в уравнение эллипса x и y входят в четных степенях, поэтому если точка $M_1(x, y)$ лежит на эллипсе, то точки $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$ и $M_4(x, -y)$ также лежат на нём. А эти точки обладают указанной симметрией (рис. 3.18);

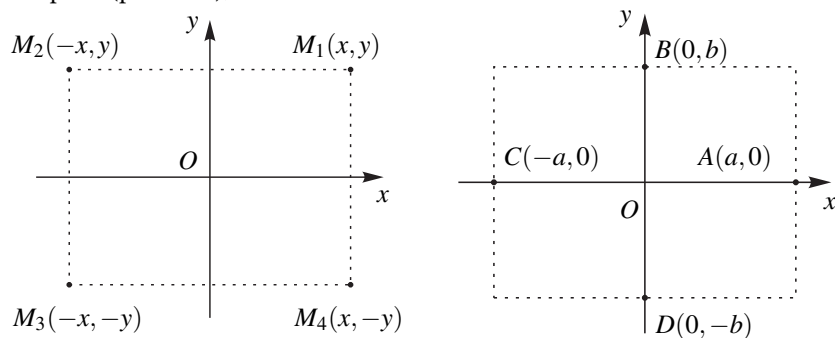


Рис. 3.18

2) эллипс пересекается с осями координат в точках $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ и $D(0, -b)$.

Действительно, полагая в уравнении эллипса $y = 0$, получаем $x^2 = a^2$, то есть $x = \pm a$. Аналогично, при $x = 0$ имеем $y = \pm b$ (рис. 3.19). Точки A , B , C и D называются вершинами эллипса. Отрезок $CA = 2a$ называется большой осью эллипса, $DB = 2b$ — малой осью;

3) эллипс содержится внутри прямоугольника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ (рис. 3.19).

В самом деле, из канонического уравнения эллипса имеем: $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Отсюда $x^2 \leq a^2$ и $y^2 \leq b^2$, что эквивалентно неравенствам $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$;

4) в силу симметрии эллипса достаточно построить его график для первой четверти плоскости Oxy . В этой четверти $x > 0$ и $y > 0$. Из канонического уравнения эллипса находим $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Используя производные, можно показать, что при $0 < x < a$ первая производная $y' \leq 0$ и вторая производная $y'' \leq 0$. В дифференциальном исчислении будет доказано, что это означает монотонное убывание графика функции $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и что этот график является выпуклой вверх кривой.

На основании свойств 1)–4) строим эллипс (рис. 3.20).

Заметим, что если в уравнении эллипса $b > a$, например, уравнение имеет вид $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1$, то это означает, что фокусы эллипса располагаются на оси ординат и он «вытянут» вдоль этой оси (рис. 3.21). В самом деле, переобозначая оси координат x и y : $x' = y$, $y' = -x$, получим рассмотренный случай — эллипс с фокусами на оси Ox' .

Рис. 3.19

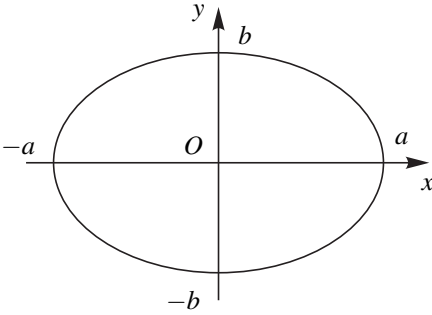


Рис. 3.20

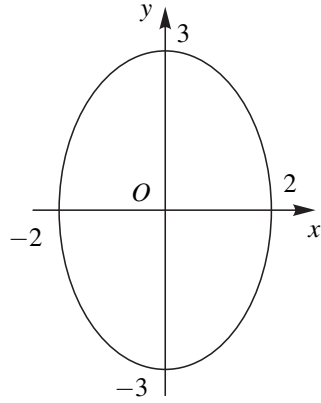


Рис. 3.21

ПРИМЕР 3.5.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

- 1) его полуоси равны 4 и 2;
- 2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5.

РЕШЕНИЕ. 1) по условию $a = 4$ и $b = 2$. Из уравнения (3.5.3) имеем $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ — искомое уравнение эллипса;

2) дано $2c = 6$ и $a = 5$. По формуле (3.5.4) находим $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

В заключение этого параграфа рассмотрим параметрические уравнения эллипса. Раньше мы вывели параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Здесь параметр t — угол между радиус-вектором \overline{OM} и положительной полуосью Ox , где M — произвольная точка окружности.

Очевидно, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ при подстановке в каноническое уравнение эллипса (3.5.3) обращает его в тождество. Следовательно,

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

и являются искомыми параметрическими уравнениями эллипса. Но здесь параметр t уже не будет углом между радиус-вектором точки эллипса и положительной полуосью Ox .

Пусть эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$$

Рассмотрим окружность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

описанную около эллипса (рис. 3.22).

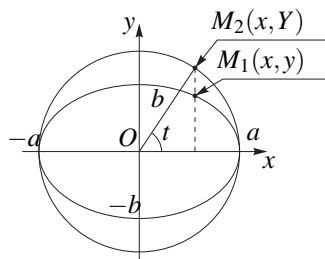


Рис. 3.22

Возьмем две точки $M_1(x, y)$ и $M_2(x, Y)$, расположенных соответственно на эллипсе и окружности, имеющих одну и ту же абсциссу x и лежащих по одну сторону от оси Ox . тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{Y^2}{a^2}.$$

Разрешая это уравнение относительно y , получим $y = \frac{b}{a}Y$.

Так как параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ Y = a \sin t, \end{cases}$$

то, заменяя здесь $Y = \frac{a}{b}y$, получим параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Таким образом, параметр t — это угол, соответствующий радиус-вектору точки M_2 окружности, описанной около эллипса, если эта точка лежит над или под точкой M_1 эллипса. Очевидно, точка $M_1(x, y)$ описывает весь эллипс, если параметр t пробегает интервал от 0 до 2π .

3.5.3. Гипербола

Определение 3.5.2. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами (и равная $2a$).

Для вывода канонического уравнения гиперболы проведём ось Ox через фокусы F_1 и F_2 , а ось Oy перпендикулярно оси Ox через середину отрезка F_1F_2 (рис. 3.17). Обозначим расстояние между фокусами $2c$, тогда фокусы

имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Возьмём точку $M(x, y)$ на плоскости. Эта точка лежит на гиперболе тогда и только тогда, когда $|MF_1 - MF_2| = 2a$. По формуле расстояния между двумя точками имеем $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Следовательно, точка M лежит на гиперболе тогда и только тогда, когда

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \quad (3.5.5)$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Далее проделаем без пояснений те же преобразования, что при выводе канонического уравнения эллипса:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2, \\ cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad c^2x^2 + a^4 = a^2(x^2 + c^2 + y^2), \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

В любом треугольнике разность двух любых его сторон меньше третьей стороны. Поэтому (рис. 3.17), $|MF_1 - MF_2| < F_1F_2$. Отсюда $2a < 2c$, то есть $c^2 - a^2 > 0$. Обозначим $b^2 = c^2 - a^2$, тогда

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2 , получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.5.6)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (3.5.7)$$

Как и при записи уравнения эллипса можно убедиться, что при алгебраических преобразованиях уравнения (3.5.5) мы не приобрели новых корней.

Величина a называется *действительной полуосью гиперболы*, величина b называется *мнимой полуосью гиперболы*.

3.5.4. Гипербола: исследование формы

Из канонического уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ получаем:

1) гипербола симметрична относительно осей координат и относительно начала координат;

2) гипербола пересекается с осью Ox в двух точках $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Гипербола не имеет общих точек с осью Oy .

Действительно, полагая $y = 0$, из канонического уравнения гиперболы имеем $\frac{x^2}{a^2} = 1$. Отсюда $x = \pm a$. Если взять $x = 0$, то получим $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ или $y^2 = -b^2$, а это равенство невозможно для действительных чисел.

Точки A и B называются *вершинами гиперболы*. Ось Ox называется *действительной осью* гиперболы, а ось Oy — *мнимой осью*;

3) абсциссы точек гиперболы удовлетворяют неравенствам $x \leq -a$ или $x \geq a$.

В самом деле. Из канонического уравнения гиперболы имеем $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$. Отсюда $x^2 \geq a^2$, а, значит, $x \leq -a$ или $x \geq a$;

4) в силу симметрии гиперболы достаточно построить ее часть в первой четверти.

Покажем, что прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$ является *асимптотой* гиперболы. Это означает, что если точка $M(x, y)$, двигаясь по гиперболе неограниченно удаляется от начала координат, то ее расстояние PM до этой прямой стремится к нулю (рис. 3.23).

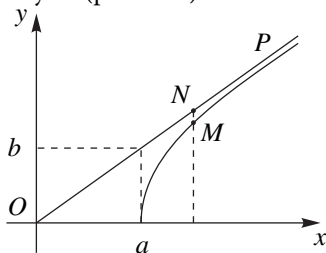


Рис. 3.23

Так как в первой четверти $x > 0$ и $y > 0$, то из канонического уравнения гиперболы ордината точки M равна $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Расстояние PM не превосходит длины отрезка MN , и если мы докажем, что $MN \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то тогда и расстояние PM будет стремиться к нулю. Очевидно,

$$\begin{aligned} y_N - y_M &= \frac{b}{a}x - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \\ &= \frac{b(x^2 - (x^2 - a^2))}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби неограниченно увеличивается, если $x \rightarrow +\infty$, а значит, сама дробь стремится к нулю. Итак, рассматриваемая часть гиперболы приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ с ростом x . В силу симметрии аналогичным свойством обладают остальные части гиперболы расположенные во второй, третьей и четвертой четвертях;

5) используя производные можно показать, что при $x > 0$ первая производная функции $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ положительна, а вторая — отрицательна. Это означает, что данная функция монотонно возрастает и ее график — выпуклая вверх кривая.

На основании свойств 1)–5) строим гиперболу (рис. 3.24).

Построение асимптот гиперболы $y = \pm \frac{b}{a}x$ позволяет более точно построить саму гиперболу. Очевидно, что асимптоты совпадают с диагоналями прямоугольника, центр которого совпадает с центром симметрии O гиперболы, а стороны параллельны действительной и мнимой осям симметрии. Отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины сторон этого прямоугольника, также называют осями (действительной и мнимой) гиперболы.

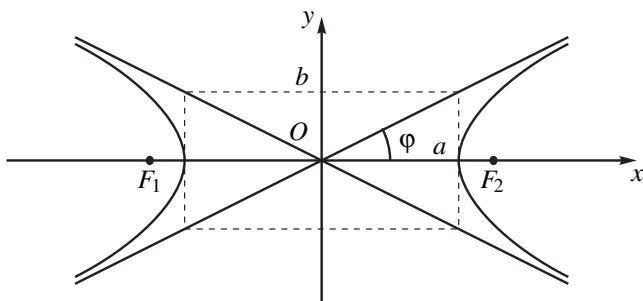


Рис. 3.24

ПРИМЕР 3.5.2. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что
 1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами — 10;
 2) действительная полуось равна 5 и вершины делят расстояние между центром и фокусами пополам.

РЕШЕНИЕ. 1) Дано: $2a = 8$ и $2c = 10$ Отсюда по формуле (3.5.7) находим $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Искомым уравнением гиперболы будет $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

2) по условию $a = 5$ и $c = 2a = 10$. Значит, $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 25 = 75$. Искомое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.5.8)$$

определяет гиперболу с фокусами $F_1(0, b)$ и $F_1(0, -b)$ расположенными на оси ординат. В этом случае постоянная по модулю разность расстояний от точек гиперболы до фокусов равна $2b$.

Две гиперболы, заданные уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называются *сопряженными*.

Гипербола с равными полуосями $a = b$ называется *равносторонней*. Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad -x^2 + y^2 = b^2.$$

В заключении этого параграфа заметим, что с помощью гиперболических функций, введенных в параграфе 1.6.4, параметрические уравнения гиперболы 3.5.6 можно задать в виде

$$x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$$

В самом деле, подставляя эти формулы в уравнение гиперболы, видим, что при любом t

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

в силу основного гиперболического тождества.

3.5.5. Эксцентриситет эллипса и гиперболы

Важной характеристикой эллипса и гиперболы является эксцентриситет — отношение

$$e = \frac{c}{a}. \tag{3.5.9}$$

Таким образом, для эллипса эксцентриситет равен отношению расстояния между фокусами к большой оси: $e = \frac{2c}{2a}$. Для гиперболы эксцентриситет равен отношению расстояния между фокусами к действительной оси $e = \frac{2c}{2a}$.

Учитывая (3.5.4) и (3.5.7) легко получить следующие формулы для эксцентриситета

$$\text{для эллипса } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad \text{для гиперболы } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Из этих формул вытекает, что эксцентриситет эллипса меньше единицы, эксцентриситет окружности равен нулю (так как для окружности $a = b$), эксцентриситет гиперболы больше единицы.

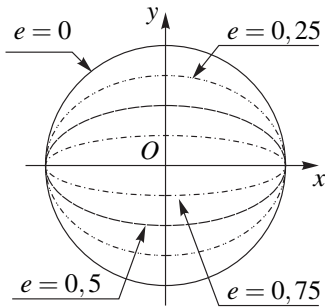


Рис. 3.25

Эксцентриситет эллипса является мерой его «сплюснутости»: чем меньше эксцентриситет, тем меньше отличаются его полуоси a и b и чем он больше, тем меньше отношение b/a . На рис. 3.25 изображены эллипсы с одинаковой большой осью и с разными эксцентриситетами.

Эксцентриситет гиперболы является характеристикой угла между асимптотами гиперболы. В самом деле, отношение b/a равно тангенсу половины угла между асимптотами гиперболы.

ПРИМЕР 3.5.3. Дан эллипс $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Найти его эксцентриситет.

РЕШЕНИЕ. Приводим уравнение эллипса к каноническому виду

$$\frac{25x^2}{4225} + \frac{169y^2}{4225} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Отсюда $a^2 = 169$ и $b^2 = 25$. Следовательно

$$e = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

ПРИМЕР 3.5.4. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой эксцентриситет $e = 2$.

РЕШЕНИЕ. Искомый угол обозначим 2φ . Тогда (рис. 3.24) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ и, следовательно, $2 = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$. Отсюда $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60^\circ$. Следовательно, угол между асимптотами гиперболы равен $2\varphi = 120^\circ$.

3.5.6. Парабола

В школьном курсе математики параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. В этом случае предполагается заданной декартова прямоугольная система координат. Если в этой системе координат кривую сдвинуть и повернуть на какой-либо угол, то ее уравнение изменится и называть ее параболой будет некорректно, между тем форма кривой при этом не изменится. Дадим определение параболы, не зависящее от выбора системы координат.

Определение 3.5.3. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки F и от данной прямой, лежащих на этой плоскости.*

Указанные в этом определении точка F называется *фокусом* параболы, а прямая называется *директрисой* (то есть *направляющей*) параболы.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p . Ось Ox проведем через фокус F перпендикулярно директрисе, а ось Oy — параллельно директрисе на расстоянии $p/2$ от нее (рис. 3.26). Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости. Согласно определению параболы точка лежит на ней тогда и только тогда, когда $MF = MB$, где B — проекция точки M на директрису. Точка B имеет координаты $(-p/2, y)$, следовательно,

$$MB = \sqrt{(x + p/2)^2 + (y - y)^2} = |x + p/2|$$

и

$$MF = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

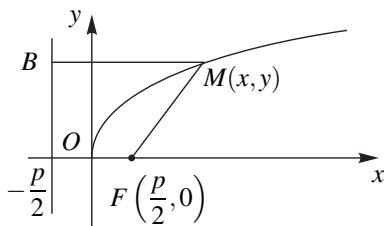


Рис. 3.26

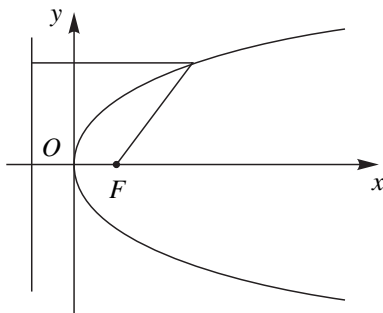


Рис. 3.27

Итак, имеем равенство

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|. \quad (3.5.10)$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и упрощая, получаем каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \quad (3.5.11)$$

Число p называется *параметром параболы*.

При упрощении уравнения (3.5.10) могли появиться посторонние корни, то есть точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.5.11), но не удовлетворяют уравнению (3.5.10). Покажем, что этого не произошло. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка с координатами, удовлетворяющими

уравнению (3.5.11). Надо показать, что эта точка одинаково удалена от фокуса и от директрисы. Из уравнения (3.5.11) следует, что $x \geq 0$. Для точек с неотрицательными абсциссами $MB = x + p/2$. Для расстояния MF имеем

$$\begin{aligned} MF &= \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{(x - p/2)^2 + 2px} = \\ &= \sqrt{x^2 + px + p^2/4} = \sqrt{(x + p/2)^2} = x + p/2 = MB. \end{aligned}$$

Если уравнение (3.5.11) записать в виде $x = \frac{1}{2p} \cdot y^2$, то получаем известную параболу $y = ax^2$, с точностью до обозначения осей координат. Отсюда получаем график параболы (рис. 3.27).

Отметим, что кривая $y^2 = 2px$ при $p < 0$ также является параболой, но расположенной в левой полуплоскости Oxy .

Если фокус параболы расположен на оси Oy , директриса параллельна оси Ox и вершина находится в начале координат, то каноническое уравнение параболы будет иметь вид $x^2 = 2py$.

Очевидно, что каноническая форма записи уравнения параболы позволяет легко найти его фокус.

3.5.7. «Почти канонические» уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Пусть оси эллипса параллельны осям координат, но центр симметрии эллипса находится в точке $O'(x_0, y_0)$ (рис. 3.28).

Пусть в системе координат $O'(x'y')$ уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (3.5.12)$$

Но $x' = x - x_0$ и $y' = y - y_0$ (см. начало § 3.5). Следовательно в системе координат Oxy уравнение того же эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x_0}{a^2}x - \frac{2y_0}{b^2}y + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (3.5.13)$$

Чаще возникает обратная задача: уравнение эллипса задано в виде (3.5.13) и его надо записать в виде (3.5.12). Для этого достаточно в уравнении (3.5.13) выделить полные квадраты по переменным x и y . Заметим, что это возможно, если в уравнении (3.5.13) отсутствует член с произведением xy . Определив точку O , строим эллипс.

Аналогично поступаем в случае гиперболы и параболы.

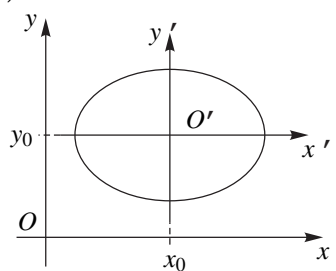


Рис. 3.28

ПРИМЕР 3.5.5. Установить, какие линии определяются уравнениями:

1) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;

2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;

3) $x + y^2 - 2y + 1 = 0$.

Изобразить эти линии на чертеже.

РЕШЕНИЕ. 1). Проведем стандартные преобразования по выделению полных квадратов

$$\begin{aligned}4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 &= 4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = \\ &= 4[(x-1)^2 - 1] + 3[(y+2)^2 - 4] - 32 = \\ &= 4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 - 48 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение в виде

$$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

Это — эллипс с центром в точке $(1, -2)$ и полуосями $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{16} = 4$. Строим чертеж (рис. 3.29).

2). Выделяя полные квадраты, получаем

$$\begin{aligned}16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0 &= 16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) + 199 = \\ &= 16(x-2)^2 - 9(y+1)^2 + 144 = 0.\end{aligned}$$

Уравнение запишется в виде

$$-\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Это — гипербола с центром $(2, -1)$, сопряженная к гиперболе $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$, имеющей параметры $a = 3$ и $b = 4$. Строим чертеж (рис. 3.30).

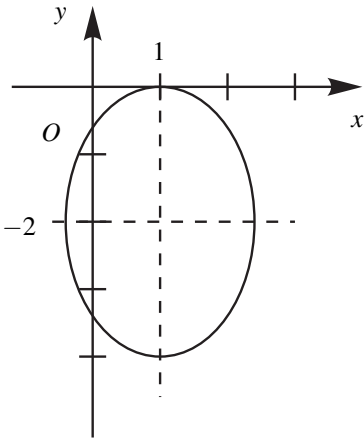


Рис. 3.29

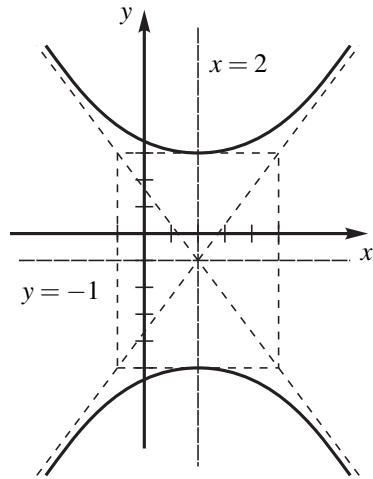
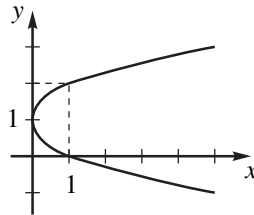


Рис. 3.30

3). Имеем $x + y^2 - 2y + 1 = x - (y - 1)^2 = 0$. Отсюда $(y - 1)^2 = x$. Это — парабола с вершиной в точке $(0, 1)$, имеющая параметр $p = 1/2$. Строим чертеж.



3.5.8. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

В подробных курсах аналитической геометрии (например, [1, с. 170–171]) доказываются полезные и важные в приложениях оптические свойства кривых второго порядка:

- 1) лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус;
- 2) лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся выходящими из другого фокуса;
- 3) лучи света, выходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы параллельны.

Глава 4.

Комплексные числа

Если ограничиваться только действительными числами, то многие задачи не имеют решения. Например, не существует корня четной степени из отрицательного числа. Если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$, то это уравнение не имеет действительных корней. Простейшее из таких уравнений $x^2 + 1 = 0$. В математике, если доказано, что какая-либо задача не имеет решения, стараются так расширить основные понятия, чтобы задачу можно было решить. В нашем примере получим такое расширение, если примем, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень — «мнимую» единицу i : $i^2 + 1 = 0$. Очевидно, что тогда $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. И теперь все квадратные уравнения будут иметь корни независимо от знака дискриминанта. Например, уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$ имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Это обстоятельство приводит к необходимости введения новых чисел, частным случаем которых являются действительные числа. Причем для этих новых чисел должны выполняться все основные действия и законы, которыми подчиняются действительные числа.

Комплексные числа появились в XVI в. и многими, если не большинством, были восприняты как нечто нереальное. В частности это отразилось в самом названии нового числа i — *мнимая* единица,

Тогда же была обнаружена неожиданная вещь: действительные числа могут «прятаться» за мнимыми. Для корней кубического уравнения $x^3 +$

$px = q$ были получены формулы (формулы Кардано)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Если применить эту формулу к уравнению $x^3 - x = 0$, очевидно, имеюще-

му действительные корни $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, то получим $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}} -$

$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}$. Формально это ноль, но выражение справа не имеет смысла на множестве действительных чисел.

В наше время комплексные числа используются всюду, где применяются математические методы. Так, например, в электротехнике полное сопротивление цепи представляется в виде $R = R_a + iR_p$, где R_a — активная составляющая и R_p — реактивная.

§ 4.1. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$ (от real — действительный) и $y = \operatorname{Im} z$ (от imaginary — мнимый).

Если $y = \operatorname{Im} z = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0 = x$ — действительное число. Таким образом множество \mathbb{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbb{C} всех комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Если $x = \operatorname{Re} z = 0$, то число $z = 0 + iy = iy$ называется чисто мнимым. Естественно обозначить $0 + 0i = 0$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Множество \mathbb{C} всех комплексных чисел не упорядочено, то есть запись $z_1 < z_2$ или $x_1 + iy_1 < x_2 + iy_2$ не имеет смысла.

Пусть на плоскости задана система координат Oxy . Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку $P(x, y)$. При этом действительные числа изображаются точками оси Ox и эта ось называется действительной осью. Чисто мнимые числа iy изображаются точками оси ординат и эта ось называется мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью или плоскостью z . Термины «комплексное число» и «комплексная точка» будем применять как синонимы.

Между точками плоскости и радиус-векторами (то есть векторами с началом в точке $(0, 0)$) имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить радиус-вектором $\overline{OP} = \{x, y\}$ (рис. 4.1). Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Очевидно, что $r = |z|$ — это расстояние точки z от начала координат.

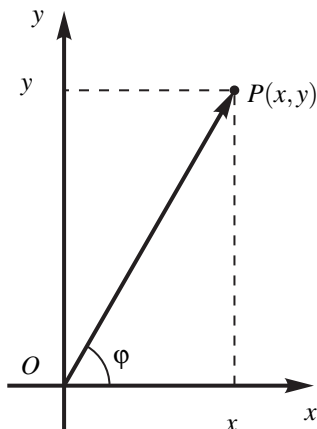


Рис. 4.1

Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль, равный r , образуют окружность радиуса r с центром в начале координат.

Угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \text{Arg } z$. Для точки $z = 0$ аргумент не определен. Очевидно, модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ — это полярные координаты точки (x, y) . Если модуль комплексного числа $z = x + iy$ однозначно определяется формулой $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то его аргумент φ удовлетворяет равенству $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$ и может быть определён с точностью до слагаемого $2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Условие равенства двух комплексных чисел можно сформулировать так: их модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на слагаемое, кратное 2π . Из множества значений $\text{Arg } z$ выделим одно, лежащее в промежутке $(-\pi, \pi]$. Это значение будем обозначать $\text{arg } z$ и называть *главным значением аргумента*: $-\pi < \text{arg } z \leq \pi$. Очевидно, $\text{Arg } z = \text{arg } z + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то получаем *тригонометрическую форму* комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается \bar{z} . Например, $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$. Очевидно, точки z и \bar{z} симметричны относительно действительной оси и при этом $|z| = |\bar{z}|$, $\text{arg } \bar{z} = -\text{arg } z$.

§ 4.2. Операции над комплексными числами

На множестве комплексных чисел определим операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Очевидно, так определенная операция сложения обладает свойствами:

- 1) коммутативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ и
- 2) ассоциативности: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует единственное комплексное число (т. е. число $-x - iy$), дающее в сумме с z нуль. Тем самым определена операция *вычитания* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Очевидно, $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

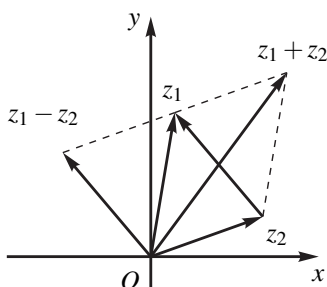


Рис. 4.2

Используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел как векторов на плоскости, получаем, что вектор $z_1 + z_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 . Вектор $z_1 - z_2$ равен разности векторов z_1 и z_2 и направлен из точки z_2 в точку z_1 (рис. 4.2).

Отсюда следует, что модуль разности чисел $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2 .

Пользуясь этим, легко написать уравнение окружности радиуса R с центром в точке a : для точек z этой окружности (и только для них) расстояние до центра a постоянно и равно R . Искомое уравнение $|z - a| = R$. Например, $|z - i| = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке $a = i$. Аналогично, неравенству $|z - a| < R$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые лежат внутри круга радиуса R с центром в точке a , а неравенствам $r < |z - a| < R$, где $r < R$, удовлетворяют точки, лежащие в кольце между двумя концентрическими окружностями радиусов r и R с общим центром a и только они.

Отметим, что для модулей комплексных чисел справедливы неравенства

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Справедливость этих неравенств можно уяснить из рис. 4.2, если учесть, что в любом треугольнике сумма двух любых его сторон больше третьей стороны и любая сторона больше разности двух других сторон.

Умножение комплексных чисел определим равенством

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (4.2.1)$$

Непосредственным вычислением по этой формуле нетрудно убедиться в том, что операция умножения обладает свойствами:

- 1) коммутативности $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
- 2) ассоциативности $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,

а операции сложения и умножения совместно обладают свойством дистрибутивности: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Если в формуле (4.2.1) положить $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$, то получим равенство $i \cdot i = i^2 = -1$. Умножая обе части равенства $i^2 = -1$ на i , получаем $i^3 = -i$; аналогично $i^4 = 1$. Легко понять, что $i^{4k+m} = i^m$. Очевидно, для любого комплексного числа z справедливо равенство $1 \cdot z = z$.

Отметим еще одну важную формулу, получающуюся из формулы (4.2.1) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким образом произведение сопряженных комплексных чисел является числом действительным.

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: частным от деления комплексного числа z_1 на число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z_3 , для которого $z_3 z_2 = z_1$. Очевидно, если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

При сложении и вычитании комплексных чисел целесообразнее использовать алгебраическую форму этих чисел $z = x + iy$. При умножении, делении и возведении в степень комплексных чисел рациональнее использовать тригонометрическую форму. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ i r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Отсюда следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$. В частности (если все сомножители одинаковы), $|z^n| = |z|^n$, $n = 1, 2, \dots$

Аргумент произведения двух комплексных чисел равен (с точностью до $2k\pi$) сумме их аргументов: $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей и, в частности, $\text{Arg} z^n = n \text{Arg} z$.

Геометрически это означает, что при умножении числа z_1 на z_2 радиус-вектор точки z_1 растягивается в $|z_2|$ раз и поворачивается на угол $\text{Arg} z_2$.

ПРИМЕР 4.2.1. Найти вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность $|z| = 2$, если одна вершина находится в точке $z_1 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Так как в правильном шестиугольнике угол между радиус-векторами двух соседних вершин равен $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, то k -я вершина равна $z_k = |z_1| \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{3} + i \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \right)$. Подставляя последовательно $k = 2, 3, 4, 5, 6$, получим искомые вершины

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -1,$$

$$z_5 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_6 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Для операции деления можно провести аналогичные рассуждения, но проще поступить так: используя тождество $z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right) z_2$, получаем $|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2|$ и $\text{Arg } z_1 = \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \text{Arg } z_2$ и, значит,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (4.2.3)$$

Обозначим выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ символом $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (4.2.4)$$

не придавая пока этой записи никакого другого значения, кроме как обозначение. Ниже покажем, что символ $e^{i\varphi}$ обладает основными свойствами показательной функции. Но у $e^{i\varphi}$ появляется новое свойство — он имеет период 2π . Используя этот символ, комплексное число можно представить в форме

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} = r e^{i\varphi} \quad (4.2.5)$$

и будем называть её *тригонометрической формой* комплексного числа.

Используя операции умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, будем иметь

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Обобщая на несколько сомножителей, получаем

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}.$$

Полагая здесь $z_1 = z_2 = \dots = z_n = e^{i\varphi}$, будем иметь

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (4.2.6)$$

Это показывает, что введенные символы $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$ перемножаются, делятся и возводятся в целую степень по правилам показательной функции $y = e^x$.

Записывая комплексные числа в правой и левой частях равенства (4.2.6) в тригонометрической форме, получаем *формулу Муавра*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (4.2.7)$$

Определим *корень натуральной степени n из комплексного числа z* как такое число w , которое при возведении в степень n дает число z , то есть $w^n = z$. Записывая эти числа в показательной форме $z = r e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, получим

$$\rho^n e^{in\psi} = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi_0 + 2k\pi)},$$

где $\varphi_0 = \arg z$ — главное значение аргумента. Сравнивая модули и аргументы левой и правой частей, получим

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Таким образом,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.2.8)$$

Эта формула показывает, что модули всех значений корня одинаковы, а их аргументы отличаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корень n -й степени из любого числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Эти значения можно получить из формулы (4.2.8), полагая $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

При $z = 0$ все значения корня равны между собой и равны нулю.

ПРИМЕР 4.2.2. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

РЕШЕНИЕ. Для числа $z = i$ имеем $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, следовательно, по формуле (4.2.8)

$$w_k = \sqrt[3]{i} = e^{i \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}.$$

Полагая здесь последовательно $k = 1, 2, 3$, получим

$$w_1 = e^{i \frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$w_2 = e^{i \frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$w_3 = e^{i \frac{9\pi}{6}} = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

При извлечении корня из комплексного числа понятие «арифметического корня» не вводится и все n значений равноправны. Поэтому при преобразованиях алгебраических выражений содержащих корни нужно следить, какие значения корня имеются в виду. Например, формула $\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 z_2}$ верна только при определенном выборе значения корня $\sqrt{z_1 z_2}$, если только значения для корней $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ уже выбраны. Иначе возможны «противоречия» типа $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

§ 4.3. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного.

Полное и систематическое определение функций комплексного переменного возможно только после изучения математического анализа. Но некоторые разделы математического анализа используют эти функции (например, ряды и интеграл Фурье).

Понятие функции комплексного переменного вводится так же, как и понятие функции действительного переменного. Говорят, что на множестве E комплексной плоскости задана *функция комплексного переменного*, если задано правило по которому каждой точке множества E ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел. Это соответствие обозначается, как и для функций действительного переменного, в виде $w = f(z)$. Переменную z называют *независимым переменным*, или *аргументом*, а w — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Если каждому значению $z \in E$ соответствует только одно значение w , то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, а если несколько значений — то *многозначной*. Например, функции $w = z^2$, $w = |z|$ — однозначные, а функции $w = \sqrt[n]{z}$, $w = \text{Arg } z$ — многозначные.

Так как каждое комплексное число определяется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w = f(z) = u + iv$ комплексного аргумента $z = x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций u и v двух действительных аргументов x и y :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ называется *действительной*, а функция $v(x, y)$ — *мнимой* частью функции $w = f(z)$.

Так как множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, то, естественно, определяемая функция комплексного аргумента (например, $w = e^z$) должна совпадать с аналогичной функцией действительного аргумента.

В теории функций комплексного переменного доказывается *теорема единственности*, по которой для широкого класса функций из совпадения двух функций на оси Ox следует их тождественное равенство на всей комплексной плоскости.

Показательная функция

Определим функцию комплексного переменного $w = e^z$, задав её действительную и мнимую части формулами

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

И, таким образом,

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (4.3.1)$$

На действительной оси $y = 0$ эта функция совпадает с действительной функцией e^x . Можно было бы определить функцию $w = e^z$ равенством $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, которая также совпадает с e^x на действительной оси и, по теореме единственности, будет совпадать с функцией, определенной формулой (4.3.1).

Символ e^{iy} обладает свойствами показательной функции, поэтому очевидны следующие свойства функции e^z :

- 1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$,
- 2) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1} e^{iy_1}}{e^{x_2} e^{iy_2}} = e^{x_1-x_2} e^{i(y_1-y_2)} = e^{z_1-z_2}$,
- 3) $(e^z)^n = (e^x)^n (e^{iy})^n = e^{nx} e^{iny} = e^{nz}$.

Функция e^z является периодической с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$; действительно, для любого целого k имеем

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z.$$

Из определения показательной функции имеем $|e^z| = e^x$, $\text{Arg } e^z = y + 2k\pi$, где k — любое целое число. Отсюда, в свою очередь, получаем, что показательная функция не обращается в нуль и на комплексной плоскости, но может быть отрицательной (например, $e^{i\pi} = -1$).

Тригонометрические функции

Формулу (4.2.4) $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ называют *формулой Эйлера*. Подставляя в неё $-\varphi$ вместо φ и используя чётность косинуса и нечётность синуса, получим $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Складывая и вычитая эти две формулы, получим равенства

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливые для любых действительных φ .

Определим *тригонометрические функции* комплексного переменного равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (4.3.2)$$

Тангенс и котангенс полагаем равными

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для действительных z эти определения, очевидно, дают тригонометрические функции действительного переменного. Функции (4.3.2) сохраняют почти все свойства тригонометрических функций действительного аргумента. Например, периодичность этих функций с периодом 2π следует из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sin(z + 2\pi) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{iz+2\pi i} - e^{-iz+2\pi i} \right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \end{aligned}$$

Также справедливы все тригонометрические формулы. Например,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = 1, \\ 2 \sin z \cos z &= 2 \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z. \end{aligned}$$

Особое внимание следует обратить на то, что в отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше единицы и даже сколь угодно большими. В самом деле, для действительных $t \rightarrow +\infty$

$$\cos it = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \rightarrow \infty.$$

Гиперболические функции комплексного аргумента определим равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Из этих определений следует, что $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi .

Сравнивая формулы (4.3.2) и (4.3.3), получаем формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Отсюда следует, что любая тригонометрическая формула имеет аналог в гиперболических функциях, и для получения этого аналога можно тригонометрические функции заменить на гиперболические по формулам (4.3.4). Например,

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z = (-i \operatorname{sh} iz)^2 + (\operatorname{ch} iz)^2 = (\operatorname{ch} iz)^2 - (\operatorname{sh} iz)^2.$$

Заменяя здесь iz на z получаем *основное гиперболическое тождество*

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Глава 5.

Элементарная теория предела

§ 5.1. Предел последовательности

5.1.1. Существо вопроса

При измерении величин различной природы мы получаем последовательности приближенных значений этих величин, с которыми приходится работать. Например, при вычислении длины окружности по формуле $L = 2\pi R$ в качестве значения π можно взять одно из приближенных значений 3; 3, 1; 3, 14; 3, 1415 и т. д., в зависимости от требуемой точности вычислений. Таким образом, операции с величинами сводятся к операциям над числовыми последовательностями, представляющими эти величины, и мы вынуждены ответить на три следующих вопроса:

1. Как соотнести измерение величины ко всем возможным последовательностям, приближающим эту величину?
2. Как по самой последовательности чисел определить, соответствует ли она сколь угодно точному приближению некоторой величины?
3. Как связаны операции, например арифметики, над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями и для каких операций допустима подмена величин их приближениями?

При изображении действительных чисел точками числовой оси при помощи десятичной системы мы ответили на эти вопросы следующим образом:

1. Каждой точке M сопоставили числовую последовательность (конечную или бесконечную) $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots (x_k =$

$= \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots$), приближающую число

$$x = \beta_m \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$$

как угодно близко. Действительно, мы установили, что, ограничившись в записи числа x n знаками после запятой, мы получаем представление числа с погрешностью

$$\varepsilon = |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}.$$

2. Каждой числовой последовательности в десятичной записи составим некоторое число, причем если разность между двумя числами была как угодно мала, то эти числа считались совпадающими.

3. Арифметические операции над числами x заменялись операциями над приближениями x_n этих чисел.

Теория предела — это раздел математического анализа, который устанавливает соответствие между операциями над величинами x , функциями $f(x)$ и их приближения.

Перейдем к изложению теории пределов.

5.1.2. Определение числовой последовательности и ее предела

Числовая функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, область определения которой является множество \mathbb{N} натуральных чисел, называется числовой последовательностью действительных чисел, или просто числовой последовательностью.

Значения $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ функции f называются членами последовательности, их принято обозначать $x_n = f(n)$ или $f_n = f(n)$; сама числовая последовательность есть пронумерованное множество ее членов и обозначается в виде $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Примеры числовых последовательностей.

1. Множество четных чисел $\{2n\} = 2, 4, \dots, 2n, \dots$

2. Последовательность простых чисел 1, 3, 5, 7, 11, 13 (общий вид члена этой последовательности не вывести).

3. Последовательность обратных величин натуральных чисел $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$.

4. Последовательность рациональных чисел, приближающих число π : $x_1 = 3$; $x_2 = 3, 1$; $x_3 = 3, 14$; $x_4 = 3, 141$; $x_5 = 3, 1415$; (заметим, что $|\pi - x_n| \leq \frac{1}{10^n}$).

Далее мы будем рассматривать только числовые последовательности действительных чисел: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение предела числовой последовательности.

Определение 5.1.1. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что при всех $n > n_0$ будет $|x_n - A| < \varepsilon$.

Геометрический смысл этого определения в том, что в как угодно малую ε -окрестность числа порядка n на числовой оси начиная с некоторого номера n_0 (зависящего от размера окрестности ε), попадают все члены x_n с номерами $n \geq n_0$ (или, что то же самое, вне любой ε -окрестности точки A находится лишь конечное число членов данной последовательности) (рис 5.1).

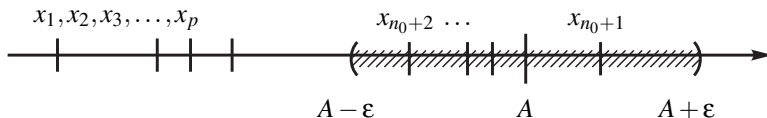


Рис. 5.1

Тот факт, что A есть предел x_n записывают в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

или $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, последовательность, не имеющая предела — расходящейся.

ПРИМЕР 5.1.1. 1. Последовательность простых чисел расходящаяся, т. к. не существует самого большого простого числа (теорема Евклида).

2. Последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ имеет предел 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

3. $x_n = 1, \underbrace{9 \dots 9}_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$

4. Последовательность $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \dots$ с n -м членом $x_n = n^{(-1)^n}$ расходящаяся. Действительно, ее нечетные члены имеют вид $1/(2n+1)$ и стремятся к 0, а четные члены имеют вид $2n$ и неограниченно возрастают, удаляясь от начала координат. Поэтому свойства «накапливаться» членами x_n около некоторого числа A здесь не наблюдается.

5. Последовательность $(-1)^n$ расходится, т.к. за пределами $(A - 1/2; A + 1/2)$ любой точки A находится бесконечное число членов данной последовательности.

5.1.3. Свойства предела последовательности

Теорема 5.1.1 (об общих свойствах предела).

- a) Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.
 б) Сходящаяся последовательность ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A_2$, но $A_1 \neq A_2$. Выберем $\varepsilon = 1/2 \cdot |A_1 - A_2|$. По определению предела существует n_0 такое, что при $n > n_0$ все x_n удовлетворяют неравенству $|A_1 - x_n| < \varepsilon$, т. е. лежат в ε -окрестности точки A_1 , (рис. 5.2). Тогда при этих же n ни одно из этих чисел не попадет в ε -окрестность точки A_2 . Следовательно, A_2 не может быть пределом, если $A_2 \neq A_1$. Свойство а) доказано.

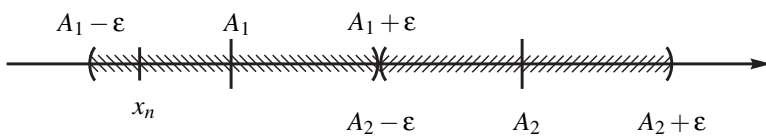


Рис. 5.2

Докажем б). Для заданного ε при $n > n_0$ будет $\varepsilon > |x_n - A_1|$. Учитывая свойства абсолютных значений, получаем $\varepsilon > |x_n - A_1| > ||x_n| - |A_1|| \Rightarrow |x_n| < |A_1| + \varepsilon$ (при $n > n_0$). Поэтому максимальное значение из конечного числа величин $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, |A_1| + \varepsilon$ ограничивает по абсолютной величине все члены последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Определение 5.1.2. Бесконечно малой числовой последовательностью называется последовательность $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Сокращенно будем писать б. м. $\{\alpha_n\}$. Например, $\left\{\sin \frac{\pi}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$ б. м. последовательности.

Арифметические свойства б. м. последовательностей.

Сумма и произведение бесконечно малых является бесконечно малой величиной: если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ б. м. последовательности. Тогда $\{\alpha_n \pm \beta_n\}, \{\alpha_n \beta_n\}, \{C \alpha_n\}$ ($C - \text{const}$) также б. м. последовательности.

Эти свойства несложно доказать исходя из определения б. м. последовательности.

Аналогично можно ввести бесконечно большие последовательности — это такие последовательности:

Бесконечно большая последовательность это такая числовая последовательность $\{z_n\}$, у которой для любого сколь угодно большого числа M

начиная с некоторого номера n_0 все члены $|z_n| > M$ ($n > n_0$). (сокращенно б. б.)

Нетрудно показать, что величина обратная бесконечно малой будет бесконечно большой. Учитывая равносильность неравенств (если $\alpha_n \neq 0$ для всех n)

$$|\alpha_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{|\alpha_n|},$$

и то, что при $\varepsilon > \frac{1}{M}$ будет $\frac{1}{\varepsilon} > M$, заключаем: числовая последовательность

$$\{\alpha_n\} \text{ б. м.} \iff \{z_n\} = \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\} \text{ б. б.}$$

ПРИМЕР 5.1.2. $\{\alpha_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} \right\}$ б. м. $\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\} = \{n^2 + 1\}$ б. б.

Нетрудно доказать, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых являются бесконечно малыми.

Докажем, что произведение бесконечно малой на ограниченную является бесконечно малой. Напомним, что последовательность $\{C_n\}$ ограничена, если существует такое число M , что для всех n из \mathbb{N} выполняется неравенство $|C_n| \leq M$.

Пусть $\{x_n\}$ б. м., C_n — ограниченная и $|C_n| \leq M$. Для любого малого заданного $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0 , начиная с которого, выполняется неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для этих же номеров n последовательности ($n \geq n_0$),

$\{u_n\} = \{x_n C_n\}$ имеем неравенство $|u_n| = |x_n C_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$, откуда следует, что $\{u_n\}$ б. м.

Теорема 5.1.2. (о необходимых и достаточных условиях существования предела). Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число A тогда и только тогда, когда $x_n = A + \Delta_n$, где $\{\Delta_n\}$ является б. м. последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Тогда из определения предела заключаем, что $x_n - A$ является б. м.

Обратно. Пусть $x_n - A = \Delta_n$ б. м., тогда условие того, что Δ_n б. м. эквивалентно условию того, что $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 5.1.3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2 + 1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Здесь $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\} = 1 + \left\{ \frac{-2}{n^2 + 1} \right\}$, $A = 1$, $\{\Delta_n\} = \left\{ \frac{-2}{n^2 + 1} \right\}$ б. м.

Эта теорема позволяет рассмотреть предельный переход в арифметических операциях.

Теорема 5.1.3. (об арифметических свойствах пределов).

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, то

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) = AB$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = CA$, где $C - \text{const}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$ и $y_n \neq 0$, ($n = 1, 2, \dots$).

d) Если $x_n = C - \text{const}$, для любого n то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством свойства b). Согласно предыдущей теореме $x_n = A + \Delta_n$, $y_n = B + \delta_n$, где Δ_n и δ_n б. м. последовательности. Поэтому

$$x_n y_n = (A + \Delta_n)(B + \delta_n) = AB + (A\delta_n + B\Delta_n + \delta_n \Delta_n).$$

Ясно, что величина, стоящая в скобках, является бесконечно малой. Поэтому, опять-таки, согласно предыдущей теореме заключаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = AB = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Свойство $\lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = C \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ следует из доказанного, если рассмотреть последовательность с постоянным значением общего члена $y_n = C$ (такая последовательность называется стационарной).

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.1. Доказать свойства a), c) и d) предыдущей теоремы.

5.1.4. Понятие о неопределенностях. Техника нахождения пределов.

Если для последовательности последняя теорема применима, то нахождение ее предела тривиально и неинтересно. Например, если числитель некоторой дроби стремится к 5, а ее знаменатель стремится к 3, то сразу можно сказать, что дробь стремится к $5/3$, и нам совершенно не важны аналитические выражения числителя и знаменателя. В некоторых случаях, даже если теорема не работает, мы также сразу можем сказать, чему равен предел, не делая никаких преобразований. Пусть, например, числитель некоторой дроби x_n/y_n стремится к константе $C \neq 0$, а ее знаменатель y_n стремится к нулю (и, следовательно, условия теоремы не выполняются). Очевидно, что в этом случае

дробь y_n/x_n стремится к нулю, т.е. является бесконечно малой. А тогда наша дробь, как величина обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и, следовательно, ее предел равен бесконечности.

Пусть теперь и числитель и знаменатель дроби x_n/y_n стремятся к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. В этом случае величина предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ будет зависеть от скорости стремления к нулю числителя и знаменателя. Если числитель стремится к нулю значительно быстрее знаменателя, то дробь будет стремиться к нулю. Если же знаменатель стремится к нулю значительно быстрее числителя, то, несмотря на убывание числителя, дробь будет стремиться к бесконечности. Наконец, если скорости убывания числителя и знаменателя одинаковы, то дробь будет стремиться к некоторому ненулевому числу. Рассмотрим это на примерах. Пусть $x_n = 1/n^2$, а $y_n = 1/n$. Очевидно, x_n убывает быстрее y_n . В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 : 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Аналогично, если $x_n = 1/n$, а $y_n = 1/n^2$ (ясно, что они обе стремятся к нулю), то дробь x_n/y_n стремится к бесконечности. Наконец, если $x_n = 10/n$, а $y_n = 5/n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 10/n : 5/n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$.

В этом случае говорят, что отношение x_n/y_n представляет собой *неопределенность* вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. И для того, чтобы найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ (или, как говорят — раскрыть или разрешить неопределенность) нам необходимо знать аналитические выражения числителя и знаменателя и провести некоторые преобразования, которые приведут нашу дробь к такому виду, к которому последняя теорема уже применима.

Нетрудно показать, что всего существует 7 неопределенностей:

$$\frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Из сказанного ясно, что эти выражения не являются арифметическими операциями над символами, а они объясняют, почему мы делаем алгебраические преобразования, а не записываем сразу ответ. Например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 + \frac{3}{n})}{n(4 + \frac{5}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{4 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Более подробно о неопределенностях и технике их разрешения будет говориться дальше при рассмотрении пределов функций и при использовании правила Лопиталья (параграфы 6.2 и 7.4).

По последней теореме предел суммы равен сумме двух пределов. Нетрудно показать, что предел суммы *конечного* числа слагаемых, имеющих предел

также равен сумме их пределов. Если же с ростом n число слагаемых растёт, то этим свойством пользоваться нельзя. Рассмотрим пример:

ПРИМЕР 5.1.4. *Найти предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right).$$

На первый взгляд кажется, что т.к. каждое слагаемое стремится к нулю, то и весь предел также равен нулю. Но это не так. Используя формулу суммы арифметической прогрессии, будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.1.5. Предельный переход в неравенствах

Основная связь операции предельного перехода и неравенств выражается следующими двумя свойствами.

Свойства предельного перехода в неравенствах.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$. Тогда:

1) если начиная с некоторого n_0 , ($n \geq n_0$) выполняется неравенство $x_n < y_n$, то $A \leq B$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

2) если $A < B$, то, начиная с некоторого номера n_0 ($n \geq n_0$), выполняется неравенство $x_n < y_n$.

Опуская доказательство, ограничимся рассмотрением примеров.

ПРИМЕР 5.1.5.

1. $\{x_n\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$, $\{y_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}$. Здесь $x_n < y_n$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
2. $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $\{y_n\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$. Здесь $x_n < y_n$ при $n \geq 3$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.2. *Привести примеры таких числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, что существует номер n_0 такой, что при любом $n > n_0$:*

- a) $x_n > y_n$, и $A \geq B$;
- b) $x_n \geq y_n$, и $A \geq B$;
- c) $x_n > B$, и $A \geq B$;
- d) $x_n \geq B$, и $A \geq B$.

5.1.6. Монотонные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называют возрастающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ будет $x_n < x_{n+1}$; неубывающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq x_{n+1}$; убывающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$; невозрастающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq x_{n+1}$. Последовательности всех этих четырех типов называются монотонными последовательностями.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $x_n \leq M$ для некоторого числа M , и ограничена снизу, если $x_n \geq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ограниченная последовательность — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу. Но если последовательность ограничена только снизу или сверху, то она может оказаться неограниченной. Например, $\{x_n\} = \{n\}$ ограничена снизу любым отрицательным числом, а сверху не ограничена.

Ограниченная числовая последовательность может не иметь предела. Например последовательность $\{x_n\} = \{\sin(\pi n/2)\}$ ограничена числом 1, но предела не имеет. При четных $n = 2m$ $x_{2m} = 0$, при нечетных $n = 2m + 1$ $x_{2m+1} = \pm 1$.

Отличительное свойство монотонных последовательностей состоит в том, что любая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Теорема 5.1.4 (Вейерштрасса). *Неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Если $\{x_n\}$ возрастающая монотонная последовательность, то $\{-x_n\}$ убывающая последовательность. Поэтому из теоремы Вейерштрасса следует, что невозрастающая ограниченная снизу последовательность также имеет предел.

5.1.7. Число e

Покажем, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Этот предел называют числом e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7.$$

Этот предел принято называть *вторым замечательным пределом*. Обратим внимание, что здесь мы имеем неопределенность вида 1^∞ и в результате получаем не единицу, как казалось должно было бы быть, а $e \approx 2,7$.

Для доказательства воспользуемся неравенством Я. Бернулли, справедливого для $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > -1$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

(доказательство этого неравенства проводится методом математической индукции, и мы его опускаем).

Покажем вначале, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывающая (при $n \geq 2$). Используя неравенство Бернулли, преобразуем отношение

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

таким образом, $y_{n-1} > y_n$ и эта последовательность убывает. Так как $y_n \geq 0$, то она ограничена снизу и, согласно свойству монотонных последовательностей, имеет предел. Воспользовавшись свойством предела произведения, получаем существование предела

$$\begin{aligned} e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{aligned}$$

Число e является иррациональным, $e = 2,718281828459045 \dots$

5.1.8. Применение к приближенным вычислениям

Метод доказательства арифметических свойств предела в п 5.1.3 содержит алгоритм нахождения погрешности при арифметических операциях, совершаемых с приближенными значениями чисел. Пусть, например, x_n и y_n — приближенные значения чисел A и B с точностью до ϵ

$$A = x_n + \Delta_1, \quad B = y_n + \Delta_2, \quad |\Delta_1| \leq \epsilon, \quad |\Delta_2| \leq \epsilon.$$

Тогда разность $\|AB - x_n y_n\| = |x_n \Delta_2 + y_n \Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2|$ дает абсолютную погрешность величины $x_n y_n$, заменяющей значения AB . Оценим относительную погрешность этой разности

$$\Delta = \frac{|AB - x_n y_n|}{|AB|} = \frac{|x_n \Delta_2 + y_n \Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2|}{|AB|}.$$

Учитывая, что $|x_n| \leq |A| + \varepsilon$, $|y_n| \leq |B| + \varepsilon$, находим

$$\Delta \leq \frac{|x_n|\varepsilon + |y_n|\varepsilon + \varepsilon^2}{|AB|} \leq \frac{|A|\varepsilon + |B|\varepsilon + 3\varepsilon^2}{|AB|} \leq \left(\frac{1}{|B|} + \frac{1}{|A|} \right) \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{|AB|}.$$

Применим это неравенство для нахождения относительной погрешности при замене числа π^2 приближенным значением $(3,14)^2 = 9,8596$. Так как $|\pi - 3,14| = \varepsilon$ и $\varepsilon < \frac{1}{10^2}$, то, оставляя два знака после запятой, согласно полученной выше оценке находим

$$\Delta = \frac{|\pi^2 - (3,14)^2|}{\pi^2} = \frac{|\pi^2 - 9,8596|}{\pi^2} \leq \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{10^2} + \frac{3}{\pi^2 10^4},$$

откуда заключаем, что относительная погрешность

$$\Delta \leq \frac{1}{\pi 10^2} \left(2 + \frac{3}{\pi 10^2} \right) < \frac{1}{10^2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.3. *Оценить относительную погрешность значения площади круга πR^2 , если значения $\pi = 3,1415\dots$, $R = 1,111\dots$ учитываются с точностью до третьего знака после запятой.*

Указание: представить $\pi = 3,142 + \varepsilon_1$, $R = 1,111 + \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 абсолютные погрешности, не превосходящие значения 10^{-3} .

§ 5.2. Предел числовой функции

5.2.1. Определение и примеры

Суть понятия предела функции заключается в том, что при приближении аргумента x из области определения $f(x)$ к числу a , значение функции f приближается к некоторому числу A . Это число A естественно назвать пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a . Для записи такого свойства договоримся, что выражение «переменная величина u стремится к фиксированному значению b » равносильно записи: для любого как угодно малого числа $\Delta > 0$ выполняется $|u - b| < \Delta$.

Определение 5.2.1 (предела функции по Коши). *Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к A при x , стремящемся к a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что выполнение неравенства $0 < |x - a| < \delta$ для x из области определения f влечет выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Обратим внимание на то, что требование к значению $f(x)$ попадать в ε -окрестность числа A реализуется как следствие того, что x попадает в подходящую δ -окрестность точки a

$$0 < |x - a| < \delta \implies |A - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, вначале задается малое число ε , а затем по нему находится число δ (зависящее от ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$), обеспечивающее указанное в определении требование. Если A — предел $f(x)$ при x , стремящемся к a , то будем писать

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a.$$

ПРИМЕР 5.2.1. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Так как $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ при любых $x \neq 0$, то неравенство будет выполнено, если $x < \varepsilon$. В этом примере $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

ПРИМЕР 5.2.2. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

(читается «сигнум x ») при $x \rightarrow 0$ предела не имеет.

Действительно, в любой δ -окрестности точки $x = 0$ функция $\operatorname{sgn} x$ принимает значения $-1, 0, 1$. Поэтому каким бы ни было число A , если $\varepsilon < 1$, никакой выбор $\delta > 0$ не обеспечивает попадания значений функции $\operatorname{sgn} x$ в ε -окрестность A (рис. 5.3).

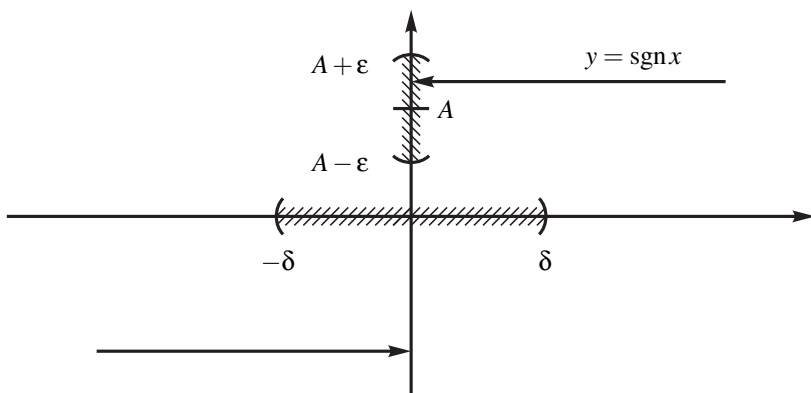


Рис. 5.3

Иногда бывает проще переформулировать данное определение предела в терминах "окрестностей":

Определение 5.2.2. Число A является пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любой ε — окрестности точки A , найдется такая δ — окрестность точки a , что значения функции попадут в ε — окрестность для всех значений аргумента, попавших в указанную δ — окрестность.

Покажем, например, что если функция имеет предел, то он единственен. В самом деле, предположим, что при $x \rightarrow a$ функция имеет два предела: A и B и $A \neq B$. Возьмем две ε — окрестности точек A и B : $(A - \varepsilon_1; A + \varepsilon_1)$ и $(B - \varepsilon_2; B + \varepsilon_2)$ не имеющие общих точек. Но тогда должна найтись такая δ — окрестность точки a , что значения функции в точках этой окрестности должны одновременно находиться в двух непересекающихся интервалах, что очевидно невозможно. Следовательно, $A = B$.

Также нетрудно показать, что если функция имеет предел в некоторой точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки: пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A \neq \infty$. Тогда существует некоторая δ -окрестность точки a , в которой величина $|f(x)|$ ограничена: $|f(x)| \leq M - \text{const}$ при $|x - a| < \delta$.

Рассмотренное определение предела иногда называют определением предела "на языке $\varepsilon - \delta$ ". Кроме этого можно определить предел функции "на языке последовательностей":

Определение 5.2.3. Число A является пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , последовательность значений функции $y_n = f(x_n)$ будет сходиться к A .

Можно доказать, что эти два определения эквивалентны, т.е. если найти предел функции пользуясь одним из этих определением, то он обязательно будет совпадать с пределом, найденным по другому определению.

Кроме того, используя определение предела функции "на языке последовательностей" часто бывает легко показать, что некоторый предел не существует.

ПРИМЕР 5.2.3. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует. В самом деле, рассмотрим две последовательности $\{x_n = \frac{1}{\pi n}$ и $\tilde{x}_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Обе эти последовательности стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $y_n = \sin x_n = 0$ и $\tilde{y}_n = \sin \tilde{x}_n = 1$. Но если бы предел существовал, то он был бы одним и тем же для всех последовательностей аргументов, стремящихся к бесконечности. Значит, данного предела не существует.

Но самое ценное, это то, что все свойства пределов сформулированные для последовательностей, автоматически справедливы и для функций.

И мы ограничимся уточнениями некоторых понятий и перечислением основных свойств предела функций.

Бесконечно малой функцией называется функция, определенная в окрестности точки a со свойством $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Тогда $\alpha(x) + \beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ и $C\alpha(x)$, где $C = \text{const}$, являются также бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow a$.

Бесконечно большой функцией называется функция, определенная в окрестности точки a , со свойством: для любого натурального числа N существует число $\delta > 0$ такое, что выполняется импликация

$$|x - a| < \delta \implies |f(x)| > N.$$

В этом случае будем писать $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, в зависимости от знака $f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Также будем считать, что запись $x \rightarrow \pm\infty$ означает, что функция $|x|$ есть бесконечно большая величина. Запись $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ будем употреблять, когда аргумент $f(x)$ есть бесконечно большая величина.

Функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.1. В связи с введением понятия бесконечно большой переменной величины можно (и нужно) ввести понятие предела при $x \rightarrow \pm\infty$.

Будем говорить, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что из условия $x > N$ ($x < -N$) следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Далее в операциях с пределами $x \rightarrow a$, где a может быть как конечным, так и бесконечностью того или иного знака.

Необходимое и достаточное условие существования предела. Функция $f(x)$ имеет предел число A при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

Арифметические свойства предела функции. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки $x = a$. Тогда, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то

a) для постоянной функции $C(x) = C = \text{const}$ для любого x , выполняется: $\lim_{x \rightarrow a} C = C$;

b) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$;

с) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB$ (в частности, $\lim_{x \rightarrow a} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x) = CA$, где $C = \text{const}$);

д) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$, при условии, что $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

5.2.2. Предельный переход в неравенствах

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда, если в некоторой окрестности точки $x = a$

- а) выполнено $f(x) > g(x)$, то $A \geq B$;
- б) выполнено $f(x) \geq g(x)$, то $A \geq B$;
- с) выполнено $f(x) > B$, то $A \geq B$;
- д) выполнено $f(x) \geq B$, то $A \geq B$.

5.2.3. Первый замечательный предел

Применим изученные свойства пределов к доказательству одного из важнейших пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство этого равенства разобьем на несколько этапов.

1. В круге единичного радиуса через x обозначим радианную меру угла, образованного направлением OA с положительным направлением оси Ox . Пусть BC — касательная к окружности, C — точка касания, AC — хорда и угол $x \in (0, \pi/2)$ (рис. 5.4).

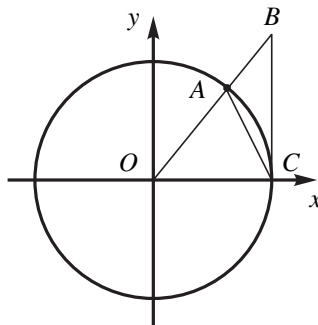


Рис. 5.4

2. Вычислим площади:

площадь $\triangle OAC$: $S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \sin x = \frac{1}{2} \sin x$;

площадь сектора OAC : $S_{OAC} = \frac{1}{2} x$;

площадь $\triangle OBC$: $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot OC \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Между этими площадями выполняется соотношение

$$S_{\Delta OAC} < S_{OAC} < S_{\Delta OBC}.$$

Подставляя значение этих площадей, получим

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

3. Выполняя деление в этих неравенствах на $\sin x$, и, переходя к обратным величинам, получим

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства верны и при $x \in (-\pi/2, 0)$.

4. Совершая предельный переход при $x \rightarrow 0$ в полученных неравенствах, согласно свойствам п 5.2.2, получим

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

откуда следует требуемое равенство.

ПРИМЕР 5.2.4.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \alpha x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x} \beta x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

5.2.4. Предел сложной функции

Пусть определены функции $y = \varphi(x)$, $f(y)$ и их композиция — сложная функция $f(\varphi(x)) = \Phi(x)$. Тогда предел (если он существует) $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x)$ называется пределом сложной функции $f(\varphi(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Как вычислить предел сложной функции через пределы функций f и φ , входящих в композицию $\Phi = f \circ \varphi$? Ответ дает следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. (о пределе сложной функции). Пусть определены функции $y = \varphi(x)$, $f(y)$ и их композиция $\Phi(x) = f(\varphi(x))$. Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = A$. Тогда существует предел сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow a} f(y) = A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу существования пределов $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$. Вначале для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, что

$$|y - a| < \varepsilon_1 \implies |f(y) - A| < \varepsilon;$$

затем для заданного ε_1 выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|x - x_0| < \delta \implies |\varphi(x) - a| < \varepsilon_1.$$

Если теперь для заданного $\varepsilon > 0$ взять полученное $\delta > 0$, то выполняется следующая логическая цепочка

$$|x - x_0| < \delta \implies |\varphi(x) - a| = |y - a| < \varepsilon_1 \implies |f(y) - A| < \varepsilon.$$

Сравнивая первое и последнее неравенства этой цепочки и учитывая, что $y = \varphi(x)$, получаем импликацию

$$|x - x_0| < \delta \implies |\Phi(x) - A| < \varepsilon,$$

которое означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = A$. Теорема доказана.

5.2.5. Второй замечательный предел

Так называется предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718\dots$$

Мы опускаем доказательство существования этого предела. В предположении, что он существует, вычислим его значение. Выбирая способ стремления $x \rightarrow 0$ в виде $x = x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$). Согласно вычислению числа $e = 2.71828\dots$ в п 5.1.7, находим

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718\dots$$

ПРИМЕР 5.2.5.

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+(-x))^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+(-x))^{-x}} = \\ &= \left(\lim_{-x \rightarrow 0} (1+(-x))^{-x} \right)^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

5.2.6. Предел монотонной функции

Определение 5.2.4. Функция $f(x)$, определенная на $E \subset \mathbb{R}$ называется возрастающей на E , если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

неубывающей на E , если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

невозрастающей на E , если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

убывающей на E , если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Функции, обладающие одним из указанных свойств называются монотонными на множестве E .

Теорема 5.2.2. (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) в окрестности точки x_0 и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

5.2.7. Односторонние пределы

Будем говорить, что $f(x)$ имеет предел A слева в точке x_0 (или левый предел A), если $f(x) \rightarrow A$ при выполнении двух условий: $x \rightarrow x_0$ и $x < x_0$. Аналогично, $f(x)$ имеет предел B справа в точке x_0 (или правый предел B), если $f(x) \rightarrow B$ при $x \rightarrow x_0$ и $x > x_0$. Для обозначения левого предела используется запись

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

(читается: *предел слева в точке x_0*). Аналогично обозначается правый предел

$$B = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(читается: *предел справа в точке x_0*).

ПРИМЕР 5.2.6.

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 0; \\ -1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -1.$$

2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0; \\ \cos x, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.2. Сравнивая определение предела функции из п 5.2.1 и понятия односторонних пределов, приходим к следующему утверждению: функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке она имеет равные левый и правый пределы.

В рассмотренном примере 5.2.6.1 $f(x)$ не имеет предела в точке $x = 0$ (левый и правый пределы не совпадают); в примере 5.2.6.2 $f(x)$ имеет предел в точке $x = 0$.

§ 5.3. Непрерывные функции

5.3.1. Определение и примеры

Интуитивное представление о непрерывной функции связано с таким процессом измерения, в котором измеряемая переменная величина мысленно определена для всех значений аргумента и может быть измерена со сколь угодно хорошей точностью. Принято считать, что такими свойствами обладают временные и пространственные протяженности. Задачи измерения переменной величины составляют суть теории предела и обсуждались в § 0.3. Отвлечемся от физического содержания переменной величины и обратимся к числовым функциям, представляющим эти величины. Тогда интуитивное понятие непрерывности принимает строгое определение.

Определение 5.3.1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если выполнены следующие условия:

- 1) $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;
- 2) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) этот предел равен значению функции в точке x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве E числовой оси R , если $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in E$.

ПРИМЕР 5.3.1.

1) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (см. пример 5.2.1 из п 5.2.1). Эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = 0$, но не определена в самой точке $x = 0$. Поэтому, несмотря на то, что существует предел $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, эта функция не является непрерывной в точке $x = 0$, так как нельзя сказать, что $f(x) \rightarrow f(0)$ при $x \rightarrow 0$.

2) Пусть

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена в точке $x = 0$ ($y(0) = 1$), и в ее окрестности, имеет предел при $x \rightarrow 0$ и этот предел равен значению функции в точке $x = 0$: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 = y(0)$, при $x \rightarrow 0$, см. 5.2.4 — первый замечательный предел.

5.3.2. Операции над непрерывными функциями

Определяющим свойством непрерывной функции является то, что она имеет пределом свое значение во всех точках определения. Поэтому непрерывные функции сохраняют все свойства предела числовой функции. Перечислим эти свойства.

Арифметические операции над непрерывными функциями (сложение, вычитание, умножение и деление, если делитель не обращается в ноль) дают снова непрерывные функции в области их определения.

Композиция двух и более непрерывных функций в области своего определения снова является непрерывной функцией.

ПРИМЕР 5.3.2.

1) $f(x) = \ln \sin x$ определена и непрерывна при $x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2) $\varphi(x) = \operatorname{Intg} x$ определена и непрерывна при $x \in (\pi k, \pi k + \pi/2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3) $\psi(x) = f(x) + \varphi(x) = \ln \sin x + \operatorname{Intg} x$ определена и непрерывна при $x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

5.3.3. Свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке

Функция $f(x)$, непрерывная на открытом интервале (a, b) , называется непрерывной на замкнутом интервале $[a, b]$, если существует правый предел в точке a , равный $f(a)$ и левый предел в точке b , равный $f(b)$:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b).$$

Например, функция $y = \sin \frac{1}{x}$ определена и непрерывна на $(0, 1]$; в точке $x = 0$ она не определена и при $x \rightarrow 0$ предела не имеет.

Функции, непрерывные на замкнутом промежутке обладают следующими фундаментальными свойствами:

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она ограничена на этом промежутке.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она принимает на этом промежутке свои наибольшее M и наименьшее m значения, т. е. существуют x_1 и $x_2 \in [a, b]$ такие, что

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$$

для всех $x \in [a, b]$.

Теорема о промежуточных значениях. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она принимает все значения между своими наименьшим m и наибольшим M значениями, т. е. для любого числа A , $m < A < M$, существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x_0) = A$.

Теорема Больцано-Коши. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке и принимает на концах этого промежутка значения разных знаков (т. е. $f(a)f(b) < 0$), то внутри этого промежутка существует хотя бы одна точка x_0 , такая, что $f(x_0) = 0$.

Мы опускаем доказательство этих свойств, ограничившись их иллюстрацией, рис. 5.5.

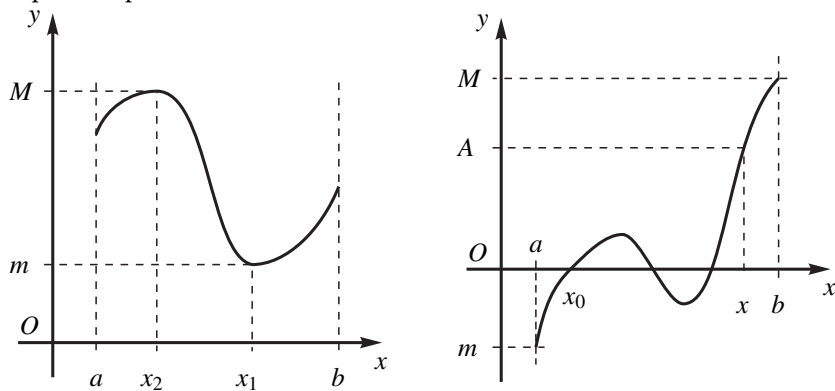


Рис. 5.5

5.3.4. Непрерывность обратной функции

Рассмотрим пример функции (рис. 5.6)

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in [0, 1] \\ x - 1, & \text{при } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

(стрелкой на графике будем указывать точку, которая этому графику не принадлежит).

Эта функция монотонна, непрерывна и взаимно однозначно отображает точки множества $E = [0, 1) \cup [2, 3]$ на точки замкнутого интервала $[0, 2]$. Обратная к ней функция

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{при } y \in [0, 1) \\ y + 1, & \text{при } y \in [1, 2], \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 1$, так как

$$\lim_{y \rightarrow 1-0} f^{-1}(y) = 1 \neq \lim_{y \rightarrow 1+0} f^{-1}(y) = 2.$$

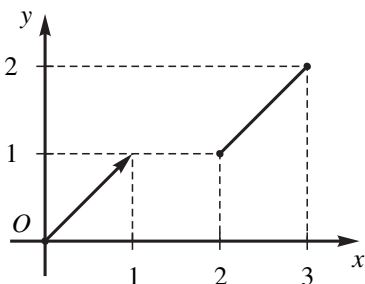


Рис. 5.6

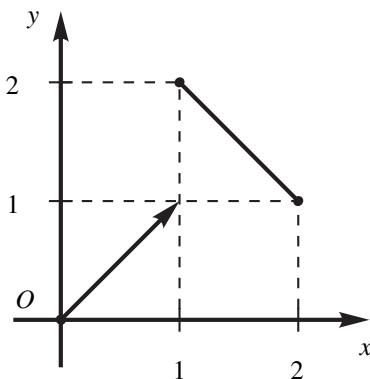


Рис. 5.7

Вывод: непрерывное взаимно однозначное отображение $f : E \rightarrow [c, d]$, определенное на некотором числовом множестве E может иметь обратное отображение, не являющееся непрерывным.

Однако если множество E — интервал, то верно следующее утверждение.

Теорема 5.3.1. (об обратной функции). Пусть $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — взаимно однозначное и непрерывное отображение интервала $[a, b]$ на $[c, d]$. Тогда обратное отображение также непрерывно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.1. Если числовая функция одного переменного только возрастает (или только убывает) в области своего определения, то она может и не быть взаимно однозначной, как, например, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Обратно, если функция взаимно однозначно отображает отрезок, она не обязательно монотонна, например функция на рис. 5.7:

$$y = \begin{cases} x, & \text{при } x \in [0, 1) \\ 3 - x, & \text{при } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

5.3.5. Непрерывность элементарных функций

Всякая элементарная функция согласно своему определению (см. п 0.6.4) есть результат конечного числа арифметических операций, операций взятия обратной функции и операций композиции над основными элементарными функциями $y = ax + b$, $y = \sin x$ и $\log_a x$. Эти основные элементарные функции являются непрерывными в своих областях определения (см. упражнения ниже). Поэтому согласно свойствам непрерывных функций непрерывной будет любая элементарная функция в области своего определения.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.1. Доказать непрерывность основных элементарных функций: $ax + b$, $\sin x$, $\log_a x$.

Указание: преобразовать разности $f(x+h) - f(x)$ этих функций и показать, что при $h \rightarrow 0$ будет выполняться свойство $|f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$. Затем воспользоваться эквивалентностью определения непрерывности $f(x)$ в точке x_0 и импликации

$$x \rightarrow x_0 \implies f(x) \rightarrow f(x_0).$$

5.3.6. Сравнение бесконечно малых функций

Стремление бесконечно малой функции к нулю может происходить с различными скоростями как относительно аргумента, так и относительно других бесконечно малых функций. Приведем соответствующие определения.

Классификация бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$. Тогда будем говорить, что:

1) α и β — бесконечно малые одного порядка малости при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

(обозначается $\alpha = O(\beta)$, читается α есть O -большое от β);

2) α и β — эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

(в этом случае будем писать $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, читается α эквивалентно β);

3) $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

(обозначается $\alpha = o(\beta)$, читается α есть o -малое от β);

4) α является бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой β при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = \text{const} \neq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.2. Учитывая, что $\gamma(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция, если α — бесконечно малая функция, можно сформулировать аналогичную классификацию сравнения бесконечно больших функций.

Особую роль при нахождении пределов имеют эквивалентные бесконечно малые. Они же являются источником получения приближенных формул, встречающихся в физике, механике и т.п. Например, из первого замечательного предела следует, что при $x \rightarrow 0$ $\sin x \sim x$ и поэтому в уравнение колебания длинного маятника входит угол α , а не $\sin \alpha$, как следует из вывода этого уравнения.

Рассмотрим свойства эквивалентных бесконечно малых. Пусть далее всюду до конца данного параграфа α, β, γ — бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$.

1) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$;

В самом деле, по условию $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Но тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 / \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Применительно к нахождению пределов это свойство означает, что если нам известно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, то без каких-либо обоснований можем утверждать, что и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$,

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$;

В самом деле, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$.

3) Если $\alpha_1 \sim \alpha_2$, то $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем каждая из данных бесконечно малых α_1 и α_2 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha_i(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_i(x)} = 0, i = 1, 2.$$

Предлагаем убедиться в этом самостоятельно. Смысл этого свойства рассмотрим на примере:

ПРИМЕР 5.3.3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \text{tg} x}{x^3}$.

Выше было показано, что $\sin x \sim x$ и $\operatorname{tg} x \sim x$ и если в числителе заменить синус и тангенс на эквивалентные величины, то получим в ответе нуль. Но это неверно именно по свойству 3). По свойствам 1) и 2) при $x \rightarrow 0$ синус и тангенс эквивалентны. И, значит их разность будет бесконечно малой более высокого порядка, чем первый. Но какого? Рассмотрим верное решение данного примера.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x(1 + \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3 \cos x(1 + \cos x)} = 1/2. \end{aligned}$$

4) Предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить эти бесконечно малые эквивалентными, т.е., если $\alpha \sim \alpha^*$ и $\beta \sim \beta^*$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

$$\text{В самом деле, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)} \cdot \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)} \cdot \frac{\beta^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

Последнее свойство эффективно при разрешении неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, если мы будем иметь достаточно большую таблицу основных эквивалентностей: при $\alpha \rightarrow 0$

- 1) $\sin \alpha \sim \alpha$;
- 2) $\arcsin \alpha \sim \alpha$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$;
- 4) $1 - \cos \alpha \sim \alpha^2/2$;
- 5) $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$;
- 6) $\log_a(1 + \alpha) \sim \alpha/\ln a$;
- 7) $e^\alpha - 1 \sim \alpha$;
- 8) $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$;
- 9) $(1 + \alpha)^m - 1 \sim \alpha m$.

Первые четыре эквивалентности — это первый замечательный предел и следствия из него. Пятая эквивалентность получена выше, как следствие из второго замечательного предела. Формулу 7) можно получить так: Обозначим $e^\alpha - 1 = \beta$. Ясно, что $\beta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Выразим α через β : $e^\alpha = 1 + \beta$, $\alpha = \ln(1 + \beta)$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\ln(1 + \beta)} = 1$.

Восьмая эквивалентность получается из седьмой с использованием основного логарифмического тождества: $a^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln a} - 1 \sim \alpha \ln a$.

Несколько сложнее доказывается последняя, девятая эквивалентность. Обозначим $(1 + \alpha)^m - 1 = \beta$. Ясно, что $\beta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Отсюда $m \ln(1 + \alpha) = \ln(1 + \beta)$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha m} = \frac{\beta}{\alpha m} = \frac{\beta}{\ln(1 + \beta)} \cdot \frac{m \ln(1 + \alpha)}{\alpha m} = 1.$$

ПРИМЕР 5.3.4.

1) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}.$$

Здесь мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Так как kx , lx бесконечно малые, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{lx} = \frac{k}{l}$.

2) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}.$$

А здесь какая неопределенность? Так как $1 - \cos 2x \sim (2x)^2 = 2x^2$ и $\sin^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$.

3) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}.$$

Здесь мы также имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы использовать пятую неопределенность, прибавим и отнимем к тангенсу единицу: $\ln \operatorname{tg} x = \ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1)) \sim \operatorname{tg} x - 1$, т.к. $\operatorname{tg} x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi/4$. Значит,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x / \cos x - 1}{\sin x - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{\ln \cos x}.$$

Здесь у нас неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В числителе вынесем за скобку e^{-x^2} , а в знаменателе к косинусу прибавим единицу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{\ln \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \frac{e^{2x^2} - 1}{\ln(1 + (\cos x - 1))} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \frac{2x^2}{(\cos x - 1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{-x^2/2} &= -4. \end{aligned}$$

4) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4}\right)^{2x+5}.$$

Здесь у нас неопределенность вида (1^∞) . Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{2x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+5) \ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)}.$$

В аргументе у логарифма выделим целую часть: $\frac{2x+3}{2x+4} = \frac{(2x+4)-1}{2x+4} = 1 + \frac{-1}{2x+4}$.

Но тогда $\ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right) = \ln \left(1 + \frac{-1}{2x+4} \right) \sim \frac{-1}{2x+4}$ (Т.к. $\frac{-1}{2x+4}$ — бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$).

Следовательно наш предел равен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+5) \cdot \frac{-1}{2x+4}} = e^{-\frac{2+5/x}{2+4/x}} = e^{-1}.$$

Ниже мы рассмотрим еще один способ нахождения пределов — правило Лопитала, которое использует производные.

5.3.7. Три типа разрыва непрерывности функций

Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 , если в этой точке $f(x)$ не является непрерывной. Различают следующие типы разрывов:

1. *Устранимый разрыв* в точке x_0 определяется как ситуация, в которой $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

но при этом либо f не определена в точке x_0 , либо $f(x_0)$ определена, но $f(x_0) \neq A$. В первом случае функцию $f(x)$ доопределяют в точке x_0 значением A , а во втором случае ее переопределяют, полагая за новое в точке x_0 значение A . После чего функция становится непрерывной.

Например, $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ имеет такой устранимый разрыв. Действительно, достаточно положить

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и $y(x)$ станет непрерывной в точке $x = 0$ (см. первый замечательный предел).

Аналогичной является функция $y = x \sin \frac{1}{x}$, (см. пример 5.2.1, п 5.2.1).

Здесь также существует $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, поэтому доопределенная функция

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

также становится непрерывной.

2. *Разрыв первого рода (скачок)* в точке x_0 определяется как несовпадение левого и правого предела при $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Поскольку левый и правый предел существуют, то этот случай называют скачком функции $f(x)$ в точке x_0 . Сам скачок вычисляется как разность предела справа и слева: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ (на рис. 5.8 обозначено $f_+ = f(x_0 + 0)$ и $f_- = f(x_0 - 0)$).

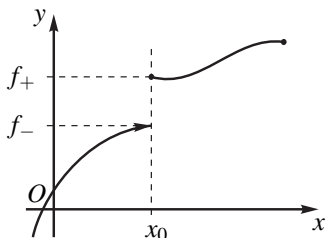


Рис. 5.8

3. *Разрыв второго рода* в точке x_0 определяется отсутствием (не существованием) хотя бы одного из односторонних пределов. Это равносильно тому, что хотя бы один из пределов либо не существует, либо бесконечен:

ПРИМЕР 5.3.5. $y = \sin \frac{\pi}{x}$. Эта функция при $x \rightarrow 0$ предела не имеет ни справа, ни слева.

Действительно, пусть $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, тогда $y(x_k) = \sin \pi k = 0$ и $\lim_{x_k \rightarrow 0} y(x_k) = 0$; если взять $x'_k = \frac{2}{4k+1}$, то $y(x'_k) = \sin \frac{\pi}{2}(4k+1) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1$. Следовательно, $\lim_{x'_k \rightarrow 0} y(x'_k) = 1$. Таким образом, в любой как угодно малой окрестности точки $x = 0$ справа будут существовать значения функции, равные 0 и 1, что противоречит существованию предела. Аналогично проверяется несуществование предела слева в точке $x = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.2. Показать, что функция $y = a^{\frac{1}{1-x}}$, ($a > 1$) имеет разрыв второго рода в точке $x = 1$.

Указание: Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1-0} a^{\frac{1}{1-x}} = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1+0} a^{\frac{1}{1-x}} = 0$.

Глава 6.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

§ 6.1. Производная и дифференциал

6.1.1. Вычисление скорости прямолинейного движения

Процесс движения точки вдоль прямой называется прямолинейным движением точки и определяется законом движения $S = \varphi(t)$, указывающим координату S на числовой оси в момент времени t . Согласно этому закону за каждый определенный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$, отсчитываемый от момента времени t_0 , точка проходит расстояние $\Delta S = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t_0)$ со средней скоростью

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Чем меньше временной промежуток Δt , тем точнее измеряется средняя скорость перемещения ΔS за время Δt . Принято считать, что в процессе уменьшения интервала Δt мы будем получать значение средних скоростей в момент времени t_0 . Таким образом, мы приходим к понятию истинной скорости в момент времени t_0 , определяемой пределом

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t_0).$$

Заметим, что если этот предел не существует, то величина скорости в момент времени t_0 не определена.

ПРИМЕР 6.1.1.

1. Закон движения задается зависимостью координаты x от времени t
 $x = \frac{gt^2}{2}$. Найти скорость в момент времени $t = 1$.

$$\text{Имеем } \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = g \frac{(t + \Delta t)^2}{2} - g \frac{t^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2},$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + g \frac{\Delta t}{2} \right) = gt.$$

При $t = 1$ получаем $v(1) = g$.

2. Закон движения задается зависимостью

$$x(t) = (t - t_0) \sin \frac{1}{t - t_0}$$

Найти скорость в момент времени $t = t_0$

Вначале заметим, что функция $x(t)$ при $t = t_0$ имеет устранимый разрыв и становится непрерывной, если ее доопределить значением $x(t_0) = 0$ (см. устранимый разрыв в п 5.3.7). Учитывая это, находим

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta t \cdot \sin \frac{1}{\Delta t}.$$

Поэтому предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta t}$$

не существует (см. пример 5.3.5).

Таким образом, точка, выполняющая прямолинейное движение по заданному закону $x(t)$ в момент времени $t = t_0$ истинной скорости не имеет.

6.1.2. Понятие производной

Представление о процессах, происходящих в окружающем мире, связано с понятием скорости изменения тех или иных величин. Мы рассмотрели простейший процесс — прямолинейное движение точки. В других процессах указан закон $y = f(x)$ изменения величины y в зависимости от аргумента x и понятие «скорости» изменения y относительно x приводит к вычислению предела отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента x .

Определение 6.1.1 (производной). Если существует предел отношения приращения функции $f(x)$ в точке x к приращению независимого аргумента Δx , то он называется производной функции $f(x)$ по переменной x и обозначается $f'(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Приняты различные способы обозначения производной: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $y'(x)$, f'_x и др.

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Если $f'(x)$ существует во всех точках интервала (a, b) , то говорят, что $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на (a, b) или $f(x)$ дифференцируема на (a, b) .

6.1.3. Вычисление производной основных элементарных функций $y = ax + c$,

$$y = \sin x, y = \log_a x$$

1. Для $ax + b$ находим $\Delta y = a(x + \Delta x) + c - (ax + c) = a\Delta x$,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

В частности, для постоянной функции $y = C - \text{const}$ приращения $\Delta y = 0$ при любых Δx , поэтому

$$(C)' = 0, \quad (C - \text{const}).$$

2. Для $y = \sin x$ приращение $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ представим в виде $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$. Тогда, используя первый замечательный предел, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.1. Получить аналогичным образом формулу $(\cos x)' = -\sin x$.

3. Для $y = \log_a x$ преобразуем $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x =$

$= \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$. Используя второй замечательный предел, находим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, для натурального логарифма при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

6.1.4. Дифференциал функции

По теореме о необходимом и достаточном условии существования предела мы имеем два эквивалентных условия

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция от Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Обозначим $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ и напомним, что o -малое от Δx обозначает свойство $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Учитывая сказанное, запишем условие существования $f'(x)$ в виде

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x). \quad (6.1.1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (6.1.2)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

Теорема 6.1.1. (о необходимом и достаточном условии дифференцируемости). *Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда ее приращение представляется в виде (6.1.1) и в этом представлении выполняется условие (6.1.2).*

Обратим внимание на то, что: 1) в представлении (6.1.1) выражение $f'(x)\Delta x$ является линейной функцией по Δx в фиксированной точке x ; 2) бесконечно малая функция $o(\Delta x)$ имеет более высокий порядок малости, чем Δx . В силу этих двух свойств представления (6.1.1) выражение $f'(x)dx$ называют линейной частью приращения Δf . Поэтому существует другое определение дифференцируемости.

Определение 6.1.2 (дифференцируемости). Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если ее приращение Δf в этой точке имеет главную линейную часть, т. е. представляется в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \text{где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

При этом величина $A(x) = f'(x)$ называется производной функции $f(x)$ в точке x , а главная линейная часть $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом и обозначается

$$df = f'(x)dx.$$

6.1.5. Геометрический смысл производной и дифференциала

В декартовой системе координат Oxy изобразим график функции $y = f(x)$. Две точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ этого графика соединим отрезком прямой, которую назовем секущей, рис. 6.1.

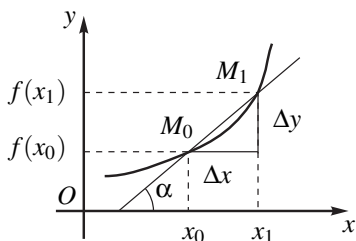


Рис. 6.1

Уравнение этой секущей ищем в виде $y = kx + b$. Учитывая, что угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$, запишем уравнение секущей в виде $y = \frac{\Delta f}{\Delta x}x + b$. Так как эта прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то выполняется условие

$$f(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}x_0 + b,$$

откуда находим коэффициент $b = f(x_0) - \frac{\Delta f}{\Delta x}x_0$. Подставляя найденное значение b в искомое уравнение секущей $y = \frac{\Delta f}{\Delta x}x + b$ и выполняя группировку, получаем уравнение секущей в виде

$$y - f(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0). \quad (6.1.3)$$

Устремим теперь точку M_1 к точке M_0 . Тогда приращение $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$ и если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad (6.1.4)$$

то одновременно выполняются два условия:

1) секущая M_1M_0 стремится при $M_1 \rightarrow M_0$ занять предельное положение, которое мы назовем касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$;

2) угловой коэффициент касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ равен $f'(x_0)$, а само уравнение касательной получается из уравнения (6.1.3) предельным переходом в правой части при $\Delta x = x_1 - x_0 \rightarrow 0$ и принимает вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (6.1.5)$$

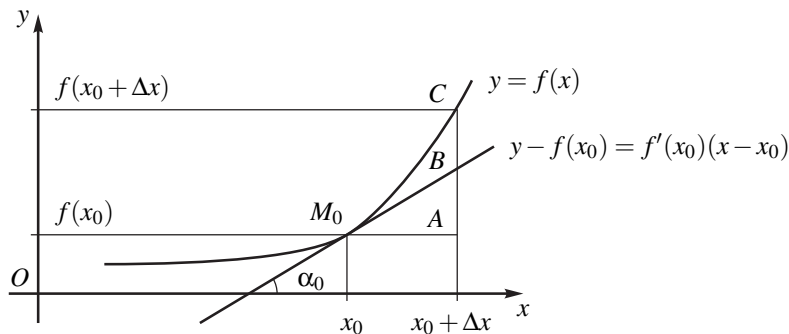


Рис. 6.2

Вывод 1 (геометрический смысл производной). Производная $f'(x_0)$ в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной в этой точке, т. е. равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox , (рис. 6.2)

$$f'(x_0) = k_0 = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Вернемся к уравнению касательной (6.1.5) и заметим, что приращение зависимой переменной линейной функции, определяемой (6.1.5) и соответствующей приращению независимого аргумента Δx равно дифференциалу функции, вычисленному в точке касания x_0 :

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x \quad (6.1.6)$$

Вывод 2 (геометрический смысл дифференциала). Дифференциал $df = f'(x_0)\Delta x$, вычисленный при заданных x_0 и Δx , равен приращению Δy координаты y уравнения касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

На рис. 6.2 величина дифференциала df обозначается отрезком AB . Отрезок AC равен приращению функции Δf , а отрезок BC представляет бесконечно малую более высокого порядка малости $o(\Delta x) = BC$. В этих обозначениях формула приращения функции (6.1.1) принимает вид $AC = AB + BC$. Геометрический смысл формулы приближенного вычисления (6.1.1) состоит в том, что мы пренебрегаем величиной отрезка BC (при достаточно малых значениях Δx !) и считаем, что приближенно выполняется равенство $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + AB$ (рис. 6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.1. На рис. 6.1 и рис. 6.2 мы ограничились изображением случая $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$, полагая, что существование предела (6.1.4) соответствует совпадению левого предела при $\Delta x = x_1 - x_0 < 0$ и правого предела при $\Delta x > 0$, когда $\Delta x \rightarrow 0$. Может случиться, что в точке x_0 существуют левый и правый пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 + 0),$$

не равные между собой: $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$. Тогда говорят, что в точке x_0 существуют левая и правая производные, не равные друг другу. Это означает, что в точке x_0 существуют

левая касательная с угловым коэффициентом $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0 - 0)$ и правая касательная с угловым коэффициентом $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0 + 0)$ (рис. 6.3).

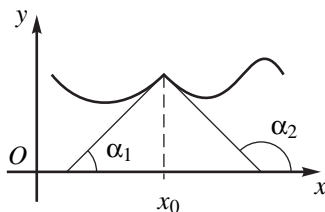


Рис. 6.3

УПРАЖНЕНИЕ 6.1.2. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{при } x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ имеет левую производную и левую касательную и не имеет правой производной и правой касательной.

6.1.6. Непрерывность и дифференцируемость

Функция $f(x)$, дифференцируемая в точке x_0 , будет в этой точке непрерывной. Это следует из формулы для приращений (6.1.2) для дифференцируемой функции. Действительно, согласно этой формуле и свойству абсолютных величин, имеем неравенство

$$\begin{aligned} |\Delta f| &\leq |f'(x_0)| |\Delta x| + |\Delta x| \frac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|} = \\ &= |\Delta x| \left(|f'(x_0)| + \frac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|} \right) \leq |\Delta x| C, \end{aligned}$$

где $|f'(x_0)| + \frac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|} \leq C - \text{const}$.

Согласно этому неравенству для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta < \frac{\varepsilon}{C}$, тогда будет

$$|\Delta x| < \delta \implies |\Delta f| < \varepsilon,$$

что означает непрерывность в точке x_0 .

Обратное утверждение в общем случае не верно. Функция, непрерывная в точке x_0 может в этой точке не иметь производной. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 6.1.2. $y = |x - x_0| = \begin{cases} x - x_0, & \text{при } x \geq x_0, \\ -(x - x_0), & \text{при } x < x_0. \end{cases}$ Здесь $y'(x_0 + 0) = 1 \neq -1 = y'(x_0 - 0)$.

ПРИМЕР 6.1.3. $y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

В этом примере при $x = 0$ не существует ни левая, ни правая производная, хотя эта функция непрерывная в точке $x = 0$.

Не имеет производной при $x = 0$ функция $f(x)$ из упражнения 6.1.2 предыдущего пункта. Для нее $f'(x_0 - 0) = \cos 0 = 1$, а $f'(0 + 0)$ не определена.

§ 6.2. Свойства операции дифференцирования

Множество элементарных функций определялось в п 0.6.4 вводится как результат арифметических операций \pm , \times , div , а также взятия обратной функции f^{-1} и композиции двух и более функций $f \circ g \circ \dots \circ \varphi$ совершаемых в начале над тремя основными функциями $ax + b$, $\sin x$, $\log_a x$, а затем над уже полученными функциями. Поэтому, чтобы выполнить дифференцирование произвольной элементарной функции, надо вывести правила дифференцирования исходных основных элементарных функций и указанных выше операций. Производные трех основных элементарных функций мы вычислили в п 6.1.3. В этом параграфе мы научимся дифференцировать указанные выше три типа операций.

6.2.1. Дифференцирование арифметических операций

Теорема 6.2.1. (арифметические свойства производной). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , тогда

a) их сумма и разность дифференцируемы в x , причем

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

b) их произведение дифференцируемо в точке x , причем

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

в частности $(Cf(x))' = Cf'(x)$, если $C = \text{const}$;

с) их частное дифференцируемо в x , и, если $g(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) используя определение производной и свойство предела суммы, запишем

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x); \end{aligned}$$

б) для доказательства этого свойства запишем $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$. Тогда, по определению производной, с учетом арифметических свойств предела, находим

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g. \end{aligned}$$

Приращение дифференцируемой функции Δg является бесконечно малой функцией, см. п 6.1.6, поэтому $\Delta g \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и мы получаем требуемое правило б). Правило $(Cf(x))' = Cf'(x)$ следует отсюда, если $g(x) = C = \text{const}$, так как $C' = 0$;

с) вначале преобразуем отношение приращения функции $f(x)/g(x)$ к приращению аргумента Δx , предварительно заметив, что из дифференцируемости $g(x)$ в точке x следует непрерывность $g(x)$ и то, что $g(x) \neq 0$ влечет это свойство $g(x + \Delta x) \neq 0$ в некоторой окрестности x , поэтому определено частное

$$\frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2(x) + g(x) \Delta g}.$$

Теперь, учитывая, что $\Delta g \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, и используя арифметические свойства предела, заключаем, что левая часть этих равенств стремится по определению производной к величине $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$, а правая часть — к величине

$\frac{f'g - g'f}{g^2}$. Правило с), а вместе с ним и теорема 6.2.1 доказаны.

Следствие 6.2.1. Пусть $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)$, где C_1, C_2, \dots, C_n — const и все функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ дифференцируемы, тогда

$$f'(x) = C_1 f_1'(x) + \dots + C_n f_n'(x).$$

Это следует из многократного применения свойств а) и б) теоремы 6.2.1.

Следствие 6.2.2. Если $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ и функции $u(x), v(x), w(x)$ дифференцируемы, то, применяя правило б) дважды, получим

$$((uv)w)' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Аналогично дифференцируется произведение большего числа сомножителей.

Следствие 6.2.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , тогда: а) определен дифференциал их суммы и разности:

$$d(f \pm g) = df \pm dg;$$

б) определен дифференциал их произведения

$$d(fg) = gdf + fdg,$$

в частности при $g = C$ — const $d(Cf) = Cdf$;

с) определен дифференциал их частного u , если $g(x) \neq 0$, то

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Проверка этих свойств основана на связи между дифференциалом и производной функции $f(x) = f' dx$:

$$а) d(f \pm g) = (g \pm g)' dx = f' dx \pm g' dx = df \pm dg;$$

б) $d(fg) = (fg)' dx = (f' dx)g + f(g' dx) = gdf + fdg$, в частности если $g = C$ — const, то $dg = C' dx = 0$ и мы получаем $d(Cf) = Cdf$;

$$с) d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{(f' dx)g - f(g' dx)}{g^2} = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Теорема 6.2.1 позволяет расширить список функций, которые мы уже умеем дифференцировать. Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 6.2.1.

1. Вычислим $(\operatorname{tg} x)'$.

Так как $(\sin x)' = \cos x$, а $(\cos x)' = -\sin x$, см. п 6.1.3, то согласно правилу с) теоремы 6.2.1 находим

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$2. (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1.$$

$$3. \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)'x - x' \sin x}{x^2} = \frac{(\cos x)x - \sin x}{x^2}.$$

$$4. (\ln x^\alpha)' = (\alpha \ln x)' = \alpha(\ln x)' = \frac{\alpha}{x}, \alpha - \text{const.}$$

6.2.2. Производная сложной функции

Теорема 6.2.2. (правило дифференцирования сложной функции). Пусть определена сложная функция $f \circ \varphi(x)$ и пусть:

1) существует $\varphi'(x)$ в точке x ,

2) существует $f'(y)$ в точке $y = \varphi(x)$.

Тогда существует $(f \circ \varphi(x))'$ в точке x , причем

$$(f \circ \varphi(x))' = (f' \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (6.2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости (п 6.1.4) напомним

$$\Delta f = f(y + \Delta y) - f(y) = f'(y)\Delta y + o(\Delta y),$$

где $o(\Delta y)/\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$. Разделив это равенство на Δx , получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(y) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\Delta y)}{\Delta x}.$$

Представим второе слагаемое в виде $\frac{o(\Delta y)}{\Delta x} = \frac{o(\Delta y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и, учитывая, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, заключаем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{o(\Delta y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{o(\Delta y)}{\Delta y} = 0.$$

Учитывая это и переходя к пределу в выражении $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(y)y'(x).$$

Подставляя сюда $y = \varphi(x)$ и учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi(x + \Delta x) - f \circ \varphi(x)}{\Delta x} = (f \circ \varphi(x))'.$$

Получаем требуемое правило.

Следствие 6.2.4. Пусть определена сложная функция, являющаяся композицией более двух функций $f \circ \varphi \circ \psi(x)$. Тогда, применяя теорему 6.2.2 вначале к сложной функции $f \circ f_1(x)$, где $f_1(x) = \varphi \circ \psi(x)$, а затем к $f_1(x) = \varphi \circ \psi(x)$, получим

$$(f \circ \varphi \circ \psi(x))' = (f' \circ \varphi \circ \psi(x))(\varphi' \circ \psi(x))\psi'(x).$$

Применение этого правила требует правильной расстановки композиций в сложной функции.

ПРИМЕР 6.2.2. Найдите $(\operatorname{tg}^3(x))'$.

Здесь $\operatorname{tg}^3(x)$ есть композиция двух функций y^3 и $y = \operatorname{tg} x$. Поэтому $(\operatorname{tg}^3(x))' = (y^3)'_y y'_x = 3y^2(x) \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg}^2(x)}{\cos^2(x)}$.

ПРИМЕР 6.2.3. Найдите $(\operatorname{tg} x^3)'$.

Здесь $\operatorname{tg} x^3 = z(y(x))$, $z(y) = \operatorname{tg} y$, $y = x^3$. Поэтому $(\operatorname{tg} x^3)' = z'_y y'_x = \frac{1}{\cos^2 y} 3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$.

ПРИМЕР 6.2.4. Найдите $(\ln(3 + 2 \sin x))'$.

Здесь $\ln(3 + 2 \sin x) = w(z(y(x)))$, где $w(z) = \ln z$, $z(y) = 3 + 2y$, $y(x) = \sin x$. Поэтому $(\ln(3 + 2 \sin x))' = w'_z z'_y y'_x = \frac{1}{z} \cdot 2 \cos x = \frac{2 \cos x}{3 + 2 \sin x}$.

Следствие 6.2.5. (инвариантность формы дифференциала). Дифференциал сложной функции $w = w(y)$, где $y = y(x)$ может быть записан в виде $dw = w'_y dy$, где $dy = y'_x dx$. Таким образом формула для дифференциала сложной функции имеет такой же вид, как и в том случае, если бы промежуточный аргумент y являлся бы независимой переменной

$$dw = (w(y(x)))'_x dx = w'_y y'_x dx = w'_y dy. \quad (6.2.2)$$

Это свойство дифференциала сложной функции называется инвариантностью формы дифференциала.

6.2.3. Производная обратной функции

Теорема 6.2.3. (о производной обратной функции). Пусть

1) функция $y = y(x)$ в окрестности точки x имеет обратную непрерывную непрерывную функцию $x = x(y)$,

2) существует конечная производная $y'(x) \neq 0$ в точке x .

Тогда обратная функция $x(y)$ имеет производную в точке $y = y(x)$, вычисляемую по правилу

$$x'_y(y) = \frac{1}{y'(x(y))}. \quad (6.2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности $x(y)$ условие $\Delta y \rightarrow 0$ влечет $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}.$$

Следовательно существует предел левой части, который по определению равен $x'_y(y)$. Осталось заметить, что в правой части $x = x(y)$. Правило (6.2.3) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.1. Обратим внимание на то, что левая и правая часть формулы (6.2.3) зависит того же аргумента, от которого зависит обратная функция.

Применим теорему 6.2.3 к вычислению обратных функций.

1. Рассмотрим $y = a^x$. Эта функция является обратной к функции $x = \log_a y$. Так как

$$x'_y = (\log_a y)'_y = \frac{1}{y \ln a},$$

$$\text{то } y'_x(x) = (a^x)' = \frac{1}{x'_y(y)} = y \ln a \Big|_{y=a^x} = a^x \ln a.$$

Таким образом

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

в частности, при $a = e$, получаем $(e^x)' = e^x$.

Полученная формула справедлива для значений аргументов $x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow y \in (0, \infty)$.

2. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow y \in (-\pi/2, \pi/2)$, являющаяся обратной к $x = \sin y$.

Так как $(\sin y)' = \cos y > 0$ при $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, то $y'_x = (\arcsin x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Big|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Аналогично доказывается формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. Вычислим $(\operatorname{arctg} x)'$. Здесь $x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = y \in (-\pi/2, \pi/2)$, для этих y $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$. Применяя формулу (6.2.3), находим

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \Big|_{a=\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1 + x^2},$$

откуда

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Аналогично вычисляется формула

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Рассмотрим $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число (область определения $y(x)$ зависит от α). Представим эту функцию в виде композиции

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = w(z(y(x))), \text{ где } w(z) = e^z, z(y) = \alpha y, y(x) = \ln x.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$(x^\alpha)'_x = w'_z z'_y y'_x = e^z \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

6.2.4. Сводка основных правил и формул

Для удобства соберем воедино полученные нами правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций.

Правила дифференцирования	
производные	дифференциалы
$(Cu)' = Cu' \quad (C - \text{const})$	$d(Cu) = C du$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(uv)' = u'v \pm uv'$	$d(uv) = duv \pm udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{duv - udv}{v^2}$
$(z(y(x)))' = z'_y(y(x))y'_x(x)$	$d(z(y(x))) = z'_y dy = z'_y y'_x(x) dx$

Таблица производных	
1. $(C)' = 0$ (C — const)	
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x)' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
3. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	
5. $(\sin x)' = \cos x$ 6. $(\cos x)' = -\sin x$	
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

ПРИМЕР 6.2.5.

$$1. y = e^{\operatorname{tg}^2 x}; y' = (e^{\operatorname{tg}^2 x})' = e^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$2. y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0;$$

$$y' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

$$3. y = \sin^3 ax; y' = 3 \sin^2 ax \cos ax \cdot a.$$

$$4. y = \sqrt[n]{x^2+1} - \sqrt[n]{x^2-1}; y' = ((x^2+1)^{1/n} - (x^2-1)^{1/n})' =$$

$$= \frac{1}{n} (x^2+1)^{1/n-1} \cdot 2x - \frac{1}{n} (x^2-1)^{1/n-1} \cdot 2x =$$

$$= \frac{2x}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{(x^2+1)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{(x^2-1)^{n-1}}} \right).$$

$$5. (e^x \cos 3x)' = e^x \cos 3x - 3e^x \sin 3x.$$

$$6. \left(\frac{e^x}{\sin 2x}\right)' = \frac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

$$7. (\operatorname{arctg}^2(\sin x))' = 2 \operatorname{arctg} \sin x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

6.2.5. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование показательной-степенной функции $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Эта функция не является элементарной (если обе функции f и φ отличны от постоянной), так как не является композицией вида $f \circ \varphi(x)$. Чтобы найти $y'(x)$ выполним операцию логарифмирования равенства $y = f^\varphi$:

$$\ln y(x) = \varphi(x) \ln f(x)$$

и продифференцируем обе части, считая $\ln y(x)$ сложной функцией по x . Тогда

$$\frac{y'}{y} = \varphi' \ln f + \frac{\varphi}{f} f'.$$

Выражая отсюда y' и подставляя значение $y(x)$, получим

$$y'(x) = y(x) \left(\varphi' \ln f + \frac{\varphi}{f} f' \right) = f^\varphi \varphi' \ln f + f^{\varphi-1} \varphi f'.$$

ПРИМЕР 6.2.6. $y = x^{\sin x}$. Логарифмируем это равенство

$$\ln y = \sin x \ln x,$$

дифференцируем и выражаем y' :

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}, \quad y' = x^{\sin x} \cos x \ln x + x^{\sin x - 1} \sin x.$$

6.2.6. Дифференцирование произведения

Пусть $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$. Применять правило дифференцирования произведения здесь неэффективно если $n \geq 3$. Логарифмируя это равенство, получим

$$\ln F(x) = \ln f_1(x) + \dots + \ln f_n(x).$$

Дифференцируем обе части, получим

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f_1'}{f_1} + \dots + \frac{f_n'}{f_n},$$

откуда находим

$$F'(x) = (f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)) \left(\frac{f_1'}{f_1} + \dots + \frac{f_n'}{f_n} \right),$$

ПРИМЕР 6.2.7. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$. Логарифмируя это равенство, получаем

$$\ln y = \ln \sin x + \ln \sin 2x + \ln \sin 3x.$$

Дифференцируем обе части и выражаем y'

$$y'(x) = (\sin x \sin 2x \sin 3x) (\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x + 3 \operatorname{ctg} 3x).$$

6.2.7. Дифференцирование неявно заданных функций

Пусть функция $y(x)$ задана неявно посредством уравнения $F(x, y) = 0$. Тогда дифференцируем заданное уравнение $F(x, y(x)) = 0$, считая y зависящим от x . Из полученного после дифференцирования равенства выражаем $y'(x)$.

Рассмотрим примеры.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (уравнение эллипса). Дифференцируя обе части этого уравнения по x , получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Отсюда выражаем $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

2. $e^{y+x} = 2y + x$. Дифференцируя, находим $e^{y+x}(y' + 1) = 2y' + 1$. Отсюда выражаем y'

$$y' = \frac{e^{x+y} - 1}{2 - e^{x+y}}.$$

Чтобы найти значение такой производной в точке $x = x_0$, надо из уравнения $F(x, y) = 0$ при $x = x_0$ выразить значение y_0 и подставить в выражение для y' . Иногда это бывает практически невыполнимо, как в примере 2, где x и y связаны соотношением $e^{y+x} = 2y + x$, не допускающим разрешение относительно y .

6.2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (t_1, t_2)$, (см. п. 0.6.3).

Теорема 6.2.4. Пусть

1) функция $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке $t \in (t_1, t_2)$ конечные производные $x'(t)$ и $y'(t)$;

2) $x'_t(t) \neq 0$. Тогда существует производная $y'_x(x)$ в точке $x = x(t)$, причем

$$y'_x(x(t)) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \quad (6.2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости, напомним

$$\Delta x = x'_t(t)\Delta t + o_1(\Delta t), \quad \Delta y = y'_t(t)\Delta t + o_2(\Delta t),$$

где $o_i(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$). Преобразуем отношение

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y'_t \Delta t + o_2}{x'_t \Delta t + o_1} = \frac{y'_t \Delta t + o_2}{x'_t \Delta t \left(1 + \frac{o_1}{\Delta t} \frac{1}{x'_t}\right)} = \\ &= \frac{y'_t}{x'_t} \frac{1}{1 + \frac{o_1}{\Delta t} \frac{1}{x'_t}} + \frac{o_2}{\Delta t} \frac{1}{x'_t + \frac{o_1}{\Delta t}} \end{aligned}$$

Так как $o_i/\delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, ($i = 1, 2$), то первое слагаемое имеет предел y'_t/x'_t , а второе является бесконечно малой функцией при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, правая часть равенства стремится к y'_t/x'_t .

В левой части, в силу непрерывности дифференцируемой функции $x(t)$, условие $\Delta t \rightarrow 0$ влечет $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x(x(t)).$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 6.2.8. Точка движется по окружности по закону $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$. Найдите y'_x .

РЕШЕНИЕ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\omega R \cos \omega t}{-\omega R \sin \omega t} = -\frac{x(t)}{y(t)}$.

Из этой формулы следует, что в точках пересечения с осью Ox , когда $y = 0$, касательная параллельна оси Oy .

ПРИМЕР 6.2.9. $x = e^t$, $y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Найдите y'_x .

РЕШЕНИЕ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}}{e^t} = \frac{1 - e^{-2t}}{2} = \frac{1 - 1/x^2}{2} =$
 $= \frac{x^2 - 1}{2x^2}$.

§ 6.3. Повторное дифференцирование

6.3.1. Производные старших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$, рассматриваемая как функция от x , снова является дифференцируемой функцией. Тогда определена вторая производная

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

(читается « d два f по dx дважды»).

Аналогично определяются производные третьего

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{d^3 f}{dx^3}.$$

(читается « d три f по dx трижды») и n -го порядков

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

При небольших значениях n приняты обозначения

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = (f')' = f'', \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = (f'')' = f''', \quad \frac{d^4 f}{dx^4} = f^{IV} \text{ и т. д.}$$

Если функция $f(x)$ имеет n -ю конечную производную в каждой точке интервала (a, b) , то она называется n -раз дифференцируемой на (a, b) (дважды, трижды и т. д.)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.1. *Определение второй производной связано с вычислением ускорения — производной от скорости. Производные высоких порядков, как будет показано дальше, используются в задаче приближения функции многочленами.*

Рассмотрим примеры:

1. $y = x^m$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = \begin{cases} m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n} & \text{при } n \leq m, \\ 0 & \text{при } n > m. \end{cases}$$

2. xe^x . Найти $y^{(n)}$.

$$y' = e^x + xe^x;$$

$$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x;$$

...

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x.$$

6.3.2. Повторное дифференцирование неявно заданных функций

Пусть $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Дифференцируя это уравнение и выражая y' , получаем зависимость вида $y' = F_1(x, y)$. Дифференцируя эту зависимость еще раз, получаем выражение вида $y'' = F_2(x, y, y')$. Подставляя сюда $y' = F_1(x, y)$, получаем выражение для y'' .

Рассмотрим примеры:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$. Найти y'' . Дифференцируя уравнение, получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0 \iff y' = -\frac{x}{y} \frac{b^2}{a^2}.$$

Дифференцируя повторно и подставляя значение y' , получаем

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y - xy'}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{y} + \frac{x^2 b^2}{y^3 a^2} \right).$$

2. $x^2 - y^2 = 1$. Найти y'' . Дифференцируя первый раз, находим y' :

$$2x - 2yy' = 0 \implies y' = \frac{x}{y}.$$

Дифференцируя второй раз и подставляя y' , находим

$$y'' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}.$$

6.3.3. Повторное дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически $y = y(t)$, $x = x(t)$ и функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на (t_1, t_2) требуемое число раз, причем $x'_t(t) \neq 0$. Будем считать, что в равенстве

$$y'_x(x(t)) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)},$$

выражающем неявную производную, обе части зависят от (одного и того же!) аргумента t . Дифференцируя это равенство по t и учитывая, что $y'_x(x(t))$ — сложная функция по t , получаем

$$\frac{d}{dx}(y'_x(x(t))) = y''_x x'_t = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^2_t} \implies y''_x(x(t)) = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Чтобы найти $y'''_x(x)$, дифференцируем обе части полученного равенства по t , и, учитывая, что $(y''_x(x(t)))'_t = y'''_x(x) \cdot x'_t$, выражаем $y'''_x(x)$. Таким образом можно вычислить производную по x $y_x^{(n)}(x)$ любого порядка n .

ПРИМЕР 6.3.1 (движение по окружности). $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$. Найдите y''_x . Находим $y'_x = -\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} = -\operatorname{ctg} \omega t$. Дифференцируя по t , получаем

$$y''_x x'_t = \frac{\omega}{\sin^2 \omega t} \implies y''_x = \frac{1}{x'_t} \frac{\omega}{\sin^2 \omega t} = -\frac{1}{R \sin^3 \omega t}.$$

ПРИМЕР 6.3.2. $x = e^t$, $y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Найдите y''_x . Находим $y'_x = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$. Дифференцируя по t , получим

$$y''_x x'_t = -e^{-2t} \implies y''_x = -e^{-2t} \frac{1}{x'_t} = -e^{-3t} = -\frac{1}{x^3}.$$

6.3.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производные $f'(x)$ и $f''(x)$ при $x \in (a, b)$. Тогда определен дифференциал второго порядка $d^2 f = d(df)$ от дифференциала первого порядка $df = f'(x)dx$, в котором x является независимой переменной, а приращение dx считается фиксированным (постоянным). Таким образом, учитывая, что $d(dx) = 0$, получаем формулу

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2.$$

Если существуют соответствующие производные старших порядков, то по индукции находим:

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f''(x)dx^2) = d(f''(x))dx^2 = f'''(x)dx^3;$$

если уже $d^{(n-1)} f = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$, то

$$d^{(n)} f(x) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = d(f^{(n-1)}(x))dx^{n-1} = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Примеры:

1. $y = x^n$. Найти $d^{(m)}y$. Вычисляем m -ю производную

$$y^{(m)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & \text{при } n \leq m, \\ 0 & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Затем по формуле n -го дифференциала находим

$$d^m y = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} dx^m & \text{при } n \leq m \\ 0 & \text{при } m > n. \end{cases}$$

2. $y = \sin x$. Найти $d^3 y$. Вычисляем $y'''(x) = -\cos x$ и находим $d^3 y = y''' dx^3 = -\cos x dx^3$.

§ 6.4. Приложения дифференциального исчисления

Мы уже видели, что в основе большинства приложений дифференциального исчисления явно или опосредованно лежат физический и геометрический смыслы производных. С физической точки зрения, если отвлечься от истолкования переменных x и y , то производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ — это скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x . Например:

1) Если $y = f(x)$ — это путь, пройденный материальной точкой за время x , то $f'(x)$ — скорость движения.

2) Если $y = f(x)$ — это скорость движения, то $f'(x)$ — ускорение (скорость изменения скорости).

3) Если $y = f(x)$ — это количество электричества (в кулонах), протекающего через поперечное сечение проводника за время x , то $f'(x)$ — сила тока.

4) Если $y = f(x)$ — это количество тепла (в калориях), которое нужно передать телу, чтобы нагреть его от 0°C до $x^\circ\text{C}$, то $f'(x)$ — теплоемкость тела.

Геометрически производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ (если, конечно, эта касательная существует). Отсюда, в частности, следует, что существование производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 эквивалентно возможности проведения касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Сопоставляя физический и геометрический смыслы производной, получаем часто используемый в технических дисциплинах (например, в радиоэлектронике) метод геометрического дифференцирования. Пусть задана некоторая кривая, выражающая зависимость некоторой величины от какой-либо другой, причем аналитическое выражение этой зависимости неизвестно (например, это кривая на экране осциллографа) и требуется найти скорость роста этой величины. В данной точке кривой строим касательную и транспортиром измеряем угол наклона этой касательной к горизонтали. Тангенс этого угла и дает искомую скорость роста исследуемой величины.

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления к исследованию функций, заданных аналитически. При этом будем предполагать, что график функции является либо гладкой, либо кусочно-гладкой кривой. Это означает, что функция либо дифференцируема во всех точках области определения, либо эту область можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция дифференцируема (сопоставьте понятие гладкости с геометрическим смыслом производной).

6.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Из геометрического смысла производной следует, что знание производной $f'(x)$ позволяет делать выводы о поведении самой функции $f(x)$. Этому вопросу посвящены теоремы данного параграфа.

Напомним, что функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на отрезке $[a, b]$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$\begin{aligned} a \leq x_1 < x_2 \leq b &\implies f(x_1) \leq f(x_2); \\ a \leq x_1 < x_2 \leq b &\implies f(x_1) \geq f(x_2). \end{aligned}$$

Теорема 6.4.1. Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 функция $f(x)$ принимает значения, большие (мень-

шие), чем $f(x_0)$ справа от x_0 ; слева от x_0 функция $f(x)$ принимает значения, меньшие (большие), чем $f(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если $f'(x_0) > 0$, то по свойствам пределов (каких?), найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в которой при $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Если $x_0 - \delta < x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, т. е. $f(x) < f(x_0)$. Если же $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $x - x_0 > 0$, и тогда $f(x) - f(x_0) > 0$ то есть $f(x) > f(x_0)$. Теорема доказана.

Заметим, что из этой теоремы не следует монотонность функции в окрестности точки x_0 , но если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) во всех точках этой окрестности, то в ней функция будет монотонной.

Теорема 6.4.2 (теорема Ферма). Если функция дифференцируема на промежутке $[a, b]$ и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение, то производная в этой точке равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему от противного. Предположим, что в точке c производная $f'(c) \neq 0$. Но тогда по предыдущей теореме в достаточно малой окрестности точки c функция либо монотонно возрастает (если $f'(x_0) > 0$), либо монотонно убывает (если $f'(x_0) < 0$). В обоих случаях значение $f(c)$ не может быть ни наибольшим, ни наименьшим. Теорема доказана.

Заметим, что требование дифференцируемости в этой теореме не может быть опущено. Например, функция $y = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет в точке $x = 0$ наименьшее значение $y = 0$, а производная не обращается в нуль ни в одной точке данного отрезка.

Теорема Ферма выражает очевидный геометрический факт: касательная к гладкой кривой во внутренних точках наибольшего или наименьшего значений горизонтальна. На рис. 6.4 это точка c . В теореме существенны предположения, что точка c



Рис. 6.4

В основе многих теорем дифференциального исчисления лежит следующая теорема.

Теорема 6.4.3 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям:

- 1) она определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$;
 - 2) дифференцируема в открытом промежутке (a, b) ;
 - 3) на концах промежутка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.
- Тогда между a и b найдется точка c такая, что $f'(c) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на замкнутом промежутке, принимает на этом промежутке свои наименьшее m и наибольшее M значения.

Возможны два случая:

1) $m = M$. Так как $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$, то на этом промежутке функция постоянна: $f(x) \equiv M$. Значит во всем промежутке $f'(x) = 0$ и в качестве точки c можно взять любую точку промежутка $[a, b]$.

2) $m < M$. В этом случае, так как $f(a) = f(b)$, по крайней мере одно из значений m или M достигается во внутренней точке c промежутка $[a, b]$. По теореме Ферма производная $f'(c)$ в этой точке равна нулю. Теорема доказана.

Из теоремы Ролля получаем очевидное следствие: между двумя нулями дифференцируемой функции $f(x)$ содержится нуль ее производной: если $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то существует $x_3 \in (x_1, x_2)$ такое, что $f'(x_3) = 0$.

Геометрически теорема Ролля выражает вполне очевидный факт: если крайние ординаты гладкой кривой равны, то на кривой найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 6.5).

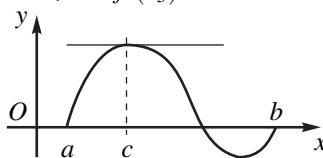


Рис 6.5

является внутренней точкой промежутка и что кривая гладкая. Без этих предположений теорема неверна. Это видно из того же рисунка, если в качестве основного промежутка $[a, b]$ взять промежутки $[b, b_1]$ (здесь наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе промежутка) и $[c, b_1]$ (внутри этого промежутка есть точка, в которой функция не имеет производную).

Теорема 6.4.4 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет двум условиям:

1) она определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$;

2) дифференцируема в открытом промежутке (a, b) .

Тогда между a и b найдется точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (6.4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на (a, b) имеет производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Подставляя $x = a$ и $x = b$, убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$. Таким образом, между a и b найдется такая точка c , что $F'(c) = 0$. Следовательно, $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Что и требовалось доказать.

Теорему Лагранжа называют также *теоремой о среднем значении*, а формулу (6.4.1) *формулой Лагранжа*. Эту формулу часто записывают в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (6.4.2)$$

Следствие 6.4.1. Если $f'(x) = 0$ на промежутке (a, b) , то функция $f(x)$ постоянна на этом промежутке: $f(x) \equiv C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из промежутка (a, b) По формуле Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = f(x_1)$, то есть в двух произвольных точках промежутка (a, b) функция принимает одинаковые значения и, следовательно, она постоянна на этом промежутке. Что и требовалось доказать.

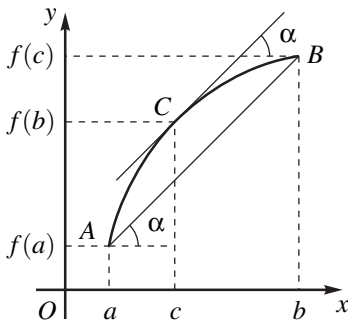


Рис 6.6

касательной к графику функции $f(x)$ в точке $C(c, f(c))$. Формула Лагранжа (6.4.1) выражает очевидный геометрический факт: на гладкой кривой найдется точка C , в которой касательная параллельна секущей (рис. 6.6).

Теорема Лагранжа имеет полезное для последующего обобщение.

Теорема 6.4.5 (теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

- 1) непрерывны на $[a, b]$;
- 2) дифференцируемы на (a, b) ;
- 3) $g'(x) \neq 0$ на (a, b) .

Тогда между a и b найдется такая точка c , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.4.3)$$

Эта формула называется формулой Коши.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, так как иначе по теореме Ролля на интервале (a, b) нашлась бы точка c , в которой $g'(c) = 0$, что противоречило бы условию. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (проверьте!). Следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$. Но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Отсюда получаем требуемое. Теорема доказана.

Следствие 6.4.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и $f(a) = g(a) = 0$, то для любого $x: a < x < b$, существует такое $c: a < c < x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа, рассмотрим график функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ проведем секущую AB . Очевидно, отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

есть тангенс угла наклона этой секущей к оси Ox . С другой стороны $f'(c)$ есть тангенс угла наклона

6.4.2. Формула Тейлора

Среди элементарных функций наиболее простыми являются степенные функции $y = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$ и их линейные комбинации $y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ — *многочлены* (или *полиномы*) степени n . Для вычисления значений $P_n(x_0)$ этих функций достаточно четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления (числа a_k могут быть дробными). Последнее обстоятельство является особенно ценным в вычислительной технике.

Пусть нам известны значения некоторой функции $y = f(x)$ и n ее первых производных в точке (x_0) : $a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = f''(x_0), \dots, a_n = f^{(n)}(x_0)$. Как приближенно вычислить значение функции $f(x)$ в точке x , близкой к x_0 ?

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}(x - x_0)^n.$$

Очевидно, $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$. Найдем производные многочлена $P_n(x)$:

$$P'_n(x) = a_1 + a_2(x - x_0) + \frac{a_3}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}(x - x_0)^{n-1};$$

$$P''_n(x) = a_2 + a_3(x - x_0) + \frac{a_4}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)}(x - x_0)^{n-2};$$

$$P_n^{(k)}(x) = a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)}(x - x_0)^{n-k}, \quad k < n;$$

$$P_n^{(n)}(x) = a_n.$$

Отсюда получаем $P'_n(x_0) = a_1 = f'(x_0), P''_n(x_0) = a_2 = f''(x_0), \dots$, и вообще

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Условимся считать, что производная нулевого порядка функции совпадает с ней самой: $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$. Тогда последнее равенство справедливо и при $k = 0$.

Покажем, что такой многочлен единствен. Допустим, существует другой многочлен $\tilde{P}(x)$ степени не выше n , для которого

$$\tilde{P}(x_0) = a_0, \tilde{P}'(x_0) = a_1, \tilde{P}''(x_0) = a_2, \dots, \tilde{P}^{(n)}(x) = a_n.$$

Положим $Q(x) = P_n(x) - \tilde{P}(x)$. Так как $Q^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) - \tilde{P}^{(n)}(x) = a_n - a_n = 0$, то по следствию из теоремы Лагранжа $Q^{(n-1)}(x)$ тождественно равна постоянной, а так как $Q^{(n-1)}(x_0) = P_n^{(n-1)}(x_0) - \tilde{P}^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} - a_{n-1} = 0$, то $Q^{(n-1)}(x) \equiv 0$. Повторяя рассуждения отсюда получаем, что $Q^{(n-2)}(x)$ постоянна и равна нулю. Продолжая эти рассуждения, получим, что $Q(x)$ постоянна и тождественно равна нулю. Следовательно, $P_n(x) \equiv \tilde{P}(x)$.

Определение 6.4.1. Если функция $f(x)$ имеет производные порядка 1, 2, ..., n , то многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}(x - x_0)^n. \quad (6.4.4)$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 .

Коэффициенты этого многочлена называются *коэффициентами Тейлора*: коэффициент при $(x - x_0)^k$ называется k -м коэффициентом Тейлора. Мы раньше условились считать производную нулевого порядка самой функцией $f(x)$: $f^{(0)}(x_0) = f(x)$. Тогда формулу (6.4.4) можно записать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (6.4.5)$$

где обозначено $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$, причем условимся считать $0! = 1$.

Зададимся вопросом: насколько отличаются значения многочлена Тейлора $P_n(x)$ от значения функции $f(x)$ хотя бы при x близких к x_0 ? Для этого изучим *остаток*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 .

Из равенства

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

имеем

$$R_{n+1}(x_0) = R'_{n+1}(x_0) = R''_{n+1}(x_0) = \dots = R^{(n)}_{n+1}(x_0) = 0. \quad (6.4.6)$$

Предположим, функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале (a, b) , содержащем точки x и x_0 , и что она имеет в этом интервале производную $n + 1$ -го порядка.

Рассмотрим промежуток $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), содержащийся в (a, b) . Учитывая (6.4.6), по теореме Коши имеем

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n},$$

для некоторого c_1 , лежащего между x и x_0 .

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n} &= \frac{R'_{n+1}(c_1) - R'_{n+1}(x_0)}{(n+1)(c_1-x_0)^n - (n+1)(x_0-x_0)^{n+1}} = \\ &= \frac{R''_{n+1}(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}}, \end{aligned}$$

для некоторого c_2 , лежащего между c_1 и x_0 .

Продолжая рассуждать таким же образом, в итоге получим

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

для некоторого c между x_n и x_0 , а следовательно, между x и x_0 .

Так как многочлен $P_n(x)$ имеет порядок n , то $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, значит, $R_{n+1}^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, и для остатка получаем выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad (6.4.7)$$

Остаток, записанный в таком виде, называется *остаточным членом в форме Лагранжа*. Из формулы (6.4.7) следует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0) = 0.$$

Это означает, что $R_{n+1}(x)$ является при $x \rightarrow x_0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$. Остаток в этом случае записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0 \quad (6.4.8)$$

и называют *остаточным членом в форме Пеано*.

Чаще всего используют остаточный член в форме Лагранжа, ввиду его простоты. Но иногда эта форма неприменима и тогда приходится применять другие формы, менее простые. Из них упомянем *остаточный член в форме Коши*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Таким образом, получили теорему

Теорема 6.4.6 (теорема Тейлора). Если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и во всех внутренних точках этой окрестности имеет производную $(n + 1)$ -го порядка, то для любого x из этой окрестности

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ &\quad + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

где остаточный член $R_{n+1}(x)$ можно представить в форме Лагранжа (6.4.7) или в форме Пеано (6.4.8).

При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x) = \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

и называется формулой Маклорена. Для остаточного члена в этом случае имеем

$$R_{n+1}(x) = o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (6.4.11)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} x^{n+1}. \quad (6.4.12)$$

Здесь c — точка между нулем и x и, следовательно, ее можно представить в виде $c = \theta x$, где θ — некоторое число между нулем и единицей: $0 < \theta < 1$.

Значение формулы Тейлора (6.4.9) состоит в том, что она позволяет произвольную, достаточное число раз дифференцируемую в окрестности точки x_0 функцию представить в виде суммы многочлена и некоторой величины, имеющей, при x близких к x_0 , порядок малости $|x - x_0|^{n+1}$. То есть приближенное равенство

$$\begin{aligned} f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

тем точнее, чем x ближе к x_0 . В этом случае форма Пеано, характеризующая лишь стремление остатка к нулю при $x \rightarrow x_0$, непригодна для приближенных вычислений. В большинстве приложений у рассматриваемых функций существуют и непрерывны производные всех порядков, так что в формуле Тейлора в качестве n можно взять любое натуральное число. Предположим, все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той константой:

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

Тогда, используя остаточный член в форме Лагранжа (6.4.7), будем иметь

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}. \quad (6.4.14)$$

Покажем, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого x . Возьмем произвольное число x и выберем натуральное число n_0 , большее, чем $2|x-x_0|$. Тогда при $n \geq n_0$ будем иметь $n > 2|x-x_0|$ или $\frac{|x-x_0|}{n} < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| &= \frac{|(x-x_0)^{n_0}|}{(n_0)!} \frac{|x-x_0|}{n_0+1} \frac{|x-x_0|}{n_0+2} \dots \frac{|x-x_0|}{n+1} < \\ &< \frac{|(x-x_0)^{n_0}|}{(n_0)!} \frac{1}{2^{n+1-n_0}} < \frac{|2(x-x_0)|^{n_0}}{(n_0)!} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Так как первый множитель в правой части последнего неравенства не зависит от n , а второй $1/2^n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} = 0 \xrightarrow{(6.4.14)} \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Таким образом, в этом случае можно оценить погрешность приближенной формулы (6.4.13) (если n задано), либо подобрать n так, чтобы была гарантирована заданная точность. В общем случае необходимо исследовать стремление к нулю остатка в рассматриваемой точке x .

В недавнем прошлом основным приложением рядов Тейлора было их использование в приближенных вычислениях значений функции. С развитием вычислительной техники эти вопросы, по-видимому, потеряли свою актуальность. Тем не менее поле применения рядов Тейлора необозримо. Например, их часто с успехом используют для получения аналитического выражения, пусть хотя бы приближенного, решения функциональных уравнений (т. е. уравнений содержащих неизвестную функцию и, возможно, ее производные).

ПРИМЕР 6.4.1. *Найти приближенное решение уравнения*

$$\sin x + \sin y = x - y$$

в окрестности точки $x_0 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Функцию $y = y(x)$ ищем в виде (6.4.10). Подставляя в уравнение $x = x_0 = 0$, получим $\sin y = -y$. Значит, $y(x_0) = 0$. Продифференцируем данное уравнение

$$\cos x + \cos y \cdot y' = 1 - y'.$$

Подставим $x = 0, y = y(x_0) = 0$: $\cos 0 + \cos 0 \cdot y'(0) = 1 - y'(0)$. Отсюда $y'(0) = 1/2$. Дифференцируя еще раз, получим

$$-\sin x - \sin y \cdot y'^2 + \cos y \cdot y'' = -y''.$$

Подставляя $x = 0, y = y(0) = 0, y' = y'(0) = 1/2$, получим $y'' = -y''$. Значит $y''(0) = 0$. Проделав эту операцию еще один раз, будем иметь

$$-\cos x - \cos y \cdot y'^3 - 3 \sin y \cdot y' \cdot y'' + \cos y \cdot y''' = -y'''.$$

Отсюда при $x = 0, y = y(0) = 0, y' = y'(0) = 1/2, y'' = y''(0) = 0$ получим $y''' = 9/16$. Таким образом, приближенное решение уравнения по формуле (6.4.10)

$$y \approx \frac{x}{2} + \frac{3}{32}x^3.$$

Но даже если аналитическое выражение для функции $f(x)$ известно, то формула Тейлора, как сказано выше, позволяет приближенно представить ее (или, как говорят в математике, *аппроксимировать* многочленом первой степени (линейная аппроксимация), второй степени (параболическая аппроксимация) и т. д.

ПРИМЕР 6.4.2. Представить приближенно в виде многочлена третьей степени функцию $y = x^x$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Для нахождения производных прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln x^x = x \ln x$. Отсюда последовательным дифференцированием находим

$$y' = y(\ln x + 1), \quad y'' = y'(\ln x + 1) + \frac{y}{x}, \quad y''' = y''(\ln x + 1) + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}.$$

Подставляя в функцию и ее производные $x = 1$, получим $y(1) = 1, y'(1) = 1, y''(1) = 2, y'''(1) = 3$.

По формуле Тейлора (6.4.9) получаем искомое приближение

$$y = x^x \approx 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{6}.$$

В качестве следующих примеров рассмотрим разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (6.4.10). При этом мы ограничимся функциями, коэффициенты Тейлора которых находятся сравнительно просто.

Показательная функция

У функции $f(x) = e^x$ все производные совпадают с $f(x)$ и поэтому при $x = 0$ все они принимают значения, равные 1. По формуле Маклорена (6.4.10) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad (6.4.15)$$

где $0 < \theta < 1$, а значит, $c = \theta x$ находится между нулем и x . Покажем, что если неограниченно увеличивать n , то остаточный член будет стремиться к нулю при любом x . Пусть x произвольное действительное число. Выберем $H > 0$ настолько большим, чтобы $-H < x < H$. Так как функция e^x , то она и все ее производные ограничены одной и той же константой e^H . Из неравенства (6.4.14) получаем

$$|R_{n+1}(x)| \leq e^H \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, равенство (6.4.15) справедливо на всей числовой оси для любого n .

Синус и косинус

Для производных функции $y = \sin x$ имеем

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

При $x = 0$ эти производные равны

$$y^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

И, значит,

$$y^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{при } n = 2k, \\ 0, & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Таким образом разложения Тейлора имеют вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x). \quad (6.4.16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x). \quad (6.4.17)$$

Так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и все их производные по модулю не превосходят единицы, то разложения справедливы на всей числовой оси (т. е. остаточные члены при любом x стремятся к нулю, если $n \rightarrow \infty$).

Логарифм

Рассмотрим функцию $y = f(x) = \ln(1+x)$. Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+x}, \\ y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)^1 \frac{1}{(1+x)^2}, \\ y''' &= \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} = (-1)^2 \frac{2!}{(1+x)^3}, \\ y^{(4)} &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} = (-1)^3 \frac{3!}{(1+x)^4}, \\ &\dots \\ y^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(0) = 0, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Искомое разложение по формуле (6.4.10) имеет вид

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \quad (6.4.18)$$

Можно доказать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$, будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, если только $-1 < x \leq 1$.

Бином Ньютона

Рассмотрим функцию $f(x) = (a+x)^n$, где n — натуральное число. Из школьного курса математики известны частные случаи $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ и $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. Очевидно, $f(x)$ — многочлен степени n , поэтому все производные, начиная с $n+1$ -й тождественно равны нулю и остаток также равен нулю. Ясно, что $f'(x) = n(a+x)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}$, ..., $f^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(a+x)^{n-k}$, ..., $f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$.

Подставляя сюда $x = 0$ и учитывая, что $R_{n+1}(x) \equiv 0$, по формуле Маклорена (6.4.10) получаем формулу бинома Ньютона

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты при $a^{n-k}x^k$ называются *биномиальными коэффициентами* и обозначаются C_n^k . Таким образом,

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}, \dots, \\ C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \dots, C_n^n = 1.$$

Биномиальные коэффициенты можно выразить через факториалы

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad 0! = 1.$$

Отметим важное свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

удобное при вычислении биномиальных коэффициентов, у которых верхний индекс больше половины нижнего, например $C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 / 3! = 120$.

С использованием биномиальных коэффициентов формула бинома Ньютона может быть записана в виде

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + C_n^n x^n = \\ \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k. \quad (6.4.19)$$

Отметим, что формула (6.4.19) была известна задолго до Ньютона. Заслуга Ньютона в том, что он распространил эту формулу на *не целые* n .

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \neq 0$ — произвольное действительное число. Для $x > -1$ она имеет производные всех порядков

$$f'(x) = \alpha(a+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(a+x)^{\alpha-2}, \dots, \\ f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(a+x)^{\alpha-k}.$$

Следовательно,

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

Введем биномиальные коэффициенты

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \dots, \\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Из формулы Маклорена (6.4.10) получаем

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n+1}(x) = \\ = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + R_{n+1}(x). \quad (6.4.20)$$

6.4.3. Правило Лопиталю

Правило Лопиталю – это метод вычисления некоторых пределов. Основное правило Лопиталю служит для раскрытия неопределенностей вида $0/0$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a , причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности.

Тогда если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6.4.21)$$

В самом деле, по теореме Коши 6.4.5 для $x \neq a$ найдется такое c между a и x , что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Если $x \rightarrow a$, то $c \rightarrow a$ и $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Отсюда получаем требуемое.

Если окажется, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ снова дает неопределенность вида $0/0$, то можно попытаться применить правило Лопиталю повторно. Иногда приходится применять этот прием несколько раз.

ПРИМЕР 6.4.3. *Найти* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{x^2}$.

РЕШЕНИЕ. Дважды применяя правило Лопиталю, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Правило Лопиталю применимо также для неопределенностей вида ∞/∞ : Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6.4.22)$$

ПРИМЕР 6.4.4. *Найти* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x}$.

РЕШЕНИЕ. По правилу Лопиталю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/\sin^2 x) 2 \sin x \cos x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2 \sin x \cos x) = 0.$$

Правило Лопиталья справедливо также и в случаях, когда $x \rightarrow \pm\infty$, когда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ и наконец, оно справедливо для односторонних пределов.

ПРИМЕР 6.4.5. Показать, что

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0, \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (6.4.23)$$

РЕШЕНИЕ. В обоих случаях, при положительных значениях параметров α и β , мы имеем неопределенности вида ∞/∞ . В зависимости от конкретных численных значений этих параметров применяем правило Лопиталья до тех пор, пока не исчезнет неопределенность.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{x}}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{\beta x^\beta} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ln^{\alpha-2} x}{\beta^2 x^{\beta-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ln^{\alpha-2} x}{\beta^2 x^\beta} = \dots \\ &\dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) \ln^{\alpha-k} x}{\beta^k x^\beta} = 0, \end{aligned}$$

как только $\alpha - k < 0$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} = \dots \\ &\dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}}, \end{aligned}$$

как только $\alpha - k < 0$.

Рассмотренный пример имеет некоторый теоретический интерес. Среди элементарных функций выделим три класса:

- 1) показательные функции $y = a^x = e^{x \ln a}$ с основанием $a > 1$;
- 2) степенные функции $y = x^\alpha$ с показателем $\alpha > 0$;
- 3) логарифмические функции $\ln^\alpha x$, возведенные в произвольную положительную степень α .

Все функции этих классов неограниченно возрастают с ростом x . Тогда любая функция из предыдущего класса возрастает медленнее любой функции из последующего класса. Отсюда, в частности, сразу получаем, что какое бы $\epsilon > 0$ ни взять, для всех достаточно больших x выполняется неравенство $\ln x < x^\epsilon$.

Правило Лопиталья позволяет раскрывать и все другие неопределенности $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, (0^0) , (∞^0) , (1^∞) . В каждом случае алгебраическими преобразованиями данное выражение нужно преобразовать к неопределенности вида $(0/0)$ или (∞/∞) . Как это делается, рассмотрим на примерах.

Неопределенность $(\infty - \infty)$. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

Неопределенность $(0 \cdot \infty)$. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

РЕШЕНИЕ. Функцию $x \ln x$ можно представить либо в виде $\frac{\ln x}{1/x}$, либо $\frac{x}{1/\ln x}$. Первое представление предпочтительнее, так как в этом случае производная знаменателя находится проще. В этом случае функция дает неопределенность вида (∞/∞) и по правилу Лопиталья имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

При раскрытии трех последних неопределенностей можно использовать основное логарифмическое тождество $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$. Нетрудно проверить, что во всех трех случаях в показателе экспоненты мы будем иметь неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$, рассмотренную в предыдущем примере.

Неопределенность (0^0) . Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \sin x}{1/x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x / \sin x}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x^2 \cos x}{\sin x}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

На последнем шаге использован первый замечательный предел.

Неопределенность (∞^0) . Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^x &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{1/x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1/((1+x)\ln(1+x))}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{2x}{\ln(1+x)+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^0 = 1. \end{aligned}$$

Неопределенность (1^∞). Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\operatorname{tg} x}{2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1/\cos^2 x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Даже при использовании правила Лопиталья не следует забывать теорему об использовании эквивалентных бесконечно малых (предел отношения бесконечно малых не изменится, если числитель или знаменатель заменить эквивалентными бесконечно малыми). Так, в последнем примере решение будет кратким, если заменить бесконечно малую $\operatorname{tg} x$, $x \rightarrow 0$ на эквивалентную x . Более показателен следующий пример.

Если предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{\sin^6 x}$ находить, используя только правило Лопиталья, то придется это правило шесть раз, причем при каждом дифференцировании числитель и знаменатель будут все более усложняться (убедитесь в этом). Если же воспользоваться эквивалентностью $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, а затем сделать замену $x^3 = t$ (при этом, очевидно, $t \rightarrow 0$), то получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{\sin^6 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{x^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - t - 1}{t^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Правило Лопиталья не всегда приводит к цели. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

имеющий неопределенность вида (∞/∞) . Дважды применяя правило Лопиталю, будем иметь

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x/\sqrt{x^2+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x/\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.\end{aligned}$$

Между тем предел легко находится непосредственно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Иногда правило Лопиталю неприменимо *логически*. Например, применяя его к первому замечательному пределу, получим, конечно, верный результат:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Но ведь при этом мы используем тот факт, что производная синуса — косинус, а он обычно доказывается применением именно первого замечательного предела. Такие «доказательства» в логике называют *порочным логическим кругом*. В этом случае нужно этот круг разорвать — либо доказать, что производная синуса — косинус не используя первого замечательного предела, и тогда приведенное доказательство этого предела верно, либо доказывать первый замечательный предел без использования правила Лопиталю, что обычно и делают.

Наконец, обратим внимание на требование существования предела отношения производных. Может оказаться так, что этого предела нет, а сам предел отношения двух функций тем не менее существует. Например,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \sin x\right) = 0,$$

так как произведение бесконечно малой $\frac{1}{x}$ на ограниченную $\sin x$ является бесконечно малой. В то же время предел отношения производных — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x)$ — не существует.

6.4.4. Исследование поведения функции

Рассмотрим общие методы исследования поведения функции, основанные на дифференциальном исчислении.

Возрастание и убывание функции.

Теорема 6.4.7. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно возрастала (убывала) на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Необходимость вытекает из определения производной и свойств предела. Достаточность — это очевидное обобщение теоремы 6.4.1.

Установленная этой теоремой связь между знаком производной и возрастанием или убыванием функции геометрически очевидна. Так как производная — это тангенс угла наклона касательной к графику функции и так как тангенс острого угла положителен, а тангенс тупого угла — отрицателен, то знак этого углового коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз, а значит, идет вверх или вниз график функции.

Экстремумы функции

Точка x_0 называется точкой *максимума* (локального максимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Аналогично, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0),$$

то точка x_0 называется точкой *минимума* (локального минимума).

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — ее *точками экстремумами*.

Очевидно, если $f'(x) \neq 0$ в малой окрестности точки x_0 , то в этой окрестности функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает и, значит, в точке x_0 не может быть экстремума. Если же в точке x_0 есть экстремум, то по теореме Ферма и замечанию к ней, производная в этой точке x_0 или равна нулю или не существует. Отсюда получаем

Необходимые условия существования экстремума

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными. Это означает, что если в некоторой точке производная или равна нулю или не существует, то в этой точке экстремума может и не быть. В самом деле, рассмотрим две функции

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leq 0, \\ 2x, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ производная функции $f(x)$ обращается в нуль, а производная функции $g(x)$ в этой точке не существует (в этой точке у графика нет касательной). В то же время обе функции не имеют экстремума в точке $x = 0$

(например, потому, что в этой точке они обе обращаются в нуль, а рядом с ней принимают как положительные, так и отрицательные значения).

Точки, в которых производная равна нулю будем называть *стационарными* точками. Точки, в которых производная не существует будем называть *критическими*. Стационарные и критические точки называют точками *подозрительными на экстремум*.

Первый достаточный признак существования экстремума

Итак, пусть найдены все подозрительные на экстремум точки функции $f(x)$. Как проверить, есть ли на самом деле в каждой из этих точек максимум или минимум? Предположим, что в малой окрестности подозрительной на экстремум точки x_0 производная сохраняет знак (то есть по обе стороны от этой точки она либо положительна, либо отрицательна). Тогда в этой окрестности функция или возрастает или убывает, и, значит, в точке x_0 нет экстремума.

Если слева от точки, подозрительной на экстремум, производная $f'(x)$ положительна, а справа от этой точки она отрицательна, то это означает, что слева от точки x_0 она возрастает, а справа — убывает, и, значит, в этой точке максимум.

Аналогично, если слева от подозрительной на экстремум точки производная $f'(x)$ отрицательна, а справа от нее — положительна, то в этой точке минимум.

Итак, если при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная $f'(x)$:

- 1) меняет знак с «плюс» на «минус», то в этой точке максимум;
- 2) меняет знак с «минус» на «плюс», то в этой точке минимум;
- 3) не меняет знака, то в этой точке нет экстремума.

Этот признак удобен, в частности, тем, что мы совмещаем исследование на экстремум с исследованием монотонности.

ПРИМЕР 6.4.6. *Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции*

$$y = \sqrt[3]{x^2}(x-2).$$

РЕШЕНИЕ. Функция определена на всей числовой прямой. Сначала находим производную

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x-2) + x^{2/3} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Находим стационарные и критические точки: $y' = 0$, если $x = 1$; y' не существует, если $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4/5)$	4/5	$(4/5, +\infty)$
y'	+	не существует	-	0	+
y	\nearrow	0	\searrow	-1, 1	\nearrow

При заполнении этой таблицы включаем в нее точки разрыва производной (при переходе через них производная может сменить знак), а для определения знака производной достаточно подставить в нее какие-либо точки из соответствующих промежутков, например $x = -1$, $x = 1/2$, и $x = 2$.

Второй достаточный признак существования экстремума

Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$. Предположим, что в этой точке существует вторая производная. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум; если же $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

Этот признак, как частный случай (при $n = 2$), следует из следующего признака.

Третий достаточный признак существования экстремума

Предположим, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n ($n \in \mathbb{N}$) включительно. Тогда, если

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то:

- 1) при n четном в точке x_0 есть экстремум, причем это будет минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и минимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- 2) при n нечетном в точке x_0 экстремума нет.

Докажем этот признак, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Так как все производные до порядка n равны нулю, по этой формуле приращение $f(x) - f(x_0)$ представим в виде

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Так как $o((x - x_0)^n)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$, то ее можно представить в виде $o((x - x_0)^n) = \frac{\alpha(x)}{n!} (x - x_0)^n$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (6.4.24)$$

Если $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то, ввиду того, что $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, в достаточно малой окрестности точки x_0 знак $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Если n четное, то $(x - x_0)^n$ всегда положительно. Таким образом, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 $f(x) - f(x_0) > 0$, то есть $f(x) > f(x_0)$ и, значит, в этой точке минимум.

Аналогично, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$ и в точке x_0 максимум.

Если n нечетное, то $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0 . Значит, с одной стороны от этой точки разность $f(x) - f(x_0)$ положительна, а с другой отрицательна и, следовательно, в точке x_0 нет экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения. Как их найти?

Если в точках $x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$ функция $f(x)$ имеет k локальных максимумов, то, очевидно, наибольшее значение равно наибольшему из чисел

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(a), f(b).$$

Последние два числа добавляем потому, что точки a и b могут и не быть точками локальных максимумов, а наибольшее значение может достигаться именно в них (например, если функция монотонно возрастает).

Аналогично, если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет в точках $x'_1, x'_2, \dots, x'_m \in [a, b]$ локальные минимумы, то ее наименьшее значение равно наименьшему из чисел

$$f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_m), f(a), f(b).$$

Таким образом, получаем метод отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции:

- 1) находим точки, подозрительные на экстремум (используя необходимые условия существования экстремума);
- 2) выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a, b]$;
- 3) вычисляем значение функции в выбранных точках и в точках a и b . Исследовать выбранные точки на экстремум нет необходимости, ведь мы точно знаем, что искомые наибольшее и наименьшее значения содержатся среди значений функции в указанных точках.
- 4) среди найденных значений выбираем самое большое и самое маленькое.

ПРИМЕР 6.4.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}$$

на отрезке $[0, 3]$.

РЕШЕНИЕ. 1) Найдем точки, подозрительные на экстремум.

$$y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x+3)}}.$$

Производная равна нулю при $x = 1/3$ и она не существует при $x = -3$ и $x = 2$.

2) На отрезок $[0, 3]$ попадают точки $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2$.

3) Вычисляем значение функции в выбранных точках и в концевых точках отрезка: $f(x_1) = f(1/3) = -\sqrt[3]{50/9} \approx -1,77$; $f(x_2) = f(2) = 0$; $f(0) = -\sqrt[3]{18} \approx -2,62$; $f(3) = -\sqrt[3]{36} \approx 3,30$.

4) среди найденных значений выберем наибольшее и наименьшее

$$f(0) = -\sqrt[3]{18}, \quad f(3) = \sqrt[3]{36}.$$

Во многих приложениях математического анализа требуется найти наибольшее и наименьшее значения некоторой переменной величины, являющейся функцией другой переменной.

ПРИМЕР 6.4.8. Из квадратного листа бумаги, вырезав по углам равные квадраты, изготавливаем открытую коробку. Какой должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы эта коробка имела наибольший объем?

РЕШЕНИЕ. Пусть сторона листа равна a . Обозначим через x сторону вырезаемого квадрата. Тогда, очевидно, объем V коробки будет равен $V = x(a - 2x)^2$. Ясно, что $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ и на этом промежутке требуется найти наибольшее значение функции $V = V(x)$. На концах промежутка эта функция не может достигать наибольшего значения (в этом случае получим «коробку» нулевого объема).

Находим стационарные точки: $V' = (a - 2x)^2 + x2(a - 2x)(-2) = (a - 2x)(a - 6x) = 0 \implies x = a/6$ (корень $x = a/2$ посторонний). В том, что в точке $x = a/6$ функция V имеет максимум, легко убедиться, вспомнив, например, первый достаточный признак экстремума, но, заметим, что из реального смысла задачи следует, что в найденной точке (так как она единственна) будет максимум.

ПРИМЕР 6.4.9. На какой высоте над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить электрическую лампу, чтобы граница этой площадки имела максимальную освещенность?

РЕШЕНИЕ. Обозначим через x высоту подвеса лампы, r — расстояние от лампы до границы площадки, φ — угол падения лучей. По законам физики, освещенность J в точке прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до источника света, т. е.

$$J = \gamma \frac{\cos \varphi}{r^2},$$

где γ — коэффициент пропорциональности, зависящий от светосилы лампы. Но $\cos \varphi = x/r$, $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, значит,

$$J = \gamma \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 0 < x < +\infty.$$

Находим стационарные точки

$$J' = \gamma \frac{R^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} = 0 \implies x = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,7R.$$

Это и есть искомая высота подвеса лампы. Доказательство того, что здесь будет именно максимум, также можно опустить из физических соображений (положите лампу на землю в центре площадки или подвесьте на километровый столб).

Выпуклость

Пусть $f''(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда первая производная $f'(x)$ монотонно возрастает. Но $f'(x)$ — это тангенс угла наклона касательной и, значит этот тангенс монотонно возрастает. Каждая ветвь тангенса — монотонно возрастающая кривая, следовательно, если тангенс возрастает, то его аргумент на интервалах $(0, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi)$ также возрастает. Следовательно, если $f''(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то график функции $f(x)$ является вогнутой (выпуклой вниз) кривой (рис.6.7).

Аналогично, если $f''(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то график функции $f'(x)$ является выпуклой (выпуклой вверх) кривой (рис.6.8).

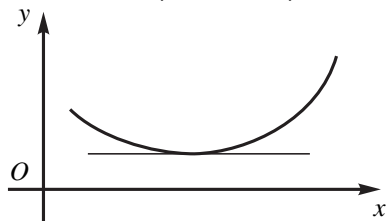


Рис. 6.7

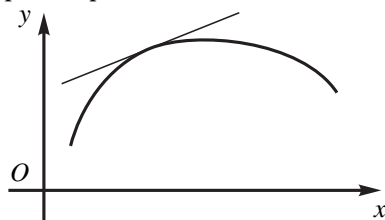


Рис. 6.8

Дадим более строгие формулировки. Пусть $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — касательная к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$. Введем функцию

$$g(x) = y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.4.25)$$

График функции называется *выпуклым вверх* (*выпуклым вниз*) на промежутке $[a, b]$, если для любой точки $x_0 \in [a, b]$ функция $g(x) = y - Y \leq 0$ ($g(x) = y - Y \geq 0$).

Геометрически это означает, что график функции лежит с одной стороны от любой касательной (рис. 6.7 и 6.8).

Интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз называются *интервалами выпуклости*. Точки, при переходе через которые меняется характер выпуклости, называются *точками перегиба*.

Например, выпуклыми вниз на всей числовой прямой являются графики функций $y = x^2$ и $y = e^x$. Выпуклым вверх для всех $x > 0$ является график

функции $y = \ln x$. Для функций $y = x^3$ и $y = 1/x$ интервал $(-\infty, 0)$ это интервал выпуклости вверх, а интервал $(0, +\infty)$ — интервал выпуклости вниз.

Теорема 6.4.8 (Условие выпуклости функции).

Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ был выпуклым вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была неотрицательна на (a, b) , т. е. $f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть график функции выпуклая вниз на интервале (a, b) кривая, и надо доказать, что в произвольной точке x_0 из этого интервала $f''(x_0) \geq 0$. По определению выпуклости вниз функция $g(x)$, определенная равенством (6.4.25), неотрицательна и, так как $g(x_0) = 0$, имеет в точке x_0 минимум. По второму достаточному признаку экстремума ее вторая производная в точке x_0 положительна: $g''(x_0) \geq 0$. Но $g''(x) = f''(x)$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f''(x) \geq 0$ во всех точках интервала (a, b) . По определению выпуклости вниз надо доказать, что функция $g(x)$, определенная равенством (6.4.25), неотрицательна. Так как $g''(x) = f''(x)$, то $g''(x) \geq 0$ на интервале (a, b) , а значит, $g'(x)$ монотонно возрастает на этом интервале. Но $g'(x_0) = 0$, следовательно, левее точки x_0 $g'(x)$ отрицательна, а правее ее — положительна. Значит, слева от точки x_0 функция $g(x)$ убывает, а справа от точки x_0 возрастает и, следовательно, имеет в этой точке минимум, равный $g(x_0) = 0$. Отсюда $g(x) \geq g(x_0) = 0$ и, значит, график функции $y = f(x)$ выпуклая вниз на интервале (a, b) кривая. Теорема доказана.

Аналогично необходимым и достаточным условием выпуклости вверх графика дважды дифференцируемой на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ является выполнение неравенства

$$f''(x) \leq 0, x \in (a, b).$$

ПРИМЕР 6.4.10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = e^{\sqrt[3]{x}}$.

РЕШЕНИЕ. Вычислим первую и вторую производные функции

$$y' = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{9x^{5/3}} e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Решая неравенство (например методом интервалов)

$$y'' = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{9x^{5/3}} e^{\sqrt[3]{x}} > 0,$$

получаем $x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$. Очевидно, при $x \in (0, 8)$ выполняется неравенство $y'' < 0$.

Итак, при $x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ график функции является выпуклой вниз кривой, а на интервале $(0, 8)$ он выпуклый вверх. При переходе через точки $x = 0$ и $x = 8$ меняется характер выпуклости, следовательно, эти точки являются точками перегиба.

Асимптоты

Используя пределы, можно выяснить поведение функции на границе области определения функции.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty. \quad (6.4.26)$$

Так, например, прямая $x = 0$ (т. е. ось Oy) является вертикальной асимптотой графика гиперболы $y = 1/x$, так как оба предела (6.4.26) бесконечны. Для логарифмической кривой $y = \ln x$ ось Oy также является вертикальной асимптотой, так как $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \ln x = -\infty$. График тангенса $\operatorname{tg} x$ имеет бесконечное множество вертикальных асимптот $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ясно, что вертикальные асимптоты возможны только либо в точках разрыва функции, либо на границе области определения (если эта граничная точка — конечное число).

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$), если

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) &= 0 \quad \text{или} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной*.

Теорема 6.4.9. *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \quad (6.4.28)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b \right). \quad (6.4.29)$$

Для доказательства заметим, что если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, то и подално $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0$. Отсюда $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0$ и, значит, $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Оставшуюся часть доказательства предлагаем читателю воспроизвести самостоятельно.

В заключение рассмотрим пример

ПРИМЕР 6.4.11. *Найти все асимптоты графика функции*

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем функцию в виде $y = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|}$. Она определена и непрерывна для всех x , кроме $x = 0$. Найдем односторонние пределы в этой точке разрыва

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = +\infty,$$

то есть $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Выясним, есть ли наклонные асимптоты. По формулам (6.4.29) имеем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}}{-x^2} = -1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{-x} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Значит, прямая $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Аналогично, По формулам (6.4.28)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}}{x^2} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Значит, $y = x$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

6.4.5. Построение графиков функций

Дифференциальное исчисление дает мощные методы для построения графиков функций. При этом основной целью является изучение *хода изменения* функции (возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость) и точность значений функции не так важна.

При построении графиков функций удобно использовать следующую схему.

1) Найти область определения функции.

2) Проверить, является ли функция четной, нечетной или ни той, ни другой. Напомним, что функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. Очевидно, область определения таких функций симметрична относительно начала координат и если в каких-либо двух симметричных точках x_0 и $-x_0$ функция $f(x_0) \neq \pm f(-x_0)$, то она не будет ни четной, ни нечетной. Так как график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, то все дальнейшее исследование достаточно провести только для $x \geq 0$.

Аналогично если функция является *периодической*, то достаточно исследовать ее и построить график на любом промежутке, длина которого равна периоду.

3) Найти точки пересечения графика с осями координат. Для нахождения точки пересечения с осью Oy (если она существует), достаточно положить $x = 0$. Для нахождения точек пересечения с осью Ox нужно решить уравнение $f(x) = 0$, а это часто бывает или затруднительно, или даже невозможно. И тогда этот пункт пропускаем. Аналогично можно попытаться найти интервалы, на которых функция сохраняет определенный знак.

4) Найти точки разрыва функции и асимптоты.

5) Найти первую производную и по ней промежутки монотонности функции и ее экстремумы.

6) Найти вторую производную и по ней промежутки выпуклости вверх или вниз и точки перегиба графика.

7) Построить график функции.

Рассмотрим примеры на полное исследование функции и построение ее графика.

ПРИМЕР 6.4.12. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нулей знаменателя $x = \pm 1$.

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x) \implies$ функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Дальнейшее исследование проводим для $x \geq 0$.

3) $x = 0 \iff y = 0$. График пересекает оси координат в единственной точке $(0,0)$. Используя метод интервалов, убеждаемся, что $\frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} > 0$, если $x > 1$. При $0 < x < 1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

т. е. $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. По формулам (6.4.28) и (6.4.29) имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - 1/x^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является асимптотой как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.

5) Находим производную $y' = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$. Стационарных точек три: $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Производная не существует, если $x = \pm 1$, но эти точки не могут быть подозрительными на экстремум, так как в этих точках сама функция не определена.

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	0	-	\nexists	-	0	+
y		\searrow	\nexists	\searrow	$3\sqrt{3}/2 \approx 2,5$	\nearrow

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$. Если $x > 1$, то $y'' > 0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x \in (0, 1)$, то $y'' < 0$ и график выпуклый вверх.

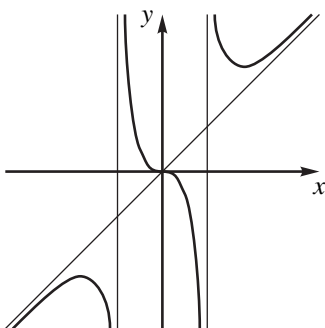


Рис. 6.9

7) На основании этого анализа строим график для $x \geq 0$ и, симметрично отражая полученную кривую относительно начала координат, получаем график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. При этом учитываем, что в точке $x = 0$ производная равна нулю, то есть касательная горизонтальна (рис. 6.9).

ПРИМЕР 6.4.13. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x-1}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нуля знаменателя $x = 1$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной (область определения несимметрична относительно начала координат).

3) $x = 0 \iff y = 0$. Точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Используя метод интервалов, убеждаемся, что $\frac{x^3}{x-1} > 0$, если $x > 1$ или $x < 0$. При $0 < x < 1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x-1} = +\infty,$$

то есть $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-1/x^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет.

5) Находим производную $y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$. Имеем две стационарные точки $x = 0$ и $x = 3/2$. В точке $x = 1$ производная не существует, но экстремума в этой точке не может быть, так как в ней сама функция не определена.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, +\infty)$
y'	-	0	-	\neq	-	0	+
y	\searrow	0	\searrow	\neq	\searrow	6,75	\nearrow

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$. Если $x > 1$ или $x < 0$, то $y'' > 0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x \in (0, 1)$, то $y'' < 0$ и график выпуклый вверх.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.10).

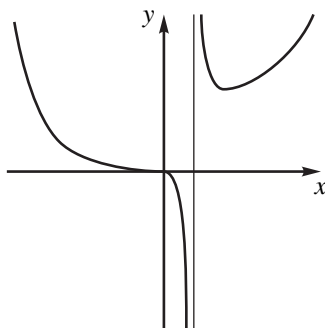


Рис. 6.10

ПРИМЕР 6.4.14. Построить график функции

$$y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена при $x > 0$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной.

3) $y = 0$, только при $x = 1$. Точка $(1, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Функция неотрицательна во всей области определения.

4) Найдем предел справа в граничной точке $x = 0$ области определения

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty,$$

т. е. $x = 0$ — ось Oy — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. По формуле (6.4.28), используя пример (6.4.23), имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0.$$

Следовательно, у графика функции есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox) при $x \rightarrow +\infty$.

5) Производная равна $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$. Две стационарные точки $\ln x = 0 \implies x = 1$ и $\ln x = 2 \implies x = e^2 \approx 7,4$.

x	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	\searrow	0	\nearrow	$4/e^2 \approx 0,6$	\searrow

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2 - 6 \ln x + 2 \ln^2 x}{x^3}$.

Приравнивая числитель к нулю и решая квадратное (относительно $\ln x$) уравнение, находим точки перегиба графика функции:

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \implies \begin{cases} x_1 = e^{(3-\sqrt{5})/2} \approx 1,46, \\ x_2 = e^{(3+\sqrt{5})/2} \approx 13,74. \end{cases}$$

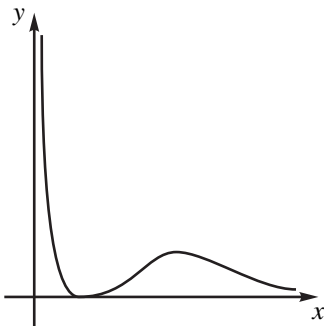


Рис. 6.11

Если $x_1 < x < x_2$, то вторая производная отрицательна и график функции выпуклая вверх кривая. Для остальных x из области определения график будет выпуклым вниз.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.11).

Контрольные работы

Данный раздел предназначен в основном для студентов–заочников. Он содержит задания для выполнения контрольных работ. Однако и студенты дневного отделения могут использовать материалы раздела для подготовки к экзамену.

В нумерации задач первая цифра означает номер контрольной работы, вторая — номер задачи, третья номер варианта. Выполнять контрольные задания следует по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. При оформлении контрольной работы задачи должны быть расположены в естественном порядке.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 0

110 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 5 & 0 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

120. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

130. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(-1; 2; 0)$ и $C(-1; 0; 1)$. Вычислить:

- а) скалярное произведение $(2\overline{AB} + \overline{AC})(\overline{BA} - \overline{BC})$;
б) векторное произведение $(2\overline{AB} + \overline{AC}) \times (\overline{BA} - \overline{BC})$;

в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

140. Даны вершины треугольника $A_1(2; -2)$, $A_2(-1; 2)$ и $A_3(8; 6)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

150. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{4}$. Найти точку пересечения данной прямой с этой плоскостью.

160. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{25}{13 - 12 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

170. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 5i$ и $z_2 = 2 - 3i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^4 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[4]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 1

111 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -16 & 86 & 53 \\ 23 & -123 & -76 \\ -3 & 16 & 10 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

121. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

131. Даны точки $A(0; -2; 1)$, $B(2; 1; 1)$ и $C(3; 1; -2)$. Вычислить:

- скалярное произведение $(\overline{AB} + 2\overline{AC})(\overline{CA} - \overline{BC})$;
- векторное произведение $(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \times (\overline{CA} + \overline{BC})$;
- смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

141. Даны вершины треугольника $A_1(1; -2)$, $A_2(4; 2)$ и $A_3(-5; 6)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

151. Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

161. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

171. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + 5i$ и $z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 2

112. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -16 \\ 3 & 11 & -22 \\ -3 & -14 & 27 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

122. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений 7. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

132. Даны точки $A(3; 0; -1)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(1; 0; -3)$. Вычислить:

- скалярное произведение $(-BA + 2AC)(AB - 3BC)$;
- векторное произведение $(BA + 2AC) \times (AB - 3BC)$;
- смешанное произведение $AB \cdot AC \cdot BC$.

142. Даны вершины треугольника $A_1(0; 2)$, $A_2(-3; 6)$ и $A_3(4; -1)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

152. Найти точку Q , симметричную точке $P(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z + 0$.

162. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

172. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + 7i$ и $z_2 = 2\sqrt{3} - i$.

- а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;
б) найти модуль и аргумент числа z ;
в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;
г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;
д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 3

113 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

123. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_4 = 3 \\ 3x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 9 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

133. Даны точки $A(2; 0; -2)$, $B(-1; 2; -2)$ и $C(1; 1; 1)$. Вычислить:

- а) скалярное произведение $(\overline{AB} - 3\overline{AC})(\overline{CA} + 2\overline{BC})$;
б) векторное произведение $(\overline{AB} - 3\overline{AC}) \times (\overline{CA} + \overline{BC})$;
в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

143. Даны вершины треугольника $A_1(-2; -3)$, $A_2(4; 5)$ и $A_3(1; 7)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

153. Даны вершины треугольника $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; 3; -5)$. Составить уравнение его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

163. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{6}{1 - \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

173. Даны комплексные числа $z_1 = 5 + i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^4 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[4]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 4

114 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -6 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 6 & -10 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

124. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

134. Даны точки $A(-4; 1; -1)$, $B(-2; 2; -2)$ и $C(-1; 0; -1)$. Вычислить:

а) скалярное произведение $(\overline{AB} + 2\overline{AC})(\overline{BA} - \overline{BC})$;

б) векторное произведение $(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \times (\overline{BA} - \overline{BC})$;

в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

144. Даны вершины треугольника $A_1(3; 1)$, $A_2(-3; -7)$ и $A_3(0; 5)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

154. Найти расстояние точки $M(2; 3; -1)$ от прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

164. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{20}{2 - 3 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

174. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} - 5i$ и $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 5

115 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -24 \\ -8 & -9 & -26 \\ 11 & 12 & 33 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

125. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 14 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

135. Даны точки $A(0; -1; 0)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(3; -3; -1)$. Вычислить:

а) скалярное произведение $(\overline{AB} - 2\overline{AC})(2\overline{BA} + \overline{BC})$;

б) векторное произведение $(\overline{AB} - 2\overline{AC}) \times (2\overline{BA} + \overline{BC})$;

в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

145. Даны вершины треугольника $A_1(-1; 2)$, $A_2(1; 5)$ и $A_3(3; -4)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

155. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 1; -2)$ и через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

165. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{12}{2 - \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

175. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{3} - 5i$ и $z_2 = \sqrt{3} + 2i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 6

116 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 13 \\ 10 & 7 & -14 \\ -13 & -6 & 15 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

126. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 20 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 20 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

136. Даны точки $A(0; 0; -3)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(-1; 1; -1)$. Вычислить:

- скалярное произведение $(-\overline{AB} - 2\overline{CA})(\overline{AB} + \overline{BC})$;
- векторное произведение $(-\overline{AB} - 2\overline{CA}) \times (\overline{AB} + \overline{BC})$;
- смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

146. Даны вершины треугольника $A_1(-2; 0)$, $A_2(-1; 2)$ и $A_3(-4; 4)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

156. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$ и написать уравнение прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной к данной плоскости.

166. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{2}{\cos \varphi - 1}$.

- Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);
- перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

176. Даны комплексные числа $z_1 = -3 - i$ и $z_2 = 2 - i$.

- Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

- б) найти модуль и аргумент числа z ;
 в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;
 г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^4 ;
 д) найти все значения корня $\sqrt[4]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 7

117 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 4 & -25 & -14 \\ -2 & 12 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

127. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

137. Даны точки $A(3; -2; 1)$, $B(2; 0; 2)$ и $C(4; -1; 3)$. Вычислить:

- а) скалярное произведение $(\overline{AB} - \overline{AC})(2\overline{BA} + \overline{CB})$;
 б) векторное произведение $(\overline{AB} - \overline{AC}) \times (2\overline{BA} + \overline{CB})$;
 в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

147. Даны вершины треугольника $A_1(1; -1)$, $A_2(4; 3)$ и $A_3(-5; 7)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

157. Вычислить расстояние точки $M_0(2; 0; -1/2)$ от плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

167. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{5}{3 - 4 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

177. Даны комплексные числа $z_1 = -5 + \sqrt{27}i$ и $z_2 = 2\sqrt{3} - i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 8

118 Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -8 & 11 \\ 4 & -15 & 20 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

128. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

138. Даны точки $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; 3)$ и $C(0; 2; 0)$. Вычислить:

а) скалярное произведение $(\overline{BA} + \overline{BC})(-2\overline{AB} + \overline{AC})$;

б) векторное произведение $(\overline{BA} + \overline{BC}) \times (-2\overline{AB} + \overline{AC})$;

в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

148. Даны вершины треугольника $A_1(2; 2)$, $A_2(1; 0)$ и $A_3(0; 6)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

158. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ и перпендикулярную к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

168. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{16}{5 - 3 \cos \varphi}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

178. Даны комплексные числа $z_1 = 5\sqrt{3} - 7i$ и $z_2 = 3\sqrt{3} + 2i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^3 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[3]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВАРИАНТ № 9

119. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & -16 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$; обратную матрицу C^{-1} (и сделать проверку); решить систему $CX = b$ с помощью обратной матрицы.

129. Используя теорему Кронекера — Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 7x_2 - 10x_3 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Найти общее решение методом Гаусса и какое-либо частное решение.

139. Даны точки $A(2; 1; 0)$, $B(0; 1; 2)$ и $C(-1; 1; 0)$. Вычислить:

а) скалярное произведение $(\overline{AB} - \overline{AC})(2\overline{CA} + \overline{CB})$;

б) векторное произведение $(\overline{AB} - \overline{AC}) \times (2\overline{CA} + \overline{CB})$;

в) смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

149. Даны вершины треугольника $A_1(1; 2)$, $A_2(3; 3)$ и $A_3(5; 0)$. Составить уравнения медианы A_1M и высоты A_1H , проведенные из вершины A_1 .

159. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

169. Линия на плоскости задана уравнением в полярной системе координат: $\rho = \frac{9}{5 \cos \varphi - 4}$.

а) Построить линию по точкам, придавая φ значения с шагом 15° (вычисления проводить с двумя знаками после запятой);

б) перейти от полярного уравнения к ее декартовому уравнению и построить кривую.

179. Даны комплексные числа $z_1 = 5 + i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

а) Вычислить $z = \frac{z_1}{z_2}$;

б) найти модуль и аргумент числа z ;

в) записать число z в тригонометрической и показательной формах;

г) используя формулу Муавра, представить в алгебраической форме число z^4 ;

д) найти все значения корня $\sqrt[4]{z}$ и построить их на комплексной плоскости;

Контрольная работа №2

Номера задач выбираются в соответствии с таблицей:

Вар.	Номера контрольных заданий								
0	200	210	220	230	240	250	260	270	280
1	201	211	221	231	241	251	261	271	281
2	202	212	222	232	242	252	262	272	282
3	203	213	223	233	243	253	263	273	283
4	204	214	224	234	244	254	264	274	284
5	205	215	225	235	245	255	265	275	285
6	206	216	226	236	246	256	266	276	286
7	207	217	227	237	247	257	267	277	287
8	208	218	228	238	248	258	268	278	288
9	209	219	229	239	249	259	269	279	289

Контрольные задания

200–209. Найти пределы последовательностей.

200. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)^3}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n - 1)$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$.

201. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+3n}{4n^3+5}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^3+1} + n+1}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$.

202. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$.

203. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 - n(n+4)^2}{(n+5)^2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n}$.

204. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^4$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \arctg n}{n^2+2}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{1+2+3+\dots+n}$.
205. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+2} \right)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} \cos \frac{n^2+1}{n+1}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$.
206. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(\sqrt{n^2-1} - n \right)}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+2n}{\sqrt{n^4+1}}$.
207. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \right)$.
208. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}+3^n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} \right)$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$.
209. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+3)(n+5)} - n \right)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4+1}{n^3-1} - \frac{3n^2}{3n+1} \right)$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$.

210–219. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопитала

210. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{\sqrt{x+2} - x}$; 211. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{4x^3 + 5x}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\ln(2-x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{e^x - e^2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$.
212. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$; 213. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} + x}{x^3 - 3x + 2}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - e^{-x^2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\operatorname{lg} x - 1}{\sin \pi x}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2x}{1+x} \right)^{1/x}$.

$$\begin{array}{ll}
214. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}; & 215. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x^2 - 3x + 2}; \\
\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{\sin \pi x}; & \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg 10x - 1}{\text{tg}(10\pi x)}; \\
\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}. & \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{1/x}. \\
216. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{\sqrt{x+1} - 2}; & 217. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{6-x} - 2}{x^2 + 5x + 6}; \\
\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(3\pi x)}{1 - \log_2(2x)}; & \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos \pi x}{\ln(x+1) - \ln 3}; \\
\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3} \right)^x. & \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x}. \\
218. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{3-x} - 2}; & 219. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{\sqrt{x+2} - x}; \\
\text{ b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{e^x - e^\pi}; & \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{ctg} \frac{\pi x}{2}}{2^{x-1} - 1}; \\
\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \left(1 + \frac{1}{10x} \right). & \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+5} \right)^{3x}.
\end{array}$$

220–229. а) найти множество точек, в которых непрерывна функция $f(x)$;

б) найти точки разрыва функции и определить их характер;

в) можно ли доопределить функцию в точках разрыва так, чтобы она стала непрерывной в этих точках?

$$220. \quad f(x) = 2 \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

$$221. \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \arctg \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

$$222. \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^{x/(x-1)}}.$$

$$223. \quad f(x) = \frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{x-1}.$$

$$224. \quad f(x) = \arctg \frac{1}{x^2(x+1)}.$$

$$225. \quad f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}\right)}.$$

$$226. \quad f(x) = \frac{|x|}{\arctg \frac{x}{x-1}}.$$

$$227. \quad f(x) = e^{-\frac{1}{|x|(x+1)}}.$$

$$228. \quad f(x) = x \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right). \quad 229. \quad f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}.$$

230–239. Для заданных функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ найти первую и вторую производные. Вычислить значения этих производных в заданных точках x_0 . Для функции $f(x)$ найти уравнение касательной и нормали в точке x_0 .

$$230. \quad f(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad x_0 = 0;$$

$$g(x) = e^{-1/x}, \quad x_0 = 1;$$

$$h(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = 0.$$

$$231. \quad f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x_0 = 0;$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x}, \quad x_0 = e^{-1};$$

$$h(x) = 2 \sin 2x, \quad x_0 = 0.$$

$$232. \quad f(x) = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}, \quad x_0 = 0;$$

$$g(x) = \frac{\cos 2x}{2 \sin^2 x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$h(x) = e^{-2x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$233. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0;$$

$$g(x) = \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$h(x) = x^{-2} - 2^{-x}, \quad x_0 = 1.$$

$$234. \quad f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x_0 = 0;$$

$$h(x) = e^{e^x}, \quad x_0 = 0.$$

$$235. \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad x_0 = \pi;$$

$$g(x) = \operatorname{arctg} e^{-x}, \quad x_0 = 0;$$

$$h(x) = \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}, \quad x_0 = 0.$$

$$236. \quad f(x) = \frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x), \quad x_0 = 1;$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}, \quad x_0 = 1;$$

$$h(x) = e^{x^2+2x}, \quad x_0 = 0.$$

$$237. f(x) = \frac{1 + \cos 8x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{8};$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 1), \quad x_0 = 0;$$

$$h(x) = e^{-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 0.$$

$$238. f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad x_0 = 0;$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{x}, \quad x_0 = \sqrt{2};$$

$$h(x) = \ln \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x}}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2};$$

$$239. f(x) = \ln(1 + \cos x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0;$$

$$h(x) = 2^{3^x}, \quad x_0 = 0.$$

240–249. Найти первую $\frac{dy}{dx}$ и вторую $\frac{d^2y}{dx^2}$ производные функций, заданных параметрически.

$$240. \begin{cases} x = (t-1)^2(t-2), \\ y = (t-1)^2(t-3). \end{cases}$$

$$241. \begin{cases} x = \ln \sin \frac{t}{2}, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$242. \begin{cases} x = -2 + 3t - t^3, \\ y = t + 2t^2 + t^3. \end{cases}$$

$$243. \begin{cases} x = 2^{\cos^2 t}, \\ y = 2^{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$244. \begin{cases} x = \cos t + \operatorname{Intg} \frac{t}{2}, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$245. \begin{cases} x = \ln(1 + \sin t), \\ y = \ln(1 - \cos 2t). \end{cases}$$

$$246. \begin{cases} x = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t, \\ y = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t. \end{cases}$$

$$247. \begin{cases} x = \operatorname{Intg} t, \\ y = \operatorname{Intg} \frac{t}{2}. \end{cases}$$

$$248. \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t. \end{cases}$$

$$249. \begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \frac{t^3 - 54}{t}. \end{cases}$$

250–259. Используя формулы Тейлора для основных элементарных функций, найти первые пять отличных от нуля членов разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

$$250. f(x) = \frac{x^2}{2x+3}, x_0 = 0. \quad 251. f(x) = (x+1)e^{-x/2}, x_0 = -1.$$

$$252. f(x) = \ln(2x+1), x_0 = 1/2. \quad 253. f(x) = x \cos^2 2x, x_0 = 0.$$

$$254. f(x) = 3^{2+x}, x_0 = 1. \quad 255. f(x) = \sin \pi x, x_0 = 1.$$

$$256. f(x) = \sqrt{x+3}, x_0 = 1. \quad 257. f(x) = xe^{-x^2/2}, x_0 = 0.$$

$$258. f(x) = \sin x \cdot \cos x, x_0 = 0. \quad 259. f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x_0 = 0.$$

260-269. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$260. y = 1 + \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, \quad x \in [-1; 2].$$

$$261. y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$262. y = 1 - \sqrt[3]{(x^2 - x - 2)^2}, \quad x \in [-2; 2].$$

$$263. y = -\sqrt[3]{x^2(x-2)}, \quad x \in [-2; 4].$$

$$264. y = 2x + 3\sqrt[3]{(x+2)^2}, \quad x \in [-3; 6].$$

$$265. y = \sqrt[3]{(x^3 - 6x^2 + 9x)}, \quad x \in [0; 4].$$

$$266. y = x\sqrt[3]{(3x+1)^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$267. y = 1 - 3\sqrt[3]{2x^2(x-3)}, \quad x \in [-1; 3].$$

$$268. y = 1 + \sqrt[3]{(1-x^2)^2}, \quad x \in [-1; 2].$$

$$269. y = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^2}, \quad x \in [-2; 0].$$

270. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 3)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

271. Из круглого бревна радиуса R вытесывается балка с прямоугольным сечением. Считая, что прочность балки пропорциональна ah^2 , где a — основание, h — высота прямоугольника, найти отношение $\frac{a}{h}$, при котором балка будет иметь наибольшую прочность.

272. Найти высоту и диаметр основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R .

273. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса r так, что нижнее основание трапеции совпадает с диаметром полукруга.

274. Для уменьшения трения воды о стенки канала, площадь, смачиваемая жидкостью должна быть наименьшей. Найти лучшую форму открытого прямоугольного канала с заданной площадью S поперечного сечения.

275. На гиперболе $x^2 - 2y^2 = 2$ найти точку, ближайшую к точке $A(3, 0)$.

276. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество материала?

277. Зритель находится напротив картины, расположенной вертикально. Нижний край картины расположен выше уровня глаз зрителя на a , верхний край на b . На каком расстоянии от картины должен стоять зритель, чтобы угол под которым он видит картину, оказался наибольшим?

278. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором окно будет пропускать максимальное количество света, если задан периметр окна.

279. Из трех досок одинаковой ширины нужно сколотить желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

280–289. Построить графики функций, проведя полное исследование (найти область определения, точки разрыва, интервалы монотонности, точки экстремума, направление выпуклости, точки перегиба, асимптоты).

$$280. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = (x-1)^2(x+2); \\ \text{b)} \quad & y = x - \ln(x+1). \end{aligned} \quad 281. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{x^3}{x-1}; \\ \text{b)} \quad & y = x - 2 \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

$$282. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{x^3}{x^2-1}; \\ \text{b)} \quad & y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}. \end{aligned} \quad 283. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}; \\ \text{b)} \quad & y = \ln x - x + 1. \end{aligned}$$

$$284. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = x(x-1)^3; \\ \text{b)} \quad & y = x \operatorname{arctg} x. \end{aligned} \quad 285. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}; \\ \text{b)} \quad & y = x^2 - 2 \ln x. \end{aligned}$$

$$286. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{x^3}{3-x^2}; \\ \text{b)} \quad & y = x \ln^2 x. \end{aligned} \quad 287. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{x^3}{x-1}; \\ \text{b)} \quad & y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}. \end{aligned}$$

$$288. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = \frac{x^2}{2(x+1)^2}; \\ \text{b)} \quad & y = \frac{x}{\ln x}. \end{aligned} \quad 289. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & y = x - 1 + \frac{1}{x-1}; \\ \text{b)} \quad & y = \ln x - \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Литература

- [1] *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974. 320с.
- [2] *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее применения. М.: Наука, 1971. 407с.
- [3] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971. 232с.
- [4] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1978. 296с.
- [5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1971. Ч. 1. 600с.
- [6] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1973. Т.1. 616с.
- [7] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1973. Т.2. 472с.
- [8] *Лантес Г.Ф.* Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1976. 336с.
- [9] *Мышкис А.Д.* Математика. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632с.
- [10] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1973. Т.1. 432с.
- [11] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1973. Т.2. 392с.
- [12] *Очан Ю.С.* Методы математической физики. М.: Высшая школа, 1965. 384с.

- [13] *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352с.
- [14] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. I. 607с.
- [15] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. II. 800с.
- [16] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. III. 656с.
- [17] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424с.