Е. Н. ПОРОШЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2013

Министерство образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Е. Н. Порошенко

Сборник задач по дискретной математике

Утверждено Редакционно-издательским советом
в качестве учебного пособия для студентов
I-II курса АВТФ, ФТФ и ФЭН НГТУ

Издание второе

Новосибирск
2013

УДК 519.1
ББК 22.17
П59

Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие/ Порошенко Е. Н. — Новосибирск, 2013. — 127 с.

В пособии подобраны задачи по курсу дискретной математики, читаемому на I–II курсах АВТФ, ФТФ и ФЭН НГТУ. Кроме того, в нем содержится большое количество примеров, способствующих самостоятельной работе и приобретению навыков решения задач.

Работа подготовлена на кафедре алгебры и математической логики

Предисловие

Данное пособие возникло, как естественное продолжение сборника задач [4], имевшего целью осуществить подборку задач по основным темам, традиционно входящим в курс дискретной математики, читаемый в НГТУ.

Следует отметить, что автор не преследовал цели создавать теоретический учебник. Таковые учебники уже существуют, в частности, можно отметить учебник С. В. Судоплатова и Е. В. Овчинниковой [5]. Кстати говоря, данное пособие следует использовать как раз вместе с этим учебником.

В данном же пособии автор ставит гораздо менее глобальную цель: восполнить недостаток в примерах, который обычно возникает при преподавании почти всех математических (и не только) курсов и курса дискретной математики, в частности. Таким образом, автор попытался использовать подход, наиболее удачно применяемый при обучении студентов технических (то есть прикладных) специальностей, разбив каждый раздел данного пособия. В первой части разбираются примеры более или менее типичных задач из раздела, при этом делаются акценты на методы, используемые при решении стандартных задач того или иного раздела. Во второй части предлагаются задачи для решения на практических занятиях и в процессе самостоятельной подготовки студентов. При этом, кроме типовых задач приведены и задачи, требующие более глубокого понимания материала, в частности, так называемые “задачи на доказательство”. В конце пособия приведены ответы ко всем “вычислительным” задачам.

Как уже отмечалось, наибольший эффект от самостоятельной работы по освоению курса “Дискретная математика” достигается, если использовать данное пособие вместе с учебником [5]. Вначале следует внимательно изучить теоретический материал по этому учебнику, после чего следует переходить к разбору примеров настоящего учебного пособия, возвращаясь по мере необходимости к тому или иному разделу учебника [5]. Для удобства читателя, в решениях примеров содержатся ссылки на теоремы, формулировки которых приведены в [5] или на разделы, в которых излагается материал, необходимый для решения той или иной задачи. Также ссылки на учебник [5] содержатся и в прилагаемом списке основных обозначений, по причине краткости комментариев к обозначениям в данном пособии. Лишь после того, как достигнуто принципиальное понимание методов, используемых при решении примеров, следует переходить к самостоятельному решению задач из второй части соответствующего раздела.

Учебное пособие содержит шесть глав, разбитых на разделы и охватывающих следующую тематику.

1. Основы теории множеств. Отношения и функции.
2. Алгебраические системы.
3. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры.
4. Системы счисления. Основы теории чисел.
5. Избранные разделы теории графов.
6. Алгебра логики.

К сожалению, задачников, охватывающих все перечисленные разделы, очень мало. В качестве исключения можно привести, пожалуй, только задачник Г. П. Гаврилова и А. А. Сапоженко [2, 3], однако, он предназначен скорее для студентов-математиков, к тому же со времени последнего издания этого задачника прошло уже 20 лет. Так что данное пособие в какой-то степени закрывает этот пробел.

В заключение, автор хотел бы выразить искреннюю благодарностью А. В. Чехонадских, любезно предоставившему часть задач для этого пособия. Кроме того, автор будет благодарен за предложения и замечания, высказанные по поводу данного учебного пособия. Их можно отправлять по адресу algebra@nstu.ru.

Е. Н. Порошенко

Список обозначений

δ_P — область определения отношения P (**стр. 12**, **21***[1]);
ρ_P — область значений отношения P (**стр. 12**, **21***);
id_A —тождественное отношение, то есть отношение $\{(x,x)\,|\,x \in A\}$ (**стр. 20**, **21***);
$[P]$ — матрица бинарного отношения P (**стр. 17**, **34***);
$\mathcal{P}(A)$ — булеан (множество всех подмножеств) множества A (**стр. 29**, **15***);
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ — декартово произведение множеств, то есть множество $\{(a_1, a_2, \dots a_n)\,|\,a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ упорядоченных наборов длины n, первый элемент каждого из которых лежит в множестве A_1, второй — в множестве A_2 и так далее. (**стр. 10**, **19***);
A^n — декартова степень множества. По определению
$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$. (**стр. 11**, **19***);
B^A — множество всех функций $f : A \to B$ (**стр. 37**, **25***);
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел (**стр. 10**, **14***);
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел (**стр. 8**, **14***);
$\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ — множество рациональных чисел (**стр. 28**, **14***);
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (**стр. 9**, **14***);
$\mathbb{C} = \{x + yi\,|\,x, y \in \mathbb{R}\}$ — множество комплексных чисел (**стр. 23**, **14***);
$\mathbb{P} + \mathbb{S}i = \{x + yi\,|\,x \in \mathbb{P}, y \in \mathbb{S}\}$ (**стр. 40**), где $\mathbb{P}$ и $\mathbb{S}$ — некоторые числовые множества;
$\mathbb{P}^+$ — множество всех положительных чисел из $\mathbb{P}$ (**стр. 13**);
$\mathbb{P}^+_0$ — множество всех неотрицательных чисел из $\mathbb{P}$ (**стр. 14**);
$\mathbb{P}^-$ — множество всех отрицательных чисел из $\mathbb{P}$ (**стр. 16**), в последних трех обозначениях $\mathbb{P} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;
$\mathbb{P}^*$ — множество всех ненулевых чисел из $\mathbb{P}$ (**стр. 19**), здесь $\mathbb{P} =$

[1] Здесь и далее знаком * отмечены номера страниц, из книги [5]

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
$n\mathbb{P}+r$ — множество всех чисел множества $\mathbb{P}$, дающих при делении на n остаток r (**стр. 29**), где $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$; в частности, $n\mathbb{P}$ — это множество чисел множества $\mathbb{P}$ кратных n (**стр. 8**);
$\mathbb{Z}_n$ — алгебра $\langle\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}; \oplus, *\rangle$, где $a \oplus b$ и $a * b$ определены, как остатки от деления соответственно $a + b$ и ab на n (**стр. 42**, **102***),
$\mathbb{Z}_n^*$ — группа всех обратимых (по умножению) элементов множества $\mathbb{Z}_n$ (**стр. 43**),
в двух последних обозначениях n — целое число, большее 1;
$\overline{\mathbb{H}}$ — группа кватернионов, то есть группа, носителем которой является восьмиэлементное множество $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с операцией умножения, определенной следующим образом: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ij = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$; (**стр. 43**);
C_n — циклическая группа с n элементами (**стр. 43**), где n — целое число большее 1;
$\mathbb{F}[x]$ — множество многочленов от переменной x с коэффициентами из множества $\mathbb{F}$ (**стр. 40**);
$\mathbb{F}_n[x]$ — множество многочленов степени n от переменной x с коэффициентами из множества $\mathbb{F}$ (**стр. 40**);
$\mathbb{F}_{\leqslant n}[x]$ — множество многочленов степени не выше n от переменной x с коэффициентами из множества $\mathbb{F}$ (**стр. 40**);
$M_n(\mathbb{F})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с элементами из множества $\mathbb{F}$ (**стр. 40**);
$\det A$ — определитель матрицы A (**стр. 22**);
$\mathbb{O}$ — нулевая матрица (**стр. 40**);
T_n — группа симметрий правильного n-угольника (**стр. 43**);
V_3 — множество векторов в пространстве (**стр. 22**);
$\{x\}$ — дробная часть числа x (**стр. 44**);
(n, m) — наибольший общий делитель чисел m и n (**стр. 59**, **97***);
$[n, m]$ — наименьшее общее кратное чисел m и n (**стр. 59**, **98***);
(u, v) — дуга в графе, идущая из вершины u в вершину v (**стр. 73**, **118***);
$[u, v]$ — ребро в графе, соединяющее вершины u и v (**стр. 73**, **119***);
A_G — матрица смежности графа G, то есть матрица, в которой для любой пары чисел i и j на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит единица тогда и только тогда, когда в графе G есть дуга (i, j), а на остальных местах стоят нули. (**стр. 74**, **121***);
$A_{G,k}$ — матрица маршрутов длины k графа G, то есть матрица, в ко-

торой для любой пары чисел i и j на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит число маршрутов длины k, начинающихся в i-ой вершине и заканчивающихся в j-ой. (**стр. 84**, **131***);

B_G — матрица инцидентности графа G (**стр. 75**, **122***);

$e(v)$ — эксцентриситет вершины v (**стр. 89**, **134***);

$\rho(v, u)$ — расстояние между вершинами v и u (**стр. 92**, **135***).

$r(G)$ — радиус графа G (**стр. 89**, **135***);

$d(G)$ — диаметр графа G (**стр. 89**, **134***);

K_n — полный n-вершиник, то есть граф, у которого каждая его вершина смежна со всеми остальными вершинами G (**стр. 93**, **135***);

$K_{m,n}$ — полный двудольный (m, n)-вершинник, то есть граф, вершины которого разбиваются на два множества, содержащие, соответственно, n и m вершин, причем каждая его вершина из первого множества смежна со всеми вершинами из второго. (**стр. 91**, **164***).

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1 Множества и операции над ними

Пример 1.1. Множество $A = \{$понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье$\}$ состоит из всех дней недели, а множество $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x = 3y$ для некоторого $y \in \mathbb{Z}\}$ — это множество всех целых чисел, кратных трем. $\square$

Пример 1.2. Перечислить все элементы множества

$$A = \big\{1, 2, \{1, 2\}, \{1\}\big\}.$$

Решение. Множество A состоит из четырех элементов: 1; 2; множество, состоящее из 1, 2; множество, состоящее из 1. Следует отметить, что 1 и множество, состоящее из 1, — это различные элементы множества A[1]. $\square$

Пример 1.3. Для множества $A = \{1, 2, 3\}$ найти его булеан

Доказательство. Очевидно, что булеаном множества A, то есть множеством его подмножеств является

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\big\}.$$

$\square$

Пример 1.4. Доказать, что множество $6\mathbb{Z}$ является подмножеством множества $3\mathbb{Z}$.

Решение. Пусть x — элемент множества $6\mathbb{Z}$, то есть x делится на 6, тогда $x = 6y$ для некоторого целого числа y. Имеем $6y = 3(2y)$, причем

[1] Удобно рассматривать множество, например, как мешок, в котором “лежат” его элементы. Тогда 1 это просто элемент “лежащий” в мешке, символизирущем множество A, а множество, состоящее из 1 —- это мешок, в котором “лежит” 1, который, в свою очередь, “лежит” мешке, символизирующем множество A.

$2y$ целое. Отсюда следует, что x делится на 3 и, следовательно, является элементом множества $3\mathbb{Z}$, что и требовалось доказать. $\square$

Пример 1.5. Доказать, что множества $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |\operatorname{tg} x| = 1\}$ и $B = \left\{ x \;\middle|\; x = \dfrac{(2m+1)\pi}{4} \text{ для некоторого целого числа } m \right\}$ равны.

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда $|\operatorname{tg} x| = 1$, то есть $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -1$. В первом случае, решая уравнение, получаем

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{(4n+1)\pi}{4} = \frac{(2(2n)+1)\pi}{4}.$$

Во втором случае —

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k = \frac{(2(2k+1)+1)\pi}{4}.$$

Таким образом, доказано, что $A \subseteq B$.

Пусть теперь $x \in B$, то есть $x = \dfrac{(2m+1)\pi}{4}$ для некоторого целого числа m. Вычислив значение $\operatorname{tg} x$, получаем, $\operatorname{tg} x = 1$, если m четно или $\operatorname{tg} x = -1$, если m нечетно. Следовательно, $B \subseteq A$, что и завершает доказательство. $\square$

Операции над множествами

Пример 1.6. Доказать, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить, что имеют место два включения: $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A$, или $x \in B \cap C$.

Если $x \in A$, то очевидно, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если же $x \notin A$, то $x \in B \cap C$. Значит $x \in B$ и $x \in C$. Получаем $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, то есть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Таким образом, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть теперь $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Так как $x \in A \cup B$, получаем $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$.

Если же $x \notin A$, то $x \in B$ и в силу того, что $x \in A \cup C$, получаем $x \in C$. Значит $x \in B \cap C$, то есть $x \in A \cup (B \cap C)$. То есть $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Из доказанного получаем $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Пример 1.7. Доказать, что для любых множеств A и B справедливо равенство $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$.

Доказательство. Так как пустое множество является подмножеством любого множества, нам осталось доказать, что $A \cap (B \backslash A)$ не содержит ни одного элемента, а значит является подмножеством $\varnothing$.

Пусть $x \in A \cap (B \backslash A)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \backslash A$. Однако, из второго выражения следует, что $x \in B$ и $x \notin A$, что противоречит первому выражению. Таким образом, доказано включение $A \cap (B \backslash A) \subseteq \varnothing$, а вместе с ним и равенство $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. $\square$

Пример 1.8. Доказать, что для любых множеств A, B и C выполнено равенство $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Доказательство. Пусть $x \in (A \cap B) \times C$. Тогда $x = (y, z)$, причем $y \in (A \cap B)$, а $z \in C$. Отсюда следует, что $y \in A$ и $y \in B$. Соответственно, $x = (y, z) \in A \times C$ и $x \in B \times C$. Следовательно, $x \in (A \times C) \cap (B \times C)$. Таким образом, доказано, что $(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C)$

Пусть $x \in (A \times C) \cap (B \times C)$, причем $x \in A \times C$ и $x \in B \times C$. Тогда $x = (y, z)$ и из первого утверждения следует, что $y \in A$ и $z \in C$, а из второго, что $y \in B$ и $z \in C$. Таким образом, получаем $y \in A \cap B$ и $z \in C$, следовательно $x \in (A \cap B) \times C$. Получили, что $(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C$. Следовательно, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, что и требовалось доказать. $\square$

1.1. Задачи

1.1.1. Перечислить элементы множеств:

а) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 - 5x \leqslant 14\}$; б) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{1}{5} < 3^x \leqslant 9\right\}$;

в) $A \cup B$; г) $A \cap B$; д) $A \backslash B$; е) $B \backslash A$.

1.1.2. Перечислить элементы множеств:

а) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \log_3 |x| \leqslant 1,\ 2^x > \frac{1}{6}\right\}$; б) $B = \{x \in \mathbb{N} \,\big|\, |x + 2| < 4\}$;

в) $A \cup B$; г) $A \cap B$; д) $A \backslash B$; е) $B \backslash A$.

1.1.3. Даны множества $A = [-2, 4)$, $B = [0, 6)$. Найти:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \backslash B$; г) $B \backslash A$.

1.1.4. Даны множества $A = [-3, 5)$, $B = (-1, 2]$. Найти:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \backslash B$; г) $B \backslash A$.

1.1.5. Найти $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если:

а) $A_i = [i, \infty)$; б) $A_i = \left(1 - \dfrac{1}{i}, 1 + \dfrac{1}{i}\right)$.

1.1.6. Найти $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если:

а) $A_i = (-i, i)$; б) $A_i = \left[-2 + \dfrac{1}{i}, 2 - \dfrac{1}{i}\right]$.

1.1.7. Доказать следующие тождества, используя только определения операций над множествами:

а) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; б) $A \cup \overline{B} = \overline{B \backslash A}$;
в) $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$; г) $A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;
д) $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \varnothing$; е) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$;
ж) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B$.

1.1.8. Доказать следующие утверждения:

а) $A \subseteq B$, тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$;
б) $A \subseteq B$, тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$;
в) если $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1.1.9. Даны множества A и B. Перечислить элементы множества $A \times B$:

а) $A = \big\{1, 2, \{2\}\big\}$, $B = \big\{a, b, \{a, b\}\big\}$;
б) $A = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}$, $B = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\{\varnothing\}\big\}\Big\}$.

1.1.10. Проверить справедливость следующих утверждений:

а) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$;
б) $(A \backslash B) \times (C \backslash D) = (A \times C) \backslash (B \times D)$;
в) $(A \times C) \cap (B \times D) = \big((A \cap B) \times (C \cup D)\big) \cap \big((A \cup B) \times (C \cap D)\big)$;
г) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$;
д) $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \overline{B})$.

1.2 Отношения и функции

Пример 1.9. Перечислить все элементы отношения $P \subseteq \mathbb{N}^2$, если $P = \big\{(x, y) \,|\, x + y \leqslant 4, xy$ делится на $4\big\}$.

Решение. Легко видеть, что

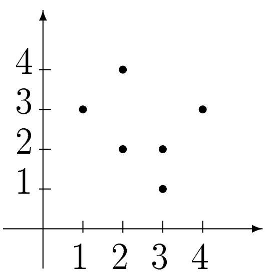
$$P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (2,0), (2,2), (3,0), (4,0)\}.$$

□

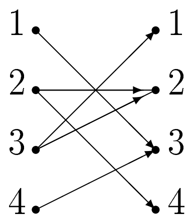
Пример 1.10. Пусть $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$, а $P = \{(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Изобразить это отношение графически тремя способами (в виде точек на “координатной” плоскости, при помощи стрелок на одном и на двух экземплярах множества A, см. [5], стр. 20–21).

Решение. Графические представления данного отношения изображены на следующих рисунках:

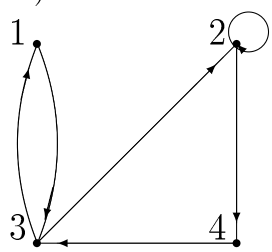
1.



2.



2a)



□

Пример 1.11. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ и $P \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, определенное следующим образом: $P = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (4, 3)\}$. Найти область определения ($\delta_P = \{x \in A \,|\, (x, y) \in P$ для некоторого $y \in B\}$) и область значения ($\rho_P = \{y \in B \,|\, (x, y) \in P$ для некоторого $x \in A\}$) отношения P. Найти P^{-1}.

Решение. Областью определения является множество первых координат всех пар отношения P, то есть $\delta_P = \{1, 2, 4\}$. Областью значений является множество вторых координат всех пар этого отношения, то есть $\rho_P = \{2, 3\}$. Чтобы найти P^{-1}, достаточно поменять в каждой паре первую и вторую координату, то есть $P^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 4)\}$. □

Пример 1.12. Пусть $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ — бинарные отношения, определенные следующим образом: $P = \{(x, y) \,|\, x + y \text{ четно}\}$, $Q = \{(u, v) \,|\, v - u = 1\}$. Найти $P \circ Q$.

Решение. Очевидно, что $P = \{(2k + 1, 2l + 1) \,|\, k, l \in \mathbb{N}\} \cup \{(2n, 2m) \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$, то есть P состоит из пар чисел одинаковой четности. Также, можно записать, что $Q = \{(s, s + 1) \,|\, s \in \mathbb{N}\}$. Пусть пара $(x, z) \in P \circ Q$. Тогда, пара $(y, z) \in Q$ в том и только том случае, когда $y = z - 1$. Отсюда сразу получаем $z \geqslant 1$. Из определения отношения P следует, что x может быть любым при условии, что x и $z - 1$ одной четности. Следовательно, x и z — числа разной четности. Таким образом, получаем $P \circ Q = \{(x, z) \,|\, z \geqslant 1, x + z \text{ нечетно}\}$. □

Пример 1.13. Пусть $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ — бинарные отношения, определенные следующим образом: $P = \{(x, y) \mid x^2 + 2y \leqslant 3\}$, $Q = \{(u, v) \mid \sqrt{u} + 2v = 6\}$. Найти $P \circ Q$.

Решение. Пусть $(x, z) \in P \circ Q$. Из определения Q следует, что $(y, z) \in Q$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{y} = 6 - 2z$. Так как $6 - 2z \geqslant 0$, получаем $z \leqslant 3$. Соответственно, $y = (6 - 2z)^2 = 36 - 24z + 4z^2$. Далее, так как пара $(x, 36 - 24z + 4z^2) \in P$, получаем $x^2 + 2(36 - 24z + 4z^2) \leqslant 3$ или $x^2 + 8z^2 - 48z + 69 \leqslant 0$. Следовательно, $P \circ Q = \{(x, z) \mid x^2 + 8z^2 - 48z + 69 \leqslant 0, z \leqslant 3\}$. □

Пример 1.14. Пусть A — множество студентов в данной аудитории, B — множество парт в этой же аудитории. Является ли функцией из A в B отношение f, ставящее в соответствие каждому студенту парту, за которой он сидит? Является ли функцией правило g, ставящее в соответствие каждой парте студента, сидящего за ней?

Решение. Отношение f является функцией[2]. Отношение g функцией не является, так как за одной партой может сидеть более одного студента. □

Пример 1.15. Является ли функцией из множества $\mathbb{R}$ в себя отношение f, заданное следующим образом: $f(x) = 2x^2 + 7$?

Решение. Результат каждой из операций сложения и умножения и возведения в квадрат однозначно определяется исходными числами (слагаемыми или сомножителями) и является действительным числом, если исходные числа были действительными. Следовательно, при подстановке вместо x любого действительного числа получаем однозначно определенное действительное число. Значит f является функцией. □

Пример 1.16. Является ли функцией из множества $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ в множество $\mathbb{R}$ отношение $f \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, определенное следующим образом: $f = \{(x, y) \mid x = |y|\}$?

Решение. Легко видеть, что для любого значения x существуют два различных значения y, удовлетворяющие условию (одно из которых является положительным, а другое — отрицательным). Например, $|2| = |-2| = 2$. Значит значению $x = 2$ должны быть поставлены в соответствие значения $y = 2$ и $y = -2$. Следовательно, f не является отображением. □

[2] Конечно, при условии, что каждый студент сидит за какой-либо партой, а не просто на полу.

Пример 1.17. Найти область значений отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного по правилу $f(x) = x^2$.

Решение. Очевидно, что $f(\mathbb{R}) = \rho_f = \mathbb{R}_0^+$. □

Пример 1.18. Является ли отображение f из примера 1.14 является инъективным? Сюръективным? В случае отрицательного ответа в общем случае сформулируйте условия, при которых f будет инъективным (сюръективным).

Решение. Если нет пустующих парт, то отображение сюръективно и, если ни за какой партой не сидит 2 или более студентов, то отображение инъективно. В общем же случае, данное отображение,очевидно, не является ни инъективным, ни сюръективным. □

Пример 1.19. Проверить, что
а) функция f из примера 1.17 не является ни инъективной, ни сюръективной;
б) функция $g : [-1, 1] \to [0, 1]$, такая что $g(x) = |x|$, является сюръективной, но не является инъективной;
в) функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $h(x) = x^2$, является инъективной, но не является сюръективной;
г) функция $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определенная по правилу $k(x) = 2x - 4$ является биективной.

Решение. а) То, что функция f не является сюръективной, было доказано в примере 1.17. Осталось отметить, что, например $f(1) = f(-1) = 1$, а значит f не является инъективным.
б) Пусть $y \in [0, 1]$. Найдем такое число x, чтобы $|x| = y$. Очевидно, что $x = \pm y$, то есть $g(y) = g(-y) = y$, что и доказывает сюръективность. Функция g не является инъективной, так как, например, $g(1) = g(-1) = 1$.
в) Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$. Предположим, что $h(x_1) = h(x_2)$, то есть $x_1^2 = x_2^2 = y$. Прообразами элемента y могут быть числа $\pm\sqrt{y}$, но $-\sqrt{y} \leqslant 0$. Поэтому, если $y > 0$, то только одно из чисел $\sqrt{y}, -\sqrt{y}$ может быть натуральным, следовательно $x_1 = x_2$, если $y = 0$, то очевидно, тоже существует лишь один прообраз этого элемента, а именно число 0, следовательно снова $x_1 = x_2$. Функция h не является сюръективной, потому что, например, число 2 не имеет прообраза (не существует натурального числа a, такого что $\chi(a) = a^2 = 2$).

г) Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $k(a_1) = k(a_2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4 &= 2x_2 - 4 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

что доказывает инъективность. Теперь фиксируем элемент $y \in \mathbb{R}$. Докажем, что прообраз этого элемента не является пустым множеством. Итак, пусть $k(x) = y$. Получим

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= y \\ 2x &= y + 4 \\ x &= \frac{y+4}{2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что значение x можно вычислить для любого действительного числа y. Таким образом, для произвольного y существует элемент x, такой что $k(x) = y$, что доказывает сюръективность отображения k. Следовательно, это отображение биективно. □

Пример 1.20. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функции, определенные следующим образом: $f(x) = \sin(2x - 3)$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

Решение.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g(\sin(2x - 3)) = \\ &= \sqrt{\sin^2(2x - 3) + 1}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (g \circ f)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(\sqrt{x^2 + 1}) = \\ &= \sin(2\sqrt{x^2 + 1} - 3). \end{aligned}$$

□

1.2. Задачи

1.2.1. Дано множество $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Отношение $P \subseteq A^3$ задано по правилу: $P = \{(x, y, z) \,|\, x + y = z\}$. Перечислить все элементы отношения P.

1.2.2. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и $B = \{0, 1, 2\}$. Отношение $P \subseteq A \times B$ задано по правилу: $P = \{(x, y) \,|\, x+y$ делится на $3\}$. Изобразить P графически (двумя способами). Является ли это отношение функцией? Является ли функцией отношение P^{-1}?

1.2.3. Даны множества A, $B = \mathbb{R}$. Является ли функцией отношение $P \subseteq A \times B$, если

а) $A = \mathbb{R}_0^+$, $P = \{(x, y) \,|\, x = y^2\}$;

б) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, y = x^3 + 4\}$;
в) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, y = \sqrt[4]{x} + 1\}$;
г) $A = \mathbb{R}^+$, $P = \{(x, y) \,|\, y = \sqrt[4]{x} + 1\}$;
д) $A = \mathbb{R}^+$, $P = \{(x, y) \,|\, y = \ln x + 3\}$. В случае, если P является отображением, найти ρ_P.

1.2.4. Пусть P отношение, заданное по правилу $P = \{(x, y) \,|\, x$ — студент из НГТУ, y — мобильный оператор, услугами которого пользуется студент $x\}$. При каких условиях P является функцией?

1.2.5. Доказать, что отношение $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, заданное по правилу $P = \{(x, y) \,|\, x^2 = y + 1\}$, является функцией. Является ли эта функция инъективной? Сюръективной?

1.2.6. Определить являются ли следующие функции инъективными, сюръективными, биективными:
а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$;
б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(|x| + 1)$;
в) $f : (-3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 3)$;
г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1} - 4$;
д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + |x|$;
е) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, , $f(x) = x^2$;
ж) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$, $f(x)$ — это остаток от деления x на n;
з) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$;
и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$. Если f биективно, найти обратное к нему.

1.2.7. Пусть $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$.
а) найти наибольшее множество $A \subseteq \mathbb{R}$, такое что $f : A \to \mathbb{R}$ является функцией;
б) найти множество $B \subseteq \mathbb{R}$, такое что $f : A \to B$ сюръективно;
в) доказать, что $f : A \to B$ инъективно;
г) найти f^{-1}.

1.2.8. Даны функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
а) найти $f \circ g$ и $g \circ f$, если $f(x) = e^{x^2} + x$, $g(x) = \sin(x^2 + 3)$;
б) найти $f \circ g$ и $g \circ f$, если $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $g(x) = \ln(x^4 + x^2 + 1)$;
в) найти $f \circ g \circ f$, если $f(x) = e^{|x|}$, $g(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$
г) найти $f \circ g \circ f$, если $f(x) = \ln(|x| + 1)$, $g(x) = x^5$.

1.2.9. Даны отношения $P, Q \subseteq A \times A$. Вычислить отношения $P \circ Q$ и $Q \circ P$, если:
а) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y -$ нечетное$\}$, $Q = \{(u, v) \,|\, uv -$ четное$\}$;
б) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y$ делится на $3\}$,
$Q = \{(u, v) \,|\, u + 2v$ делится на $3\}$;
в) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y$ делится на $3\}$, $Q = \{(u, v) \,|\, u = 2v\}$;
г) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y^2 > 1\}$, $Q = \{(u, v) \,|\, u = \sqrt{v} + 1\}$.

1.3 Матрицы бинарных отношений. Специальные бинарные отношения

Пример 1.21. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $P \subseteq A \times B$ отношение, заданное следующим образом:
$P = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$. Найти $[P]$ — матрицу отношения P.

Решение. Поставив единицы в тех клетках, номера строки и столбца для которых, взятые в указанном порядке, образует пары, лежащие в P и заполнив все остальные позиции матрицы нулями, получаем искомую матрицу

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Пример 1.22. Пусть множества A и B, а также отношение P определено как в примере 1.21, и пусть $Q \subseteq A \times B$ определено следующим образом $Q = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$. Найти $[Q]$. Найти матрицы $[P \cap Q]$ и $[P \cup Q]$.

Доказательство. Аналогично примеру 1.21 получаем

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, получаем

$$[P \cup Q] \;=\; [P] + [Q] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[P \cap Q] \;=\; [P] * [Q] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(см. [5], § 1.5). □

Пример 1.23. Пусть $P \subseteq \mathbb{R}^2$ — бинарное отношение, заданное по правилу $P = \{(x, y) \,|\, x^3 < y + 1\}$. Проверить, является ли это отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Решение. Рефлексивность. Необходимо проверить, верно ли, что $(x, x) \in P$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то есть надо проверить, верно ли, что $x^3 < x + 1$. Легко видеть, что данное неравенство не выполняется, например, для $x = 2$, значит P не является рефлексивным.

Симметричность. Надо проверить, верно ли, что из $x^3 < y + 1$ следует $y^3 < x + 1$. Отметим, что если $u \geqslant 1$, то $u \leqslant u^3$. Следовательно, если $y \geqslant 1$, то имеем $x^3 < y + 1 \leqslant y^3 + 1 < x + 2$, однако, если x, например, равен 2, то $2^3 = 8 > 4 = 2 + 2$. Таким образом, если выбрать $y \geqslant 1$, такой что $x^3 < y + 1$, то неравенство $y^3 < x + 1$ не будет выполняться. Возьмем, например, $y = 8$. Очевидно, что $2^3 = 8 < 9 = 8 + 1$, но $8^3 = 512 > 3 = 2 + 1$. Следовательно, P не является симметричным.

Антисимметричность. Пусть $x^3 < y+1$, $y^3 < x+1$. Легко заметить, что для любого $0 < u < 1$ выполнено $0 < u^3 < 1$. Следовательно, если x и y — произвольные действительные числа из промежутка $(0, 1)$, то $0 < x^3 < 1$ и $0 < y^3 < 1$. С другой стороны, $x + 1 > 1$ и $y + 1 > 1$. А значит $x^3 < y + 1$, а $y^3 < x + 1$. Таким образом, P — не антисимметричною

Транзитивность. Пусть $x^3 < y + 1$ и $y^3 < z + 1$. Если $y \geqslant 1$, то $y^3 \geqslant y$, получаем $x^3 < y + 1 \leqslant y^3 + 1 < z + 2$. Таким образом, становится ясно, что можно подобрать x, y, z так, чтобы $z + 1 \leqslant x^3 < z + 2$. При этом y^3 должен быть достаточно близко к y $(y^3 - y < 1)$, то есть y нужно выбрать достаточно близким к 1. Далее, методом проб и ошибок можно подобрать x, y и z на которых не выполняется условие транзитивности. Например, $x = 1{,}2$, $y = 1$, $z = 0{,}1$. Тогда $1{,}2^3 = 1{,}728 < 2 = 1 + 1$ и

$1^3 = 1 < 1{,}1 = 0{,}1 + 1$, но $1{,}2^3 = 1{,}728 > 1 = 0{,}1 + 1$. А значит P не является транзитивным.

Чтобы построить пример, показывающий, что P нетранзитивно, можно воспользоваться другими соображениями. Отметим, что если $0 \leqslant u < 1$, то $0 \leqslant u^3 < 1$, а $u \geqslant 1$. Таким образом, каковы бы ни были $x, y \in [0, 1)$, $(x, y) \in P$. Значит можно попробовать выбрать x достаточно большое, а y, наоборот, достаточно близко к 0. Тогда кажется возможным выбрать $z < 0$, таким образом, чтобы $x^3 < z + 1$. Опять же, методом проб и ошибок можно убедиться, что можно взять, например, такие числа: $x = 0{,}9$, $y = 0$, $z = -0{,}9$. Действительно, имеем $0{,}9^3 = 0{,}729 < 1 = 0 + 1$ и $0^3 = 0 < 0{,}271 = -0{,}729 + 1$. Однако, $0{,}9^3 = 0{,}729 > 0{,}271 = -0{,}729 + 1$.[3] □

Пример 1.24. Является ли бинарное отношение $P \subseteq \mathbb{N}^2$, заданное по правилу $P = \{(x, y) \,|\, x = y^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}\}$, рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

Решение. Рефлексивность. Необходимо проверить, что $x = x^n$. Очевидно, что это равенство выполняется для любого x, если $n = 1$. Следовательно P рефлексивно.

Симметричность. Пусть $x = y^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Необходимо проверить, верно ли, что $y = x^m$ для некоторого m.

Отметим, что для любого $u > 1$ выполнено $u^k \geqslant u$ для $k \in \mathbb{N}^*$. Таким образом, если, например, $n = 2$, а $y = 2$, то $x = 4 > y$, но в этом случае должно быть $2 = 4^m$ для некоторого m. Однако, в силу доказанного, если $m \in \mathbb{N}^*$, то $2 < 4 \leqslant 4^m$. Осталось рассмотреть случай $m = 0$, что легко сделать непосредственно: $2 \neq 1 = 4^0$. Таким образом, получаем, что P не является симметричным.

Антисимметричность. Пусть $x = y^n$, а $y = x^m$. Имеем $x = y^n = (x^m)^n = x^{nm}$. Следовательно $x(1 - x^{nm-1}) = 0$. Таким образом, либо $x = 0$, либо $x^{nm-1} = 1$, то есть либо $mn \neq 1$ и $x = 1$ (так как рассматриваем $x \in \mathbb{N}$, других решений у уравнения x^{nm-1} быть не может), либо $mn = 1$.Рассмотрим все три случая.

Если x равно 0, то имеем $y = 0^m$ для некоторого m, значит $y = 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}^*$ выполнено $x = y^n$, так как $0 = 0^n$.

Если $x = 1$, то имеем $y = 1^m = 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $x = y^n$, так как $1 = 1^n$.

[3] Вообще говоря, вполне достаточно одного примера, показывающего, что то или иное свойство может нарушаться. Два примера, показывающих, что P не является транзитивным даны с целью показать, что прийти к цели можно различными способами.

Пусть теперь $nm = 1$, значит $m = n = 1$. Получаем $x = y^1$ и $y = x^1$, то есть $x = y$.

Итак, во всех трех случаях мы получили, что из $x = y^n$ и $y = x^m$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, следует $x = y$. Таким образом, P антисимметрично.

Транзитивность. Пусть $x = y^n$ и $y = z^m$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$, тогда получаем $x = y^n = (z^m)^n = z^{mn}$. Значит $x = z^k$, где $k = mn$ (имеем $mn \in \mathbb{N}$, как произведение двух натуральных чисел). Следовательно, P транзитивно. $\square$

Пример 1.25. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $P \subseteq A^2$ — бинарное отношение, определенное следующим образом:

$$P = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1)\}.$$

Выяснить, является ли это отображение рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Решение. Найдем матрицу отношения P, то есть матрицу $[P] = (p_{ij})_{4\times 4}$:

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $[\mathrm{id}_A] \not\subseteq [P]$, так как

$$[\mathrm{id}_A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а на главной диагонали матрицы $[P]$ есть элементы, не равные 1 (более того, в данном примере на главной диагонали матрицы $[P]$ вообще нет единиц). Следовательно, в силу [5], § 1.5, P не является рефлексивным.

Найдем матрицу $[P]^T = (q_{ij})_{4\times 4}$:

$$[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq [P],$$

так как, например, $p_{1,2} \neq q_{1,2}$, а значит, согласно [5], § 1.5 P не является симметричным.

Далее, имеем

$$[P] * [P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 0\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq [\mathrm{id}_A].$$

Следовательно, опять же в силу [5], § 1.5, P антисимметрично.

Наконец, найдем $[P] \circ [P] = (s_{ij})_{4\times 4}$.

$$[P] \circ [P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \not\subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как, например, $s_{1,4} = 1$, а $p_{1,4} = 0$. Следовательно, отношение P не является транзитивным (это опять же следует из [5], § 1.5). □

1.3. Задачи

1.3.1. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Дано отношение $P \subseteq A^2$. Найти матрицы P и P^{-1}. Проверить, является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным:

а) $P = \{(0,0), (1,0), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$;

б) $P = \{(0,0), (0,2), (0,3), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,0), (3,2), (3,3)\}$;

в) $P = \{(0,0), (0,2), (1,1), (1,3), (2,0), (2,2), (3,1), (3,3)\}$;

г) $P = \{(0,2), (1,1), (1,2), (2,2), (3,0), (3,3)\}$.

1.3.2. Даны множество A и отношение $P \subseteq A^2$. Найти область определения и область значений отношения P. Является ли это отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, если:

а) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \mid x < y\}$;

б) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \mid x^3 < y^5\}$;

в) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y$ кратно $3\}$;
г) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + 2y$ кратно $3\}$;
д) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x + y - 1$ не кратно $3\}$;
е) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,\big|\, |x| < |y|\}$;
ж) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x = ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N}\}$;
з) $A = \mathbb{Z}$, $P = \big\{(x, y) \,|\, x = ny$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1, -1\}\big\}$;
и) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, x^2 < y + 2\}$?

1.3.3. Привести примеры отношения $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющего следующим условиям:
а) P симметрично и антисимметрично, но не рефлексивно;
б) P симметрично и транзитивно, но не рефлексивно;
в) P антисимметрично и транзитивно, но не рефлексивно;
г) P рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

1.3.4. Пусть элементами множества A являются все студенты первого курса АВТФ НГТУ и отношение $P \subseteq A^2$ состоит из всех пар студентов (x, y) таких, что студент y в первую сессию получил более высокую оценку, чем студент x, хотя бы по одному предмету. Может ли такое отношение быть:
а) рефлексивным;
б) симметричным;
в) антисимметричным;
г) транзитивным?
Ответ обосновать.

1.4 Эквивалентности и порядки

Пример 1.26. Являются ли эквивалентностями следующие отношения?
1. $P \subseteq (V_3)^2$, заданное по правилу $P = \{(\overline{v}, \overline{u}) \,|\, \overline{v} \upuparrows \overline{u}\}$?
2. Отношение P на множестве квадратных матриц n-го порядка, состоящее из таких пар матриц (A, B), что $\det A = \det B$,
3. Бинарное отношение $P \subseteq A^2$ (где A — множество всех прямых в пространстве), состоящее из пар прямых (l_1, l_2), таких что l_1 и l_2 имеют хотя бы одну общую точку.

Решение. 1. Каждый вектор сонаправлен сам себе, то есть $\overline{v} \upuparrows \overline{v}$. Следовательно, $(\overline{v}, \overline{v}) \in P$, а значит P рефлексивно. Также очевидно, что из $\overline{v} \upuparrows \overline{u}$ следует $\overline{u} \upuparrows \overline{v}$ и P — симметрично. Наконец, если $\overline{v} \upuparrows \overline{u}$ и $\overline{u} \upuparrows \overline{w}$, то векторы $\overline{v}$ и $\overline{u}$ параллельны и имеют одно и то же направление. То же самое можно сказать и про векторы $\overline{u}$ и $\overline{w}$. Таким образом, все три вектора параллельны и направлены в одну сторону, а значит, в частности $\overline{v} \upuparrows \overline{w}$. Таким образом, $(\overline{v}, \overline{w}) \in P$, а значит P транзитивно. Окончательно получаем, так как P рефлексивно, симметрично и транзитивно, P является эквивалентностью.

2. Рефлексивность очевидна. Также, очевидно, что из $\det A = \det B$ следует $\det B = \det A$, то есть P является симметричным. И, наконец, если $\det A = \det B$ и $\det B = \det C$, для некоторых матриц A, B, C, то, очевидно $\det A = \det B = \det C$, а значит $\det A = \det C$. Таким образом, отношение P транзитивно, следовательно P является эквивалентностью.

3. Несмотря на то, что P рефлексивно (любая прямая имеет общие точки сама с собой) и симметрично (если l_1 и l_2 имеют общую точку, то и (l_1, l_2), и (l_2, l_1) принадлежат P), это отношение не является транзитивным. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать параллельные прямые l_1 и l_3, на каждой из них выбрать по точке и провести прямую l_2 через эти две точки. Получим $(l_1, l_2), (l_2, l_3) \in P$, по построению, но, $(l_1, l_3) \notin P$, так как $l_1 \| l_3$. □

Пример 1.27. Доказать, что отношение $E \subseteq (\mathbb{C}^*)^2$ определенное по правилу $E = \left\{ (z_1, z_2) \;\middle|\; \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^* \right\}$ является эквивалентностью. Найти классы эквивалентности.

Решение. Имеем $\dfrac{z}{z} = 1 \in \mathbb{C}$ для любого $z \in \mathbb{C}^*$. Следовательно, E — рефлексивно.

Далее, пусть $\dfrac{z_1}{z_2} = r \in \mathbb{R}^*$, тогда $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1}{r} \in \mathbb{R}^*$, а значит E — симметрично.

Наконец, пусть $\dfrac{z_1}{z_2} = r$ и $\dfrac{z_2}{z_3} = s$, тогда $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{z_2}{z_3} = rs \in \mathbb{R}$. Таким образом, E — транзитивно, а значит E — эквивалентность.

Найдем классы эквивалентности. Пусть $(z_1, z_2) \in E$. Представим z_1 и z_2 в тригонометрической форме. Получим $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{|z_2|(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)),$$

где φ и ψ можно выбрать из промежутка $[0, 2\pi)$ Так как это число действительное, $\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)$ — действительное. Отсюда $\varphi - \psi = \pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, причем $-2\pi < \varphi - \psi < 2\pi$. Таким образом, либо $\varphi = \psi$, либо $\varphi = \psi \pm \pi$. В обратную сторону, если $\varphi = \psi$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{|z_1|}{|z_2|} \in \mathbb{R}.$$

Если $\varphi = \psi + \pi$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{|z_1|}{|z_2|} \in \mathbb{R}.$$

Наконец, если $\varphi = \psi - \pi$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -\frac{|z_1|}{|z_2|} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, каждый класс эквивалентности состоит из всех чисел, изображения которых на комплексной плоскости лежат на некоторой прямой, проходящей через начало координат (при этом начало координат не входит ни в один из классов, так как это число не входит в $\mathbb{C}^*$). □

Пример 1.28. Являются ли частичными порядками следующие отношения?

1. Отношение $\geqslant$ на множестве $\mathbb{N}$.
2. Отношение $\subseteq$ на $\mathcal{P}(A)$, где A — некоторое множество.
3. Отношения из примера 1.26

Решение. 1. Очевидно, что $x \geqslant x$, то есть отношение $\geqslant$ является рефлексивным. Далее, если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то, очевидно $x = y$, то есть отношение $\geqslant$ антисимметрично. Наконец, если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$, а значит отношение $\geqslant$ транзитивно, следовательно, это отношение является частичным порядком.

2. Действительно, для любого $B \subseteq A$ выполнено $B \subseteq B$, кроме того, если $B \subseteq C$ и $C \subseteq B$ для некоторых множеств $B, C \subseteq A$, то $B = C$. Наконец, если $B \subseteq C$, $C \subseteq D$, то $B \subseteq D$ (так как если $x \in B$, то, по определению включения, $x \in C$, а значит, по тому же определению $x \in D$). Таким образом, отношение $\subseteq$ является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, следовательно, это отношение — частичный порядок.

3. Ни одно из отношений, разобранных в указанном примере, не является частичным порядком. Действительно, в первом и втором случае достаточно показать, что соответствующие отношения не антисимметричны. В первом случае достаточно рассмотреть векторы $\overline{u}$ и $2\overline{u}$, кото-

рые, очевидно, сонаправлены, а значит $(\overline{u}, 2\overline{u}), (2\overline{u}, \overline{u}) \in P$, но $\overline{u} \neq 2\overline{u}$, если $\overline{u} \neq \overline{0}$.

Во втором случае достаточно найти две различные матрицы A и B, определители которых равны. Можно в качестве A взять произвольную ненулевую матрицу, а в качестве B, матрицу, полученную из матрицы A посредством поэлементного к элементам одной строки элементов другой, ненулевой (так как $A \neq 0$, такая строка существует).

Наконец, последнее отношение не является транзитивным, как было доказано в примере 1.26, а значит не является частичным порядком. $\square$

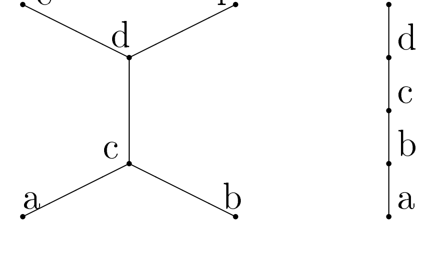
Пример 1.29 (линейный порядок). 1. Числовые множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ — линейно упорядоченные множества относительно порядка $\leqslant$.
2. Порядок $\subseteq$ на множестве $\mathcal{P}(A)$ (см. пример 1.28) не является линейным, если A содержит более одного элемента. Действительно, пусть $a, b \in A$ — различные элементы. Тогда $\{a\}$ и $\{b\}$ несравнимы.

Пример 1.30 (наибольшие и максимальные, наименьшие и минимальные элементы). 1. Множество $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент, но не имеет наибольшего, как и максимальных.

2. Множество $\mathbb{Z}$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего, причем оно также не имеет ни максимальных, ни минимальных.

3. Множество всех непустых подмножеств некоторого множества A, содержащего более одного элемента, имеет наибольший, но не имеет наименьшего, при этом оно имеет несколько минимальных, а именно, минимальными являются все одноэлементные подмножества множества A.

Пример 1.31. Выписать все элементы отношений, заданных следующими диаграммами Хассе.



Решение. Легко видеть (выписывая все пары, в которых есть строго убывающий путь, ведущий из первой вершины во вторую), что первая диаграмма соответствует отношению

$$\{(e,e),(e,d),(e,c),(e,b),(e,a),(f,f),(f,d),(f,c),(f,b),(f,a),(d,d),\\ (d,b),(d,a),(c,c),(c,b),(c,a),(b,b),(a,a)\},$$

а вторая — отношению

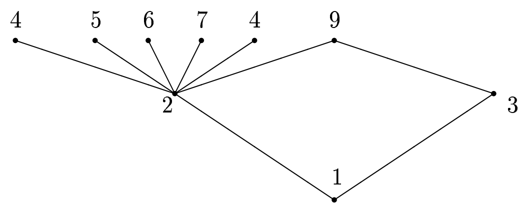
$$\{(e,e),(e,d),(e,c),(e,b),(e,a),(d,d),(d,c),(d,b),(d,a),(c,c),(c,b),\\ (c,a),(b,b),(b,a),(a,a)\},$$

Из диаграмм легко видеть, что это множество, заданное первой диаграммой имеет два максимальных элемента (e и f) и два минимальных (a и b) элемента. Что касается множества, заданного второй диаграммой Хассе, оно является линейно упорядоченным, справедлива следующая цепочка неравенств $e > d > c > b > a$. □

Пример 1.32. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, а $P \subseteq A$ — частичный порядок, заданный следующим образом: $P = \{(x,y)\,|\,x = y$ или $x^2 \leqslant y\}$. Построить диаграмму Хассе этого частичного порядка.

Решение. Имеем $1^2 = 1 \leqslant m$ для любого $m \in A$, следовательно, элемент 1 является наименьшим. Легко видеть, что элемент 2 покрывает 1. Действительно, в противном случае имеем $m^2 < 2$ для некоторого $m \neq 1$, что невозможно. Аналогично, элемент 3 покрывает 1.

Из определения отношения P следует, что $(2,m) \in P$ тогда и только тогда, когда $m \geqslant 4$ и $(3,k) \in P$ тогда и только тогда, когда $k = 9$. Следовательно, элемент 3 не сравним с элементами $4,5,6,7,8$, а элемент 2 сравним с элементами $4,5,6,7,8,9$, причем все они покрывают 2. Действительно, пусть есть элемент k такой, что $(k,m) \in P$, где $k,m \geqslant 4$. Однако, в этом случае $k^2 \leqslant m$, что невозможно, так как $k^2 \geqslant 16$. Таким образом получаем следующую диаграмму Хассе.



□

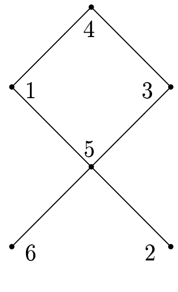
Пример 1.33. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, а $P \subseteq A$ — частичный порядок, заданный следующим образом:

$P = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(4,4),$ $(5,1),(5,3),(5,4),(5,5),(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.
Построить диаграмму Хассе этого частичного порядка.

Решение. Для начала найдем минимальные элементы. Для этого вначале исключим из рассмотрения все пары отношения с одинаковыми элементами на обеих позициях. После чего найдем элементы, которые встречаются только на первом месте в оставшихся парах отношения. Таких элементов только два: 6 и 2, причем, как легко видеть, эти элементы сравнимы со всеми остальными.

Теперь найдем элементы, их покрывающие. Для этого исключим из рассмотрения все пары, первыми элементами которых являются 6 и 2, у нас остаются только множество пар $P' = \{(1,4),(3,4),(5,1),(5,3),(5,4)\}$. Опять найдем элементы, которые встречаются только в первых координатах. Такой элемент только один — это 5. Так как $(2,5),(6,5) \in P$, элемент 5 покрывает и 2 и 3. Действительно $2 < 5$ и $6 < 5$, но если бы был элемент, x, такой что $2 < x < 5$, то пара $(x,5)$ лежала бы в P, однако после исключения всех пар, содержащих элементы 2 и 6, пара $(x,5)$ осталась бы. Но у нас среди оставшихся пар нет элементов, в которых 5 был бы на второй позиции. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что нет элемента y такого что $6 < y < 5$.

Исключим из P' все пары, в которых есть элемент 5. Осталось множество пар $P'' = \{(1,4),(3,4)\}$. Аналогичными рассуждениями получаем, что элемент 5 может покрываться только элементами 1 и 3, причем, так как P содержит и $(5,1)$, и $(5,3)$, элемент 5 покрывается как элементом 1, так и элементом 3. Наконец, рассмотрев множество P'', получаем, что элемент 4 покрывает как 1, так и 3. В итоге получаем следующую диаграмму



□

1.4. Задачи

1.4.1. Проверить, является ли данное отношение $P \subseteq A^2$ эквивалентностью. В случае положительного ответа найти классы эквивалентности:
а) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, x - y$ — целое число$\}$;
б) $A = \mathbb{C}$, $P = \{(x, y) \,\big|\, |x| = |y|\}$;
в) $A = \mathbb{C}$, $P = \{(x, y) \,|\, x - y$ — действительное число$\}$;
г) A — множество всех прямых в пространстве, $P = \{(a, b) \,|\, a \| b\}$;
д) A — множество всех прямых в пространстве,
$P = \{(a, b) \,|$ существует плоскость, проходящая через прямые a и $b\}$.

1.4.2. Проверить, является ли данное отношение $P \subseteq A^2$ предпорядком, частичным порядком, линейным порядком, полным порядком. Найти наименьший, наибольший, минимальные и максимальные элементы в случае их существования:
а) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x \leqslant y^2\}$;
б) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, [x] = [y]\}$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x;
в) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x, y) \,|\, 0 \leqslant y - x < 1\}$;
г) $A = \mathbb{N}^2$, $P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2\}$;
д) $A = \mathbb{Q}$, $P = \left\{ \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right) \,\middle|\, b \leqslant d,\right.$ и, если $b = d$, то $\left. a \leqslant c\right\}$, здесь $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ — несократимые дроби;
е) $A = \mathbb{N}^2$, $P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2$ и, если $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, то $x_1 \leqslant x_2\}$;
ж) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \,|\, x$ нацело делится на $y\}$;
з) $A = \mathbb{Z}$, $P = \{(x, y) \,|\, x$ нацело делится на $y\}$.

1.4.3. Дано множество A. Доказать, что отношение включения $(\subseteq)$ является частичным порядком на $\mathcal{P}(A)$. Для каких A этот порядок будет линейным?

1.4.4. Дано множество A. Найти все возможные отношения $P \subseteq A^2$, являющиеся и эквивалентностями, и частичными порядками.

1.4.5. Доказать, что пересечение предпорядков $\alpha \cap \alpha^{-1}$ является эквивалентностью.

1.4.6. Даны множество A и частичный порядок $P \subseteq A^2$ на нем. Построить диаграмму Хассе для этого порядка:
а) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $P = \{(x, y) \,|\, x \leqslant y$ и $nx = y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}\}$;
б) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, $P = \{(x, y) \,|\, 2x \leqslant y$ или $x = y\}$;

в) $A = B^2$, где $B = \{1, 2, 3\}$, $P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2\}$;
г) $A = B^2$, где $B = \{1, 2, 3\}$,
$P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ или $x_1y_1 < x_2y_2\}$.

1.4.7. Привести пример частичного порядка, имеющего ровно два максимальных и два минимальных элемента. Может ли такой порядок быть линейным?

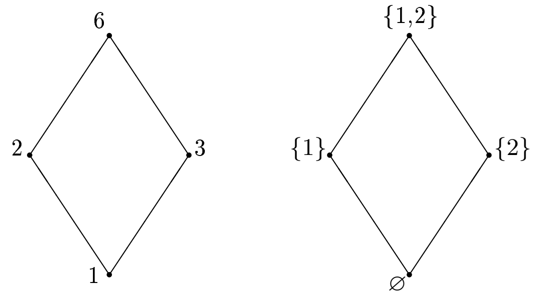
1.4.8. Пусть $\alpha \subseteq A^2$ — порядок, обладающий следующим свойством: любое непустое подмножество B множества A имеет наименьший элемент. Доказать, что α — линейный порядок.

1.4.9. Пусть A — частичный порядок, и пусть a — единственный максимальный элемент множества A. Доказать, что a является наибольшим элементом.

1.5 Изоморфизмы частично упорядоченных множеств

Пример 1.34. Пусть $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$, с порядком "$\subseteq$", $B = \{1, 2, 3, 6\}$ с порядком $P = \{(x, y) \,|\, x$ делится на $y\}$ — частично упорядоченные множества. Построить их диаграммы Хассе. Являются ли эти два частично упорядоченных множества изоморфными?

Решение. Имеем



Сравнивая построенные диаграммы Хассе легко видеть, что частично упорядоченным множества A и B изоморфны друг другу (из [5], § 2.2 легко получить, что для изоморфных частично упорядоченных множеств их диаграммы Хассе одинаковы, если стереть метки, их вершин, то есть наименования элементов частично упорядоченных множеств). $\square$

Пример 1.35. Изоморфны ли частично упорядоченные множества $\langle 2\mathbb{Z}; \leqslant\rangle$ и $\langle 2\mathbb{Z} + 1; \leqslant\rangle$?

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi : 2\mathbb{Z} \leftrightarrow 2\mathbb{Z} + 1$, определенную по правилу $\varphi(2n) = 2n+1$, где $n \in \mathbb{Z}$ (таким образом, $2n \in 2\mathbb{Z}$). Очевидно, что эта функция является биекцией. Действительно, если $\varphi(n) = \varphi(m)$, то $n + 1 = m + 1$, а значит $n = m$. Следовательно, φ — инъективная функция.

Возьмем произвольный элемент $2m + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$. Тогда, очевидно, что $\varphi(2m) = 2m + 1$, а значит φ — сюръективно.

Пусть $2n \leqslant 2m$, тогда, очевидно $\varphi(2n) = 2n + 1 \leqslant 2m + 1 = \varphi(2m)$. Обратно, если $\varphi(2n) \leqslant \varphi(2m)$, то есть $2n+1 \leqslant 2m+1$, то, отнимая единицу от обеих частей неравенства, получаем $2n \leqslant 2m$. Следовательно φ — изоморфизм, а значит $\langle 2\mathbb{Z}; \leqslant\rangle$ и $\langle 2\mathbb{Z} + 1; \leqslant\rangle$ изоморфны. □

1.5. Задачи

1.5.1. Будут ли изоморфными частично упорядоченные множества $\mathfrak{A} = \langle A, P_1\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, P_2\rangle$? В случае положительного ответа найти отображение, осуществляющее изоморфизм:
а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$,
$P_1 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 4), (5, 5)\}$,
$P_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (d, c), (d, d), (e, c), (e, e)\}$;
б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$,
$P_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2)(3, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$,
$P_2 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (d, c), (d, d), (e, e)\}$.

1.5.2. Будут ли изоморфными частично упорядоченные множества $\mathfrak{A} = \langle A, P\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, P\rangle$? В случае положительного ответа найти отображение, осуществляющее изоморфизм:
а) $A = C^2$, где $C = \{1, 2, 3\}$, $B = D^2$, где $D = \{2, 3, 4\}$,
$P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ или $x_1y_1 < x_2y_2\}$;
б) $A = C^2$, где $C = \{1, 2, 3\}$, $B = D^2$, где $D = \{0, 1, 2\}$,
$P = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,|\, (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ или $x_1y_1 < x_2y_2\}$.

1.5.3. Будут ли изоморфными частично упорядоченные множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$? В случае положительного ответа найти отображение, осуществляющее изоморфизм:
а) $\mathfrak{A} = \langle 2\mathbb{Z}, \leqslant\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle 3\mathbb{Z}, \leqslant\rangle$; б) $\mathfrak{A} = \langle (0, \pi), \leqslant\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, \leqslant\rangle$;
в) $\mathfrak{A} = \langle (0, \infty), \leqslant\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, \leqslant\rangle$; г) $\mathfrak{A} = \langle (0, 1], \leqslant\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle [0, 1), \leqslant\rangle$;
д) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leqslant\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, \leqslant\rangle$.

1.6 Метод математической индукции

Пример 1.36. Доказать, что $9^n - 2^n$ делится на 7 при любом натуральном n.

Доказательство. Утверждение $P(n)$ состоит в том, что $9^n - 2^n$ делится на 7.

Проверим базу индукции, то есть установим истинность утверждения $P(0)$, которое состоит в том, что $9^0 - 2^0$ делится на 7. Действительно, $9^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, очевидно, делится на 7.

Предположим, что истинно утверждение $P(k)$, то есть $9^k - 2^k$ делится на 7. Проверим истинность утверждения $P(k+1)$:

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 2^{k+1} &= 9 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot (9^k - 2^k). \end{aligned}$$

Первое слагаемое, очевидно, делится на 7, а второе делится на 7 по предположению индукции. Таким образом, по принципу математической индукции утверждение доказано. □

Пример 1.37. Доказать методом математической индукции, что $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Доказательство. Пусть утверждение $P(n)$ состоит в том, что равенство $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ выполнено для данного n. Необходимо доказать, что $P(n)$ истинно для всех $n \geqslant 1$.

Для $n = 1$ имеем $1 = 1^2$, что, очевидно, верно.

Пусть $P(k)$ истинно для некоторого k, то есть $1+3+\cdots+(2k-1) = k^2$. Проверим истинность утверждения $P(k+1)$.

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) &= (1 + 3 + \cdots + (2k-1)) + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \text{ по индукционной гипотезе} \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Таким образом, из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$, а значит по принципу математической индукции тождество доказано. □

Пример 1.38. Доказать, что для любого натурального n справедливо неравенство $3^n > n^2$.

Доказательство. Проверим базу индукции: $3^0 > 0^2$, так как $1 > 0$.

Пусть неравенство выполняется при $n = k$, то есть $3^k > k^2$. Имеем $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3n^2$, по индукционной гипотезе. Для завершения доказательства осталось показать, что $3k^2 \geqslant (k+1)^2$, так как в этом случае получим $3^{k+1} > (k+1)^2$. Решим неравенство $3k^2 \geqslant (k+1)^2$:

$$\begin{aligned} 3k^2 &> k^2 + 2k + 1 \\ 2k^2 - 2k - 1 &> 1 \end{aligned}$$

Следовательно, $k \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$.

Так как $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < 2$, получаем $3k^2 \geqslant (k+1)^2$ для $k \geqslant 2$. Однако, для $k = 0, 1$ это неравенство не выполняется. Поэтому мы не сможем доказать, что $3^{k+1} > (k+1)^2$ при этих значениях k и для них придется проверить выполнение неравенства непосредственно:

$$\begin{aligned} 3^1 > 1^2, &\ \text{ так как } \ 3 > 1, \\ 3^2 > 2^2, &\ \text{ так как } \ 9 > 4. \end{aligned}$$

□

1.6. Задачи

1.6.1. Доказать следующие тождества методом математической индукции:

а) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

б) $0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + \cdots + n(n+3) = \dfrac{n(n+1)(n+5)}{3}$;

в) $1 \cdot 0! + 2 \cdot 1! + 5 \cdot 2! \cdots + (n^2+1) \cdot n! = n(n+1)! + 1$;

г) $1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + \cdots + (2n+1)3^n = n \cdot 3^{n+1} + 1$;

д) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

е) $\dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

1.6.2. Доказать следующие утверждения методом математической индукции:

а) $n^3 - n$ делится на 6;

б) $12^n - 5^n$ делится на 7;

в) $8^{2n+1} + 1$ делится на 9;

г) $2^{2n+1} + 9^{2n+1}$ делится на 11;

д) $7^n - 6n - 1$ делится на 9.

1.6.3. Доказать следующие неравенства методом математической индукции:

а) $2^n > n$ для натуральных n;

б) $2^n < n!$ для натуральных $n \geqslant 4$;

в) $3^n > n \cdot 2^n$ для натуральных n;
г) $3^n > n \cdot 2^{n+1}$ для натуральных $n \geqslant 7$;
д) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \dfrac{4^n}{n+1}$ для натуральных n;
е) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ для натуральных $n \geqslant 1$;
ж) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$ для натуральных $n \geqslant 1$.

1.6.4. Доказать, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n.

1.6.5. Доказать, что число диагоналей в выпуклом n-угольнике равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

1.6.6. Доказать, что любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить, пользуясь только трех- и пятирублевыми купюрами.

1.6.7. Доказать, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, делят плоскость на $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ частей.

1.6.8. Доказать методом математической индукции, что число элементов во множестве $\mathcal{P}(A)$ равно 2^n, где n — число элементов в A.

1.6.9. Проверив соотношение $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, доказать формулу бинома Ньютона методом математической индукции.

1.6.10. Найти ошибку в следующих рассуждениях: "Докажем, что все целые числа равны.

Воспользуемся методом математической индукции по количеству чисел. Возьмем одно число. Оно, очевидно, равно самому себе.

Пусть утверждение верно для k чисел, то есть для любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots a_k$ все они равны между собой. Рассмотрим $k+1$ число $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Рассмотрим первые k чисел. По индукционному предположению они равны между собой. Рассмотрим числа $a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$. Эти числа тоже равны между собой. Следовательно, все $k+1$ чисел равны между собой, так как каждое из чисел равно, скажем a_2. Что и требовалось доказать."

1.7 Мощность множеств

Пример 1.39. Доказать, что $[0,1] \sim [2,6]$.

Доказательство. Проще всего искать биекцию в виде линейной функции, то есть в виде $f(x) = kx+b$. Пусть концы одного отрезка переходят в концы другого. Скажем, пусть $f(0) = 2$ и $f(1) = 6$. Из первого равенства получаем $b = 2$, тогда из второго равенства следует $k \cdot 1 + 2 = 6$, отсюда $k = 4$. Таким образом, $f(x) = 4x + 2$.

Осталось доказать, что функция f биективна. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$, тогда $4x_1 + 2 = 4x_2 + 2$, следовательно, $4x_1 = 4x_2$, а значит $x_1 = x_2$, то есть f инъективна. Пусть теперь $f(x) = y$, тогда $y = 4x + 2$, то есть $x = \dfrac{y-2}{4}$, причем, так как $2 \leqslant y \leqslant 6$, получаем $0 = \dfrac{2-2}{4} \leqslant x = \dfrac{y-2}{4} \leqslant \dfrac{6-2}{4} = 1$, что и требовалось. □

Пример 1.40. Доказать, что $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четное;} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Очевидно, что $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Осталось доказать, что f — биекция.

Пусть $f(n_1) = f(n_2)$. Рассмотрим три случая:

1. Оба числа n_1 и n_2 четные. В этом случае из $f(n_1) = f(n_2)$ следует, что $\dfrac{n_1}{2} = \dfrac{n_2}{2}$, а значит $n_1 = n_2$.
2. Оба числа n_1 и n_2 нечетные. Тогда $f(n_1) = f(n_2)$ следует, что $-\dfrac{n_1+1}{2} = -\dfrac{n_2+2}{2}$, а значит легко видеть, что снова $n_1 = n_2$.
3. Одно из чисел четное, а второе — нечетное. Этот случай невозможен, так как значение функции от четного числа неотрицательно в то время как значение функции от нечетного числа отрицательно.

Итак, мы доказали, что f инъективна.

Пусть задано целое число k. Если $k \geqslant 0$, то, очевидно, $k = f(2k)$. Если же $k < 0$, то необходимо найти такое n, что $-\dfrac{n+1}{2} = k$. Отсюда получаем $n = -2k + 1 \in \mathbb{N}$. Следовательно, f сюръективна, а следовательно, биективна. □

Пример 1.41. Доказать, что $[0, 1] \sim (0, 1]$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Кантора — Бернштейна.

Очевидно, что $(0, 1] \leqslant [0, 1]$, так как $(0, 1] \subset [0, 1]$, а значит в качестве одной из инъективных функций можно взять $g : (0, 1] \to [0, 1]$, определенную тождественно на элементах из $(0, 1]$, то есть положив $g(x) = x$.

Рассмотрим функцию $f : [0,1] \to (0,1]$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ \dfrac{1}{n+1}, & \text{если } x = \dfrac{1}{n} \text{ для } n = 1, 2, \ldots; \\ x, & \text{если } x \neq 0, \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Докажем, что эта функция инъективна.

Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$. Отметим, что для любого $u \in [0,1]$ выполняется следующее свойство: $f(u) \in A$ тогда и только тогда когда $u \in A$. Отсюда следует, что если $f(x_1) = f_(x_2)$, то x_1 и x_2 принадлежат или не принадлежат множеству A одновременно. Осталось рассмотреть оба случая.

1. Пусть $x_1, x_2 \in A$. Если $x_1 = \dfrac{1}{k_1}$, то легко видеть, что $k_1 = \dfrac{1}{x_1}$, а значит

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{k_1}\right) = \frac{1}{k_1+1} = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+1} = \frac{x_1}{x_1+1}.$$

Аналогично, если $x_2 = \dfrac{1}{k_1}$, то $f(x_2) = \dfrac{x_2}{x_2+1}$. Отсюда видно, что если $f(x_1) = f(x_2)$, то

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1}; \\ x_1(x_2+1) &= x_2(x_1+1); \\ x_1x_2 + x_1 &= x_1x_2 + x_2; \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Осталось отметить, что $\dfrac{x_1}{x_1+1} \neq 1$ ни для какого x_1 вида $\dfrac{1}{k_1}$, а значит, $f(x_1) = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = 0$.

2. Пусть $x_1, x_2 \notin A$, тогда если $f(x_1) = f(x_2)$, то и $x_1 = x_2$, так как для любого $u \in [0,1] \backslash A$ имеем $f(u) = u$. □

Пример 1.42. Доказать, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, имеем $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$ (можно рассмотреть функцию $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, определенную по правилу $g(k) = k$). Эта функция, очевидно, инъективна.

Построим инъективное отображение $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Пусть $a \in \mathbb{Q}$, тогда это число может быть единственным способом записано в виде $a = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ и дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима. *Высотой* числа $a \in \mathbb{Q}$ назовем число $\mathrm{ht}(a) = |m| + n$. Очевидно, что $\mathrm{ht}(a) \in \mathbb{N}^*$ для любого $a \in \mathbb{Q}$. Кроме того, почти так же очевидно, что для любого $s \in \mathbb{N}^*$ существует лишь конечное число рациональных чисел, высота которых равна s. Следовательно, функция f может быть задана по индукции следующим образом.

Выписываем все числа, высота которых равна 1. Единственное такое число — это $0 = \dfrac{0}{1}$. Соответственно, полагаем $f(0) = 1$.

Пусть уже рассмотрены все рациональные числа, высота которых не превосходит числа k. Предположим, что таких чисел всего K и уже определены значения $f(x)$ для $x = 0, 1, \ldots, K-1$ таким образом, что $\mathrm{ht}(f(x)) \leqslant k$ и из того, что $f(x_1) = f(x_2)$ для $x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$ следует, что $x_1 = x_2$.

Рассмотрим все рациональные числа, высота которых равна $k+1$, пусть таких чисел всего s, тогда мы можем произвольным образом определить $f(x)$ для $x = K, K+1, \ldots K+s-1$ так, чтобы для этих значений x было выполнено условие $\mathrm{ht}(f(x)) = k+1$ и при этом если $f(x_1) = f(x_2)$ для $x_1, x_2 \in \{K, K+1, \ldots K+s-1\}$, то $x_1 = x_2$.

Например, у нас есть два числа высоты 2: $1 = \dfrac{1}{1}$ и $-1 = \dfrac{-1}{2}$. Положим, скажем $f(1) = 1$, $f(2) = -1$. Далее, чисел высоты 3 всего 4. Это $2 = \dfrac{2}{1}$, $-2 = \dfrac{-2}{1}$, $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{-1}{2}$. Можно продолжить нашу функцию, например, следующим образом: $f(3) = 2$, $f(4) = -2$, $f(5) = \dfrac{1}{2}$, $f(6) = \dfrac{-1}{2}$.

Очевидно, что функция $f(x)$ является инъективной по построению. Следовательно, по теореме Кантора — Бернштейна, мы можем заключить, что $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, что и требовалось доказать. $\square$

1.7. Задачи

1.7.1. Доказать, пользуясь определением мощности, следующие утверждения:

а) $[0,1] \sim [5,10]$; б) $[0,1] \sim [-2,-1] \cup (0,1]$;

в) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 1000\} \sim \mathbb{N}$; г) $\mathbb{Z} \sim 2\mathbb{Z}$;

д) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$;

е) множество точек окружности эквивалентно множеству точек границы квадрата;
ж) множество точек круга эквивалентно множеству точек квадрата;
з) $[0,1]\cup\mathbb{N}\sim[0,1]$; и) $\mathbb{Z}^2\sim\mathbb{N}$; к) $\mathbb{R}\sim(0,\infty)$;
л) $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$; м) $[0,1]\sim[-2,0]\cup[1,2]$; н) $2^{\mathbb{N}}\sim 10^{\mathbb{N}}$;
о) $\mathbb{R}\sim 2^{\mathbb{N}}$.

1.7.2. а) доказать, что если $A\sim\mathbb{N}$, $B\sim n$ и $A\cap B=\varnothing$, то $A\cup B\sim\mathbb{N}$;
б) доказать, что если $A\sim\mathbb{N}$, $B\sim\mathbb{N}$ и $A\cap B=\varnothing$, то $A\cup B\sim\mathbb{N}$;
в)* доказать, что если $A\sim\mathbb{N}$ и $B\sim\mathbb{N}$, то $A\cup B\sim\mathbb{N}$
(*Подсказка:* воспользуйтесь пп. а) и б)).

1.7.3. Даны множества A, B и C. Доказать, пользуясь определением мощности, что $A^C\cap B^C\sim(A\cap B)^C$.

1.7.4. Доказать, пользуясь определением мощности, что множество конечных десятичных дробей счетно.

1.7.5. Доказать, пользуясь опредлением мощности, что множество точек верхней полуплоскости координатной плоскости эквивалентно множеству точек первой четверти координатной плоскости (оба множества рассматриваются вместе со своими границами).

1.7.6. Доказать, что $[0,1]^2\sim[0,1]$.
(*Подсказка:* воспользуйтесь теоремой Кантора — Бернштейна).

1.7.7. Пусть A и B — несчетные множества. Может ли множество $A\cap B$ быть:
а) пустым; б) конечным; в) счетным; г) несчетным?

1.7.8. Пусть A — некоторое множество, $a\in A$ — некоторый фиксированный элемент, $\mathcal{P}_a(A)=\{B\subseteq A\,|\,a\in B\}$. Доказать, что $\mathcal{P}_a(A)\sim\mathcal{P}(A)\backslash\mathcal{P}_a(A)$.

1.7.9. Доказать, что если $|A|>\omega_0$, а $|B|\leqslant\omega_0$, то $|A\backslash B|=|A|$.

1.7.10. Дано $|A|=m$, $|B|=n$. Доказать индукцией по m, что число функций $f:A\to B$ равно n^m.

1.7.11. а) Пусть $A_1\sim A_2$. Доказать, что $2^{A_1}\sim 2^{A_2}$.
б) Пусть $A_1\sim A_2$ и $B_1\sim B_2$. Доказать, что $B_1^{A_1}\sim B_2^{A_2}$.

Глава 2

Алгебраические системы

2.1 Определение алгебраических систем. Алгебры. Группы

Пример 2.1. Являются ли алгебраическими системами данные множества с операциями? Какие из алгебраических систем являются алгебрами?

1. $\langle 2\mathbb{Z}+1; \cdot\rangle$ 2. $\langle \mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant\rangle$ 3. $\langle \mathbb{Q}^*; \cdot, :, 4\rangle$ 4. $\langle \mathbb{Z}; :\rangle$ 5. $\langle \mathbb{Q}; +, \cdot, \sqrt{2}\rangle$

Решение. 1. Множество является алгебраической системой, так как произведению двух нечетных чисел — нечетное число. Более того, так как сигнатура функциональна (см. [5], § 2.1), данная система является алгеброй.
2. Это множество также является алгебраической системой, так как и сумма, и произведение двух целых чисел являются целыми числами, однако данная система не является алгеброй, так как система содержит предикатный символ $\leqslant$.
3. Множество является алгеброй, так как сигнатура функциональна и множество $\mathbb{Q}^*$ замкнуто относительно умножения и деления, и константа также принадлежит $\mathbb{Q}^*$.
4. Это множество не является алгебраической системой, так как множество $\mathbb{Z}$ не является замкнутым относительно деления (делимое не может быть равным нулю, а также, например, $(1:3) \notin \mathbb{Z}$).
5. Это тоже не алгебраическая система, так как $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Пример 2.2. Дана алгебра $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}^2; \times\rangle$, где бинарная операция определена следующим образом: $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$. Является ли $\mathbb{A}$ группой? В случае отрицательного ответа выяснить, является ли эта алгебра моноидом, полугруппой, группоидом.

Решение. Лучше начинать решение "с конца". Итак, операция $\times$ бинарная, причем, для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ имеем $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in$

$\mathbb{R}^2$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — группоид.

Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$. Имеем

$$\begin{array}{rcll} ((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) \times (a_3, b_3) & = & (a_1 a_2, b_1 b_2) \times (a_3, b_3) & = \\ & = & ((a_1 a_2) a_3, (b_1 b_2) b_3) & = \\ & = & (a_1 (a_2 a_3), b_1 (b_2 b_3)) & = \\ & = & (a_1, b_1) \times (a_2 a_3, b_2 b_3) & = \\ & = & (a_1, b_1) \times ((a_2, b_2) \times (a_3, b_3)). & \end{array}$$

Следовательно, $\mathfrak{A}$ — полугруппа.

Легко видеть, что $(a, b) \times (1, 1) = (a, b) = (1, 1) \times (a, b)$ для любого элемента (a, b) из $\mathbb{R}^2$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ — моноид.

Наконец, пусть $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, тогда проверим, существует ли элемент (x, y), такой что $(a, b) \times (x, y) = (x, y) \times (a, b) = (1, 1)$. Так как $(a, b) \times (x, y)) = (ax, by) = (xa, yb) = (x, y) \times (a, b)$, получаем $x = \dfrac{1}{a}$ и $y = \dfrac{1}{b}$. Таким образом, элемент $(a, b)^{-1}$ определен только если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Следовательно $\mathfrak{A}$ не является группой. □

2.1. Задачи

Для каждого множества с заданными на нем операциями выяснить, являются ли оно алгеброй.

2.1.1. $\langle \mathbb{N}; +, \cdot \rangle$.

2.1.2. $\langle \mathbb{N}; - \rangle$.

2.1.3. $\langle \mathbb{N}; +, \cdot, \sqrt{2} \rangle$.

2.1.4. $\langle \mathbb{Q}; +, : \rangle$.

2.1.5. $\langle \mathbb{Z}^*; : \rangle$.

2.1.6. $\langle \mathbb{R}; \ln \rangle$.

2.1.7. $\langle \mathbb{R}; +, \mathrm{sq} \rangle$, где $\mathrm{sq}(x) = x^2$.

2.1.8. $\langle \mathbb{R}; -, \mathrm{sqrt} \rangle$, где $\mathrm{sqrt}(x) = \sqrt{x}$.

2.1.9. $\langle \mathbb{Q}; \cdot, \mathrm{cbrt} \rangle$, где $\mathrm{cbrt}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2.1.10. $\langle \mathbb{R}; \cdot, \mathrm{cbrt} \rangle$, где $\mathrm{cbrt}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2.1.11. $\langle \mathbb{N}; \cdot, * \rangle$, где $x * y = x^y$.

2.1.12. $\langle \mathbb{Z}^*; \cdot, * \rangle$, где $x * y = x^y$.

2.1.13. $\langle \mathbb{Q}^*; +, * \rangle$, где $x * y = x^y$.

2.1.14. $\langle \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}; \cdot, + \rangle$.

2.1.15. $\langle \mathbb{C}; \cdot, \mathrm{sqrt} \rangle$, где $\mathrm{sqrt}(0) = 0$ и, если $x \neq 0$, то $\mathrm{sqrt}(x)$ — это тот квадратный корень из x, аргумент которого лежит в промежутке $[0, \pi)$.

2.1.16. $\langle 2\mathbb{Z}; \oplus \rangle$, где $x \oplus y = \dfrac{x + y}{2}$.

2.1.17. $\langle 2\mathbb{Z}; \otimes\rangle$, где $x \otimes y = \dfrac{xy}{2}$.
2.1.18. $\langle \mathbb{R}; \leqslant, +\rangle$.
2.1.19. $\langle (\mathbb{N} + i\mathbb{N})\backslash\{0\}; +, \cdot\rangle$.
2.1.20. $\langle (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})\backslash\{0\}; \cdot, :\rangle$.
2.1.21. $\langle V_3; +, \times\rangle$, где V_3 — множество геометрических векторов пространства.
2.1.22. $\langle V; -, \times\rangle$, где V — множество геометрических векторов вида (x, x, y).
2.1.23. $\langle V_3; (\ ,\ )\rangle$, $(\overline{u}, \overline{v})$ — скалярное произведение.
2.1.24. $\langle \mathbb{R}[x]; +, \cdot, -\rangle$.
2.1.25. $\langle \mathbb{R}_3[x]; +, -\rangle$.
2.1.26. $\langle \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]; +, -\rangle$.
2.1.27. $\langle \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]; \cdot\rangle$.
2.1.28. $\left\langle \mathbb{R}[x]; \dfrac{d}{dx}, I\right\rangle$, где $I(f(x)) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$.
2.1.29. $\left\langle S; \dfrac{d}{dx}, I\right\rangle$, где S — множество функций, представимых в виде $\displaystyle\sum_{i=-m}^{n} a_i x^i$, для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, где $a_i \in \mathbb{R}$, i пробегает целые значения от $-m$ до n, $I(f(x)) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$.
2.1.30. Проверить, является ли группой каждая из следующих алгебр. В случае отрицательного ответа выяснить, является ли система моноидом, полугруппой, группоидом:
а) $\langle \mathbb{N}; +\rangle$;
б) $\langle \mathbb{Z}; \cdot\rangle$;
в) $\langle \mathbb{Z}[x]; +\rangle$;
г) $\langle \mathbb{Q}[n]; \cdot\rangle$;
д) $\langle M_n[\mathbb{F}]; \cdot\rangle$;
е) $\langle M\backslash\{\mathbb{O}\}; \cdot\rangle$, где M — множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;
ж) $\langle A; +\rangle$, где A — множество всех рациональных чисел, представимых в виде $\dfrac{a}{2^n}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$;
з) $\langle \mathbb{Q}; \oplus\rangle$, если $a \oplus b = a + 2b$;
и) $\langle \mathbb{Z}^*; *\rangle$, если $a * b = 2ab$.

2.2 Таблицы Кэли

Пример 2.3. Доказать, что множество A всех (комплексных) корней восьмой степени из 1 с операцией умножения является группой. Построить ее таблицу Кэли.

Решение. 1. Ассоциативность умножения на множестве A следует из ассоциативности умножения на множестве $\mathbb{C}$.
2. Нейтральным элементом, очевидно, является 1. Это число принадлежит множеству A, так как $1^8 = 1$.
3. Напомним, что любой элемент z множества A может быть представлен в виде $z = e^{\frac{2\pi ki}{8}}$, где $k = 0, 1, \ldots, 7$. Соответственно, имеем $e^{\frac{2\pi ki}{8}} \cdot e^{\frac{2\pi(8-k)i}{8}} = e^{\frac{2\pi\cdot 8i}{8}} = e^{2\pi i} = 1$.
4. Пусть $z_1 = e^{\frac{2\pi ki}{8}}$, $z_2 = e^{\frac{2\pi li}{8}}$. Имеем $z_1z_2 = e^{\frac{2\pi ki}{8}} \cdot e^{\frac{2\pi li}{8}} = e^{\frac{2\pi(k+l)i}{8}}$. Если $k + l \leqslant 7$, то произвевдение уже представлено в требуемом виде. Если же $k + l \geqslant 8$, то, очевидно $k + l \leqslant 7 + 7 = 14$ и мы получаем $z_1z_2 = e^{\frac{2\pi(k+l)i}{8}} = e^{\frac{2\pi(k+l-8)i}{8}} \cdot e^{2\pi i} = e^{\frac{2\pi(k+l-8)i}{8}} \cdot 1 = e^{\frac{2\pi(k+l-8)i}{8}}$, причем $0 \leqslant k + l \leqslant 6$, следовательно, и в этом случае произведение представимо в требуемом виде. Таким образом, мы доказали, что $\langle A; \cdot\rangle$ является группой.

Для построения таблицы Кэли введем обозначения $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi ki}{8}}$, для $k = 1, 2, \ldots, 7$, тогда таблица примет следующий вид:

$\cdot$	1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
1	1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	1
ε_2	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	1	ε_1
ε_3	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	1	ε_1	ε_2
ε_4	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	1	ε_1	ε_2	ε_3
ε_5	ε_5	ε_6	ε_7	1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_6	ε_6	ε_7	1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_7	ε_7	1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6

□

Пример 2.4. Рассмотрим множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Проверить, является ли это множество группой относительно операции "$*$", определенной следующим образом $a * b =$ остатку от деления ab на 6. В случае отрицательного ответа выяснить, является ли это множество моноидом, полугруппой, группоидом.

Решение. Достаточно очевидно, что наше множество является группоидом.

Чтобы доказать, что для данного множества с данной операцией выполнено свойство асстциативности, докажем, что остаток от деления на некоторое число n произведения двух чисел зависит только от остатков от деления на n сомножителей. Действительно, пусть $a = kn + r$, а $b = ln + s$, где $0 \leqslant r, s \leqslant n - 1$. Имеем $ab = (kn + r)(ln + s) = kln^2 + ksn + rln + rs = n(kln + ks + rl) + rs$. Таким образом, для любых двух чисел остаток от деления их произведения на n равен остатку от деления на n произведения их остатков от деления на это же число.

Из определения операции $*$ следует, что $(a * b) * c$ равно остатку от деления $(a * b)c$ на 6. Так как $a * b$ равно остатку от деления ab на 6, в силу только что доказанного свойства получаем, что остатки от деления на 6 чисел $(a * b)c$ и $(ab)c$ равны. Аналогично доказывается, что $a * (b * c)$ равно остатку от деления $a(bc)$ на 6. Осталось отметить, что $(ab)c = a(bc)$, так как умножение на множестве $\mathbb{Z}$ ассоциативно. Следовательно, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Построим таблицу умножения для операции $*$:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

.

Легко видеть, что данная таблица не удовлетворяет свойству таблиц Кэли для групп, например, в первой ее строке элемент 0 повторяется 6 раз. Следовательно, данное множество с данной операцией не может быть группой. С другой стороны, элементы в строчке, соответствующей элементу 1 равны соответствующим элементам в заголовках столбцов, а элементы в столбце, соответствующем элементу 1 равны соответствующим элементам в заголовках строк. Следовательно, наше множество является моноидом. □

Пример 2.5. Рассмотрим множество $\{0, 1, \ldots, 5\}$ и определим на нем операции $\oplus$ и $*$ следующим образом: $a \oplus b =$ остатку от деления $a + b$ на 6, $a * b =$ остатку от деления $a \cdot b$ на 6. Для операции $*$ таблица Кэли уже была построена в примере 2.4, построим таблицу Кэли для операции $\oplus$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

.

2.2. Задачи

2.2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — группа с конечным носителем. Доказать, что в каждом столбце таблицы Кэли этой группы все элементы встречаются по одному разу.

2.2.2. Построить таблицу Кэли для следующих алгебр:

а) C_9;

б) группа, состоящая из всех чисел от 0 до 35, взаимно простых с 36, если операция "$*$" определена так: $a * b =$ остатку от деления ab на 36 (Эта группа обозначается $\mathbb{Z}_{36}^*$);

в) группа кватернионов $\overline{\overline{\mathbb{H}}}$;

г) группа матриц вида $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, где $a_1 \in \{0, 1\}$, $a_2 \in \{0, 1, 2\}$, а операция задана следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $c_1 =$ остатку от $a_1 + b_1$ на 2, а $c_2 =$ остатку от деления $a_2 + b_2$ на 3.

2.2.3. Построить таблицы Кэли для каждой из следующих алгебр. Определить, является ли алгебра группой, моноидом, полугруппой, группоидом:

а) $\langle A; \oplus \rangle$, где $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, а $a \oplus b$ — это остаток от деления числа $a + b$ на 5;

б) $\langle B; * \rangle$, где $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а $a * b$ — это остаток от деления числа ab на 7;

в) $\langle C; \cdot \rangle$, где $C = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (всего восемь матриц);

г) $\langle T_3, \circ \rangle$, где T_3 множество всех симметрий равностороннего треугольника, а операция $\circ$ определена следующим образом: $\tau \circ \rho$ — это суперпозиция (то есть последовательное выполнение) преобразований τ и ρ;

д) $\langle T_4, \circ\rangle$, где T_4 — множество всех симметрий квадрата, а операция определена, как в п. г).

2.2.4. Доказать, построив таблицу Кэли, что множество, состоящее из всех квадратных матриц третьего порядка, в каждой строке и в каждом столбце которых ровно по одной единице и по два нуля, образует группу относительно матричного умножения.

2.2.5. Построить таблицы Кэли для следующих алгебр.

а) $\mathbb{Z}_8$; б) $\mathbb{Z}_{12}$;

в) множество четных чисел от 0 до 18, с операциями, определенными, как в $\mathbb{Z}_{20}$;

г) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b = 0, 1, 2\}$ относительно операций сложения и умножения, определенных следующим образом: $(a+b\sqrt{2})\oplus(a'+b'\sqrt{2}) = c+d\sqrt{2}$, где c и d равны соответственно остаткам от деления $a + a'$ и $b + b'$ на 3, а $(a + b\sqrt{2}) * (a' + b'\sqrt{2}) = c + d\sqrt{2}$, где c и d равны соответственно остаткам от деления $aa' + 2bb'$ и $ab' + a'b$ на 3;

д) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b = 0, 1, 2\}$ относительно операций сложения и умножения, определенных следующим образом: $(a+b\sqrt{3})\oplus(a'+b'\sqrt{3}) = c+d\sqrt{3}$, где c и d равны соответственно остаткам от деления $a + a'$ и $b + b'$ на 3, а $(a + b\sqrt{3}) * (a' + b'\sqrt{3}) = c + d\sqrt{3}$, где c и d равны соответственно остаткам от деления aa' и $ab' + a'b$ на 3;

е) $\{\mathbb{Z}_3 + i\mathbb{Z}_3 \mid a, b = 0, 1, 2\}$ относительно операций сложения и умножения, которые индуцируются операциями в $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{C}$.

ж) множество матриц из $M_2(\mathbb{Z}_3)$, вторая строка которых состоит из нулей относительно операций матричного сложения и умножения.

2.3 Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраических систем

Пример 2.6. Даны алгебры $\mathfrak{A} = \langle\mathbb{R}; +\rangle$ $\mathfrak{B} = \langle[0, 1); \oplus\rangle$, где $a \oplus b = \{a+b\}$. Проверить, является ли гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ функция $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1)$, определенная следующим образом: $\varphi(a) = \{a\}$ для любого $a \in \mathbb{R}$.[1] ($\{x\}$ — это дробная часть числа x, то есть число из интервала $[0, 1)$ такое что $x - \{x\}$ целое.)

[1] На первый взгляд может показаться, что условие данной задачи некорректно, так как сигнатуры алгебр различны (в первом случае сигнатура состоит из функционального символа $+$, в то время, как во втором — из функционального символа $\oplus$). Однако, можно считать, что сигнатура одна и та же, состоящая из одного функционального символа, соответствующего бинарной функции, а различия в обозначениях обусловлены тем, что обозначение “+” имеет достаточно широкое распространение и вполне конкретный смысл. Наиболее дотошный читатель может считать, что обе алгебры имеют сигнатуру $\Sigma = \{f\}$, где $f_{\mathfrak{A}}(a, b) = a + b$ для $a, b \in \mathbb{R}$, а $f_{\mathfrak{B}}(a, b) = a \oplus b$ для $a, b \in [0, 1)$.

Решение. Необходимо проверить, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$, то есть надо показать, что справедливо равенство

$$\{a+b\} = \{a\} \oplus \{b\}. \tag{2.1}$$

Пусть $a = n + \{a\}$, а $b = m + \{b\}$. Вычислим выражения в правой и левой частях равенства (2.1). В левой части имеем

$$\{a+b\} = \{n + \{a\} + m + \{b\}\} = \{\{a\} + \{b\}\}.$$

С другой стороны, вычисляя выражение в правой части, получаем

$$\{a\} \oplus \{b\} = \{n + \{a\}\} \oplus \{m + \{b\}\} = \{a\} \oplus \{b\} = \{\{a\} + \{b\}\}.$$

Итак, для данных алгебраических систем и данного отображения равенство (2.1) выполнено, а значит функция φ является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. □

Пример 2.7. Доказать, что алгебраические системы $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot, \leqslant \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; +, \leqslant \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, определенную по правилу $\varphi(a) = \ln a$.

Докажем, что φ — гомоморфизм. Для любых $a, b \in \mathbb{R}^+$ имеем

$$\varphi(a \cdot b) = \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Кроме того, если $a \leqslant b$, то $\varphi(a) = \ln a \leqslant \ln b = \varphi(b)$, что и требовалось доказать.

Далее, докажем, что φ — биекция. Пусть $\varphi(a) = \varphi(b)$, тогда $\ln a = \ln b$, следовательно, $a = e^{\ln a} = e^{\ln b} = b$, то есть φ инъективна. Пусть $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим e^c, имеем $\varphi e^c = \ln e^c = c$. Итак, φ сюръективна, а значит и биективна.

Наконец, очевидно, что $\varphi^{-1}(c) = e^c$. Для любых $c, d \in \mathbb{R}$ имеем

$$\varphi^{-1}(c+d) = e^{c+d} = e^c \cdot e^d = \varphi^{-1}(c) \cdot \varphi^{-1}(d).$$

Кроме того, если $c \leqslant d$, то $\varphi^{-1}(c) = e^c \leqslant e^d = \varphi^{-1}(d)$. Таким образом, φ^{-1} — также гомоморфизм. Следовательно φ — изоморфизм. □

2.3. Задачи

2.3.1. Является ли гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ с носителем A в алгебру $\mathfrak{B}$ с носителем B функция $\varphi : A \to B$, если:
а) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle$, $\mathfrak{B}\langle \mathbb{Z}_0^+; \cdot \rangle$, $\varphi(z) = |z|$;
б) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot \rangle$, $\mathfrak{B}\langle \mathbb{R}; \cdot \rangle$, $\varphi(z) = |z|$;

в) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, $\varphi(z) = -|z|$;
г) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}; \cdot \rangle$, $\varphi(n) = e^{i\frac{n\pi}{3}}$;
д) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}; + \rangle$, $\mathfrak{B} = \big\langle \big\{ z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1 \big\}; \cdot \big\rangle$, $\varphi(x) = e^{ix}$;
е) $\mathfrak{A} = \langle \{0, 1, 2, \ldots, 35\}; \oplus_1 \rangle$, где $a \oplus_1 b$ равно остатку от деления $a + b$ на 36, $\mathfrak{B} = \langle \{0, 1, 2, \ldots, 7\}; \oplus_2 \rangle$, где $c \oplus_2 d$ равно остатку от деления $c + d$ на 8, $\varphi(n)$ равно остатку от деления числа $2n$ на 8;
ж) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; \cdot \rangle$, $\varphi(x) = x^2$;
з) $\mathfrak{A}$ — множество квадратных матриц n-ого порядка с операцией умножения матриц $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; \cdot \rangle$, $\varphi(C) = \det C$, для любой матрицы n-го порядка C.

2.3.2. Доказать, что следующие алгебры изоморфны:
а) $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ и $\langle A; \cdot \rangle$, где $A = \{3^n \,| n \in \mathbb{Z}\}$;
б) $\langle A; \cdot \rangle$ и $\langle B; \cdot \rangle$, где A определено, как в п. а), а
$B = \{2^m \,| m \in \mathbb{Z}\}$;
в) $\langle C; \cdot \rangle$ и $\langle D; \cdot \rangle$, где $C = \{a + b\sqrt{2} \,| a, b \in \mathbb{Z}\}$,
$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;
г) $\langle \mathbb{C}; +, \cdot \rangle$ и $\langle E; +, \cdot \rangle$, где $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$;
д) $\langle \mathbb{Z}^2; \oplus \rangle$, если $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ и $\langle F, \cdot \rangle$, где
$F = \{2^m \cdot 3^n \,| m, n \in \mathbb{Z}\}$;
е) $\langle \mathbb{R}^+; \cdot \rangle$ и $\langle \mathbb{R}; + \rangle$?

2.4 Подсистемы

Пример 2.8. Являются ли подалгебрами алгебры $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant \rangle$ множества:
1. $\mathfrak{B} = \langle 2\mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant \rangle$; 2. $\mathfrak{C} = \langle 2\mathbb{Z} + 1; +, \cdot, \leqslant \rangle$?

Доказательство. 1. Множество $\mathfrak{B}$ очевидно является подсистемой. Действительно как сумма, так и произведение двух четных чисел является четным.
2. С другой стороны, $\mathfrak{C} = \langle 2\mathbb{Z} + 1; +, \cdot, \leqslant \rangle$ не является подсистемой, так как это множество не является алгебраической системой (сумма двух нечетных чисел является четным числом, то есть для $a, b \in 2\mathbb{Z} + 1$ получаем $a + b \notin 2\mathbb{Z} + 1$). □

Пример 2.9. Найти все подалгебры, то есть все подсистемы алгебраической системы $\mathfrak{A}$ из примера 2.3.

Решение. Общий метод решения подобных задач состоит в следующем: рассматривается некоторое множество X элементов алгебры. Если подалгебра содержит все элементы X, то она должна содержать и все элементы, получающиеся в результате применения операций из сигнатуры алгебры A к элементам из X. Соответственно, если все такие элементы лежат в X, то X и является подалгеброй. В противном случае, как только найден элемент, не лежащий в X, добавляем его в XF и продолжаем процедуру для расширенного множества. Если в алгебре конечное количество элементов, то на конечном шаге получается множество, замкнутое относительно всех операций из сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$. Это множество и будет являться подалгеброй исходной алгебры. Легко видеть, что задачи данного типа требуют проведения довольно большого перебора. Таблицы Кэли как раз и помогают облегчить процесс перебора.

Отметим, что любой элемент в восьмой степени равен 1. Следовательно, любая подалгебра должна содержать нейтральный элемент 1. Кроме того, для любого элемента $x \in A$ выполнено $x^7 \cdot x = x \cdot x^7 = 1$, а значит вместе с любым элементом алгебра $\mathfrak{A}$ содержит и обратный к нему Если мы начинаем с множества, содержащего только этот элемент, то, очевидно, это множество и будет являться подалгеброй, так как оно замкнуто относительно умножения. Итак, одна подалгебра найдена: это $\{1\}$.

Пусть теперь подалгебра содержит элементы из множества $\{1, \varepsilon_1\}$. Так как умножение на 1 не дает новых элементов, рассмотрим произведения с ε_1. Получаем $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, следовательно, подалгебра должна содержать ε_2. Далее имеем $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_4$ и так далее. Таким образом, легко видеть, что подалгебра, содержащая ε_1, содержит все элементы исходной алгебры, то есть совпадает с ней.

Пусть подгруппа содержит элементы множества $\{1, \varepsilon_2\}$. Получаем $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_4$, $\varepsilon_4 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_6$, $\varepsilon_6 \cdot \varepsilon_2 = 1$. Легко проверить, что при взятии других произведений мы не получим больше никаких других элементов (при перемножении элементов с четными индексами мы получаем также элемент с четным индексом).

Рассмотрим множество $\{1, \varepsilon_3\}$. Имеем $\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_6$, а $\varepsilon_6 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_1$. Таким образом, подалгебра должна содержать элемент ε_1, а значит, по доказанному выше, она совпадает со всей алгеброй.

Пусть теперь исходное множество равно $\{1, \varepsilon_4\}$, тогда получаем $\varepsilon_4 \cdot \varepsilon_4 = 1$, следовательно это множество само является замкнутым относительно взятия произведений и обратных элементов. Таким образом, оно тоже является подалгеброй.

Рассмотрим множество $\{1, \varepsilon_5\}$. Можно рассмотреть этот случай также, как и все предыдущие, а можно начать с нахождения обратных элементов и заметить, что $\varepsilon_5^{-1} = \varepsilon_3$, следовательно, из уже разобранного случая следует, что в этом случае подалгебра совпадает со всей алгеброй.

Остальные случаи аналогичны: для начала замечаем, что $\varepsilon_6^{-1} = \varepsilon_2$ и $\varepsilon_7^{-1} = \varepsilon_1$, а затем переходим к уже рассмотренным случаям. В итоге в первом из этих двух случаев мы опять получаем подалгебру $\{1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$, а во втором — всю алгебру.

Итак, мы получили 4 подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ их носителями являются множества: $\{1\}$, $\{1, \varepsilon_4\}$, $\{1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$, A.

Мы нашли все возможные подалгебры, полученные из двухэлементных множеств (нейтральный элемент вместе с еще каким-нибудь элементом), однако этого, в общем случае, недостаточно. Необходимо рассмотреть трех-, четырех- и так далее элементные множества. Но мы можем сократить объем работы, ведь мы уже нашли все подалгебры, полученные из двухэлементных множеств, иными словами, мы знаем, что если подгруппа содержит некоторый (неединичный) элемент, то она должна содержать дополнительно еще некоторые элементы. Следовательно, мы можем начать с уже найденной подалгебры и добавить к ней еще один элемент, после чего применить процедуру, описанную в начале решения. Отметим, что добавление элемента с нечетным индексом приведет нас ко всей группе, так как подалгебра, содержащая 1 и ε_{2m+1}, совпадает со всей алгеброй по доказанному выше. Значит осталось рассмотреть случаи добавления элементов с четными индексами.

В подалгебре $\{1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$ уже есть все элементы с четными индексами, значит добавление любого другого элемента приведет нас ко всей группе.

Следовательно, осталось рассмотреть случай подалгебры $\{1, \varepsilon_4\}$. В этом случае мы можем добавить либо ε_2, либо ε_6. Но в силу доказанного выше, если подалгебра содержит один из этих элементов, то она содержит и другой, а также ε_4. С другой стороны, эта подалгебра не содержит элементов с нечетными индексами, следовательно она совпадает с $\{1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$. Таким образом, на данном шаге мы не получили новых подалгебр, а значит мы уже нашли все подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.
Ответ: носителями подалгебр могут быть только множества $\{1\}$, $\{1, \varepsilon_4\}$,

$\{1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$, A. □

Пример 2.10. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}; \mathrm{qr}, \cdot \rangle$, где $\mathrm{qr}(x) = \sqrt[3]{x}$ — алгебра. Найти подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную множеством $X = \{2\}$.

Решение. Для начала посмотрим, какие еще элементы должны принадлежать $A(X)$. Так как $2 \in X \subseteq A(X)$, имеем $\sqrt[3]{2} \in A(X)$, а значит $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[9]{2}$ также принадлежит $A(X)$, и т.д., то есть, легко показать (по индукции), что множество $A(X)$ содержит все элементы вида $\sqrt[3^k]{2}$, для всех целых значений $k \geqslant 1$. Умножая элементы $\sqrt[3^k]{2}$ на себя несколько раз, получаем, что числа вида $(\sqrt[3^k]{2})^m = 2^{\frac{m}{3^k}} \in A(X)$ для всех целых значений $k, m \geqslant 1$. Проверив результаты применения операций к полученным элементам, можно высказать предположение, что $A(X) = \{2^{\frac{m}{3^k}} \mid m, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Теперь докажем, что наша гипотеза верна. Сначала покажем, что любое число указанного вида может быть получено из числа 2 при помощи операций сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$. Имеем

$$2^{\frac{m}{3^k}} = \underbrace{\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots \sqrt[3]{2}}}}_{k \text{ радикалов}} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots \sqrt[3]{2}}}}_{k \text{ радикалов}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots \sqrt[3]{2}}}}_{k \text{ радикалов}}}_{m \text{ сомножителей}}.$$

Осталось доказать, что данное множество замкнуто относительно операций. Имеем $\sqrt[3]{2^{\frac{m}{3^k}}} = 2^{\frac{m}{3^k} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{m}{3^{k+1}}}$, а также $2^{\frac{m}{3^k}} \cdot 2^{\frac{n}{3^l}} = 2^{\frac{m}{3^k} + \frac{n}{3^l}} = 2^{\frac{m \cdot 3^l + n \cdot 3^k}{3^{k+l}}}$, причем, очевидно, что $k+1, m \cdot 3^l + n \cdot 3^k, k + l \in \mathbb{N}^*$. То есть множество $\{2^{\frac{m}{3^k}} \mid m, k \in \mathbb{N}^*\}$ замкнуто относительно операций алгебры $\mathfrak{A}$. Следовательно, $A(X) = \{2^{\frac{m}{3^k}} \mid m, k \in \mathbb{N}^*\}$. □

Пример 2.11. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}^3; \oplus, \ominus \rangle$, где $(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $(a_1, a_2, a_3) \ominus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ — алгебра. Найти подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную множеством $X = \{(1, 2, 3), (0, 0, 2)\}$.

Решение. Имеем $(1, 2, 3) \oplus (1, 2, 3) = (2, 4, 6)$, следовательно $(2, 4, 6) \in A(X)$. Аналогично, $(1, 2, 3) \oplus (2, 4, 6) = (3, 6, 9)$, и так далее. Таким образом, $(n, 2n, 3n) \in A(X)$, для всех $n \in \mathbb{N}^*$. Далее, $(1, 2, 3) \ominus (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$, а значит $(0, 0, 0) \in A(X)$. Аналогично, $(0, 0, 0) \ominus (1, 2, 3) = (-1, -2, -3)$, и так далее. Значит $A(X)$ содержит все элементы вида $(n, 2n, 3n)$ для $n \in \mathbb{Z}$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $A(X)$ должно содержать также все элементы вида $(0, 0, 2m)$, для

$m \in \mathbb{Z}$. Следовательно применяя одну из операций к элементам различных видов получим, что элементы вида $(n, 2n, 3n + 2m$ также лежат в $A(X)$. Можно переписать множество таких элементов в виде $A' = \{(n, 2n, k) \,|\, n, k \in \mathbb{Z}, n + k \text{ четно}\}$. В качестве рабочей гипотезы положим, что это множество и есть $A(X)$. Проверим ее.

Возьмем элемент $(n, 2n, k)$, такой что $n, k \in \mathbb{Z}$ и $n + k$ четно. Этот вектор можно представить в виде $(n, 2n, 3n) \oplus (0, 0, k - 3n)$. Если $n > 0$, то элемент $(n, 2n, 3n)$ можно представить в виде

$$(n, 2n, 3n) = \underbrace{(1, 2, 3) \oplus (1, 2, 3) \oplus \cdots \oplus (1, 2, 3)}_{n \text{ элементов}}.$$

Если же $n \leqslant 0$, то имеем

$$(n, 2n, 3n) = (1, 2, 3) \underbrace{\ominus (1, 2, 3) \ominus \cdots \ominus (1, 2, 3)}_{-n+1 \text{ элементов}}.$$

Так как $k + n$ четно, числа k и n одинаковой четности, то есть либо оба четные, либо оба нечетные. Разобрав оба случая, получим $k - 3n$ четное. Если $k - 3n > 0$, то имеем

$$(0, 0, k - 3n) = \underbrace{(0, 0, 2) \oplus (0, 0, 2) \oplus \cdots \oplus (0, 0, 2)}_{\frac{k-3n}{2} \text{ элементов}}.$$

В случае если $k - 3n \leqslant 0$, получаем

$$(0, 0, k - 3n) = (0, 0, 2) \underbrace{\ominus (0, 0, 2) \ominus \cdots \ominus (0, 0, 2)}_{\frac{3n-k+2}{2} \text{ элементов}}.$$

Следовательно, элемент $(n, 2n, k)$ также можно выразить через операции алгебры $\mathfrak{A}$ из элементов множества X.

Наконец, рассмотрим элементы $(n_1, 2n_1, k_1)$ и $(n_2, 2n_2, k_2)$. Получаем $(n_1, 2n_1, k_1) \oplus (n_2, 2n_2, k_2) = (n_1 + n_2, 2(n_1 + n_2), k_1 + k_2)$, причем $n_1 + n_2, k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 + n_2 + k_1 + k_2 = (n_1 + k_1) + (n_2 + k_2)$ четное, как сумма двух четных чисел. Аналогично, $(n_1, 2n_1, k_1) \ominus (n_2, 2n_2, k_2) = (n_1 - n_2, 2(n_1 - n_2), k_1 - k_2)$, причем $n_1 - n_2, k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 - n_2 + k_1 - k_2 = (n_1 + k_1) - (n_2 + k_2)$ четное, как разность двух четных чисел. Таким образом, применяя операции алгебры $\mathfrak{A}$ к элементам множества A', снова получаем элемент этого же множества. Таким образом, A' замкнуто относительно обеих операций. Следовательно, $\{(n, 2n, k) \,|\, n, k \in \mathbb{Z}, n + k \text{ четно}\} = A(X)$. $\square$

2.4. Задачи

2.4.1. При помощи построенной таблицы найти все подалгебры алгебр из задачи 2.2.2.

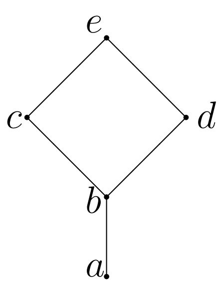
2.4.2. Для алгебры $\mathfrak{A}$ найти подалгебру, порожденную множеством X:
а) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$, $X = \{-1, 3\}$;
б) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot \rangle$, $X = \left\{ \dfrac{1}{5} \right\}$;
в) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}^3; \oplus \rangle$, где операция определена так: $(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $X = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$;
г) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}^3; \oplus, \ominus \rangle$, где операция $\oplus$ определена, как в п.в), а $(a_1, a_2, a_3) \ominus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$, $X = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$;
д) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}_0^+; \mathrm{sqrt}, 2 \rangle$, где $\mathrm{sqrt}(x) = \sqrt{x}$, $X = \{3\}$;
е) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}_0^+; \mathrm{sqrt}, \cdot \rangle$, где $\mathrm{sqrt}(x) = \sqrt{x}$, $X = \{3, 5\}$;
ж) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}^3; \times \rangle$, $X = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\}$;
з) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$, $X = \{3, 4\}$;
и) $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, - \rangle$, $X = \{8, 12\}$.

Глава 3

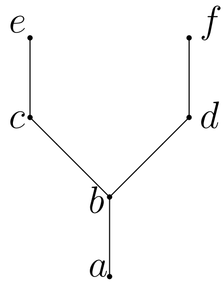
Дистрибутивные решетки и булевы алгебры

Пример 3.1. Какие из следующих диаграмм Хассе являются решетками?

1.



2.

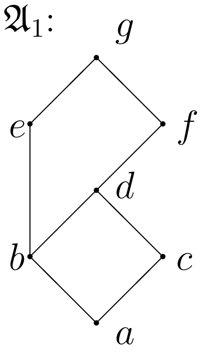


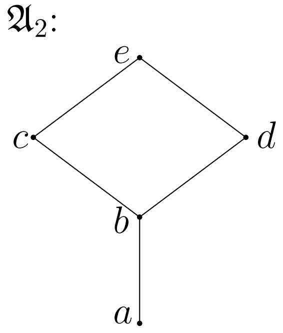
Доказательство. Первая диаграмма, очевидно, соответствует решетке, так как для любых двух элементов существует как супремум, так и инфимум этих элементов (см. [5] § 2.6). Вторая соответствует частично упорядоченному множеству, не являющемуся решеткой, так как в этом множестве два максимальных элемента: e и f. $\square$

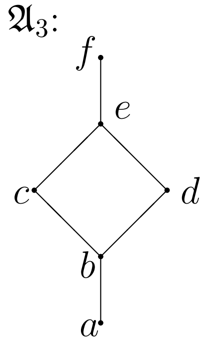
Пример 3.2. Является ли решеткой частично упорядоченное множество $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}^2; \leqslant \rangle$, где отношение $\leqslant$ определено по правилу: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$ (то есть отношение $\leqslant$ это множество $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2\}$)?

Доказательство. Имеем $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (\max\{x_1, x_2\}, \max\{y_1, y_2\})$ и $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (\min\{x_1, x_2\}, \min\{y_1, y_2\})$, следовательно $\mathfrak{A}$ является решеткой. $\square$

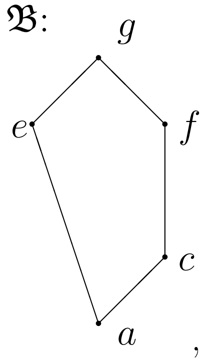
Пример 3.3. Проверить, являются ли следующие решетки решетки дистрибутивными:







Решение. 1. Рассмотрим подрешетку $\mathfrak{B}$ решетки $\mathfrak{A}_1$ с элементами a, c, e, f, g. Построим диаграмму Хассе, соответствующую этой подрешетке. Так как в решетке $\mathfrak{A}_1$ элемент b покрывает элемент a, а элемент e покрывает элемент b, и элемент b не лежит в подрешетке $\mathfrak{B}$, получаем e покраывает a, в этой подрешетке. Аналогично, в подрешетке $\mathfrak{B}$ элемент f покрывает элемент c. Следовательно, диаграмма Хассе для подрешетки $\mathfrak{B}$ имеет вид

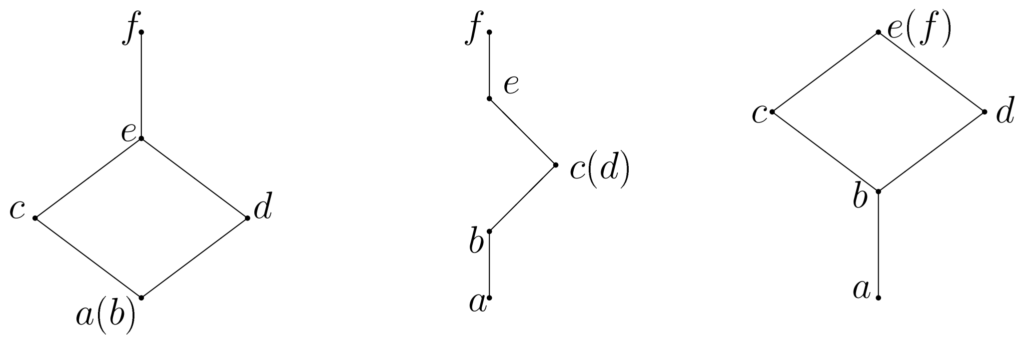


,

то есть $\mathfrak{B}$ изоморфна решетке P_5. Следовательно, решетка $\mathfrak{A}_1$ не является дистрибутивной.

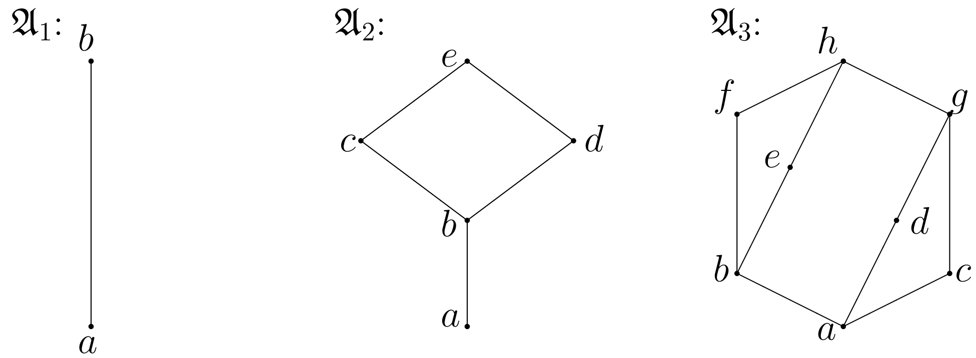
2. Решетка $\mathfrak{A}_2$ содержит 5 элементов. Ровно столько же элементов содержат решетки M_3 и P_5. Следовательно, если $\mathfrak{A}$ не является дистрибутивной, то она сама должна быть изоморфна M_3 или P_5 (см. [5], теорема 2.6.1), однако, очевидно, это не так. Итак, получили, что $\mathfrak{A}_2$ дистрибутивна.

3. Решетка $\mathfrak{A}_3$ содержит 6 элементов, то есть на один элемент больше, чем в решетках M_3 и P_5. Рассмотрим все подрешетки решетки $\mathfrak{A}$, содержащие пять элементов. Для построения диаграмм Хассе этих подрешеток воспользуемся теми же рассуждениями, что и в п. 1. Легко видеть, что подрешетки, полученные из $\mathfrak{A}_3$ удалением, соответственно, элементов a и b, изморфны. Также изоморфны решетки, полученные удалением соответственно элементов c и d и решетки, полученные удалением соответственно e и f. Таким образом, есть 3 неизоморфные решетки:



Легко видеть, что ни одна из этих решеток не изоморфна M_3 или P_5. Следовательно, $\mathfrak{A}_3$ дистрибутивна. □

Пример 3.4. Проверить, являются ли следующие решетки булевыми алгебрами.



Решение. 1. Пусть $A=\{1\}$. Рассмотрим алгебру Кантора

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap, \cup, \overline{}, \varnothing, A\rangle.$$

Эта алгебра содержит два элемента: $\varnothing$ и $\{1\}$, причем $\varnothing \subseteq \{1\}$, а значит, диаграмма Хассе у данного частично упрядоченного множества совпадает с диаграммой Хассе решетки $\mathfrak{A}_1$. Следовательно, $\mathfrak{A}_1$ изоморфна алгебре Кантора одноэлементного множества, а значит, является булевой алгеброй.

2. Данная решетка имеет 5 элементов, однако из [5] (следствие 2.6.5) число элементов любой конечной булевой алгебры является степенью двойки. Таким образом, решетка $\mathfrak{A}$ не может являться булевой алгеброй.

3. Данная решетка имеет $8 = 2^3$ элементов, поэтому нельзя применить рассуждения п. 2.

Доказать, что решетка не является булевой алгеброй, можно различными способами. Можно доказать, что эта решетка не изоморфна алгебре Кантора с соответствующим числом элементов, можно показать, что решетка не является дистрибутивной, а можно заняться поиском такого элемента x решетки, что либо элемента $\overline{x}$ не существует, либо элементов с подобными свойствами более одного. Для конкретной решетки можно выбрать тот способ, который технически проще, чем два других. Обычно, наиболее сложный способ — первый. Что касается второго способа, он работает только в том случае, если решетка не является дистрибутивной. Если же решетка является дистрибутивной, но не является булевой алгеброй, то второй способ не применим.

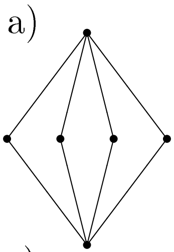
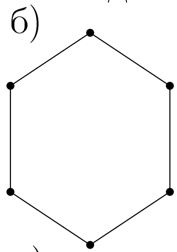
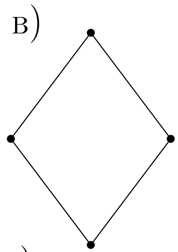
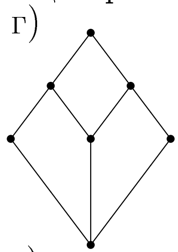
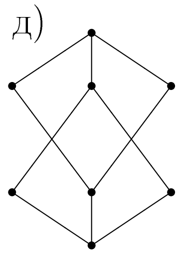
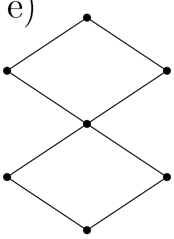
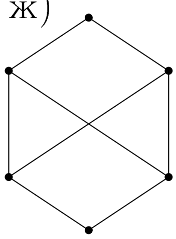
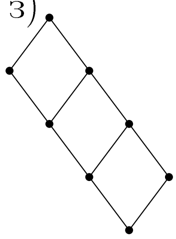
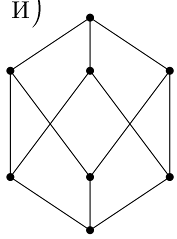
Воспользуемся третьим способом для решения данной задачи. Возьмем элемент f. Несложно видеть, что "уравнение" $f \wedge x = 0$ имеет четыре "решения": $x = a, c, d, g$. С другой стороны, "уравнение" $f \vee x = 1$ имеет пять "решений": $x = c, d, e, g, h$. Следовательно, $\overline{f}$ может быть равно, c, d или g, однако в булевой алгебре для любого элемента p элемент $\overline{p}$ может быть выбран единственным способом. Следовательно, $\mathfrak{A}_3$ не является булевой алгеброй. $\square$

3.1. Задачи

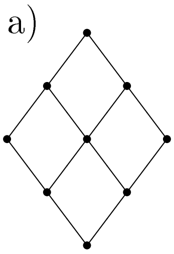
3.1.1. Доказать, пользуясь только определениями, что следующие решетки не являются дистрибутивными:

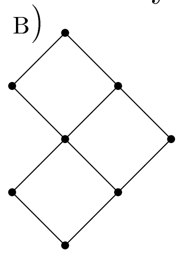
а) M_3; б) P_5.

3.1.2. Являются ли дистрибутивными следующие решетки?

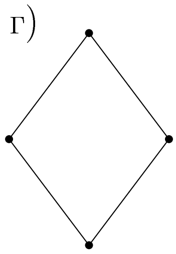
а)

б)

в)

г)

д)

е)

ж)

з)

и)


3.1.3. Являются ли данные решетки булевыми алгебрами?

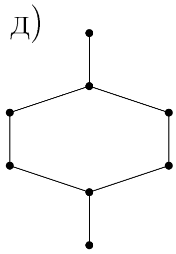
а)

б)

в)


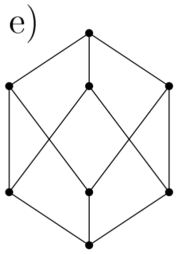
г)



д)



е)



Глава 4

Числовые системы

4.1 Системы счисления

Пример 4.1. Записать число $63954{,}3_{10}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение. Разделим число на целую и дробную часть и переведем каждую из частей в шестнадцатеричную систему счисления по отдельности.

Целая часть числа равна 63954_{10}. Имеем

$$\begin{aligned} 63953 &= 16 \cdot 3997 + \mathbf{1} \\ 3997 &= 16 \cdot 249 + \mathbf{13} \\ 249 &= 16 \cdot 15 + \mathbf{9} \\ 15 &= 16 \cdot 0 + \mathbf{15}, \end{aligned}$$

следовательно, $63954_{10} = F9D1_{16}$.

Теперь перейдем к записи дробной части, которая равна $0{,}3_{10}$. Имеем

$$\begin{aligned} 0{,}3 \cdot 16 &= \mathbf{4}{,}8 \\ 0{,}8 \cdot 16 &= \mathbf{12}{,}8 \\ 0{,}8 \cdot 16 &= \mathbf{12}{,}8. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли периодическую часть дроби и, соответственно, можем записать $0{,}3_{10} = 0{,}4(C)_{16}$.

Окончательно, получаем $63954{,}3_{10} = F9D1{,}4(C)_{16}$. □

Пример 4.2. Перевести число $2736{,}3_8$ в десятичную систему счисления.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
2736{,}3_8 &= 2\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 3\cdot 8 + 6 + 3\cdot 8^{-1} = \\
&= 2\cdot 512 + 7\cdot 64 + 3\cdot 8 + 6 + \frac{3}{8} = \\
&= 1024_{10} + 448_{10} + 24_{10} + 6_{10} + 0{,}375_{10} = \\
&= 1502{,}375_{10}.
\end{aligned}$$

□

Пример 4.3. Записать число 63954_{10} в пятерично-шестнадцатеричной системе счисления

Решение. Сначала необходимо перевести число 63954_{10} в шестнадцатеричную систему счисления. Из примера 4.1 следует, что $63954_{10} = F9D1_{16}$. Для записи каждой шестнадцатеричной "цифры" достаточно двух пятеричных. Получаем $F_{16} = 30_5$, $9_{16} = 14_5$, $D_{16} = 23_5$, $1_{16} = 01_5$. Итого, 63954_{10} в пятерично-шестнадцатеричной системе счисления записывается как $30142301_{5\text{-}16}$. □

4.1. Задачи

4.1.1. Записать в десятичной системе счисления следующие числа:
а) 3423_5; б) 2411_5; в) $A1B_{16}$; г) $23F_{16}$; д) 7471_8; е) 5647_8.

4.1.2. Записать в троичной, пятеричной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления следующие числа:
а) 2131; б) 5248.

4.1.3. Записать в десятичной системе счисления следующие числа:
а) $34{,}33_5$; б) $41{,}241_5$; в) $32{,}24_8$; г) $43{,}64_8$.

4.1.4. Записать:
а) 45,68 в пятеричной системе счисления;
б) 32,584 в пятеричной системе счисления;
в) 62,9375 в восьмеричной системе счисления;
г) 57,46875 в восьмеричной системе счисления;
д) 23,3 в двоичной системе счисления.

4.1.5. Записать следующие числа в двоично-десятичной системе счисления: а) 3792; б) 54863.

4.2 Делимость. Алгоритм Евклида

Пример 4.4. Поделить $a = 25$ на $b = 7$ с остатком.

Решение. Легко видеть, что $25 = 7 \cdot 3 + 4$. То есть $q = 3$, $r = 4$. При этом $0 \leqslant 4 < 7$. Конечно, можно записать $25 = 7 \cdot 4 + (-3)$ или $25 = 7 \cdot 2 + 11$, но в первом случае $(-3) < 0$, а во втором $11 \geqslant 7$. □

Пример 4.5. Найти $(84, 66)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} 84 &= 66 \cdot 1 + 18 \\ 66 &= 18 \cdot 3 + 12 \\ 18 &= 12 \cdot 1 + 6 \\ 12 &= 6 \cdot 2. \end{aligned}$$

Последний ненулевой остаток равен 6, следовательно, $(84, 66) = 6$. □

4.2. Задачи

4.2.1. Доказать, алгоритм Евклида вычисляет наибольший общий делитель чисел, на которых алгоритм начинает работу.

4.2.2. Найти НОД и НОК следующих чисел при помощи алгоритма Евклида: а) 122 и 305; б) 124 и 48;
в) 852 и 483; г) 588 и 861.

4.2.3. Доказать, что для любых целых чисел a, b, c выполнено:
а) $(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c))$;
б) $[a, b, c] = [[a, b], c] = [a, [b, c]]$.

4.2.4. Найти НОД и НОК следующих чисел при помощи алгоритма Евклида: а) 45, 189 и 175; б) 360, 500 и 675.

4.2.5. Доказать, что для любых целых чисел a, b, c выполнено равенство $[a, b, c] = \dfrac{abc \cdot (a, b, c)}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (a, c)}$.

4.2.6. Доказать что если $(a, b) = d$, то $(a/d, b/d) = 1$.

4.2.7. Доказать следующие признаки делимости:
а) Если последняя цифра числа делится на 2, то и само число делится на 2;
б) Если двузначное число, составленное из двух последних цифр исходного числа, делится на 4, то и само число делится на 4;
в) Если последняя цифра числа делится на 5, то и само число делится на 5;
г) Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9;
д) Если разность суммы цифр, стоящих на четных позициях числа, и суммы цифр, стоящих на нечетных его позициях, делится на 11, то и само число делится на 11.

4.2.8. Доказать, что если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$.

4.2.9. Проверить справедливость следующих утверждений. Доказать верные утверждения, для неверных привести контрпример:
а) Если $a|c$ и $b|c$, то $[a,b]|c$;
б) Если $a|c$ и $b|c$, то $ab|c$;
в) Если $a|b$ и $a|c$, то $a|(b,c)$.

4.2.10. а) Доказать, что для любых чисел $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ справедливо $(a,b)(c,d)|(ac,bd)$;
б) Верно ли, что для любых $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ выполнено равенство $(a,b)(c,d) = (ac,bd)$. Доказать или привести контрпример.

4.3 Линейные диофантовы уравнения. Сравнения

Пример 4.6. Решить диофантово уравнение $35x + 22y = 1$.

Доказательство. Применим алгоритм Евклида (соответствующие равенства запишем в первый столбец). Имеем

$$\begin{array}{rcllrcl} 35 &=& 22\cdot 1+13 &\Rightarrow& 13 &=& 35-22;\\ 22 &=& 13\cdot 1+9 &\Rightarrow& 9 &=& 22-13;\\ 13 &=& 9\cdot 1+4 &\Rightarrow& 4 &=& 13-9;\\ 9 &=& 4\cdot 2+1 &\Rightarrow& 1 &=& 9-4\cdot 2. \end{array}$$

Можно не делать последнего шага, так как очевидно, любое число без остатка делится на 1. Теперь будем поочередно рассматривать равенства правого столбца снизу вверх и подставлять их одно в другое с целью выразить число 1 через 35 и 22. Итак, получаем

$$\begin{array}{rcllcll} 1 &=& 9-4\cdot 2 &=& 9-(13-9)\cdot 2 &=\\ &=& 9\cdot 3-13\cdot 2 &=& (22-13)\cdot 3-13\cdot 2 &=\\ &=& 22\cdot 3-13\cdot 5 &=& 22\cdot 3-(35-22)\cdot 5 &=\\ &=& 22\cdot 8-35\cdot 5. \end{array}$$

Таким образом, частное решение уравнения $x = -5$, $y = 8$. Так как $(35,22) = 1$, используя [5] теорему 3.5.5, получаем общее решение

$$\{(-5-22m, 8+35m) \,|\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Пример 4.7. Решить диофантово уравнение:
а) $140x + 88y = 11$ б) $140x + 88y = 20$.

Доказательство. Сначала найдем НОД чисел 140 и 88. Применяя алгоритм Евклида, получаем

$$\begin{aligned} 140 &= 88 \cdot 1 + 52; \\ 88 &= 52 \cdot 1 + 36; \\ 52 &= 36 \cdot 1 + 16; \\ 36 &= 16 \cdot 2 + 4; \\ 16 &= 4 \cdot 4. \end{aligned}$$

Следовательно, $(140, 88) = 4$.

а) Так как $4 \nmid 11$, данное уравнение не имеет решений.

б) Имеем $4|20$, следовательно, можно поделить обе части уравнения на 4. Получаем уравнение $35x + 22y = 5$. Чтобы решить это уравнение, нам вначале нужно найти такую пару (x', y'), что $35x' + 22y' = 1$. Это было сделано в примере 4.6. Из этого примера следует, что $x' = -5$, $y' = 8$. Следовательно, одним из решений уравнения $35x + 22y = 5$ (а следовательно и решением исходного уравнения $140x + 88y = 20$) является пара $x_0 = 5x' = -25$, $y_0 = 5y' = 40$. Соответственно, из [5], теорема 3.5.5 получаем общее решение уравнения:

$$\left\{ \left(-25 - \frac{88}{4}m, 40 + \frac{140}{4}m \right) \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\} =$$
$$= \{(-25 - 22m, 40 + 35m) \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$$

□

Пример 4.8. Доказать, что (нелинейное) диофантово уравнение $x^2 + y^2 = 99999999$ не имеет решений

Доказательство. Отметим, что $99999999 \equiv 3 \pmod 4$. С другой стороны, рассмотрим целое число u. Если u четное, то есть $u = 2v$ для некоторого $v \in \mathbb{Z}$, то $u^2 = 4v^2$, то есть $u^2 \equiv 0 \pmod 4$. Если же u нечетное, то есть $u = 2v + 1$, для некоторого $v \in \mathbb{Z}$, то $u^2 = (2v+1)^2 = 4v^2 + 4v + 1 = 4(v^2 + v) + 1$, а значит $u^2 \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, $x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$, то есть правая и левая части не могут лежать в одном классе эквивалентности по модулю 4. В итоге мы получаем, что равенство невозможно ни для каких целых x и y.[1] □

[1] Следует отметить, что несмотря на то, что решение этой задачи достаточно короткое, оно не является простым с той точки зрения, что нигде в условии задачи не указано, что нужно рассматривать классы эквивалентности именно по модулю 4. До этого необходимо догадаться. Однако, догадка служит тем элементом, которые придает прелесть некоторым математическим задачам

Пример 4.9. Решить сравнение $23x \equiv 4 \pmod{36}$.

Решение. Начнем с решения сравнения $23x' \equiv 1 \pmod{36}$. Если x' — решение этого сравнения, то существует y', такой что $23x' + 36y' = 1$. Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{rcl} 36 &=& 23 \cdot 1 + 13 \;\Rightarrow\; 13 = 36 - 23 \\ 23 &=& 13 \cdot 1 + 10 \;\Rightarrow\; 10 = 23 - 13 \\ 13 &=& 10 \cdot 1 + 3 \;\;\Rightarrow\; 3 = 13 - 10 \\ 10 &=& 3 \cdot 3 + 1 \;\;\;\Rightarrow\; 1 = 10 - 3 \cdot 3 \end{array}$$

Далее, рассматривать равенства правого столбца снизу вверх и подставляя их одно в другое, получаем

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& 10 - 3 \cdot 3 = 10 - (13 - 10) \cdot 3 = \\ &=& 10 \cdot 4 - 13 \cdot 3 = (23 - 13) \cdot 4 - 13 \cdot 3 = \\ &=& 23 \cdot 4 - 13 \cdot 7 = 23 \cdot 4 - (36 - 23) \cdot 7 = \\ &=& 23 \cdot 11 - 36 \cdot 7. \end{array}$$

Таким образом, $x' = 11$. Так как правая часть исходного равенства равна 4, получаем $x = 11 \cdot 4 = 44$. В силу теоремы **??**, решением является любое значение x, такое что $x \equiv 44 \pmod{36}$. Если необходимо найти наименьший неотрицательный вычет, то легко получить $x \equiv 44 - 1 \cdot 36 = 8 \pmod{36}$. □

Пример 4.10. Решить сравнение $69x \equiv 15 \pmod{108}$.

Решение. Найдем наибольший общий делитель 69 и 108. По алгоритму Евклида получаем:

$$\begin{array}{rcl} 108 &=& 69 \cdot 1 + 39 \\ 69 &=& 39 \cdot 1 + 30 \\ 39 &=& 30 \cdot 1 + 9 \\ 30 &=& 9 \cdot 3 + 3 \\ 9 &=& 3 \cdot 3 \end{array}$$

Таким образом, $(69, 108) = 3$. Так как $3|15$, сравнение имеет 3 решения. В силу свойства 4 это сравнение равносильно сравнению $23x \equiv 5 \pmod{36}$. Нужно вначале решить сравнение

$$23x' \equiv 1 \pmod{36}.$$

и превращает решение подобных задач из рутинного выполнения определенного алгоритма в искусство.

Это было сделано в примере 4.9. Мы получили $x \equiv 11 \pmod{36}$. Следовательно, получаем $x = 5 \cdot 11 = 55$ — решение сравнения $23x \equiv 5 \pmod{36}$. Найдем наименьший неотрицательный вычет для этого решения: $x \equiv 55 - 36 \cdot 1 = 19 \pmod{36}$. Наконец, осталось найти решения по модулю 108. Получаем

$$
\begin{aligned}
&x \equiv 19 \pmod{108},\\
&x \equiv 19 + 36 = 55 \pmod{108},\\
&x \equiv 19 + 2 \cdot 36 = 91 \pmod{108}
\end{aligned}
$$

□

Пример 4.11. Решить систему сравнений

$$
\begin{cases}
x & \equiv & 2 \pmod{5}\\
x & \equiv & 1 \pmod{8}\\
x & \equiv & 4 \pmod{9},
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

Решение. Из первого сравнения получаем

$$
x = 5x_1 + 2. \tag{4.2}
$$

Подставим это выражение во второе сравнение. Имеем $5x_1 + 2 \equiv 1 (\bmod 8)$, следовательно, $5x_1 \equiv -1 \pmod{8}$.

Решим сравнение $5x_1' \equiv 1 \pmod{8}$. Из него следует, что $5x_1' + 8y_1' = 1$. Из алгоритма Евклида получаем:

$$
\begin{array}{ccccccc}
8 & = & 5 \cdot 1 + 3 & \Rightarrow & 3 & = & 8 - 5\\
5 & = & 3 \cdot 1 + 2 & \Rightarrow & 2 & = & 5 - 3\\
3 & = & 2 \cdot 1 + 1 & \Rightarrow & 1 & = & 3 - 2
\end{array}.
$$

Подставляя поочередно равенства правого столбца друг в друга (снизу вверх), получаем:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & = & 3 - 2 & = & 3 - (5 - 3) & = \\
 & = & 3 \cdot 2 - 5 & = & (8 - 5) \cdot 2 - 5 & = \\
 & = & 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3. & & &
\end{array}
$$

Таким образом, $x_1' \equiv -3 \pmod{8}$, умножая на -1, получаем решением сравнения $5x_1 + 2 \equiv 1 \pmod{8}$ является $x_1 \equiv 3 \pmod{8}$, то есть $x_1 = 8x_2 + 3$. Подставляя в (4.2), получаем

$$
x = 5(8x_2 + 3) + 2 = 40x_2 + 17. \tag{4.3}
$$

Подставим в третье сравнение, получим $40x_2 + 17 \equiv 4 \pmod 9$. Отметим, что к правой и левой частям можно прибавлять числа кратные модулю (то есть 9) и решение сравнения от этого не изменится. Получаем $40x_2 - 9 \cdot 4x_2 + 17 - 2 \cdot 9 \equiv 4 \pmod 9$, то есть $4x_2 - 1 \equiv 4 \pmod 9$, а значит $4x_2 \equiv 5 \pmod 9$.

Опять начнем с решения сравнения $4x_2' \equiv 1 \pmod 9$. Из алгоритма Евклида получаем

$$9 \;=\; 4 \cdot 2 + 1 \;\Rightarrow\; 1 \;=\; 9 - 4 \cdot 2\ .$$

Отсюда видно, что $x_2' \equiv -2 \equiv 7 \pmod 9$. Чтобы получить решение сравнения $4x_2 \equiv 5 \pmod 9$, умножим полученный результат на 5. В итоге имеем $x_2 \equiv 7 \cdot 5 = 35 \pmod 9$. Найдем соответствующий наименьший неотрицательный вычет: $x_2 \equiv 35 - 9 \cdot 3 = 8 \pmod 9$. Следовательно $x_2 = 9x_3 + 8$. Подставим это выражение в (4.3): $x = 40(9x_3 + 8) + 17 = 360x_3 + 337$. А отсюда вытекает, что $x \equiv 337 \pmod{360}$ является решением системы сравнений. □

4.3. Задачи

4.3.1. Решить линейные диофантовы уравнения:
а) $35x + 82y = 1$; б) $42x + 65y = 1$; в) $28x + 37y = 4$;
г) $57x + 74y = 5$; д) $44x + 62y = 6$; е) $63x + 108y = 12$;
ж) $76x + 52y = 10$; з) $45x + 81y = 18$.

4.3.2. Решить сравнение:
а) $43x \equiv 1 (\bmod 82)$; б) $39x \equiv 1 (\bmod 25)$; в) $38x \equiv 3 (\bmod 45)$;
г) $45x \equiv 8 (\bmod 64)$; д) $35x \equiv 14 (\bmod 91)$; е) $84x \equiv 12 (\bmod 36)$;
ж) $82x \equiv 7 (\bmod 38)$; з) $108x \equiv 15 (\bmod 72)$.

4.3.3. Решить систему сравнений:

а) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 9\,; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 1 \pmod 3\,; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 6 \pmod 7 \\ x \equiv 9 \pmod{11}\,; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 10 \pmod{13}\,; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod{13} \\ x \equiv 1 \pmod{11}\,; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 7 \pmod{25} \\ x \equiv 7 \pmod{40}\,. \end{cases}$

4.4 Многомодульная арифметика

Пример 4.12. Пусть $a = 41$, $b = 75$. Вычислить, используя многомодульную арифметику с вектором оснований $\beta = [7, 11, 5, 13]$ значения $a - b$, $3a + b$

Решение. Находя остатки от деления a и b на элементы вектора β, получаем $a \equiv [6, 8, 1, 2] \pmod{\beta}$, $b \equiv [5, 9, 0, 10] \pmod{\beta}$. Получаем,

$$\begin{aligned} a - b &\equiv 6 - 5 \equiv 1 \pmod{7}, \\ a - b &\equiv 8 - 9 \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}, \\ a - b &\equiv 1 - 0 \equiv 1 \pmod{5}, \\ a - b &\equiv 2 - 10 \equiv -8 \equiv 5 \pmod{13}, \end{aligned}$$

то есть $a - b \equiv [1, 10, 1, 5] \pmod{\beta}$.

Итак, $a - b \equiv 1 \pmod{7}$, следовательно,

$$a - b = 7x_1 + 1, \tag{4.4}$$

с другой стороны, $a - b \equiv 10 \pmod{11}$, то есть $7x_1 + 1 \equiv 10 \pmod{11}$, а значит $7x_1 \equiv 9 \pmod{11}$. Для начала найдем значение x_1', удовлетворяющее сравнению $7x_1' \equiv 1 \pmod{11}$. Имеем

$$\begin{aligned} x_1' \equiv& 7^{11-2} = 7^9 = (7^2)^4 \cdot 7 = 49^4 \cdot 7 \equiv 5^4 \cdot 7 = \\ =& 25^2 \cdot 7 \equiv 3^2 \cdot 7 = 63 \equiv 8 \pmod{11} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подобная цепочка позволяет максимально избежать появления больших чисел при вычислениях. Как только появляется число, большее значения модуля, по которому ведутся вычисления, заменяем его остатком от деления на модуль.

Теперь вернемся к сравнению $7x_1 \equiv 9 \pmod{11}$, из общей теории сравнений получаем $x_1 \equiv 8 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{11}$. Следовательно, $x_1 = 11x_2 + 6$, подставляя это значение в равенство (4.4), получаем

$$a - b = 7(11x_2 + 6) + 1 = 77x_2 + 43. \tag{4.6}$$

Далее, подставляя это выражение в сравнение $a - b \equiv 1 \pmod{5}$, получаем $77x_2 + 43 \equiv 1 \pmod{5}$, то есть $77x_2 \equiv -42 \pmod{5}$, а значит $2x_2 \equiv 3 \pmod{5}$. Найдем x_2', такой что $2x_2' \equiv 1 \pmod{5}$. Имеем

$$x_2' \equiv 2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Следовательно, $x_2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{5}$. Таким образом, $x_2 = 5x_3 + 4$. Подставим в равенство (4.6), получаем

$$a - b = 77(5x_3 + 4) + 43 = 385x_3 + 308 + 43 = 385x_3 + 351. \tag{4.7}$$

Подставив это выражение в сравнение $a - b \equiv 5 \pmod{13}$, получаем $385x_3 + 351 \equiv 5 \pmod{13}$, следовательно $385x_3 \equiv -346 \pmod{13}$, то есть $8x_3 \equiv 5 \pmod{13}$. Найдем значение x_3', для которого сравнение $8x_3' \equiv 1 \pmod{13}$ истинно. Имеем

$$x_3' \equiv 8^{13-2} = 8^{11} = (8^2)^5 \cdot 8 = 64^5 \cdot 8 \equiv (-1)^5 \cdot 8 = \\ = -1 \cdot 8 = 5 \pmod{13}.$$

Следовательно, $x_3 \equiv 5 \cdot 5 = 25 \equiv 12 \pmod{13}$, то есть $x_3 = 13x_4 + 12$. Подставив в равенство 4.7, получаем $a - b = 385(13x_4 + 12) + 351 = 5005x_4 + 4620 + 351 = 5005x_3 + 4971$. Таким образом, $a - b \equiv 4971 \pmod{7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 13}$. Однако значение $a - b$ найдено неоднозначно. Чтобы узнать точное значение этого выражения, используем дополнительную информацию: отметим, что $-b \leqslant a - b \leqslant a$, при этом $a, b < 100$, следовательно $-\dfrac{5004}{2} - 100 < a - b < 100 < \dfrac{5004}{2}$, значит нам необходимо использовать симметричную систему вычетов. Получаем $a - b \equiv 4971 \equiv -32 \pmod{7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 13}$, следовательно, $a - b = -32$.

Теперь вычислим $3a + b$. Имеем

$$3a \equiv [3 \cdot 6, 3 \cdot 8, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [18, 24, 3, 6] \equiv [4, 2, 3, 6] \pmod{\beta},$$

Следовательно,

$$3a + b \equiv [4 + 5, 2 + 9, 3 + 0, 6 + 10] \equiv [9, 11, 3, 16] \equiv [2, 0, 3, 3] \pmod{\beta}.$$

Так как $3a + b \equiv 2 \pmod{7}$, имеем

$$3a + b = 7x_1 + 2 \tag{4.8}$$

Подставив это выражение в сравнение $3a + b \equiv 0 \pmod{11}$, получаем $7x_1 + 2 \equiv 0 \pmod{11}$, следовательно, $7x_1 \equiv -2 \equiv 9 \pmod{11}$. Сначала надо найти значение x_1', такое что $7x_1' \equiv 1 \pmod{11}$. Однако, это уже было сделано при вычислении $a - b$. Из (4.5) следует, что $x_1' \equiv 8 \pmod{11}$, значит $x_1 \equiv 8 \cdot 9 = 72 \equiv 6 \pmod{11}$. Таким образом, $x_1 = 11x_2 + 6$. Подставив это равенство в (4.8), получаем

$$3a + b = 7(11x_2 + 6) + 2 = 77x_2 + 44. \tag{4.9}$$

Подставив это равенство в сравнение $3a + b \equiv 3 \pmod{5}$, получаем $77x_2 + 44 \equiv 3 \pmod{5}$, то есть $77x_2 \equiv -41 \pmod{5}$, отсюда получаем $2x_2 \equiv 4 \pmod{5}$. Из свойства 3 сравнений следует, что $x_2 \equiv 2 \pmod{5}$. Таким образом, $x_2 = 5x_3 + 2$. Подставляя это равенство в (4.9), получаем

$$3a + b = 77(5x_3 + 2) + 44 = 385x_3 + 154 + 44 = 385x_3 + 198. \tag{4.10}$$

Подставим это равенство в сравнение $3a + b \equiv 3 \pmod{13}$, получаем $385x_3 + 198 \equiv 3 \pmod{13}$, а значит $385x_3 \equiv -195 \pmod{13}$, то есть $8x_3 \equiv 0 \pmod{13}$. Следовательно, $x_3 \equiv 0 \pmod{13}$, то есть $x_3 = 13x_4$. Таким образом, из (4.10) получаем $3a + b = 385 \cdot 13x_4 + 198 = 5005x_4 + 198$, то есть $3a - b \equiv 198 \pmod{7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 13}$.

Наконец, чтобы вычислить точное значение $3a + b$ отметим, что $0 < a < 100$ и $0 < b < 100$. Используя эту дополнительную информацию, получаем $0 < 3a + b < 300 + 100 = 400 < 5005$. Следовательно, здесь необходимо использовать систему наименьших неотрицательных вычетов. В итоге, получаем $3a + b = 198$. □

Пример 4.13. Используя многомодульную арифметику, найти 17^{-1} относительно вектора оснований $\beta = [5, 7, 11, 13]$.

Решение. Необходимо решить четыре сравнения:

$$\begin{aligned}
17x_1 &\equiv 1 \pmod{5};\\
17x_2 &\equiv 1 \pmod{7};\\
17x_3 &\equiv 1 \pmod{11};\\
17x_4 &\equiv 1 \pmod{13}.
\end{aligned}$$

Для первого сравнения имеем $17x_1 \equiv 2x_1 \equiv 1 \pmod{5}$. Следовательно, $x_1 \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod{5}$.

Для второго сравнения получаем $17x_2 \equiv 3x_2 \equiv 1 \pmod{7}$. Таким образом,

$$x_2 \equiv 3^5 \equiv 3^2 \cdot 3_3 = 9 \cdot 27 \equiv 2 \cdot 6 = 12 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Далее, $17x_3 \equiv 6x_3 \equiv 1 \pmod{11}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
x_3 \equiv 6^9 &\equiv (6^2)^4 \cdot 6 = 36^4 \cdot 6 \equiv 3^4 \cdot 6 = 3^3 \cdot 3 \cdot 6 =\\
&= 27 \cdot 18 \equiv 5 \cdot 7 = 35 \equiv 2 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Наконец, $17x_4 \equiv 4x_3 \equiv 1 \pmod{13}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
x_4 \equiv 4^{11} &= (4^2)^5 \cdot 4 = 16^5 \cdot 4 \equiv 3^5 \cdot 4 = 3^3 \cdot 3^2 \cdot 4 =\\
&= 27 \cdot 36 \equiv 1 \cdot 10 = 10 \pmod{13}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем $17^{-1} \equiv [3, 5, 2, 10] \pmod{\beta}$. □

Пример 4.14. Вычислить $\dfrac{5}{8} - \dfrac{2}{3}$ используя многомодульную арифметику с вектором оснований $\beta = [5, 7, 11, 13]$.

Доказательство. Имеем $\dfrac{5}{8} - \dfrac{2}{3} = 5 \cdot 8^{-1} - 2 \cdot 3^{-1}$. Обозначим это число через a

Найдем 8−1 и 3^{-1}, как это было сделано в примере 4.13. Чтобы найти 8^{-1}, необходимо решить следующие сравнения

$$\begin{aligned} 8x_1 &\equiv 1 \pmod{5}; \\ 8x_2 &\equiv 1 \pmod{7}; \\ 8x_3 &\equiv 1 \pmod{11}; \\ 8x_4 &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Имеем для первого сравнения $8x_1 \equiv 3x_1 \equiv 1 \pmod{5}$, Следовательно, $x_1 \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod{5}$.

Для второго сравнения получаем $8x_2 \equiv x_2 \equiv 1 \pmod{7}$.

Далее, для x_3 получаем

$$\begin{aligned} x_3 \equiv 8^9 \equiv (8^2)^4 \cdot 8 = 64^4 \cdot 8 \equiv 9^4 \cdot 8 = (9^2)^2 \cdot 8 = 81^2 \cdot 8 \equiv \\ \equiv 4^2 \cdot 8 = 16 \cdot 8 \equiv 5 \cdot 8 = 40 \equiv 7 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Наконец, для x_4 имеем

$$x_4 \equiv 8^{11} = (8^2)^5 \cdot 8 = 64^5 \cdot 8 \equiv (-1)^5 \cdot 8 = -8 \equiv 5 \pmod{13}.$$

Таким образом, получаем $8^{-1} \equiv [2, 1, 7, 5] \pmod{\beta}$.

Теперь найдем 3^{-1}, для чего необходимо решить сравнения

$$\begin{aligned} 3x_1 &\equiv 1 \pmod{5}; \\ 3x_2 &\equiv 1 \pmod{7}; \\ 3x_3 &\equiv 1 \pmod{11}; \\ 3x_4 &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Имеем для первого сравнения $x_1 \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod{5}$.

Для второго сравнения получаем

$$x_2 \equiv 3^5 = (3^2)^2 \cdot 3 = 9^2 \cdot 3 \equiv 2^2 \cdot 3 = 12 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Далее, для x_3 получаем

$$x_3 \equiv 3^9 \equiv (3^3)^3 = 27^3 \equiv 5^3 = 25 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Наконец, для x_4 имеем

$$x_4 \equiv 3^{11} = (3^3)^3 \cdot 3^2 = 27^3 \cdot 9 \equiv 1^3 \cdot 9 = 9 \pmod{13}.$$

Итак, $3^{-1} \equiv [2, 5, 4, 9] \pmod{\beta}$.

Далее, получаем

$$\begin{aligned} a \equiv & 5[2,1,7,5]-2[2,5,4,9]= \\ &=[10,5,35,25]-[4,10,8,18] \equiv [0,5,2,12]-[4,3,8,5]= \\ &=[-4,2,-6,7] \equiv [1,2,5,7] \pmod{\beta}. \end{aligned}$$

Здесь знак равенства означает равенство выражений в правой и левой части, как векторов с четырьмя координатами.

Если теперь мы попытаемся решить систему неравенств

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv 7 \pmod{13} \end{cases},$$

то получим некоторый класс эквивалентности по модулю $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, однако это не даст нам возможности найти точное значение числа a, так как это число не является целым. Для того, чтобы все-таки найти, чему равно a, используем следующую дополнительную информацию. Во-первых, a представимо в виде $\dfrac{c}{d}$, где $d = 3 \cdot 8$. Это следует из правила сложения дробей. Во-вторых, справедливы следующие оценки $-1 < a < 1$, а значит $-3 \cdot 8 < c < 3 \cdot 8$. Таким образом, задача свелась к нахождению целого числа c.

Так как $a = \dfrac{c}{d}$, получаем $ad = c$, а значит $ad \equiv c \pmod{m}$ для любого целого значения m, в частности, для m равного каждой из координат вектора оснований. Так как $a \equiv [1,2,5,7] \pmod{\beta}$, а $d = 8 \cdot 3 = 24 \equiv [4,3,2,11]$, получаем

$$c \equiv ad \equiv [1 \cdot 4, 2 \cdot 3, 5 \cdot 2, 7 \cdot 11] = [4,6,10,77] \equiv [4,6,10,12],$$

Итак, $c \equiv 4 \pmod{5}$, следовательно,

$$a = 5x_1 + 4, \tag{4.11}$$

с другой стороны, $a \equiv 6 \pmod{7}$, то есть $5x_1 + 4 \equiv 6 \pmod{7}$, а значит $5x_1 \equiv 2 \pmod{7}$. Для начала найдем x_1', такой что $5x_1' \equiv 1 \pmod{7}$. Имеем

$$x_1' \equiv 5^5 = (5^2)^2 \cdot 5 = 25^2 \cdot 5 \equiv 4^2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10 \equiv 3 \pmod{7},$$

Откуда получаем

$$x_1 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{7}. \tag{4.12}$$

Далее, из 4.12 получаем $x_1 = 7x_2 + 6$, подставляя это значение в равенство (4.11), получаем

$$a = 5(7x_2 + 6) + 4 = 35x_2 + 34. \qquad (4.13)$$

Теперь подставим это выражение в сравнение $a \equiv 10 \pmod{11}$, получаем $35x_2 + 34 \equiv 10 \pmod{11}$, то есть $35x_2 \equiv -24 \pmod{11}$, а значит $2x_2 \equiv 9 \pmod{11}$. Найдем x_2', такой что $2x_2' \equiv 1 \pmod{11}$. Имеем

$$x_2' \equiv 2^9 = (2^4)^2 \cdot 2 = 16^2 \cdot 2 \equiv 5^2 \cdot 2 = 25 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \pmod{11},$$

Откуда получаем

$$x_2 \equiv 2 \cdot 9 = 54 \equiv 10 \pmod{11}. \qquad (4.14)$$

Таким образом, $x_2 = 11x_3 + 10$. Подставим в равенство (4.13), получаем

$$a = 35(11x_3 + 10) + 34 = 385x_3 + 384. \qquad (4.15)$$

Подставив это выражение в сравнение $a \equiv 12 \pmod{13}$, получаем $385x_3 + 384 \equiv 12 \pmod{13}$, следовательно $385x_3 \equiv -372 \pmod{13}$, то есть $8x_3 \equiv 5 \pmod{13}$. Найдем значение x_3', для которого сравнение $8x_3' \equiv 1 \pmod{13}$ истинно. Имеем

$$x_3' \equiv 8^{13-2} = 8^{11} = (8^2)^5 \cdot 8 = 64^5 \cdot 8 \equiv (-1)^5 \cdot 8 = -1 \cdot 8 = 5 \pmod{13}.$$

Следовательно, $x_3 \equiv 5 \cdot 5 = 25 \equiv 12 \pmod{13}$, то есть $x_3 = 13x_4 + 7$. Подставив в равенство 4.15, получаем $c = 385(13x_4 + 12) + 384 = 5005x_4 + 4620 + 384 = 5005x_3 + 5004$. Таким образом, $c \equiv 5004 \pmod{7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 13}$. Так как $-24 < c < 24$, получаем $c = -1$, а значит $a = \dfrac{c}{d} = -\dfrac{1}{24}$. □

Пример 4.15. Найти знак числа a, вектор остатков которого по вектору оснований $\beta = [7, 11, 13, 2]$ равен $[3, 2, 7, 1]$.

Решение. Найдем q_1, q_2, q_3, q_4 из разложения

$$a = q_1 + 7q_2 + 7 \cdot 11 \cdot q_3 + 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot q_4.$$

Найдем вектор остатков числа $a - q_1$. Получаем

$$[3 - 3, 2 - 3, 7 - 3, 1 - 3] \equiv [0, -1, 4, -2] \equiv [0, 10, 4, 0] \pmod{\beta}.$$

Теперь найдем 7^{-1} относительно вектора оснований $\beta_1 = [11, 13, 2]$, для чего необходимо решить сравнения

$$\begin{aligned} 7x_1 &\equiv 1 \pmod{11}; \\ 7x_2 &\equiv 1 \pmod{13}; \\ 7x_3 &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Имеем для первого сравнения

$$x_1 \equiv 7^9 = (7^2)^4 \cdot 7 = 49^4 \cdot 7 \equiv 5^4 \cdot 7 = (5^2)^2 \cdot 7 = \\ = 25^2 \cdot 7 \equiv 3^2 \cdot 7 = 63 \equiv 8 \pmod{11}.$$

Для второго сравнения получаем

$$x_2 \equiv 7^{11} = (7^2)^5 \cdot 7 = 49^5 \cdot 7 \equiv 10^5 \cdot 7 = (10^2)^2 \cdot 10 \cdot 7 = 100^2 \cdot 70 \equiv \\ \equiv 9^2 \cdot 5 = 81 \cdot 5 \equiv 3 \cdot 5 = 15 \equiv 2 \pmod{13}.$$

Наконец, из того, что $7x_3 \equiv x_3 \pmod 2$, получаем $x_3 \equiv 1 \pmod 2$. Таким образом, $7^{-1} \equiv [8, 2, 1] \pmod{\beta_1}$, а значит

$$a_1 = (a - q_1)7^{-1} \equiv [10 \cdot 8, 4 \cdot 2, 0 \cdot 1] = [80, 8, 0] \equiv [3, 8, 0] \pmod{\beta_1}.$$

Теперь найдем $a_1 - q_2$, где $q_2 = 3$ – это остаток от деления a_1 на 11. Получаем вектор остатков

$$[3 - 3, 8 - 3, 0 - 3] \equiv [0, 5, -3] \equiv [0, 5, 1] \pmod{\beta_1}.$$

Найдем 11^{-1} относительно вектора оснований $\beta_2 = [13, 2]$, для чего необходимо решить сравнения

$$\begin{aligned} 11x_1 &\equiv 1 \pmod{13}; \\ 11x_2 &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Имеем для первого сравнения

$$x_1 \equiv 11^{11} = (11^2)^5 \cdot 11 = 121^5 \cdot 11 \equiv 4^5 \cdot 11 = (4^2)^2 \cdot 4 \cdot 11 = \\ = 16^2 \cdot 44 \equiv 3^2 \cdot 5 = 45 \equiv 6 \pmod{13}.$$

Для x_2, так как $11x_2 \equiv x_2 \pmod 2$, получаем $x_2 \equiv 1 \pmod 2$. Таким образом, $11^{-1} \equiv [6, 1] \pmod{\beta_2}$, а значит

$$a_2 = (a_1 - q_2)11^{-1} \equiv [5 \cdot 5, 1 \cdot 1] = [30, 1] \equiv [4, 1] \pmod{\beta_2}.$$

Таким образом, $q_3 = 4$, найдем вектор остатков, соответствующий $a_2 - q_3$ относительно вектора оснований β_2. Получаем $[4 - 4, 1 - 4] = [0, -3] \equiv 0, 1 \pmod{\beta_2}$.

Теперь найдем 13^{-1} по модулю 2. Для этого необходимо решить сравнение $13x_1 \equiv 1 \pmod 2$. Так как $13x_1 \equiv x_1 \pmod 2$, получаем $x_1 \equiv 1 \pmod 2$. Таким образом, $(a_2 - q_3)13^{-1} \equiv 1 \cdot 1 = 1 \pmod 2$. Следовательно, $q_4 = 1$, а значит $a < 0$. $\square$

4.4. Задачи

4.4.1. Вычислить, используя многомодульную арифметику с вектором оснований $\beta = [9, 8, 7, 11]$:

а) $a + b$, где $a = 211$, $b = 184$; б) $a + b$, где $a = 324$, $b = 249$;
в) $a + b$, где $a = 241$, $b = 315$; г) $a - b$, где $a = 342$, $b = 131$;
д) $a - b$, где $a = 325$, $b = 124$; е) $a - b$, где $a = 214$, $b = 111$;
ж) $2a + 4b$, где $a = 205$, $b = 327$; з) $3a - 5b$, где $a = 411$, $b = 103$;
и) $6a - 2b$, где $a = 213$, $b = 304$; к) $3a + 5b$, где $a = 117$, $b = 89$.

4.4.2. Вычислить, используя многомодульную арифметику:

а) $13^{-1} (\bmod \beta)$, где $\beta = [3, 17, 5, 2]$;
б) $14^{-1} (\bmod \beta)$, где $\beta = [3, 17, 11, 5]$;
в) $23^{-1} (\bmod \beta)$, где $\beta = [5, 17, 13, 7, 9]$;
г) $12^{-1} (\bmod \beta)$, где $\beta = [5, 11, 17, 13]$;
д) $11^{-1} (\bmod \beta)$, где $\beta = [8, 9, 13, 5]$.

4.4.3. Вычислить, используя многомодульную арифметику. Используя дополнительные априорные оценки, найти точные значения выражений:

а) $\dfrac{3}{11} - \dfrac{4}{13} (\bmod \beta)$, где $\beta = [5, 17, 3, 2]$;
б) $\dfrac{5}{11} - \dfrac{9}{14} (\bmod \beta)$, где $\beta = [3, 17, 5, 2]$;
в) $\dfrac{4}{13} - \dfrac{2}{9} (\bmod \beta)$, где $\beta = [5, 11, 17, 2]$;
г) $\dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{11} - \dfrac{2}{5} (\bmod \beta)$, где $\beta = [3, 17, 13, 2]$;
д) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{6}{7} - \dfrac{3}{17} (\bmod \beta)$, где $\beta = [19, 5, 11, 2]$.

4.4.4. Найти знак числа a, заданного вектором остатков по вектору оснований β:

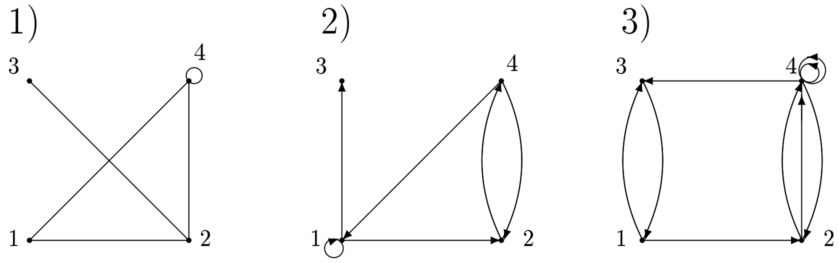
а) $a = [4, 3, 14, 0]$, $\beta = [5, 11, 19, 2]$; б) $a = [2, 6, 0, 1]$, $\beta = [5, 7, 13, 2]$;
в) $a = [3, 4, 3, 9, 1]$, $\beta = [5, 19, 13, 11, 2]$;
г) $a = [1, 2, 3, 3, 1]$, $\beta = [17, 13, 11, 5, 2]$.

Глава 5

Теория графов

5.1 Способы задания графов. Изоморфизмы графов

Пример 5.1. Какие из приведенных рисунков являются изображениями графов (ориентированных или неориентированных), а какие — только мультиграфов? Для каждого графа найти множество вершин и множество дуг, а также все петли.



Решение. На первом рисунке изображен неориентированный граф со множеством вершин $V = \{1,2,3,4\}$ и множеством ребер $E = \{[1,2],[1,4],[2,3],[2,4],[4,4]\}$, петлей является только ребро $[4,4]$. Каждое из ребер изображено в виде отрезка прямой или участка кривой (для петли $[4,4]$).

На втором рисунке — ориентированный граф, с множеством вершин $V = \{1,2,3,4\}$ и множеством дуг

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(4,1),(4,2)\},$$

в котором дуги обозначены участками кривых со стрелками.: дуга в ориентированном графе (u,v) обозначается участком кривой со стрелкой в направлении от u к v. Петлей является дуга $(1,1)$. На третьем — изображен мультиграф (он не является графом, так как, например, из вершины 2 в вершину 4 идут две дуги). Множество вершин этого мультиграфа $V = \{1,2,3,4\}$. □

Пример 5.2. Построить матрицы смежности, задающие графы из примера 5.1.

Решение. Для построения матрицы смежности графа необходимо для каждой дуги (i, j) поставить единицу в i-ую строчку, j-ый столбец, а на остальных местах в матрице поставить нули (см. [5], § 4.1). Если граф ориентированный, то считаем, что каждое ребро $[i, j]$ кроме петли соответствует двум дугам: (i, j) и (j, i). Для мультиграфа на пересечении i-ой строки и j-го стобца ставится количество дуг из i в j. В итоге, получаем:

$$\overset{1)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}; \quad \overset{2)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}; \quad \overset{3)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

В дальнейшем матрицу смежности графа G будем обозначать A_G. □

Пример 5.3. Построить матрицы инцидентности для графов из примера 5.1.

Доказательство. Введем обозначения для дуг графов.
1) $e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 1), e_3 = (1, 4), e_4 = (4, 1), e_5 = (2, 3), e_6 = (3, 2), e_7 = (2, 4), e_8 = (4, 2), e_9 = (4, 4)$;
2) $e_1 = (1, 1), e_2 = (1, 2), e_3 = (1, 3), e_4 = (2, 4), e_5 = (4, 1), e_6 = (4, 2)$;
3) $e_1 = (1, 2), e_2 = (1, 3), e_3 = (3, 1), e_4 = (4, 2), e_5 = (4, 3)$, а также пусть e_6 и e_7 — дуги, идущие из вершины 2 в вершину 4, а e_8 и e_9 — петли, исходящие из вершины 4. Тогда матрицы инцидентности имеют вид (см. [5],§ 4.1):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем матрицу инцидентности графа G будем обозначать B_G □

Пример 5.4. Задать графы из примера 5.1 посредством списка дуг.

Ответы. Используем ту же нумерацию дуг, что и в примере 5.3. Тогда, как описано в [5], § 4.1:
1) $\overline{m} = (1, 2, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 4)$, $\overline{m} = (2, 1, 2, 4, 2, 3, 4, 2, 4)$;
2) $\overline{m} = (1, 1, 1, 2, 4, 4)$, $\overline{m} = (1, 2, 3, 4, 1, 2)$;
3) $\overline{m} = (1, 1, 3, 4, 4, 2, 2, 4, 4)$, $\overline{m} = (2, 3, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$. □

Пример 5.5. Для графов 1) и 2) из примера 5.1 построить структуры смежности.

Ответ. Опять же, как описано в [5], § 4.1, получаем

1)

вершины	последователи
1	2, 4
2	1, 3, 4
3	2
4	1, 2, 4

;

2)

вершины	последователи
1	1, 2, 3
2	4
3	–
4	1, 2

.

□

Пример 5.6. Выяснить, изоморфны ли графы, G_1 и G_2, заданные матрицами смежности:

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. В силу [5], теорема 4.1.1, нам необходимо либо найти такую перестановку, при помощи которой мы сможем получить одну матрицу из другой, либо доказать, что такой перестановки не существует. Для начала сделаем первые прикидки: в обеих матрицах все строки содержат по две единицы. Также в обеих матрицах два столбца содержат по одной единице, а две других — по три. Наконец, в обеих матрицах по две единицы на главной диагонали. Таким образом, пока мы не можем утверждать, что графы не являются изморфными.

Отметим, что если графы изоморфны, то, очевидно, столбцы с тремя единицами должны переходить в столбцы с тремя единицами, а столбцы с одной единицей в столбцы с одной единицей. Таким образом столбцы 1 и 4 матрицы A_{G_1} должны оказаться на позициях 2 и 3 матрицы A_{G_2} и наоборот. Правда мы до сих пор не знаем, какой стобец должен переставляться с каким. Пусть первый столбец матрицы A_{G_1} переставляется со вторым, а третий с четвертым (и строки переставляются таким же образом). В итоге, получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили матрицу, равную A_{G_2}, а значит графы G_1 и G_2 изоморфны.

Отметим, что если бы не была равна A_{G_2}, то все равно задача упростилась бы, так как столбцы с одинаковым количеством единиц оказались бы на одних и тех же позициях в матрицах и A_{G_2}, а значит можно было бы отдельно рассматривать группы столбцов (или строк) с одинаковым количеством единиц и искать перестановку, переставляющую их между собой. □

Пример 5.7. Являются ли изоморфными графы G_1 и G_2, заданные матрицами инцидентности?

$$B_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Опять начнем с некоторых прикидок, которые позволят нам установить, что графы неизморфны или дадут информацию о том, каковы должны быть перестановки строк и столбцов в B_{G_1}, чтобы получить B_{G_2}.

Итак, легко видеть, что оба графа имеют две петли, причем в первом графе петлям соответствуют столбцы номер 4 и 6, а во втором — столбцы номер 1 и 4. Кроме того, в обеих матрицах есть по одной строке в которых по три единицы и четыре нуля, по одной строке, в которых две единицы одна минус единица и четыре нуля, и по две строки, в которых по одной единице, по две минус единицы и по четыре нуля.

Таким образом, мы можем утверждать, что если графы изоморфны, то перестановка строк переставляет первую строку матрицы B_{G_1} на третью позицию (так как в первой строке B_{G_1} три единицы и четыре нуля, как и в третьей строке B_{G_2}), а третью строку этой матрицы — на вторую позицию (по аналогичной причине). Переставим эти строки, например, поместив строку номер 2 на позицию 1. Одновременно, поменяем местами столбцы 1 и 6, чтобы столбцы с петлями находились на одних и тех же позициях, в итоге получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы знаем, что строки номер 2 и 3 попали на свои места. В строке номер 2 матрицы C две единицы, одна из которых соответствует петле, а вторая, находящаяся в столбце номер 7, — дуге, идущей из вершины 2 в вершину 1. В строке номер 2 матриц B_{G_2} также две единицы, причем также одна из них соответствует петле, а другая, находящаяся в столбце номер 2 — дуге, идущей из вершины 2 в вершину 4. Таким образом, если изоморфизм существует, то столбец номер 7 должен быть переставлен на позицию 2. Кроме того, должны быть переставлены строки 1 и 4. Переставив эти строки, а также столбцы номер

2 и 7, мы получим матрицу

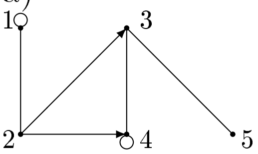
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь все строки попали на свои места и нам осталось переставить надлежащим образом столбцы (если это возможно). Легко видеть, что перестановка столбцов матрицы D, в результате которой получается матрица B_{G_2} переставляет столбец номер 3 на позицию 5, столбец номер 5 на позицию 6, а столбец номер 6 на позицию 3. Таким образом, в силу [5], теорема 4.1.2, графы G_1 и G_2 изоморфны. □

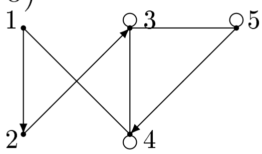
5.1. Задачи

5.1.1. Дан граф, найти его матрицу смежности, матрицу инцидентности, построить структуру смежности и структуру списка дуг, задающую этот граф:

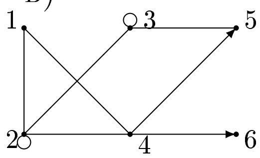
а)



б)

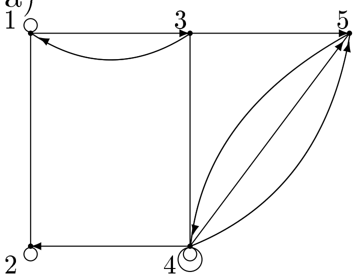


в)

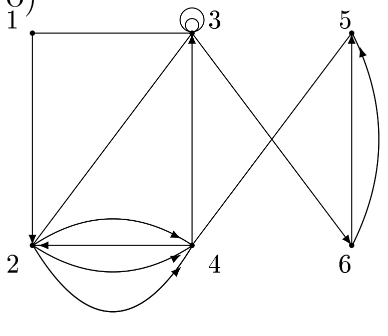


5.1.2. Найти матрицу смежности для мультиграфа:

а)



б)



5.1.3. Построить граф $G = \langle V, E \rangle$, если:

а) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), [2, 3], [2, 4], (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 1)\}$;

б) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), [1, 3], (1, 5), (2, 2), [2, 3], (2, 5), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), [4, 5], (5, 3), (5, 5)\}$;

в) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 3), [1, 4], (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), [2, 3], (2, 6), (3, 6), (4, 2), (4, 3), [4, 6], (5, 1), (5, 3), (6, 3)\}$.

5.1.4. Построить (мульти)граф, заданный матрицей смежности:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.1.5. Построить (мульти)граф, заданный матрицей инцидентности:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.1.6. Построить граф со множеством вершин $V = \{0, 1, 2, 3\}$, заданный списком дуг:

а) $\overline{m} = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 3)$, $\overline{n} = (1, 0, 2, 3, 1, 3, 2)$;

б) $\overline{m} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3)$, $\overline{n} = (2, 1, 0, 3, 1, 2, 1, 1)$.

5.1.7. Построить граф, заданный структурой смежности:

а)

вершины	списки последователей
0	0
1	$1, 2, 3$
2	$0, 1$
3	$1, 2, 3$

б)

вершины	списки последователей
0	$0, 2, 4$
1	3
2	$0, 1$
3	$1, 4$
4	0

5.1.8. Изоморфны ли графы, заданные матрицами инцидентности:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

5.1.9. Изоморфны ли графы, заданные матрицами смежности:

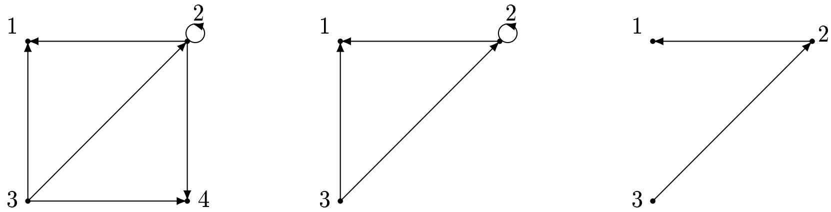
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

5.1.10. Доказать методом математической индукции, что число ребер в неорграфе (включая петли) не превосходит $\dfrac{n(n+1)}{2}$, где n — число вершин графа.

5.2 Операции над графами

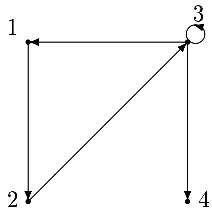
Пример 5.8. Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Какие из графов G_1 и G_2 являются подграфами, а какие — лишь частями графов?



G $\qquad G_1 \qquad G_2$

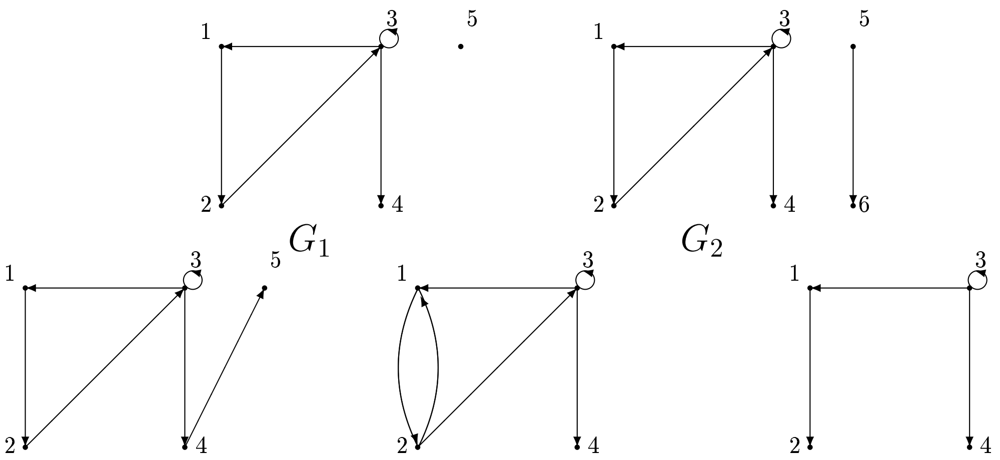
Решение. G_1 является подграфом графа G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3\}$, так как все дуги графа G соединяющие две вершины из V есть и в G_1. G_2 подграфом графа G не является, так как в G_2 нет дуги $(1, 3)$, но является частью этого графа. □

Пример 5.9. Пусть $G = \langle V; E\rangle$ — граф, изображение которого дано ниже. Граф G_1 получен из графа G добавлением вершины 5, графы G_2, G_3, G_4 получены добавлением ребер $(5, 6)$, $(4, 5)$ и $(2, 1)$, соответственно, граф G_5 — удалением из графа G дуги $(2, 3)$, граф G_6 — удалением вершины 4, граф G_7 — отождествлением вершин 2 и 4, а граф G_8 — стягиванием дуги $(1, 2)$. Построить графы $G_1, \ldots, G_8$.



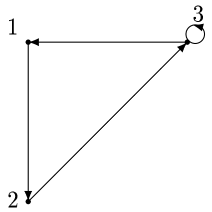
G

Ответы. Очевидно, имеем:

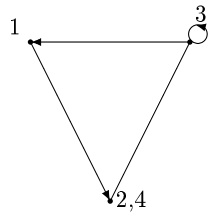


$G_1 \qquad G_2$

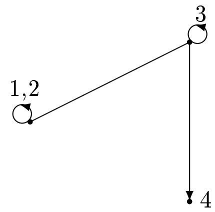
$G_3 \qquad G_4 \qquad G_5$



G_6



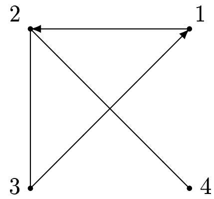
G_7



G_8

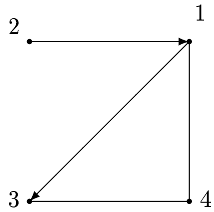
□

Пример 5.10. Для графа без петель $G = \langle V; E\rangle$ найти $\overline{G}$.



G

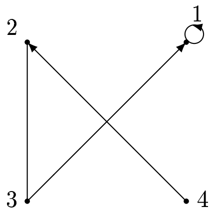
Ответ. Граф $\overline{G}$ выглядит следующим образом:



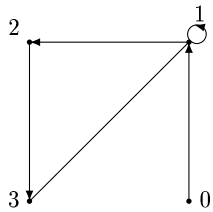
$\overline{G}$

□

Пример 5.11. Для графов $G_1 = \langle V_1; E_1\rangle$ и $G_2 = \langle V_2; E_2\rangle$, изображенных ниже, найти графы $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1 + G_2$, $G_1 \times G_2$.

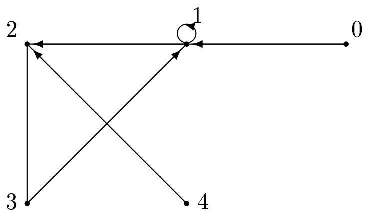


G_1

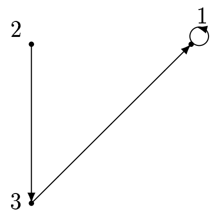


G_2

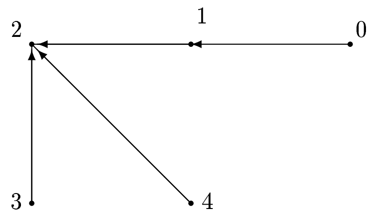
Ответы. Исходя из определений операций над графами, получаем



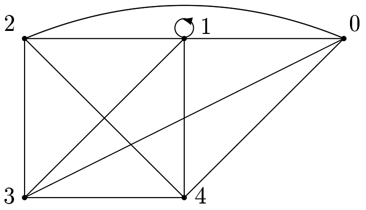
$G_1 \cup G_2$



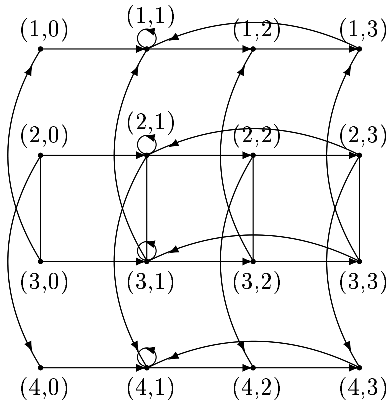
$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$



$G_1 + G_2$



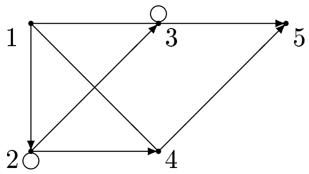
$G_1 \times G_2$

□

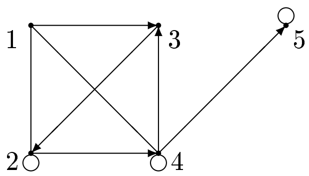
5.2. Задачи

5.2.1. Дан граф G.

а) Построить графы, полученные из G добавлением вершины 6, добавлением дуги $(5, 4)$, удалением вершины 1, отождествлением вершин 1 и 3.

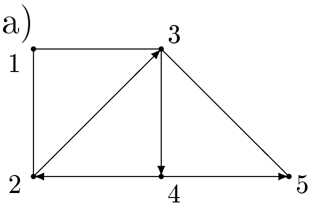


б) Построить графы, полученные из G добавлением вершины 0, добавлением дуги $(2, 6)$, удалением вершины 1, отождествлением вершин 2 и 5.

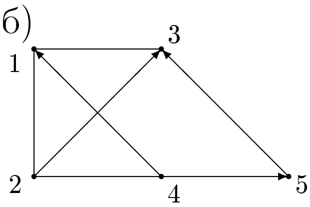


5.2.2. Построить дополнение графа:

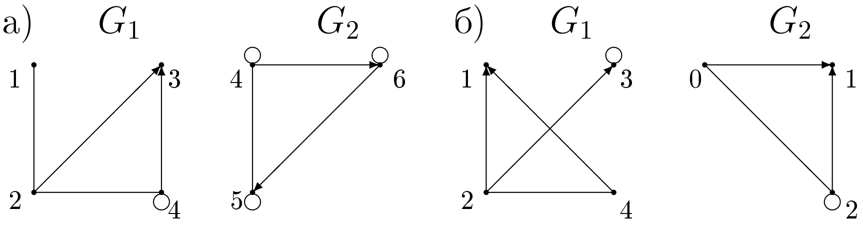
а)



б)

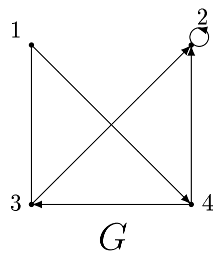


5.2.3. Даны графы G_1 и G_2. Построить графы $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cup G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1 + G_2$, $G_1 \times G_2$:



5.3 Маршруты. Достижимость. Связность

Пример 5.12. Найти матрицу компонент сильной связности графа G:



Решение. Воспользуемся методом из [5], § 4.3. Сначала найдем матрицу смежности графа G. Имеем

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в графе G четыре вершины, найдем A_G^2 и A_G^3:

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, получаем

$$B = E + A_G + A_G^2 + A_G^3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим матрицы достижимости и контрдостижимости:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, найдем матрицу компонент сильной связности:

$$S = C * Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

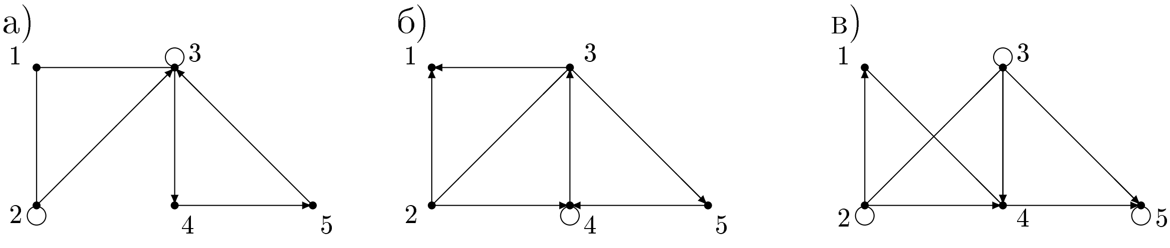
По матрице компонент сильной связности можно сделать вывод, что в графе G две компоненты сильной связности. Одна состоит из вершин $1, 3, 4$, а вторая — только из вершины 2. □

5.3. Задачи

5.3.1. а) Доказать, что если в неориентированном графе существует маршрут, соединяющий две вершины, то существует и простая цепь, соединяющая эти вершины.
б) Доказать, что если две вершины взаимно достижимы, то существует соединяющий их маршрут, длина которого не превосходит $|V| - 1$, где V — множество вершин графа.

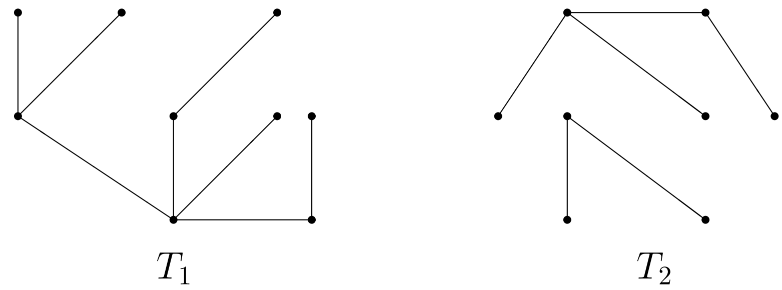
5.3.2. Пусть $G\langle V; E\rangle$ — граф. Доказать, что отношение $P \subseteq V^2$, определенное по правилу $P = \{(v_i, v_j) \,|\, v_i \text{ и } v_j \text{ взаимно достижимы}\}$ является эквивалентностью.

5.3.3. Построить матрицу смежности, матрицы маршрутов длины 2, 3, 4, матрицу сильных компонент:

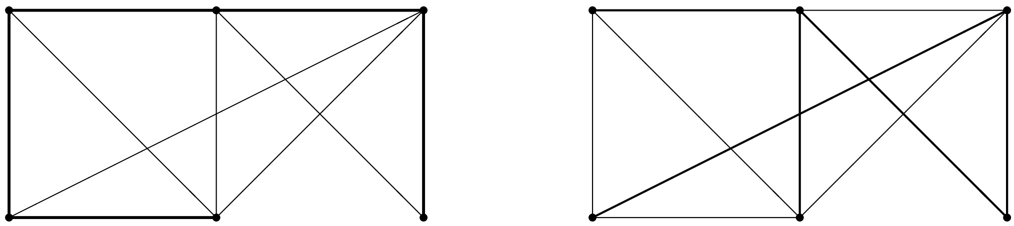


5.4 Остовы. Фундаментальные циклы. Фундаментальные разрезы

Пример 5.13 (Деревья и леса). На следующем рисунке граф T_1 — дерево, а граф T_2 не является деревом, но является лесом с двумя компонентами связности.



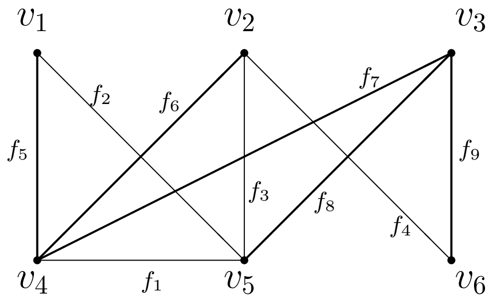
Пример 5.14 (Остовы). На рисунке ниже изображен граф G, в котором выделены два различных остова.



Пример 5.15. Найти матрицу фундаментальных циклов графа G относительно остова, состоящего из ребер

$$[v_1, v_4], [v_2, v_4], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_3, v_6]$$

(см. рис. ниже).

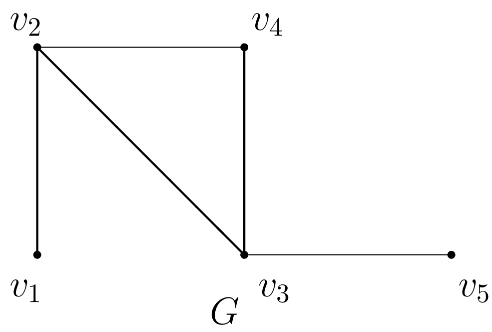


Доказательство. Пронумеруем вершины и ребра, как показано на рисунке выше, тогда остов состоит из ребер f_5, f_6, f_7, f_8, f_9. При добавлении ребра f_1 в полученном графе образуется цикл C_1, состоящий из ребер f_1, f_7, f_8. Таким образом, получаем вектор $\overline{a}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$. Аналогично, при добавлении ребра f_2 получаем цикл, состоящий из ребер f_2, f_5, f_7, f_8, следовательно, $\overline{a}_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$. Аналогично, при добавлении ребра f_3 получаем цикл C_3, состоящий из ребер f_3, f_6, f_7, f_8, и $\overline{a}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ и для f_4 получаем C_4 состоит из ребер f_4, f_6, f_7, f_9, то есть $\overline{a}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$. В итоге, получаем матрицу фундаментальных циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Пример 5.16. Множество ребер $K = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4]\}$ является разрезом графа G, но этот разрез не является простым.



Действительно, очевидно, что K является разрезом по разбиению $\mathcal{V} = \big\{\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}\big\}$. Однако, множество $K' = \{[v_1, v_2]\}$, являющееся подмножеством множества K, является разрезом по разбиению $\mathcal{V}' = \big\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\big\}$. □

Пример 5.17. Найти матрицу фундаментальных разрезов графа G из примера 5.15 по тому же остову, что и в этом примере.

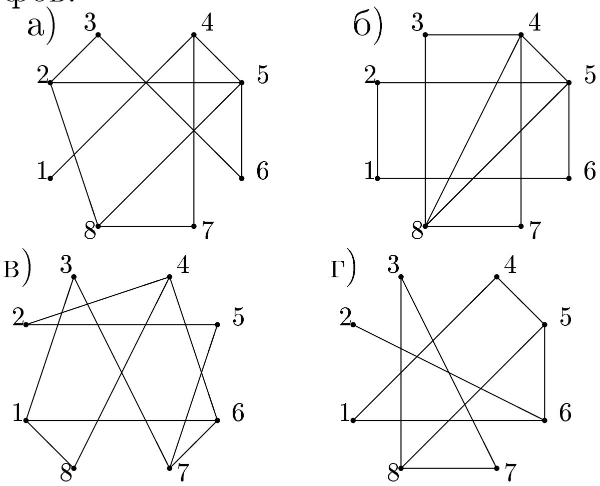
Решение. Будем пользоваться той же нумерацией ребер, что и в примере 5.15. Удаление ребра f_5 дает следующее разбиение вершин: $\mathcal{V}_5 = \big\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}\big\}$, следовательно $K_5 = \{f_2, f_4\}$, значит $\overline{b}_5 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$. Удаление ребра f_6 порождает разбиение $\mathcal{V}_6 = \big\{\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}\big\}$, получаем $K_6 = \{f_3, f_4, f_6\}$, следовательно $\overline{b}_6 = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$. Далее полностью аналогично. Удаление ребра f_7 дает разбиение $\mathcal{V}_7 = \big\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6\}\big\}$, получаем $K_7 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_7\}$ и $\overline{b}_7 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$. При удалении ребра f_8 имеем $\mathcal{V}_8 = \big\{\{v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}\big\}$, в итоге $K_8 = \{f_1, f_2, f_3, f_8\}$, следовательно $\overline{b}_8 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$. Наконец, удаляя ребро f_9, получаем $\mathcal{V}_9 = \big\{\{v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\big\}$, следовательно, $K_9 = \{f_4, f_9\}$ и $\overline{b}_9 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$. Записывая векторы один под другим, получаем матрицу фундаментальных разрезов

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

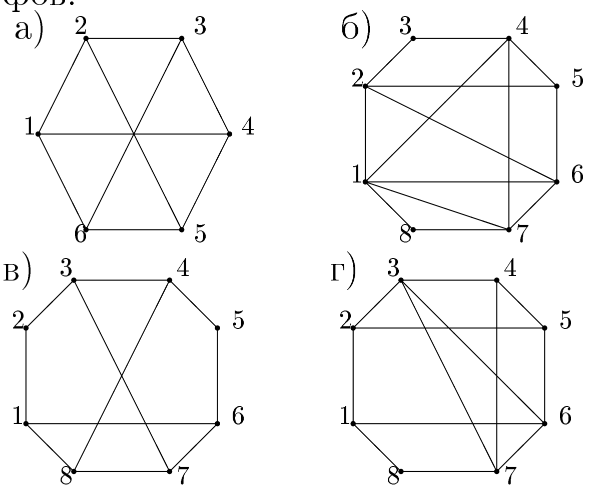
□

5.4. Задачи

5.4.1. Найти матрицы фундаментальных циклов для следующих графов:



5.4.2. Найти матрицы фундаментальных разрезов для следующих графов:



5.5 Расстояния в графах. Эйлеровы графы. Планарные графы

Пример 5.18. Найти эксцентриситеты всех вершин графа G из примера 5.15, а также его радиус и диаметр.

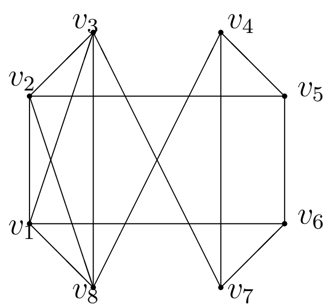
Решение. Для каждой вершины v_i и каждого $j \geqslant 1$ найдем множество вершин, расстояния от которых до v_i равно j (обозначим такое множество $D_j(v_i)$. Имеем,
$D_1(v_1) = \{v_4, v_5\}$; $D_2(v_1) = \{v_2, v_3\}$; $D_3(v_1) = \{v_6\}$;
$D_1(v_2) = \{v_4, v_5, v_6\}$; $D_2(v_2) = \{v_1, v_3\}$;
$D_1(v_3) = \{v_4, v_5, v_6\}$; $D_2(v_3) = \{v_1, v_2\}$;
$D_1(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$; $D_2(v_4) = \{v_6\}$;
$D_1(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $D_2(v_4) = \{v_6\}$;
$D_1(v_6) = \{v_2, v_3\}$; $D_2(v_6) = \{v_4, v_5\}$; $D_3(v_6) = \{v_1\}$.
Отсюда получаем

$$e(v_1) = e_(v_6) = 3, \quad e(v_2) = e_(v_3) = e(v_4) = e(v_5) = 2.$$

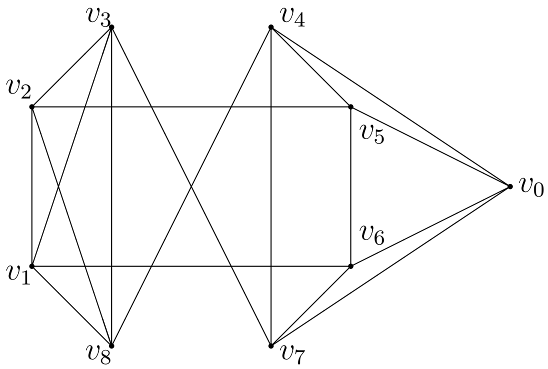
Следовательно, $r(G) = 2$ и центр графа G состоит из вершин v_2, v_3, v_4, v_5, а $d(G) = 3$ и, соответственно, периферийными являются вершины v_1 и v_6. □

Эйлеровы графы

Пример 5.19. Найти минимальное множество покрывающих цепей графа G, изображенного ниже:



Решение. В графе G четыре вершины, степени которых нечетны: v_4, v_5, v_6 и v_7. Соответственно, граф G' получается из графа G добавлением вершины v_0 и ребер $[v_0, v_4]$, $[v_0, v_5]$, $[v_0, v_6]$, $[v_0, v_7]$.



Для упрощения записи, при обозначении цепей мы будем выписывать только вершины, через которые они проходят, а ребра будем пропускать. Итак, начнем с вершины v_0. Пройдя по циклу $v_0, v_4, v_5, v_0, v_6, v_7, v_0$, оказываемся в вершине v_0, причем все ребра, идущие из этой вершины, уже использованы.

Так как цикл включает в себя не все ребра графа G', выберем одну из вершин этого цикла, инцидентную хотя бы одному из еще не выбранных ребер. Допустим выбрана вершина v_4, строим цикл, начиная с этой вершины. Получаем v_4, v_7, v_3, v_8, v_4. Все ребра, инцидентные вершине v_4, уже выбраны, значит дальше мы не можем двигаться. Подставив второй цикл вместо вершины v_4 в первом цикле, получаем $v_0, v_4, v_7, v_3, v_8, v_4, v_5, v_0, v_6, v_7, v_0$.

Полученный цикл опять содержит не все ребра графа G'. Выберем одну из вершин полученного ранее цикла цикла, например, вершину v_3 и строим очередной цикл: $v_3, v_2, v_1, v_8, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3$. Подставив полученный цикл вместо вершины v_3 в цикл, построенный ранее, получаем

$$v_0, v_4, v_7, v_3, v_2, v_1, v_8, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_8, v_4, v_5, v_0, v_6, v_7, v_0.$$

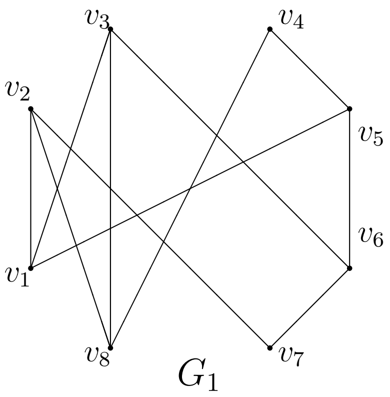
Это цикл содержит все ребра графа, значит это и есть эйлеров цикл графа G'. Вхождения вершины v_0 делят этот цикл на две цепи:

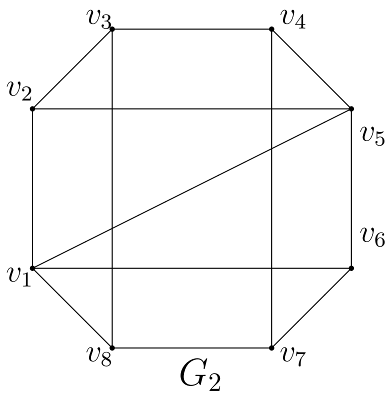
$$v_4, v_7, v_3, v_2, v_1, v_8, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_8, v_4, v_5 \quad \text{и} \quad v_6, v_7.$$

Эти цепи и образуют минимальное множество покрывающих цепей графа G. □

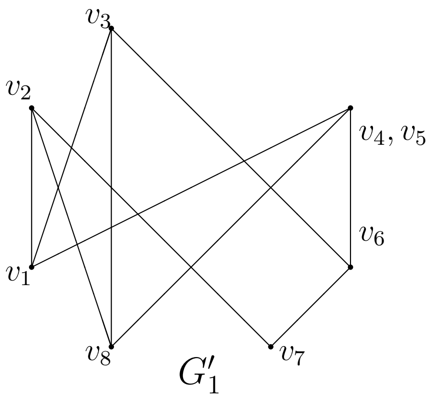
Планарные графы

Пример 5.20. Являются ли планарными следующие графы?

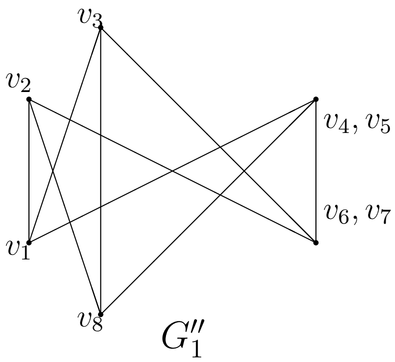




Решение. В графе G_1 осуществим стягивание ребра $[v_4, v_5]$ (петли, полученные в результате стягивания, изображать не будем, так как, очевидно, наличие или отсутствие петли не влияет на планарность графа). Итак, получили граф G_1':

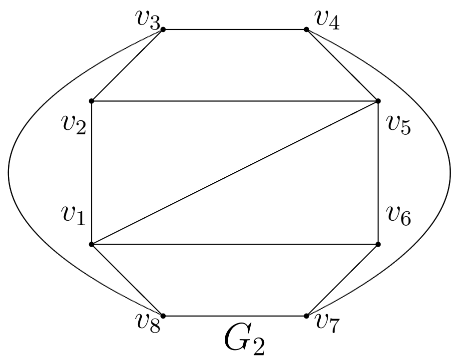


Теперь осуществим стягивание ребра $[v_6, v_7]$ в графе G_1'. Получим граф G_1'':



Легко видеть, что граф G_1'' изоморфен графу $K_{3,3}$, а значит G_1 не является планарным.

Граф G_2 является планарным, так как его можно изобразить следующим образом:



G_2

□

5.5. Задачи

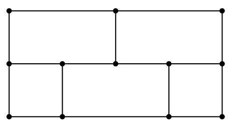
5.5.1. Доказать свойство 4 функции $\rho(v, u)$.

5.5.2. Доказать, что для любого связного неориентированного графа G выполняются неравенства $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$.

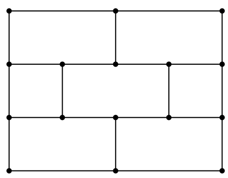
5.5.3. Найти эксцентриситеты всех вершин графов из задачи 5.4.1, их радиусы, диаметры. Являются ли графы эйлеровыми? Найти их минимальное множество покрывающих цепей.

5.5.4. Каково минимальное количество кривых, которое необходимо провести, чтобы каждый отрезок фигуры пересекался только с одной из кривых ровно один раз?

а)



б)



5.5.5. Учреждение имеет вид квадрата, разделенного на 64 квадратные комнаты (8 рядов по 8 комнат). В каждой стене каждой комнаты (в том числе и в стенах, выходящих на улицу) есть дверь. Требуется установить замки на все двери. Слесарь начинает работу в произвольной комнате. Попав в комнату, он выбирает произвольную дверь в этой комнате, устанавливает замок в ней, после чего переходит в соседнюю комнату через эту дверь и захлопывает её за собой. Затем эта дверь подключается к системе сигнализации и не может быть открыта до тех пор, пока все замки не будут установлены. Найти минимальное количество слесарей, необходимое для того, чтобы установить замки на всех дверях. Тот же вопрос, при дополнительном условии: каждый слесарь, окончив свою работу, должен оказаться на улице.

5.5.6. Являются ли планарными графы из задачи 5.4.2?

5.5.7. При каких n граф K_n планарен?

Глава 6

Алгебра логики

6.1 Формулы алгебры логики. Таблицы истинности. Эквивалентность

Пример 6.1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:
а) Вода кипит при температуре $100\,^{\circ}$C при атмосферном давлении 760 мм.рт.ст.
б) Солнце — звезда.
в) Меркурий — самая удаленная от Солнца планета.
г) На улице идет дождь.
д) Кошки — самые любопытные животные?

Решение. Предложения а) и б) являются высказываниями, так как они оба представляют собой истинные утверждения. Предложение в) также является высказыванием, только это высказывание ложно, так как Меркурий — наоборот самая близкая к Солнцу планета. Предложение г) также является высказыванием, однако истинность его зависит от того, в какой момент и в какой географической точке Земли оно было высказано. Предложение д) высказыванием не является, так как невозможно установить критерии, по которым можно было бы определить степень любопытства как одной кошки, так и всего вида, поэтому невозможно утверждать, что данное утверждение истинно или, что оно ложно. □

Пример 6.2. Для каждого из сложных высказываний определить, в каких случаях оно истинно.
а) "А за окном шел дождь и рота красноармейцев" (см. [1]).
б) Во время отпуска Вася поедет в Крым или в Египет.

в) “Если не будут брать [лотерейные билеты], отключим газ”.[1]

Решение. Утверждение а), несмотря на несколько непривычную форму, является сложным высказыванием, полученным из двух: “За окном шел дождь” и “За окном шла рота красноармейцев”. Конечно, более правильно с математической точки зрения (да и с точки зрения русского языка тоже) было бы написать “За окном шел дождь и за окном шла рота красноармейцев”, но тут было использовано сокращение, полученное путем выбрасывания повторяющихся слов, достаточно обычное в русском языке (правда не в такой ситуации: значение одинаковых слов во обеих частях предложения должно совпадать). Отметим, что утверждение а) истинно тогда и только тогда, когда истинны обе части сложного утверждения, то есть когда за окном действительно шел дождь и одновременно с этим шла рота красноармейцев.

Утверждение б) истинно в том случае, когда истинно хотя бы одно из составляющих его утверждений. Кстати, с математической точки зрения, такое утверждение, будет истинным и если истинны обе части. Так, никто не мешает Васе успеть за время отпуска побывать и в Крыму, и в Египте, не нарушая истинности высказывания.

Утверждение в) истинно, если истинно второе утверждение (называемое *заключением*), а также если ложно первое утверждение (называемое *посылкой*). Тут также необходимо обратить внимание читателя, что для истинности всего утверждения необязательно оба утверждения должны быть истинны или ложны одновременно. Так, в нашем случае, даже если билеты будут брать, а газ тем не менее будет отключен, утверждение остается истинным. □

Пример 6.3. Построить таблицу истинности формулы

$$\varphi = (x \to y) \vee (\overline{z} \wedge (x \oplus y)).$$

Решение.

x	y	z	$\overline{z}$	$x \to y$	$x \oplus y$	$\overline{z} \wedge (x \oplus y)$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1

[1]Цитата взята из кинофильма “Бриллиантовая рука”.

□

Пример 6.4. Проверить при помощи алгебры логики, выполняется ли тождество $A\backslash(B \oplus C) = (A \cap B) \cup (A\backslash C)$. В случае отрицательного ответа, привести контрпример.

Решение. Пусть a, b и c высказывания, соответствующие множествам A, B и C соответственно.

Рассмотрим левую часть равенства из условия. Множеству $B \oplus C$ соответствует формула $b \oplus c$, следовательно, множеству $A\backslash(B \oplus C)$ соответствует формула $a \wedge \neg(b \oplus c)$. Обозначим эту формулу φ.

Теперь рассмотрим правую часть. Множеству $A \cap B$ соответствует формула $a \wedge b$, а множеству $A\backslash C$ — формула $a \wedge \neg c$. Окончательно, для множества $(A \cap B) \cup (A\backslash C)$ получаем формулу $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg c)$, обозначим ее ψ.

Построим таблицы истинности полученных формул:

a	b	c	$b \oplus c$	$\neg(b \oplus c)$	φ	$\neg c$	$a \wedge \neg c$	$a \wedge b$	ψ
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

Так как таблицы истинности не совпадают, данное равенство не является тождеством. Чтобы построить контрпример, заметим, что таблицы различаются только на наборе значений $a = b = 1$, $c = 0$. Следовательно, надо привести пример таких множеств A, B и C, чтобы множество элементов, лежащих в A, B, но не лежащих в C (то есть множество $(A \cap B)\backslash C$), не было пустым. Пусть $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 3\mathbb{Z}$, а $C = \mathbb{N}$.

Рассмотрим элемент -6 (можно взять любой элемент из множества $(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z})\backslash\mathbb{N}$). Тогда $-6 \in 3\mathbb{Z}$ и $-6 \notin \mathbb{N}$, следовательно, $-6 \in 3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N}$. Получаем $-6 \notin 2\mathbb{Z}\backslash(3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N})$. С другой стороны, $-6 \in 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. Следовательно, $-6 \in (2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cup (2\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})$, то есть рассмотренные множества представляют собой контрпример, показывающий, что равенство из условия не является тождеством. □

6.1. Задачи

6.1.1. Построить таблицу истинности:

а) $x \to (y \vee \neg x)$; б) $(x \,|(x \oplus y)) \downarrow \neg y$;

в) $x \vee ((x \downarrow y) \leftrightarrow (x \wedge y))$; г) $((x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \wedge z)) \,|(y \oplus z)$;

д) $(x \wedge \neg(\neg y \downarrow z)) \,|((x \oplus y) \to z)$;

е) $((x \wedge \neg y) \downarrow z) \to \neg(x \leftrightarrow \neg(z \vee y))$.

6.1.2. Проверить при помощи таблиц истинности, будут ли эквивалентны следующие формулы:

а) $x \to (y \vee z)$ и $(x \to y) \vee (x \to \chi)$;

б) $(x \downarrow y) \vee z$ и $(x \vee z) \downarrow (y \vee z)$;

в) $(x \vee y) \downarrow z$ и $x \downarrow z \vee y \downarrow z$;

г) $(x \wedge y) \leftrightarrow z$ и $(x \leftrightarrow z) \wedge (y \leftrightarrow z)$.

6.1.3. Проверить равенства из задачи 1.1.7 средствами алгебры логики.

6.1.4. Средствами алгебры логики выяснить, верны ли следующие равенства. В случае отрицательного ответа построить контрпример:

а) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$;

б) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B$;

в) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)$;

г) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cup C)$;

д) $(A \cap \overline{B}) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$;

е) $A \cup B \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

6.2 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Пример 6.5. Какие формулы из нижеперечисленных являются конъюнктами, а какие — дизъюнктами?

а) xz,	б) $x\overline{y}$,	в) $\overline{x}y\overline{z}$,	г) $x \vee y$,
д) $\overline{x} \vee \overline{z}$,	е) $x \vee \overline{y} \vee z$,	ж) x,	з) $\overline{x}$,
к) $\overline{xy}z$,	л) $\overline{x \vee y}$,	м) $(x \vee y) \wedge z$,	н) $x \vee (y \wedge z)$.

Решение. Формулы а)–в) являются конъюнктами. Формулы г)–е) — дизъюнктами. Формулы ж) и з) (то есть литеры) являются как конъюнктами, так и дизъюнктами[2]. Формулы к)-н) не являются ни конъюнктами, ни дизъюнктами. Действительно, в первой формуле отрицание относится к конъюнкции, а значит она не является конъюнкцией

[2]Следует отметить, что в качестве конъюнкции и дизъюнкции мы будем рассматривать и "вырожденные" случаи, когда берется конъюнкция или дизъюнкция всего одной литеры.

литер. Аналогично, вторая формула не является дизъюнкцией литер по той же причине. В третьей формуле конъюнкция применяется и к дизъюнкции литер, и к литере, а в четвертой — дизъюнкция применяется к литере и конъюнкции литер. □

Пример 6.6. Какие из формул являются КНФ, а какие — ДНФ? а) $xyz \vee x\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{y}$; б) $(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y \vee z)$; в) $x \vee y \vee \overline{z}$; г) $x\overline{y}z$.

Доказательство. Формула а) является ДНФ. Формула б)— КНФ. Формулы в) и г) являются одновременно и КНФ, и ДНФ. Действительно, первую формулу можно рассматривать, как конъюнкцию одной дизъюнкции или как дизъюнкцию трех конъюнкций, а вторую — наоборот, как дизъюнкцию одной конъюнкции или как конъюнкцию трех дизъюнкций.[3] □

Пример 6.7. Привести к ДНФ и к КНФ формулу

$$\varphi = (x \leftrightarrow y) \vee (\overline{x} \downarrow yz).$$

Решение. Имеем

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & = & (x \leftrightarrow y) \vee (\overline{x} \downarrow yz) \sim \\
& \sim & ((x \to y)(y \to x)) \vee \overline{(\overline{x} \vee yz)} \sim \\
& \sim & ((\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)) \vee (\overline{\overline{x}}\,\overline{yz}) \sim \\
& \sim & ((\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)) \vee (x(\overline{y} \vee \overline{z}))
\end{array}$$

Таким образом, для решения задачи нам необходимо привести формулы $\psi = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)$ и $\chi = x(\overline{y} \vee \overline{z})$ к ДНФ (для приведения исходной формулы к ДНФ) и к КНФ (для приведения исходной формулы к КНФ). С этого места будем проводить вычисления отдельно для нахождения ДНФ и КНФ.

ДНФ. Имеем $\psi = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x) \sim \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}x \vee y\overline{y} \vee yx$. Как уже отмечалось, эту формулу можно упростить, отбросив конъюнкты $\overline{x}x$ и $y\overline{y}$. В итоге получаем $\psi \sim \overline{x}\,\overline{y} \vee yx$. Для второй формулы получаем $\chi = x(\overline{y} \vee \overline{z}) \sim x\overline{y} \vee x\overline{z}$. Следовательно, $\varphi \sim (\overline{x}\,\overline{y} \vee yx) \vee (x\overline{y} \vee x\overline{z}) \sim \overline{x}\,\overline{y} \vee yx \vee x\overline{y} \vee x\overline{z}$.

КНФ. Как ψ, так и χ уже являются КНФ, следовательно

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & \sim & \psi \vee \chi \sim \\
& \sim & ((\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)) \vee (x(\overline{y} \vee \overline{z})) \sim \\
& \sim & (\overline{x} \vee y \vee x)(\overline{x} \vee y \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{y} \vee x \vee x)(\overline{y} \vee x \vee \overline{y} \vee \overline{z})
\end{array}$$

[3] Аналогично предыдущей сноске.

Полученную формулу можно упростить, убрав первые два дизъюнкта, так как первый дизъюнкт содержит x и $\overline{x}$, а второй — y и $\overline{y}$. Что касается двух последних дизъюнктов, каждый из них содержит некоторую литеру дважды, а значит можно оставить только по одному экземпляру этих литер в дизъюнктах. Окончательно, получаем $\varphi \sim (\overline{y} \vee x)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$. □

Пример 6.8. Формулы $x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $x\overline{y}zt$ являются СДНФ, первая из этих формул зависит от трех переменных, а вторая — от четырех. Формула $x\overline{y}z \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{y}$ является ДНФ, но не является СДНФ, так как второй конъюнкт не содержит переменной y, а третий — переменной z.

Формулы $(x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$ и $x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}$ являются СКНФ (также, первая из них от трех переменных, а вторая — от четырех). Формула $(x \vee \overline{y})(x \vee z)(y \vee \overline{z})$ является КНФ, но не является СКНФ, так как каждый конъюнкт содержит по две переменные из трех. □

Пример 6.9. Найти при помощи эквивалентных преобразований СДНФ и СКНФ формулы $\varphi = (x \leftrightarrow y) \vee (\overline{x} \downarrow yz)$.

Решение. Из примера 6.7 получаем $\varphi \sim \overline{x}\,\overline{y} \vee yx \vee x\overline{y} \vee x\overline{z}$ Рассматривая по отдельности конъюнкты получаем

$$\begin{array}{lclcl}
\overline{x}\,\overline{y} & \sim & \overline{x}\,\overline{y}(z \vee \overline{z}) & \sim & \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}; \\
yx & \sim & xy(z \vee \overline{z}) & \sim & xyz \vee xy\overline{z}; \\
x\overline{y} & \sim & x\overline{y}(z \vee \overline{z}) & \sim & x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z}; \\
x\overline{z} & \sim & x\overline{z}(y \vee \overline{y}) & \sim & xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z}.
\end{array}$$

Следовательно, $\varphi \sim \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}) \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z}$. Убирая равные конъюнкты, получаем ответ

$$\overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z}.$$

Снова из примера 6.7 получаем $\varphi \sim (\overline{y} \vee x)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$. Второй дизъюнкт содержит все переменные. Рассмотрим первый дизъюнкт:

$$\overline{y} \vee x \ \sim \ (x \vee \overline{y}) \vee z\overline{z} \ \sim \ (x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Следовательно, $\varphi \sim (x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$. Второй и третий дизъюнкты одинаковы, значит один из них можно убрать. Получаем

$$(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

□

Пример 6.10. Построить при помощи таблиц истинности СДНФ и СКНФ для формулы

$$\varphi = (x \to y) \vee (\overline{z} \wedge (x \oplus y)).$$

Решение. Таблица истинности данной формулы была построена в примере 6.3. В последнем столбце этой таблицы истинности один нуль и семь единиц.

Нуль соответствует набору значений переменных $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Следовательно, соответствующая конституента нуля имеет вид

$$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}.$$

Эта конституента и будет СКНФ формулы φ.

Переберем все строки соответствующие единице. Первая строка соответствует набору значений пременных $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Таким образом, соответствующая конституента единицы имеет вид $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$. Следующая строка соответствует набору $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, что соответствует коституенте единицы $\overline{x}\,\overline{y}z$. Продолжая в том же духе, получим следующие констиуенты: $\overline{x}y\overline{z}$, $\overline{x}yz$, $x\overline{y}\,\overline{z}$, $xy\overline{z}$, xyz. Соответственно, получаем СДНФ

$$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee xyz.$$

□

6.2. Задачи

6.2.1. Привести к ДНФ при помощи элементарных преобразований:
а) $x \to (y \vee \neg z)$; б) $x \vee (y \leftrightarrow \neg z)$; в) $x \leftrightarrow (y \,|\, z)$;
г) $x \oplus (y \vee z)$; д) $(x \,|\neg y) \vee \neg(y \to z)$;
е) $(((x \to y) \to \neg z) \to x)$; ж) $(x \to y) \downarrow (z \to \neg x)$.

6.2.2. Привести к КНФ при помощи элементарных преобразований:
а) $x \to (y \,|\, \neg z)$; б) $(\neg x \oplus y) \downarrow z$;
в) $(x \to y) \vee (y \downarrow \neg z)$; г) $(x \vee \neg y) \to \neg(y \,|\, z)$;
д) $x \vee \neg(y \leftrightarrow z)$; е) $(\neg x \to \neg y) \wedge \neg(y \wedge z)$.

6.2.3. При помощи таблиц истинности найти СДНФ и СКНФ формул из задачи 6.1.1.

6.2.4. Привести к СДНФ при помощи элементарных преобразований:
а) $x \downarrow (y \vee \neg z)$; б) $(x \oplus y) \leftrightarrow z$;
в) $(x \wedge y) \to (y \,|\, \neg z)$; г) $((x \to y) \,|\, z) \vee \neg y$.

6.2.5. Привести к СКНФ при помощи элементарных преобразований:
а) $\neg x \to \neg(y \,|\, z)$; б) $x \downarrow (\neg y \to z)$;
в) $(x \vee y) \to (\neg y \wedge z)$; г) $((x \,|y) \downarrow z) \wedge \neg x$.

6.2.6. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечная система множеств. Доказать, что объединение любого набора элементарных множеств порождено множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

6.3 Тупиковые и минимальные ДНФ и КНФ

Пример 6.11. Найти сокращенную ДНФ для формулы

$$\varphi = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z}.$$

Решение. Формула φ уже является СДНФ. Таким образом, осталось провести все неполные склеивания и элементарные поглощения:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz) \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee (\overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z) \vee \overline{x}yz \vee xyz \vee xy\overline{z} \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee (x\overline{y}z \vee xyz) \vee \overline{x}yz \vee xy\overline{z} \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee \overline{y}z \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee (xyz \vee \overline{x}yz) \vee xy\overline{z} \sim\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sim \overline{x}z \vee \overline{y}z \vee xz \vee yz \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee (xyz \vee xy\overline{z}) \sim \\ &\sim (\overline{x}z \vee xz) \vee \overline{y}z \vee yz \vee xy \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee xyz \vee xy\overline{z} \sim \\ &\sim z \vee \overline{x}z \vee xz \vee (\overline{y}z \vee yz) \vee xy \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee xyz \vee xy\overline{z} \sim \\ &\sim z \vee z \vee \overline{x}z \vee xz \vee \overline{y}z \vee yz \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee xyz \vee (xy \vee xy\overline{z}) \sim \\ &\sim z \vee \overline{x}z \vee xz \vee \overline{y}z \vee yz\overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee (xy \vee xyz) \sim \\ &\sim z \vee \overline{x}z \vee xz \vee \overline{y}z \vee xy\overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \vee(yz\overline{x}yz) \sim \\ &\sim z \vee \overline{x}z \vee xz \vee yz \vee xy\overline{x}\,\overline{y}z \vee (\overline{y}z \vee x\overline{y}z) \sim \\ &\sim z \vee \overline{x}z \vee xz \vee yz \vee xy \vee (\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z) \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee xz \vee yz \vee xy \vee (z \vee \overline{y}z) \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee xz \vee (z \vee yz) \vee xy \sim \\ &\sim \overline{x}z \vee (z \vee xz) \vee xy \sim \\ &\sim (z \vee \overline{x}z) \vee xy \sim \\ &\sim z \vee xy.\end{aligned}$$

□

Карты Карно

Пример 6.12. С помощью карт Карно найти тупиковые и минимальные ДНФ для формулы

$$\varphi = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz.$$

Решение. Формула φ является СДНФ. Построим для нее карту Карно. И выделим на ней прямоугольники, состоящие из единиц, стороны которых являются степенями двойки.

$\diagdown$	yz			
x	00	01	11	10
0		1		1
1		1	1	1

Итак, есть четыре прямоугольника размером 1×2. Для каждого из них найдем переменные, значения которых одинаковы на всем прямоугольнике и выпишем соответствующие конъюнкты (если значение переменной в прямоугольнике 1, то конъюнкт будет содержать эту переменную, а если 0, то ее отрицание). Эти конъюнкты являются простыми импликантами. Получаем четыре конъюнкта (соответствующих прямоугольникам, взятым в порядке слева направо): $\overline{y}z$, xz, xy, $y\overline{z}$.

Строим матрицу Квайна

	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$\overline{x}y\overline{z}$	$x\overline{y}z$	$xy\overline{z}$	xyz
$\overline{y}z$	$*$		$*$		
xz			$*$		$*$
xy				$*$	$*$
$y\overline{z}$		$*$		$*$	

.

Очевидно, что первая импликанта должна входить в тупиковую ДНФ, так как эта строка — единственная, содержащая звездочку в первом столбце. Аналогично, последняя импликанта должна входить в тупиковую ДНФ. Звездочки, соответствующие этим двум импликантам, есть в первых четырех столбцах. Осталось выбрать строку, содержащую звездочку в пятом столце. Как легко видеть, можно выбрать либо вторую, либо третью строку. Каждому выбору соответствует своя тупиковая ДНФ. Соответственно, получаем две тупиковые ДНФ: $\overline{y}z \vee xy \vee y\overline{z}$ и $\overline{y}z \vee xz \vee y\overline{z}$. Обе они являются минимальными, так как в записи обеих одинаковое количество литер (по 6). $\square$

Тупиковые и минимальные КНФ. Двойственные функции

Пример 6.13. Найти тупиковые и минимальные КНФ для формулы

$$\varphi = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee y \vee z).$$

Решение. Формула φ является СКНФ. В силу описанного выше, $\varphi^+(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$. Как следует из примера 6.12, тупиковыми и минимальными ДНФ для формулы φ^+ являются $\overline{y}z \vee xy \vee y\overline{z}$ и $\overline{y}z \vee xz \vee y\overline{z}$. Найдя двойственные к этим формулам, получаем, что тупиковыми и минимальными КНФ для формулы φ являются $(\overline{y} \vee z)(x \vee y)(y \vee \overline{z})$ и $(\overline{y} \vee z)(x \vee z)(y \vee \overline{z})$. □

6.3. Задачи

6.3.1. Найти все тупиковые и минимальные ДНФ при помощи метода Квайна:

а) $xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

б) $xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

в) $xyzt \vee xyz\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee xy\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t}$;

г) $xyzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$.

6.3.2. Найти все тупиковые и минимальные КНФ при помощи метода Квайна:

а) $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

б) $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$;

в) $(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})$
$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})$;

г) $(x \vee y \vee z \vee t)(x \vee y \vee z \vee \bar{t})(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})$
$(\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})$.

6.3.3. Найти все тупиковые и минимальные ДНФ при помощи карт Карно:

а) $xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

б) $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

в) $xyzt \vee xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$;

г) $xyzt \vee xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t}$.

6.3.4. Найти все тупиковые и минимальные КНФ при помощи карт Карно:

а) $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

б) $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$;

в) $(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})$
$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})$;

г) $(x \vee y \vee z \vee \bar{t})(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})$
$(\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})$.

6.3.5. а) С помощью карт Карно построить пример булевой функции, для которой СДНФ, сокращенная ДНФ и МДНФ совпадают.

б) С помощью карт Карно построить пример булевой функции, для которой СКНФ, сокращенная КНФ и МКНФ совпадают.

6.4 Полином Жегалкина. Полные системы функций

Пример 6.14. Найти полином Жегалкина для формулы

$$\varphi = (x \leftrightarrow y\overline{z}) \,|\, (xz \downarrow (\overline{y \to z})).$$

Решение. Отметим, что для переписывания выражения в первой скобке можно воспользоваться эквивалентностью 9 из [5], § 6.3, но можно поступить и проще, заметив, что $\psi \leftrightarrow \chi \sim \overline{\psi \oplus \chi} \sim \psi \oplus \chi \oplus 1$ для любых формул ψ и χ. Имеем

$$\begin{aligned}
\varphi \sim\; & \overline{(x \oplus y\overline{z})} \,|\, (xz \downarrow (\overline{y \to z})) \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(x \oplus y\overline{z})} \wedge (xz \downarrow (\overline{y \to z}))} \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(x \oplus y\overline{z})} \wedge \overline{(xz \vee (\overline{\overline{y} \vee z}))}} \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(x \oplus y\overline{z})} \wedge (\overline{xz}(\overline{y} \vee z))} \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(x \oplus y(z \oplus 1))} \wedge ((xz \oplus 1)((y \oplus 1) \vee z))} \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(x \oplus yz \oplus y)} \wedge ((xz \oplus 1)(y \oplus 1 \oplus z \oplus (y \oplus 1)z))} \sim \\
\sim\; & \overline{\overline{(yz \oplus x \oplus y)} \wedge ((xz \oplus 1)(y \oplus 1 \oplus z \oplus yz \oplus z))} \sim \\
\sim\; & \overline{(yz \oplus x \oplus y \oplus 1)(xz \oplus 1)(yz \oplus y \oplus 1)} \sim \\
\sim\; & (yz \oplus x \oplus y \oplus 1)(xz \oplus 1)(yz \oplus y \oplus 1) \oplus 1 \sim \\
\sim\; & (yzxz \oplus xxz \oplus yxz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1)(yz \oplus y \oplus 1) \oplus 1 \sim \\
\sim\; & (xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1)(yz \oplus y \oplus 1) \oplus 1 \sim \\
\sim\; & (yz \oplus x \oplus y \oplus 1)(yz \oplus y \oplus 1) \oplus 1 \sim \\
\sim\; & yzyz \oplus xyz \oplus yyz \oplus yz \oplus yzy \oplus xy \oplus yy \oplus y \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 \sim \\
\sim\; & yz \oplus xyz \oplus yz \oplus yz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus y \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 \sim \\
\sim\; & xyz \oplus xy \oplus yz \oplus x \oplus y.
\end{aligned}$$

Следовательно, $xyz \oplus xy \oplus yz \oplus x \oplus y$ и есть полином Жегалкина для формулы φ. □

Пример 6.15. Выяснить, к каким классам принадлежит каждая из функций системы $\mathfrak{F} = \{\overline{x}, x \to y, x \vee y,\}$. Является ли эта система полной?

Решение. Построим таблицы истинности для всех трех функций системы $\mathfrak{F}$.

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

;

x	y	$x \to y$	$x \vee y$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

.

Из таблиц истинности с очевидностью следует, что классу P_0 принадлежит только функция $x \vee y$, а классу P_1 принадлежат две функции: $x \to y$ и $x \vee y$. Также из таблиц истинности легко видеть, что $x \vee y \in M$, а $\overline{x}, x \to y \notin M$.

Далее, так как количество нулей в последних столбцах таблиц истинности функций $x \to y$ и $x \vee y$ не равно количеству единиц в них, эти функции не лежат в S. Однако, в самом общем случае, несложно видеть, что чтобы получить таблицу истинности двойственной функции, нужно во всей таблице истинности (то есть во всех трех столбцах) заменить нули на единицы и наоборот. После этого можно еще упорядочить строки таким образом, чтобы первые две строки полученных таблиц совпадали с первыми двумя столбцами исходной таблицы истинности. Так, если записывать наборы переменных в таком порядке, чтобы строки цифр $x_1 x_2 \ldots x_n$, рассмотренные как двоичные числа, были упорядочены в порядке возрастания, то после замены в таблице единиц на нули и наоборот строки необходимо переписать в обратном порядке. Итак, получаем таблицы истинности для функций, двойственных функциям из $\mathfrak{F}$:

x	$(\overline{x})^+$
0	1
1	0

;

x	y	$(x \to y)^+$	$(x \vee y)^+$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1

.

Как мы уже установили ранее, $x \to y, x \vee y \notin S$. Это видно и из таблиц истинности. Также из таблиц истинности видно, что $\overline{x} \in S$.

Наконец, проверим, являются ли функции системы $\mathfrak{F}$ линейными.

Функция $\overline{x}$. Пусть $g(x) = c_0 \oplus c_1 x$. Имеем $c_0 = g(0) = \overline{0} = 1$, $c_0 \oplus c_1 = g(1) = \overline{1} = 0$, откуда $1 \oplus c_1 = 0$, а значит $c_1 = 1$. Получаем $g(x) = 1 \oplus x$, отсюда, с очевидностью, следует, что $g(x) \sim \overline{x}$, а значит $\overline{x} \in \mathcal{L}$.

Функция $x \to y$. Пусть $g(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y$, тогда $c_0 = g(0,0) = 0 \to 0 = 1$, $c_0 \oplus c_1 = g(1,0) = 1 \to 0 = 0$, $c_0 \oplus c_2 = g(0,1) = 0 \to 1 = 1$, а значит $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, следовательно, $g(x, y) = 1 \oplus x$. Построим таблицу истинности этой функции:

x	y	$g(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

.

Легко видеть, что $g(x, y) \nsim x \to y$, следовательно $x \to y \notin \mathcal{L}$.

Функция $x \vee y$. Пусть $g(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y$, тогда $c_0 = g(0,0) = 0 \vee 0 = 0$, $c_0 \oplus c_1 = g(1,0) = 1 \vee 0 = 1$, $c_0 \oplus c_2 = g(0,1) = 0 \vee 1 = 1$, а значит $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, следовательно, $g(x, y) = x \oplus y$. Таблица истинности этой функции примет вид:

x	y	$g(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

.

Легко видеть, что $g(x, y) \nsim x \vee y$, следовательно, $x \vee y \notin \mathcal{L}$.

Итак, получили, в частности, $\overline{x} \notin P_0$, $\overline{x} \notin P_1$, $x \to y \notin S$, $\overline{x} \notin M$, $x \vee y \notin \mathcal{L}$. Так как для каждого класса Поста есть булева функция из системы $\mathfrak{F}$, не принадлежащая этому классу, по теореме Поста эта система является полной. $\square$

Пример 6.16. Является ли базисом система $\mathfrak{F} = \{\overline{x}, x \to y, x \vee y, \}$? В случае отрицательного ответа найти все подсистемы системы $\mathfrak{F}$, являющиеся базисами.

Решение. Мы уже получили (см. пример 6.15), что $\mathfrak{F}$ — полная система, кроме того, мы выяснили, каким классам принадлежат функции системы $\mathfrak{F}$. Построим таблицу для этих функций:

	P_0	P_1	S	M	$\mathcal{L}$
$\overline{x}$	—	—		—	
$x \to y$	—		—	—	—
$x \vee y$			—		—

.

Дальнейшие действия с таблицей очень похожи на то, что мы делали с матрицей Квайна при нахождении тупиковых ДНФ. Сначала находим такие строки, которые нельзя вычеркнуть, так как в них есть знаки "$-$", являющиеся единственными в своих столбцах. В нашем примере такой строкой будет первая (соответствующая $\overline{x}$), так как только в этой строке стоит "$-$" в столбце, соответствующем P_1. Таким образом, в таблице необходимо найти строки, в которых есть "$-$", соответствующие стобцам S и $\mathcal{L}$. Легко видеть, что можно взять любую из двух оставшихся строк. Следовательно, обе подсистемы $\mathfrak{F}_1 = \{\overline{x}, x \vee y\}$ и $\mathfrak{F}_2 = \{\overline{x}, x \to y\}$ являются базисами. $\square$

6.4. Задачи

6.4.1. Найти полином Жегалкина для следующих формул:
а) $x \to (\neg y \wedge z)$; б) $\neg(x \vee y) \downarrow z$;
в) $(x \to y) \,|\, \neg(y \wedge \neg z)$; г) $((x \to y) \,|\, \neg x) \wedge z$.

6.4.2. Проверить, является ли данная система функций полной. В случае положительного ответа выяснить, образует ли она базис:
а) $\{\bar{x}y, x \to y\}$; б) $\{\overline{(x \leftrightarrow y)}, y \to x\}$;
в) $\{x \leftrightarrow y, x \vee y\}$; г) $\{\bar{x}, x \vee \bar{y}\bar{z}\}$;
д) $\{x \vee y, (x \to y)\bar{z}\}$; е) $\{x \leftrightarrow y, \bar{x}, \bar{x} \leftrightarrow y\}$;
ж) $\{x \downarrow \bar{y}, \bar{x} \,|\, y, x \to y\}$;
з) $\{x \vee y, (x \leftrightarrow y)z, x \downarrow (yz)\}$.

6.4.3. Установить связь между классами Поста функций, сохраняющих нуль, сохраняющих единицу и монотонными.

Ответы

Не стреляйте в пианиста, он играет, как умеет.

Фольклор

К главе 1

1.1

1.1.1 а) $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$; б) $\{-1,0,1,2\}$; в) $\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$; г) $\{0,1,2\}$; д) $\{3,4,5,6,7\}$; е) $\{-1\}$. **1.1.2** а) $\{-1,1,2,3\}$; б) $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$; в) $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$; г) $\{1,1\}$; д) $\{2,3\}$; е) $\{-5,-4,-3,-2,0\}$. **1.1.3** а) $[-2,6)$; б) $[0,4)$; в) $[-2,0)$; г) $[4,6)$. **1.1.4** а) $[-3,5)$; б) $(-1,2]$; в) $[-3,-1] \cup (2,5)$; г) $\varnothing$. **1.1.5** а) $\varnothing$; б) $\{1\}$. **1.1.6** а) $\mathbb{R}$; б) $(-2,2)$.
1.1.9 а) $\big\{(1,a),(1,b),(1,\{a,b\}),(2,a),(2,b),(2,\{a,b\}),(\{2\},a),(\{2\},b),(\{2\},\{a,b\})\big\}$;
б) $\Big\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{\varnothing\}),(\varnothing,\{\{\varnothing\}\}),(\{\varnothing\},\varnothing),(\{\varnothing\},\{\varnothing\}),(\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}),$

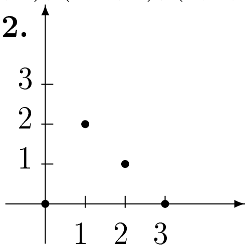
$\big(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\big),\big(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\big),\big(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\}\big)\Big\}.$

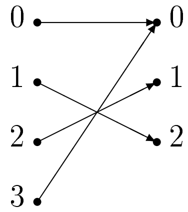
1.1.10 а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) да.

1.2

1.2.1 $(0,0,0),(0,1,1),(0,2,2),(0,3,3),(0,4,4),(1,0,1),(1,1,2),(1,2,3),(1,3,4),$ $(2,0,2),(2,1,3),(2,2,4),(3,0,3),(3,1,4),(4,0,4)$.

1.2.2.





P — функция, P^{-1} — не функция.

1.2.3 а) нет. б) да, $\rho_f=\mathbb{R}$; в) нет; г) да, $\rho_f=(1,\infty)$; д) да, $\rho_f=\mathbb{R}$.

1.2.4 Каждый студент пользуется услугами в точности одного оператора.

1.2.5 Не инъективна и не сюръективна.

1.2.6 а) не инъективно, не сюръективно; б) не инъективно, сюръективно; в) биективно, $\varphi^{-1}(y)=e^y-3$; г) инъективно, не сюръективно; д) не инъективно, не сюръективно; е) биективно, $\varphi^{-1}(y)=-\sqrt{y}$; ж) не инъективно, сюръективно; з) не инъективно, сюръективно; и) биективно, $\varphi^{-1}(y)=\dfrac{1}{y}$.

1.2.7 а) $A=(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$; б) $B=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$; г) $f^{-1}=\dfrac{4y+3}{2-y}$.

1.2.8 а) $(f\circ g)(x)=\sin((e^{x^2}+x)^2+3)$, $(g\circ f)(x)=e^{\sin^2(x^2+3)}+\sin(x^2+3)$;
б) $(f\circ g)(x)=\ln(x^4+7x^2+14)$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{\ln^2(x^4+x^2+1)+3}$;
в) $(f\circ g\circ\varphi)(x)=e^{\operatorname{arctg} e^{|x|}}$; г) $(f\circ g\circ f)(x)=\ln(|\ln^5(|x|+1)|+1)$.

1.2.9 а) $P\circ Q=\{(2k+1,l)\mid k,l\in\mathbb{N}\}\cup\{(2m,2n)\mid m,n\in\mathbb{N}\}$,
$Q\circ P=\{(2k,l)\mid k,l\in\mathbb{N}\}\cup\{(2m+1,2n+1)\mid m,n\in\mathbb{N}\}$; б) $P\circ Q=Q\circ P=P$;
в) $P\circ Q=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbb{N}, m-n$ делится на $3\}$,
$Q\circ P=\{(2m,n)\mid m,n\in\mathbb{N}, m+n$ делится на $3\}$;
г) $P\circ Q=\{(z,t)\mid z,t\in(0,\infty),$ или
$z\in(-\infty,0], t>2-z-2\sqrt{1-z}\}$,
$Q\circ P=\{(z,t)\mid z\in[1,2], t\in(-\infty,-\sqrt{2z-z^2})\cup(\sqrt{2z-z^2},\infty),$ или $z\in(2,\infty), t\in\mathbb{R}\}$.

1.3

1.3.1 а) $[P]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad [P^{-1}]=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix};$

не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

б) $[P]=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix},\qquad [P^{-1}]=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix};$

рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно.

в) $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad [P^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно.
г) $[P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad [P^{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

1.3.2 а) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{R}$, не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно; б) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{R}$, не рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно; в) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{N}$, не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно; г) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{N}$, рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно; д) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{N}$, не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно; е) $\delta_P = \mathbb{R}$, $\rho_P = \mathbb{R}^*$ не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно; ж) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{N}$, рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно; з) $\delta_P = \rho_P = \mathbb{Z}$, рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, транзитивно; и) $\delta_P = \mathbb{R}$, $\rho_P = (-2, \infty)$, не рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

1.3.3 а) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(m,n) \,|\, m \text{ четно}, m = n\}$; б) $A = \mathbb{R}$, $P = \{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$; в) см. а); г) $A = \mathbb{N}$, $P = \{(m,n) \,|\, m + n + 1 \text{ не делится на } 4\}$.

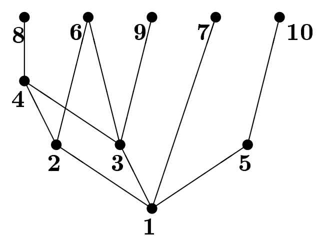
1.3.4 а) нет; б) да (половина студентов получила "4" по предмету X и "5" по предмету Y, а остальные студенты — наоборот); в) да (каждый студент получил одинаковые оценки по всем предметам); г) да (см. п. в)).

1.4

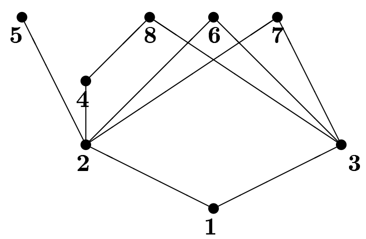
1.4.1 а) да, каждый класс эквивалентности состоит из чисел вида $n + \alpha$, где $n \in \mathbb{Z}$, произвольное $\alpha \in [0,1)$ — фиксированное; б) да, каждый класс эквивалентности состоит из чисел, соответствующих точкам комплексной плоскости, лежащих на окружности фиксированного радиуса с центром в начале координат; в) да, каждый класс эквивалентности состоит из комплексных чисел с фиксированной мнимой частью; г) да, каждая прямая задает класс эквивалентности, состоящий из всех параллельных ей прямых; д) нет. **1.4.2** а) не предпорядок; б) предпорядок, но не порядок; в) не предпорядок; г) порядок частичный, но не линейный; д) порядок линейный, но не полный; е) полный порядок. **1.4.3** $|A| = 1$.

1.4.4 $P = \{(a,a) \,|\, a \in A\}$.

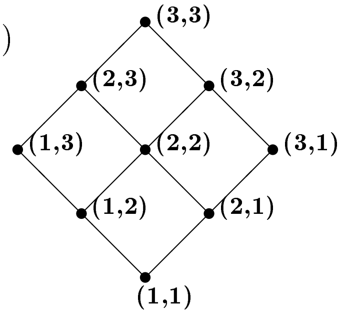
1.4.6. а)

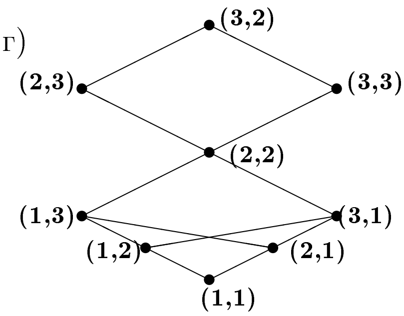


б)

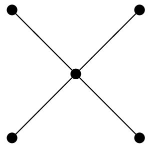


в)



г) 

1.4.7 нет



1.5

1.5.1 а) да, изоморфизм φ определен следующим образом: $\varphi(1) = e$, $\varphi(2) = d$, $\varphi(3) = a$, $\varphi(4) = c$, $\varphi(5) = b$; б) нет.

1.5.2 а) да, изоморфизм φ определен следующим образом: $\varphi((m, n)) = (m+1, n+1)$; б) нет.

1.5.3 а) да, $\varphi(2n) = 3n$; б) да, $\varphi(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) да, $\varphi(x) = \ln x$; г) нет; д) нет.

1.6

1.6.10 Рассуждения, приведенные в индукционном переходе, неверны при $k = 1$.

1.7

1.7.7 а) да, б) да, в) да, г) да.

К главе 2

2.1

2.1.1 Да. **2.1.2** Нет. **2.1.3** Нет. **2.1.4** Нет. **2.1.5** Нет. **2.1.6** Нет. **2.1.7** Да. **2.1.8** Нет. **2.1.9** Нет. **2.1.10** Да. **2.1.11** Нет. **2.1.12** Нет. **2.1.13** Нет. **2.1.14** Нет. **2.1.15** Да. **2.1.16** Нет. **2.1.17** Да. **2.1.18** Да. **2.1.19** Нет. **2.1.20** Нет. **2.1.21** Да. **2.1.22** Нет. **2.1.23** Нет. **2.1.24** Да. **2.1.25** Нет. **2.1.26** Да. **2.1.27** Нет. **2.1.28** Да. **2.1.29** Нет. **2.1.30** а) моноид; б) моноид; в) группа; г) моноид; д) моноид; е) группа; ж) группа; з) группоид; и) полугруппа.

2.2

2.2.2 а)

$*$	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	e
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	e	a
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	e	a	a^2
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	e	a	a^2	a^3
a^5	a^5	a^6	a^7	a^8	e	a	a^2	a^3	a^4
a^6	a^6	a^7	a^8	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
a^7	a^7	a^8	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6

;

б)

$*$	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
1	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
5	5	25	35	19	29	13	23	7	17	1	11	31
7	7	35	13	5	19	11	25	17	31	23	1	29
11	11	19	5	13	35	7	29	1	23	31	17	25
13	13	29	19	35	25	5	31	11	1	17	7	23
17	17	13	11	7	5	1	35	31	29	25	23	19
19	19	23	25	29	31	35	1	5	7	11	13	17
23	23	7	17	1	11	31	5	25	35	19	29	13
25	25	17	31	23	1	29	7	35	13	5	19	11
29	29	1	23	31	17	25	11	19	5	13	35	7
31	31	11	1	17	7	23	13	29	19	35	25	5
35	35	31	29	25	23	19	17	13	11	7	5	1

;

в)

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

;

г)

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$

,

где (a,b) обозначает $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

2.2.3 а)

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

группа;

б)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	4	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

группа;

в)

	a^+_+	a^-_+	a^+_-	a^-_-	b^+_+	b^-_+	b^+_-	b^-_-
a^+_+	a^+_+	a^-_+	a^+_-	a^-_-	b^+_+	b^-_+	b^+_-	b^-_-
a^-_+	a^-_+	a^+_+	a^-_-	a^+_-	b^-_+	b^+_+	b^-_-	b^+_-
a^+_-	a^+_-	a^-_-	a^+_+	a^-_+	b^+_-	b^+_-	b^+_+	b^-_+
a^-_-	a^-_-	a^+_-	a^-_+	a^+_+	b^-_-	b^+_-	b^-_+	b^+_+
b^+_+	b^+_+	b^+_-	b^-_+	b^-_-	a^+_+	a^+_-	a^-_+	a^-_-
b^-_+	b^-_+	b^-_-	b^+_+	b^-_+	a^-_+	a^-_-	a^+_+	a^+_-
b^+_-	b^+_-	b^+_+	b^-_-	b^+_-	a^+_-	a^+_+	a^-_-	a^-_+
b^-_-	b^-_-	b^-_+	b^+_-	b^+_+	a^-_-	a^-_+	a^+_-	a^+_+

,

где $a^*_\circ = \begin{pmatrix} *1 & 0 \\ 0 & \circ 1 \end{pmatrix}$, $b^*_\circ = \begin{pmatrix} 0 & *1 \\ \circ 1 & 0 \end{pmatrix}$, группа;

г)

	e	σ_+	σ_-	τ_u	τ_r	τ_l
e	e	σ_+	σ_-	τ_u	τ_r	τ_l
σ_+	σ_+	σ_-	e	τ_r	τ_l	τ_u
σ_-	σ_-	e	σ_+	τ_l	τ_u	τ_r
τ_u	τ_u	τ_l	τ_r	e	σ_-	σ_+
τ_r	τ_r	τ_u	τ_l	σ_+	e	σ_-
τ_l	τ_l	τ_r	τ_u	σ_-	σ_+	e

,

где e — тождественное преобразование, $\sigma_\pm$ — поворот на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ соответственно в положительном или отрицательном направлении, τ_u — симметрия относительно вертикальной оси симметрии, τ_r — симметрия относительно оси симметрии, проходящей через правую вершину треугольника, а τ_l — симметрия относительно оси симметрии, проходящей через левую вершину треугольника, группа;

д)

$\circ$	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ_v	τ_h	τ_i	τ_d
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ_v	τ_h	τ_i	τ_d
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	τ_d	τ_i	τ_v	τ_h
σ_2	σ_2	σ_3	e	σ_1	τ_h	τ_v	τ_d	τ_i
σ_3	σ_3	e	σ_1	σ_2	τ_i	τ_d	τ_h	τ_v
τ_v	τ_v	τ_i	τ_h	τ_d	e	σ_2	σ_1	σ_3
τ_h	τ_h	τ_d	τ_v	τ_i	σ_2	e	σ_3	σ_1
τ_i	τ_i	τ_h	τ_d	τ_v	σ_3	σ_1	e	σ_2
τ_d	τ_d	τ_v	τ_i	τ_h	σ_1	σ_3	σ_2	e

,

где e — тождественное преобразование, σ_m — поворот на угол $\dfrac{m\pi}{2}$ по часовой стрелке, τ_v — симметрия относительно вертикальной оси симметрии, τ_h — симметрия относительно горизонтальной оси симметрии, τ_i — симметрия относительно оси симметрии, проходящей через диагональ, идущую из левой нижней вершины, τ_d — симметрия относительно оси симметрии, проходящей через диагональ, идущую из правой нижней вершины.

2.2.4

$*$	(123)	(132)	(213)	(231)	(312)	(321)
(123)	(123)	(132)	(213)	(231)	(312)	(321)
(132)	(132)	(123)	(231)	(213)	(321)	(312)
(213)	(213)	(312)	(123)	(321)	(132)	(231)
(231)	(231)	(321)	(132)	(312)	(123)	(213)
(312)	(312)	(213)	(321)	(123)	(231)	(132)
(321)	(321)	(231)	(312)	(132)	(213)	(123)

где (ijk)— это матрица, в которой единицы стоят на позициях $(1,i)$, $(2,j)$ и $(3,k)$.

2.2.5 а)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

,

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

;

б)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

,

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

;

в)

⊕	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	0
4	4	6	8	10	12	14	16	18	0	2
6	6	8	10	12	14	16	18	0	2	4
8	8	10	12	14	16	18	0	2	4	6
10	10	12	14	16	18	0	2	4	6	8
12	12	14	16	18	0	2	4	6	8	10
14	14	16	18	0	2	4	6	8	10	12
16	16	18	0	2	4	6	8	10	12	14
18	18	0	2	4	6	8	10	12	14	16

,

*	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16
4	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12
6	0	12	4	16	8	0	12	4	16	8
8	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16
14	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12
16	0	12	4	16	8	0	12	4	16	8
18	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4

;

г)

⊕	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(2,1)	(2,2)	(2,0)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(2,2)	(2,0)	(2,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(2,1)	(2,2)	(2,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(2,2)	(2,0)	(2,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)
(2,0)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)
(2,2)	(2,2)	(2,0)	(2,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)

,

*	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(2,0)	(1,0)	(0,1)	(2,1)	(1,1)	(0,2)	(2,1)	(1,2)
(0,2)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(0,1)	(1,1)	(2,1)
(1,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	(0,0)	(2,1)	(1,2)	(1,1)	(0,2)	(2,0)	(2,2)	(1,0)	(0,1)
(1,2)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(2,0)	(0,1)	(2,1)	(0,2)	(1,0)
(2,0)	(0,0)	(0,2)	(0,1)	(2,0)	(2,2)	(2,1)	(1,0)	(1,2)	(1,1)
(2,1)	(0,0)	(2,1)	(1,1)	(2,1)	(1,0)	(0,2)	(1,2)	(0,1)	(2,0)
(2,2)	(0,0)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(0,2)

,

где (a,b) обозначает $a+b\sqrt{2}$;

д)

$\oplus$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$

,

$*$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$
$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$
$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(1,2)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$

,

где (a,b) обозначает $a+b\sqrt{3}$;

е)

$\oplus$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$

,

$*$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(2,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(2,2)$	$(1,2)$
$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(1,0)$	$(0,1)$
$(1,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$
$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$
$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(2,2)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(0,2)$

,

где (a,b) обозначает $a+bi$;

ж)

$\oplus$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$

,

$*$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(1,1)$

,

где (a,b) обозначает матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3

2.3.1 а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) да; з) да.

2.4

2.4.1 а) $\{e\}, \{e, a^3, a^6\}, C_9$; б) $\{1\}$, $\{1,17\}$, $\{1,19\}$, $\{1,35\}$, $\{1,13,25\}$, $\{1,17,19,35\}$, $\{1,5,13,17,25,29\}$, $\{1,7,13,19,25,31\}$, $\{1,11,13,23,25,35\}$, $\mathbb{Z}_{36}^*$; в) $\{1\}$, $\{\pm 1\}$, $\{\pm 1, \pm i\}$, $\{\pm 1, \pm j\}$, $\{\pm 1, \pm k\}$, $\overline{\overline{\mathbb{H}}}$;
г) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, вся группа.
2.4.2 а) $A(X) = \mathbb{Z}$; б) $A(X) = \left\{\dfrac{m}{5^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$; в) $A(X) = \{(n+2m, 0, n) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$; г) $A(X) = \{(n, 2m, n) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$; д) $A(X) = \{2^{\frac{1}{2^m}} \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{3^{\frac{1}{2^m}} \mid m \in \mathbb{N}\}$; е) $A(X) = \{5^{\frac{m}{2^n}} \mid m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}\}$; ж) $A(X) = \{\pm\bar{\imath}, \pm\bar{\jmath}, \pm\bar{k}\}$; з) $A(X) = \{3,4\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6\}$; и) $A(X) = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

К главе 3

3.1.2 а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет; ж) да; з) нет; и) да.
3.1.3 а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) да.

К главе 4

4.1

4.1.1 а) 488_{10}; б) 356_{10}; в) 2587_{10}; г) 575_{10}; д) 3897_{10}. **4.1.2** а) $2220221_3 = 32011_5 = 4123_8 = 853_{16}$; б) $21012101_3 = 131443_5 = 12200_8 = 1480_{16}$. **4.1.3** а) $19{,}72_{10}$; б) $21{,}568_{10}$; в) $26{,}3125_{10}$; г) $35{,}8125_{10}$. **4.1.4** а) $140{,}32_5$; б) $112{,}243_5$; в) $76{,}74_8$; г) $71{,}36_8$; д) $10111{,}0(1001)_2$. **4.1.5** а) 0011 0111 1001 0010; б) 0101 0100 1000 0110 0011.

4.2

4.2.2 а) $(132, 305) = 61$; $[132, 305] = 610$; б) $(124, 48) = 4$; $[124, 48] = 1488$; в) $(852, 483) = 3$; $[852, 483] = 45724$; г) $(588, 861) = 21$; $[588, 861] = 24108$.
4.2.4 а) $(45, 189, 175) = 1$; $[45, 189, 175] = 1575$; б) $(360, 500, 675) = 5$; $[360, 500, 675] = 27000$. **4.2.9** а) да; б) нет; в) да. **4.2.10** б) нет.

4.3

4.3.1 а) $x = -7 - 82n$, $y = 3 + 35n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $x = -17 - 65n$, $y = 11 + 42n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $x = -21 - 37n$, $y = 16 + 28n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $x = -9 - 74n$, $y = 7 + 57n$, $n \in \mathbb{Z}$; д) $x = -21 - 31n$, $y = 15 + 22n$, $n \in \mathbb{Z}$; е) нет решений; ж) нет решений; з) $x = -5 - 9n$, $y = 3 + 5n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.3.2** а) $x \equiv 21 (\bmod 82)$; б) $x \equiv 9 (\bmod 24)$; в) $x \equiv 6 (\bmod 45)$; г) $x \equiv 40 (\bmod 64)$; д) $x \equiv 3, 16, 29, 42, 55, 68, 81 (\bmod 91)$; е) $x \equiv 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34 (\bmod 36)$; ж) нет решений; з) нет решений.
4.3.3 а) $x \equiv 173 (\bmod 315)$; б) $x \equiv 178 (\bmod 231)$; в) $x \equiv 97 (\bmod 1155)$; г) $x \equiv 2541 (\bmod 3003)$; д) $x \equiv 353 (\bmod 1001)$; е) $x \equiv 407 (\bmod 600)$;

4.4

4.4.1 *Подсказки:* а) $a + b \equiv [8, 3, 3, 10] (\bmod \beta)$; б) $a + b \equiv [4, 3, 1, 2] (\bmod \beta)$; в) $a + b \equiv [7, 4, 3, 9] (\bmod \beta)$; г) $a - b \equiv [4, 3, 1, 2] (\bmod \beta)$; д) $a - b \equiv [3, 1, 5, 3] (\bmod \beta)$; е) $a - b \equiv [4, 7, 5, 3] (\bmod \beta)$; ж) $2a + 4b \equiv [8, 6, 3, 2] (\bmod \beta)$; з) $3a - 5b \equiv [7, 6, 4, 3] (\bmod \beta)$; и) $6a - 2b \equiv [4, 6, 5, 10] (\bmod \beta)$; к) $3a + 5b \equiv [4, 4, 5, 4] (\bmod \beta)$;
4.4.2 а) $[1, 4, 2, 1]$; б) $[2, 11, 4, 4]$; в) $[2, 3, 4, 4, 2]$; г) $[3, 1, 10, 12]$; д) $[3, 5, 6, 1]$.
4.4.3 а) $[2, 9, 2, 1]$; б) $[1, 5, 4, 8]$; в) $[0, 3, 15, 0]$; г) $[0, 14, 10, 1]$; д) $[9, 2, 9, 1]$.
4.4.4 а) положительный; б) положительный; в) положительный; г) положительный.

К главе 5

5.1

5.1.1 а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

вершины	последователи
1	$1, 2$
2	$1, 3, 4$
3	$4, 5$
4	$3, 4$
5	3

$\overline{m} = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$,
$\overline{n} = (1, 2, 1, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 3)$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

вершины	последователи
1	$2, 4$
2	3
3	$3, 4, 5$
4	$1, 3, 4$
5	$3, 4, 5$

$\overline{m} = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5)$,
$\overline{n} = (2, 4, 3, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 5)$;

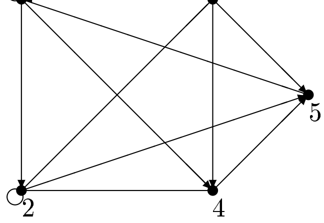
в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

вершины	последователи
1	$2, 4$
2	$1, 2, 3, 4$
3	$2, 3, 5$
4	$1, 2, 5, 6$
5	3
6	—

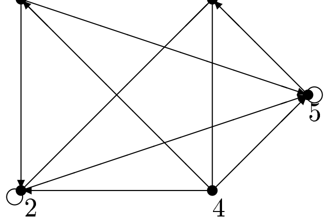
$\overline{m} = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5)$,
$\overline{n} = (2, 4, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 1, 2, 5, 6, 3)$.

5.1.2 а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

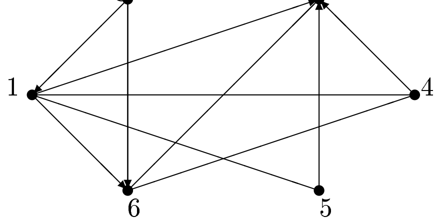
5.1.3. а)



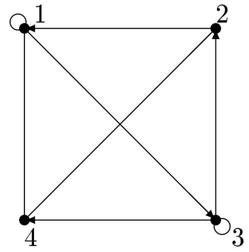
б)



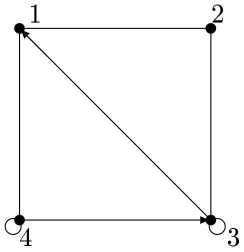
в)



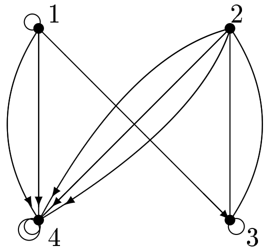
5.1.4. а)



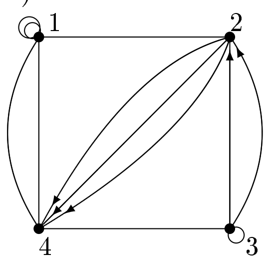
б)



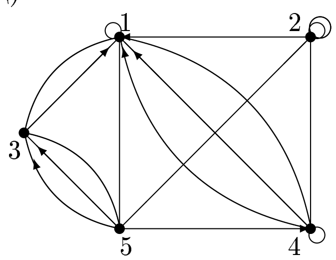
в)



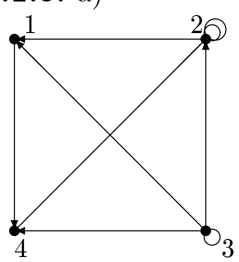
г)



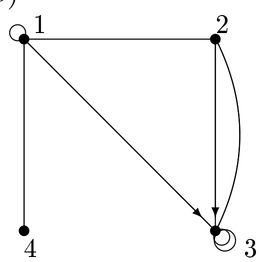
д)



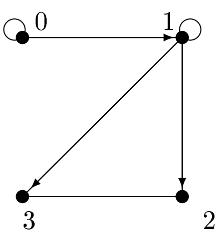
5.1.5. а)



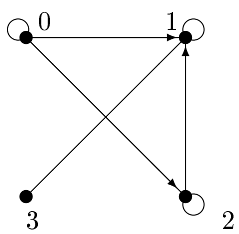
б)



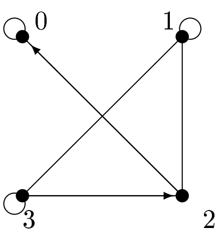
5.1.6. а)



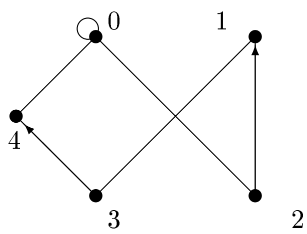
б)



5.1.7. а)



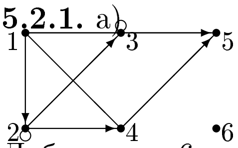
б)



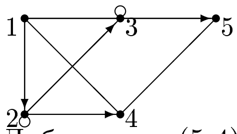
5.1.8 а) да; б) нет; в) нет; г) да. **5.1.9** а) да; б) нет; в) да; г) да.

5.2

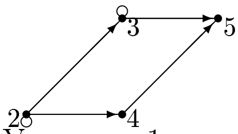
5.2.1. а)



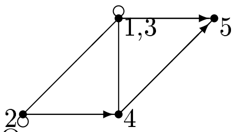
Добавление 6.



Добавление (5,4).

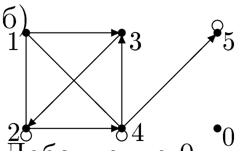


Удаление 1.

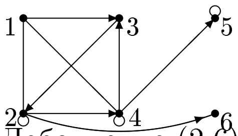


Отождествление 1 и 3.

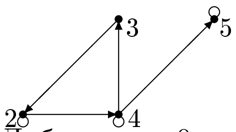
б)



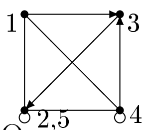
Добавление 0.



Добавление (2,6).

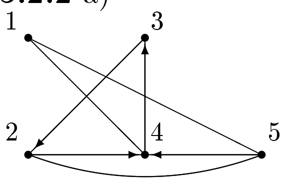


Добавление 0.

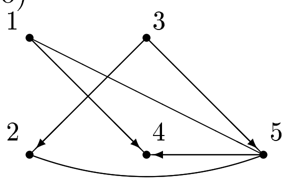


Отождествление 2 и 5.

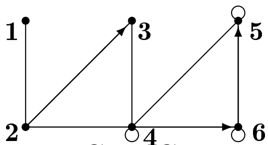
5.2.2 а)



б)

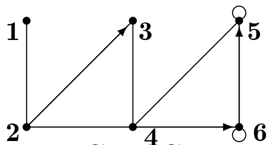


5.2.3. а)

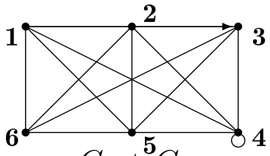


$G_1 \cup G_2$

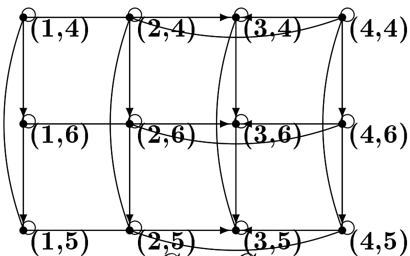
$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$

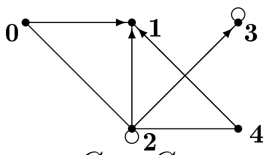


$G_1 + G_2$

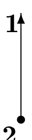


$G_1 \times G_2$

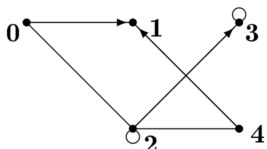
б)



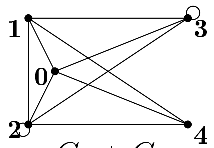
$G_1 \cup G_2$



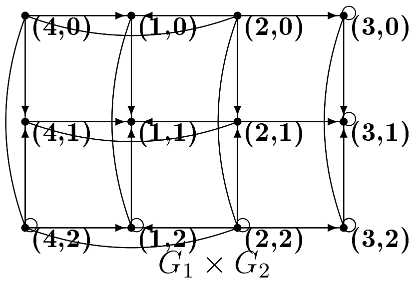
$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$



$G_1 + G_2$



$G_1 \times G_2$

5.3

5.3.3 а)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 3

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 12 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 17 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица компонент сильной связности

б)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица компонент сильной связности

в)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 2

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 2&1&2&3&1\\ 1&1&2&2&1\\ 2&1&2&3&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 3

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 3&2&4&5&2\\ 3&2&3&4&2\\ 3&2&4&5&2\\ 2&1&2&3&1 \end{pmatrix}$$

Матрица маршрутов длины 4

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Матрица компонент сильной связности

5.4

5.4.3 а) $\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$;

5.4.4 а) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

5.5

5.5.3 а) $e(1)=4$, $e(2)=3$, $e(3)=4$, $e(4)=3$, $e(5)=2$, $e(6)=3$, $e(7)=3$, $e(8)=3$, $r(G)=2$, $d(G)=4$; не эйлеров, множество покрывающих цепей: $\{1,4,5,6,3,2,5,8,2;\ 4,7,8\}$; б) $e(1)=4$, $e(2)=3$, $e(3)=4$, $e(4)=3$, $e(5)=2$, $e(6)=3$, $e(7)=4$, $e(8)=3$, $r(G)=2$, $d(G)=4$; эйлеров, множество покрывающих цепей: $\{1,2,5,4,3,8,4,7,8,5,6,1\}$; в) $e(1)=3$, $e(2)=3$, $e(3)=3$, $e(4)=3$, $e(5)=3$, $e(6)=3$, $e(7)=3$, $e(8)=3$, $r(G)=2$, $d(G)=3$; не эйлеров, множество покрывающих цепей: $\{1,6,7,5,2,4,8,1,3,7;\ 4,6\}$; г) $e(1)=4$, $e(2)=4$, $e(3)=4$, $e(4)=3$, $e(5)=3$, $e(6)=3$, $e(7)=4$, $e(8)=3$, $r(G)=3$, $d(G)=4$; не эйлеров, множество покрывающих цепей: $\{2,6,1,4,5,8,7,3,9,5,6\}$. **5.5.4** а) 2; б) 2. **5.5.5** 1; 2.
5.5.6 а) нет; б) да; в) нет; г) нет. **5.5.7** $n=1$.

К главе 6

6.1

6.1.1 Обозначим формулу из условия задачи через φ.

а)

x	y	φ
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

;

б)

x	y	φ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

;

в)

x	y	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

;

г)

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

;

д)

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

;

е)

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

.

6.1.2 а) да; б) нет; в) нет; г) нет. **6.1.3** а) нет, $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 2\}$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 3\}$;

б) да; в) нет, $A=\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|\leqslant 1\}$, $B=\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|\leqslant 2\}$, $C=\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|\leqslant 3\}$; г) нет, $A=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n$ делится на $2\}$, $B=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n$ делится на $3\}$, $C=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n$ делится на $5\}$; д) да; е) да.

6.2

6.2.1 а) $\overline{x}\vee y\vee\overline{z}$; б) $x\vee\overline{y}z\vee y\overline{z}$; в) $\overline{x}yz\vee x\overline{y}\vee x\overline{z}$; г) $x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}y\vee\overline{x}z$; д) $\overline{x}\vee y$; е) $\overline{x}z\vee yzx$; ж) $x\overline{y}z$. **6.2.2** а) $\overline{x}\vee\overline{y}\vee z$; б) yz; в) $\overline{x}\vee y\vee z$; г) $(\overline{x}\vee y)(\overline{x}\vee z)(\overline{y}\vee z)$; д) $(x\vee y\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})$; е) $(x\vee\overline{y})(\overline{y}\vee\overline{z})$. **6.2.3** а) $xy\vee\overline{x}y\vee\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}\vee y$; б) СДНФ не существует, $(x\vee y)(\overline{x}\vee y)\ (x\vee\overline{y})(\overline{x}\vee\overline{y})$; в) $\overline{x}y\vee x\overline{y}\vee\overline{x}\,\overline{y}$, $x\vee y$; г) $xy\overline{z}\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}z\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $(\overline{x}\vee y\vee\overline{z})(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z})$; д) $xyz\vee xy\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}z\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, СКНФ не существует; е) $xy\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}\,\overline{y}z\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $(x\vee\overline{y}\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z})$.
6.2.4 а) $\overline{x}\,\overline{y}z$; б) $xy\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$; в) $xyz\vee x\overline{y}z\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}z\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$;

г) $xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$. **6.2.5** а) $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)$; б) $(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; в) $(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; г) $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)$ $(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

6.3

6.3.1 а) тупиковая и минимальная: $\overline{x} \vee z$; б) тупиковые и минимальные: $\overline{x}\,\overline{z} \vee xz \vee y\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{z} \vee xz \vee xy$; в) тупиковая и минимальная: $\overline{x}y\overline{z} \vee yt \vee xz$; г) тупиковая и минимальная $xy \vee t$. **6.3.2** а) минимальная и тупиковая: $\overline{x}z$; б) минимальные и тупиковые: $(\overline{x} \vee z)(\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{z})$, $(\overline{x} \vee z)(y \vee \overline{z})(x \vee \overline{z})$; в) минимальная и тупиковая: $(\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{y} \vee \overline{t})(\overline{x} \vee \overline{z} \vee t)$; г) $(\overline{x} \vee \overline{z})(x \vee z)(y \vee t)$. **6.3.3** а) тупиковые и минимальные: $xz \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}$, $xz \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee x\overline{y}$; б) тупиковые: $\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}z \vee xz \vee y\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y} \vee y\overline{z} \vee xy \vee \overline{y}z$, $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee xz$, $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee \overline{y}z$, $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee xz \vee y\overline{z}$, тупиковые и минимальные: $\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}z \vee xy$, $\overline{x}\,\overline{y} \vee y\overline{z} \vee xz$; в) тупиковая и минимальная: $x\overline{t} \vee yt \vee \overline{x}\,\overline{z}t$; г) тупиковая и минимальная: $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}t \vee x\overline{t} \vee xz \vee yz$.
6.3.4 а) тупиковые и минимальные: $(\overline{x} \vee z)(x \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y})$, $(\overline{x} \vee z)(x \vee \overline{z})(\overline{y} \vee \overline{z})$; б) тупиковые и минимальные: $(\overline{y} \vee z)(y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y})$, $(\overline{y} \vee z)(y \vee \overline{z})(x \vee \overline{z})$; в) тупиковая и минимальная: $(\overline{x} \vee \overline{t})(\overline{z} \vee t)$, г) тупиковая и минимальная: $(x \vee \overline{z} \vee t)(\overline{x} \vee y \vee z)(z \vee \overline{t})(\overline{y} \vee \overline{z})$.
6.3.5 а) $P(x, y) = xy$; б) $P(x, y) = x \vee y$.

6.4

6.4.1 а) $xyz \oplus xz \oplus x \oplus 1$; б) $xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y$; в) $xy \oplus yz \oplus x \oplus y$; г) xz.
6.4.2 а) да, да; б) да, да; в) нет; г) да, да; д) да, нет; е) нет; ж) да, нет; з) да, нет.
6.4.3 $\overline{(P_0 \cup P_1)} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$.

Библиографический список

[1] *Асс П. Н., Бегемотов Н. О.* Штирлиц или Как размножаются ежики — Л.: Наука, 1990.

[2] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.

[3] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.

[4] *Порошенко Е. Н. Чехонадских А. В.* Дискретная математика. — Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2010.

[5] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Элементы дискретной математики. — Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2012.

[6] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику — М.: Наука, 1979.

Оглавление

Предисловие **3**

Список обозначений **5**

1 Элементы теории множеств **8**

1.1 Множества и операции над ними 8
1.2 Отношения и функции 11
1.3 Матрицы бинарных отношений. Специальные бинарные отношения 17
1.4 Эквивалентности и порядки 22
1.5 Изоморфизмы частично упорядоченных множеств 29
1.6 Метод математической индукции 31
1.7 Мощность множеств 33

2 Алгебраические системы **38**

2.1 Определение алгебраических систем. Алгебры. Группы . 38
2.2 Таблицы Кэли 41
2.3 Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраических систем . 44
2.4 Подсистемы 46

3 Дистрибутивные решетки и булевы алгебры **52**

4 Числовые системы **57**

4.1 Системы счисления 57
4.2 Делимость. Алгоритм Евклида 58
4.3 Линейные диофантовы уравнения. Сравнения 60
4.4 Многомодульная арифметика 65

5 Теория графов **73**

5.1 Способы задания графов. Изоморфизмы графов 73
5.2 Операции над графами 80

5.3 Маршруты. Достижимость. Связность 84
5.4 Остовы. Фундаментальные циклы. Фундаментальные разрезы 85
5.5 Расстояния в графах. Эйлеровы графы. Планарные графы 89

6 Алгебра логики 94
6.1 Формулы алгебры логики. Таблицы истинности. Эквивалентность 94
6.2 ДНФ и КНФ. СДНФ и СКНФ 97
6.3 Тупиковые и минимальные ДНФ и КНФ 101
6.4 Полином Жегалкина. Полные системы функций 104

Ответы 107
Библиографический список 125